STAGE

UTILISATION DES ANALOGIES EN PHYSIQUE

ELEMENTS DE CALCUL OPERATIONNEL

6 janvier 1992–10 janvier 1992

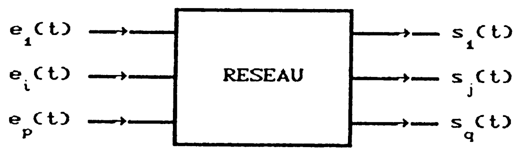
TABLE DES MATIERES

* * *

TRANSFORMEE DE LAPLACE

INTRODUCTION

Considérons un réseau électrique linéaire que l'on peut représenter sous la forme du chéma bloc suivant :



On sait que les *q* grandeurs de sortie (courants ou tensions) sont alors liées aux *p* grandeurs d'entrée (courants ou tensions) par le biais d'un système d'équations différentielles linéaires par rapport au temps. Se pose alors le problème de la résolution de ce système, c'est-à-dire par exemple trouver l'ensemble des grandeurs de sortie connaissant celles d'entrée.

Afin d'introduire la philosophie qui présidera à l'utilisation de la transformée de Laplace, supposons que l'on soit dans le cas où tous les signaux sont sinusoïdaux et de même pulsation ω. On dispose alors d'une méthode de résolution (méthode harmonique) dont le principe est le suivant : à toute grandeur sinusoïdale du type $x(t) = \hat{X}.\cos(\omega t+\phi)$ on associe la grandeur complexe :

$$\underline{X} = \hat{X}.e^{j(\omega t+\phi)} = \underline{\hat{X}}e^{j\omega t}.$$

Cette "transformation" trouve son intérêt dans le fait que l'on peut associer à la dérivée d'ordre n de la grandeur x(t) la grandeur complexe suivante :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow (j\omega)^n\underline{X}$$

Ainsi, toute dérivation temporelle d'une grandeur revient à multiplier la grandeur complexe associée par $(j\omega)$, toute intégration temporelle revenant par ailleurs à diviser $\underline{X}$ par le facteur $(j\omega)$.

Supposons maintenant, pour simplifier, que le problème se résume à une seule équation différentielle linéaire liant une grandeur d'entrée et une grandeur de sortie et que l'on ait donc :

$$a_n\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \dots + a_2\frac{d^2 e(t)}{dt^2} + a_1\frac{de(t)}{dt} + a_0 e(t) = \dots$$
$$\dots = b_m\frac{d^m s(t)}{dt^m} + \dots + b_2\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1\frac{ds(t)}{dt} + b_0 s(t)$$

"En passant par les complexes", on peut associer à l'équation précédente celle qui suit (après avoir simplifié par $e^{j\omega t}$) :

$$\underline{\hat{E}}\left[a_n(j\omega)^n + \dots a_1(j\omega) + a_0\right] = \underline{\hat{S}}\left[b_m(j\omega)^m + \dots + b_1(j\omega) + b_0\right]$$

Ainsi, connaissant par exemple $\underline{\hat{E}}$, on obtiendra $\underline{\hat{S}}$ sous forme d'une fraction rationnelle $\underline{F}(j\omega)$ multipliée par $\underline{\hat{E}}$. En posant alors $\underline{\hat{S}} = \hat{S}.e^{j\varphi}$, on obtient :

$$\hat{S} = |\underline{F}(j\omega)|\hat{E} \qquad \varphi = \arg[\underline{F}(j\omega)] + \arg[\underline{\hat{E}}]$$

ce qui nous donne donc la valeur maximale et la phase à l'origine de s(t) par rapport à e(t), c'est-à-dire en définitive l'expression sinusoïdale de s(t).

Pour nous résumer, on constate donc que le fait de "passer par les complexes", c'est-à-dire d'effectuer une certaine transformation, a permis de déterminer relativement aisément s(t) connaissant e(t), **à condition toutefois que les fonctions soient toutes sinusoïdales et de même pulsation** ω, condition nécessaire pour que la dite méthode soit applicable.

Or, dans la pratique, **les signaux ne varient pas nécessairement sinusoïdalement dans le temps.** Par ailleurs, les fonctions sinusoïdales utilisées dans la méthode harmonique sont supposées être définies sur l'ensemble temporel $]-\infty,+\infty[$. Mais l'infini est de fait inaccessible en physique, et la méthode harmonique ne peut prétendre donner des résultats utilisables qu'en **régime établi**, c'est-à-dire sur une longue durée, bien après la mise en place des grandeurs d'entrée et avant leur retrait. En d'autres termes, cette méthode ne donne pas de renseignement sur ce qui se passe durant les **régimes transitoires** (juste après mise sous tension d'un circuit par exemple).

Certes, pour le cas de signaux quelconques, il serait envisageable de tenter de résoudre directement le système linéaire : mais d'une part ce n'est pas toujours possible et d'autre part c'est en général très fastidieux.

Aussi va-t-on utiliser une méthode qui généralise en quelque sorte la méthode harmonique (qui est elle-même un dérivé de la méthode dite de la *Transformée de Fourier*) en utilisant l'outil mathématique suivant : *la transformée de Laplace*[1].

Disons d'emblée que cette méthode très générale permet de résoudre des problèmes en matière par exemple :

— de réseaux électriques linéaires ;
— d'asservissements ;
— d'électromagnétisme (effet de peau) ;
— de mécanique (réponse de systèmes linéaires) ;
— d'optique physique (filtrage).

Cette liste n'est pas exhaustive.

---

[1] Méthode due à l'astrono-mathématico-physicien français Pierre Simon Laplace (1749-1827) à qui l'on doit d'importants travaux dans le domaine des probabilités (loi des grands nombres), en acoustique (expression de la vitesse du son), en thermodynamique (étude des processus adiabatiques), en électromagnétisme (forces de Laplace), en mécanique (potentiel, laplacien) et en astronomie (cosmogonie du système solaire).

I/ DEFINITION DE LA TRANSFORMEE DE LAPLACE

I.1) Expression

Considérons la fonction temporelle suivante :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{f} & \mathbb{C} \\ t & \longrightarrow & f(t) \end{array}$$

En supposant que f(t) soit continue, on appelle *transformée de Laplace de la fonction* f(t), *la fonction de la variable complexe* p *définie par*[2] :

$$\boxed{t \in \mathbb{R}^+,\ p \in \mathbb{C},\quad F(p) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt}$$

On adoptera les expressions suivantes :

— *F(p) est l'image de f(t)* ;

— *f(t) est l'original de F(p)*, cette dernière expression se traduisant symboliquement par[3] :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

Cette dernière écriture exprime le fait que f(t) est la transformée inverse de F(p)[4].

---

[2] Dans les ouvrages anglosaxons, le paramètre p est noté s.

[3] On pourra aussi trouver les notations suivantes :

$$F(p) \subset f(t) \quad \text{pour } F(p) = \mathcal{L}[f(t)]$$
$$f(t) \supset F(p) \quad \text{pour } f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$$

[4] Il est possible de calculer directement f(t) à partir de la formule de Mellin-Fourier :

$$f(t) = \frac{1}{2j\pi}\int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{pt}ds$$

l'intégration se faisant dans le plan complexe le long d'une droite parallèle à l'axe imaginaire. En théorie des réseaux électriques, il est peu probable que nous ayons à faire à cette formule, d'autres procédés existant permettant de trouver l'original à partir de l'image.

— f(t) est du *domaine temps* et F(p) du *domaine p*[5].

On pourra enfin décomposer p en partie réelle et en partie imaginaire sous la forme :

$$p = \sigma + j\omega$$

σ ou ω pouvant éventuellement être nuls. Quand σ est nul et que l'on a donc $p = j\omega$, on obtient la *transformée de Fourier* de la fonction f(t).

I.2) Conditions d'existence de la transformée de Laplace

Les conditions d'existence à la transformée de Laplace sont liées aux conditions de convergence de l'intégrale et sont donc les suivantes :

— f(t) doit être continue sur $\mathbb{R}^+$;

— f(t) doit être **d'ordre exponentiel**, c'est-à-dire que :

$\exists\ \alpha \in \mathbb{R}^+ / \ \forall x \in\ ]\alpha,+\infty[,\ \forall t \in \mathbb{R}^+$, la fonction $|f(t)|.e^{-xt}$ est intégrable sur l'intervalle en t $[0,+\infty[$.

Il faudra alors que la partie réelle de p soit supérieure à α pour que la transformée de Laplace soit convergente : α est appelée **abscisse de convergence**..

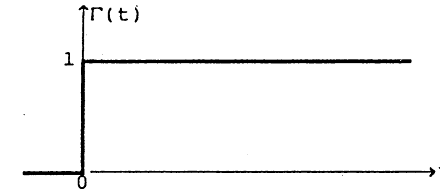
Les conditions précédentes seront en général remplies pour les problèmes que l'on aura à traiter en physique.

I.3) Echelon de Heaviside

Les fonctions que l'on aura à étudier seront ainsi nulles pour $t < 0$ et non nulles au-delà. Pour représenter analytiquement ces fonctions, on utilise l'échelon unité de Heaviside $\Gamma(t)$, défini de la manière suivante :

[5] Dans la suite, nous ne considérerons que la variable temps. Mais rien n'empêche d'utiliser d'autres variables pour le domaine original, comme les variables d'espace ou encore des variables du type $x \mp ct$ (propagation).

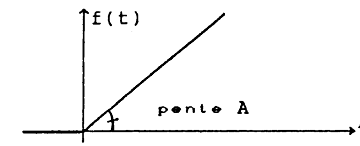
$$t < 0 : \Gamma(t) = 0, \quad t \geq 0 : \Gamma(t) = 1$$



$t < 0 : \Gamma(t) = 0$

$t \geq 0 : \Gamma(t) = 1$

Par exemple, la fonction rampe croissante aura pour expression :



$$f(t) = A.t.\Gamma(t)$$

II/ OPERATIONS SUR LES TRANSFORMEES DE LAPLACE

II.1) Linéarité

La transformée de Laplace s'effectuant à l'aide d'une intégration, opération linéaire, il est aisé de montrer que :

$$\boxed{\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \quad \mathcal{L}[\lambda.f(t) + \mu.g(t)] = \lambda.\mathcal{L}[f(t)] + \mu.\mathcal{L}[g(t)]}$$

La transformée de Laplace d'une combinaison linéaire de fonctions temporelles est égale à une combinaison linéaire identique des transformées de chacune des fonctions.

Réciproquement, on aura également :

$$\boxed{\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2, \quad \mathcal{L}^{-1}[\lambda.F(p) + \mu.G(p)] = \lambda.\mathcal{L}^{-1}[F(p)] + \mu.\mathcal{L}^{-1}[G(p)]}$$

II.2) Dérivation - Intégration

II.2.a) Image d'une dérivée

Pour la dérivation temporelle, nous utiliserons au besoin la notation de Newton, à savoir que l'on posera :

$$\frac{df}{dt} = \dot{f}, \ \frac{d^2f}{dt^2} = \ddot{f}, \text{ etc...}$$

Cherchons la transformée de $\dot{f}$:

$$\mathcal{L}(\dot{f}) = \int_0^\infty \dot{f}(t).e^{-pt}dt$$

Intégrons cette expression par parties, en posant $du = \dot{f}.dt = df$ et $v = e^{-pt}$:

$$\mathcal{L}[\dot{f}] = \left[f.e^{-pt}\right]_0^\infty + p\int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt = -f(0) + p.\mathcal{L}[f]$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\dot{f}] = p.\mathcal{L}[f] - f(0)}$$

En posant alors $f = \dot{g}$, on a :

$$\mathcal{L}[\dot{g}] = p.\mathcal{L}[g] - g(0) \Rightarrow$$

$$\mathcal{L}[\ddot{f}] = p.\mathcal{L}[\dot{f}] - \dot{f}(0) = p^2\mathcal{L}[f] - p.f(0) - \dot{f}(0)$$

Par récurrence, on peut donc écrire :

$$\boxed{\mathcal{L}[\overset{(n)}{f}] = p^n\mathcal{L}[f] - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}\dot{f}(0) - \ldots - \overset{(n-1)}{f}(0)}$$

II.2.b) Image d'une intégrale

Soit donc la fonction :

$$I(t) = \int_0^t f(u).du$$

Pour trouver l'image de g(t), on peut utiliser le résultat obtenu dans le paragraphe précédent, sachant que :

$$\dot{I}(t) = f(t) \Rightarrow \mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[\dot{I}] = p.\mathcal{L}[I] - I(0) = p.\mathcal{L}[I]$$

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t f(u).du\right] = \frac{\mathcal{L}[f]}{p}}$$

Il suffira donc de multiplier l'image par p^{-1} à chaque intégration successive.

II.2.c) Originale d'une dérivée

Notons :

$$F'(p) = \frac{dF}{dp}$$

Nous admettrons que l'on peut faire entrer la dérivation suivant p dans le signe somme et il vient alors :

$$F'(p) = \int_0^\infty \frac{d}{dp}\left(f(t).e^{-pt}\right)dt = \int_0^\infty -t.f(t).e^{-pt}dt$$

On peut donc en conclure que :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F'(p)] = -t.f(t) \quad \text{ou} \quad \mathcal{L}[t.f(t)] = -F'(p)}$$

De même on aura :

$$F''(p) = \int_0^\infty \frac{d^2}{dp^2}\left(f(t).e^{-pt}\right)dt = \int_0^\infty t^2 f(t).e^{-pt}dt$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F''(p)] = t^2 f(t)$$

et par récurrence, il vient :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{L}^{-1}[F'^{(n)}] = (-1)^n t^n f(t) \\ \text{ou} \\ \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \dfrac{d^nF(p)}{dp^n}\end{array}}$$

II.3) Translation - Homothétie

II.3.a) Image d'une translatée

Posons $f_\tau(t) = f(t-\tau)$, τ étant un réel positif : on appelle cette fonction translatée de f(t). Cherchons sa transformée :

$$\mathcal{L}[f_\tau] = \int_0^\infty f(t-\tau).e^{-pt}dt$$

Faisons le changement de variables : $u = t-\tau$

$$\mathcal{L}[f_\tau] = \int_{-\tau}^\infty f(u).e^{-p(u+\tau)}du$$

Comme par hypothèse f(u) est nulle pour les valeurs négatives de u, on a : $\mathcal{L}[f_\tau] = e^{-p\tau}\int_0^\infty f(u).e^{-pu}du = e^{-p\tau}\mathcal{L}[f]$

$$\boxed{\mathcal{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}\mathcal{L}[f]}$$

II.3.b) Originale d'une tranlatée

Considérons $F_\alpha(p) = F(p-\alpha)$ où α est un nombre complexe :

$$F(p-\alpha) = \int_0^\infty f(t).e^{-(p-\alpha)t}dt = \mathcal{L}[f_\tau] = \int_0^\infty \left[e^{\alpha t}f(t)\right]e^{-pt}dt$$

Soit donc :

$$\boxed{\begin{array}{c}\mathcal{L}^{-1}[F(p-\alpha)] = e^{\alpha t}f(t) \\ \text{ou} \\ \mathcal{L}[e^{\alpha t}f(t)] = F(p-\alpha)\end{array}}$$

II.3.c) Homothétie

Cherchons la transformée de f(k.t) où k est un réel strictement positif :

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \int_0^\infty f(kt).e^{-pt}dt$$

Effectuons le changement de variable u = k.t ; il vient alors :

$$\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\int_0^\infty f(u).e^{-pu/k}du$$

Soit :

$$\boxed{\mathcal{L}[f(kt)] = \frac{1}{k}\cdot F(\frac{p}{k})}$$

On montre à partir de là immédiatement que :

$$\boxed{\mathcal{L}^{-1}[F(kp)] = \frac{1}{k}\cdot f(\frac{t}{k})}$$

II.4) Produit de convolution

II.4.a) Définition

Le produit de convolution entre deux fonctions f(t) *et* g(t) *à valeurs non nulles uniquement sur* $\mathbb{R}^+$ *est définie par :*

$$\boxed{c(t) = f * g = \int_0^t f(t-u).g(u).du}$$

Compte tenu du fait que f(t) et g(t) sont nulles sur $\mathbb{R}^-$, on a également :

$$f * g = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-u).g(u).du$$

En effectuant un changement de variables, on montre aisément que le produit de convolution est commutatif :

$$f * g = g * f$$

II.4.b) Théorème de Borel

Cherchons la transformée d'un produit de convolution :

$$\mathcal{L}[c(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}dt\int_0^t f(t-u)g(u)du$$

Or les fonctions f(t) et g(t) étant nulles pour t < 0, on a :

$$\int_0^t f(t-u)g(u)du = \int_0^\infty f(t-u)g(u)du$$

On admettra alors que l'on peut permuter l'ordre d'intégration et il vient donc :

$$\mathcal{L}[c(t)] = \int_0^\infty g(u)du\int^\infty f(t-u)e^{-pt}dt$$

En utilisant le résultat du II.3.1) sur l'image d'une translatée, on obtient :

$$\mathcal{L}[c(t)] = \int_0^\infty g(u)du.e^{-pu}F(p) = F(p)\int_0^\infty g(u)e^{-pu}du = F(p).G(p)$$

$$\boxed{\mathcal{L}[f*g] = F(p).G(p)}$$

Théorème de Borel : **La transformée de Laplace d'un produit de convolution entre deux fonctions est égale au produit des transformées des fonctions.**

III/ CALCUL DES TRANSFORMEES DE LAPLACE USUELLES

III.1) Echelon de Heaviside

On a donc (la partie réelle de p, $\mathcal{R}(p)$, étant positive pour assurer la convergence) :

$$\mathcal{L}[\Gamma(t)] = \int_0^\infty e^{-pt}dt = \left[\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\Gamma(t)] = \frac{1}{p} \text{ avec } \mathcal{R}(p) > 0}$$

Si l'échelon a une amplitude A, il suffira de multiplier la transformée par A (linéarité).

La primitive d'un échelon de Heaviside est une rampe t.Γ(t). En utilisant le résultat du II.2.b), il vient donc :

$$\mathcal{L}[t.\Gamma(t)] = \frac{1}{p^2}$$

et par récurrence, on aura donc :

$$\boxed{\mathcal{L}[t^n\Gamma(t)] = \frac{n!}{p^{n+1}} \text{ avec } \mathcal{R}(p) > 0}$$

A noter que l'on aurait pu aussi trouver ce résultat en cherchant l'original de la nème dérivée de p^{-1} (cf II.2.c) :

$$\mathcal{L}[t^n\Gamma(t)] = (-1)^n\frac{d^n[p^{-1}]}{dp^n} = (-1)^{2n}\frac{n!}{p^{n+1}}$$

En combinant linéairement les résultats précédents, on peut donc obtenir la transformée d'un polynome quelconque en temps :

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\sum_{k=0}^{k=n} a_k t^k\Gamma(t)\right] = \sum_{k=0}^{k=n} a_k\left[\frac{k!}{p^{k+1}}\right] \text{ avec } \mathcal{R}(p) > 0}$$

Si nous retardons de τ l'échelon d'Heaviside, il vient :

$$\mathcal{L}[\Gamma(t-\tau)] = e^{-p\tau}\mathcal{L}[\Gamma(t)] = \frac{e^{-p\tau}}{p}$$

Inversement, s'il y a translation de l'image, on a (cf II.3.b) :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p-\alpha}\right] = e^{\alpha t}\Gamma(t)$$

ou bien $$\boxed{\mathcal{L}\left[e^{\alpha t}\Gamma(t)\right] = \frac{1}{p-\alpha} \text{ avec } \mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(\alpha)}$$

En utilisant le résultat sur les dérivées (cf II.2.c), il vient :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(p-\alpha)^2}\right] = t.e^{\alpha t}\Gamma(t)$$

ou encore $$\boxed{\mathcal{L}\left[t.e^{\alpha t}\Gamma(t)\right] = \frac{1}{(p-\alpha)^2} \text{ avec } \mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(\alpha)}$$

III.2) Fonctions exponentielles

On a donc vu précédemment que :

$$\mathcal{L}[e^{\alpha t}\Gamma(t)] = \frac{1}{p-\alpha}$$

où α est un nombre complexe. On a donc de même :

$$\mathcal{L}[e^{-\alpha t}\Gamma(t)] = \frac{1}{p+\alpha}$$

Si $\alpha = \omega$ où ω est réel et si $\mathcal{R}(p) > |\omega|$, on a donc :

$$\mathcal{L}[\Gamma(t).\mathrm{Ch}(\omega t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} + \frac{1}{p+\omega}\right) = \boxed{\frac{p}{p^2-\omega^2} = \mathcal{L}[\Gamma(t).\mathrm{Ch}(\omega t)]}$$

$$\mathcal{L}[\Gamma(t).\mathrm{Sh}(\omega t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega} - \frac{1}{p+\omega}\right) = \boxed{\frac{\omega}{p^2-\omega^2} = \mathcal{L}[\Gamma(t).\mathrm{Sh}(\omega t)]}$$

Si maintenant on pose $\alpha = j\omega$ où ω est réel, il vient :

$$\mathcal{L}[\Gamma(t).\cos(\omega t)] = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-j\omega} + \frac{1}{p+j\omega}\right) = \boxed{\frac{p}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}[\Gamma(t).\cos(\omega t)]}$$

$$\mathcal{L}[\Gamma(t).\sin(\omega t)] = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) = \boxed{\frac{\omega}{p^2+\omega^2} = \mathcal{L}[\Gamma(t).\sin(\omega t)]}$$

Ces formules présupposent alors que $\mathcal{R}_e(p)$ est supérieure à zéro.

Supposons maintenant que l'on ait une sinusoïde amortie ($\lambda \in \mathbb{R}^+$) :

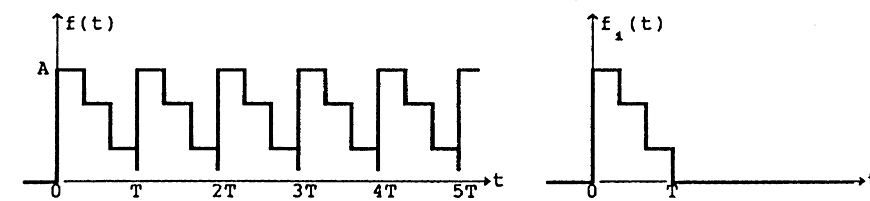
$$\mathcal{L}[\Gamma(t)e^{-\lambda t}\sin(\omega t)] = \frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}$$

ce d'après le II.3.b). Plus généralement, on a ($\alpha \in \mathbb{C}$ et $\mathcal{R}(p) > \mathcal{R}(\alpha)$) :

$$\boxed{\begin{aligned}\mathcal{L}[\Gamma(t)e^{\alpha t}\sin(\omega t)] &= \frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\\ \mathcal{L}[\Gamma(t)e^{\alpha t}\cos(\omega t)] &= \frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}\end{aligned}}$$

III.3) Cas des fonctions périodiques

Considérons maintenant une fonction f(t) non nulle uniquement sur $\mathbb{R}^+$, périodique de période T. Soit alors la fonction $f_1(t)$ définie comme étant la restriction de f(t) sur la première période :



On peut alors écrire que :

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t-T) + f_1(t-2T) + \ldots =$$
$$f(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} f_1(t-kT)$$

En utilisant alors le théorème sur le décalage temporel, la transformée F(p) de f(t) peut ainsi s'écrire :

$$F(p) = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-pkT}\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt}dt = \left(\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-pkT}\right)\int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt}dt$$

Le terme entre parenthèses est une série géométrique de raison e^{-pT} et dont la somme vaut :

$$\left(\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-kpT}\right) = \frac{1}{1 - e^{-pT}}$$

On a donc :

$$\boxed{F(p) = \frac{F_1(p)}{1 - e^{-pT}} \quad \text{avec } F_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-pt}dt = \int_0^{T} f(t)e^{-pt}dt}$$

Le terme $(1-e^{-pT})^{-1}$ représente en quelque sorte la signature du fait que la fonction est sinusoïdale.

IV/ THEOREMES AUX LIMITES

IV.1) Théorème de la valeur initiale

Nous avons vu que la transformée d'une dérivée a pour expression :

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-pt}dt = p.F(p) - f(0)$$

En supposant que p est ici réel, on sait que :

$$p \in \mathbb{R} \quad \lim_{p \to +\infty} \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-pt}dt = 0$$

Et donc, f(0) étant une constante, on a :

$$\boxed{f(0) = \lim_{p \to +\infty} \left(p.F(p)\right)}$$

C'est l'expression du théorème de la valeur initiale qui nous permettra d'atteindre celle-ci lorsque il y aura difficulté à l'atteindre directement. Par exemple, pour la fonction de Heaviside, on a immédiatement :

$$\Gamma(0) = 1$$

IV.2) Théorème de la valeur finale

Reprenons l'expression de la transformée de la dérivée :

$$\mathcal{L}[\dot{f}(t)] = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-pt}dt = p.F(p) - f(0)$$

Si l'on fait tendre p vers zéro maintenant, on a :

$$\lim_{p \to 0} \int_0^{\infty} \dot{f}(t)e^{-pt}dt = \int_0^{\infty} \dot{f}(t)dt = f(\infty) - f(0)$$

D'où l'on a :

$$\boxed{f(\infty) = \lim_{p \to 0} \left(p.F(p)\right)}$$

C'est l'expression du théorème de la valeur finale, utile pou déterminer l'évolution finale d'une grandeur.

* * *

CALCUL OPERATIONNEL

Le calcul opérationnel fut introduit de façon relativement empirique et intuitive en 1892 par le physico-mathématicien anglais Olivier Heaviside (1850-1925)[1] et ce à partir des règles de calcul suivantes :

- l'intégration d'une fonction temporelle f(t) se traduit par la division par p de son image F(p) ;
- la dérivation d'une fonction temporelle se traduit par la multiplication par p de son image.

Les mathématiciens, sur la base du formalisme de la transformation de Laplace, précisèrent par la suite les conceptions de Heaviside tout en les généralisant par le calcul dit *symbolique*. Nous n'étudierons ici que le calcul opérationnel dans l'optique de son utilisation en théorie des réseaux électriques.

I/ PRINCIPE DU CALCUL OPERATIONNEL

Considérons l'exemple suivant qui va nous permettre d'illustrer la technique du calcul opérationnel. Soit donc l'équation différentielle suivante :

$$a.\ddot{f} + b.\dot{f} + c.f = g(t)$$

où g(t) est une fonction quelconque. Si F(p) et G(p) sont respectivement les transformées de Laplace de la fonction recherchée f(t) et de g(t), on sait que l'on a :

$$\mathcal{L}(\dot{f}) = p.F(p) - f(0) \text{ et } \mathcal{L}(\ddot{f}) = p^2F(p) - p.f(0) - \dot{f}(0)$$

---

[1] On doit à Heaviside d'avoir exprimé l'équation des télégraphistes dans toute sa généralité. C'est lui également qui introduisit la notion d'impédance et qui émit l'hypothèse de l'existence d'une couche atmosphérique ionisée dite ionosphère.

D'où, l'équation étant linéaire et en utilisant la linéarité de la transformation de Laplace, on peut écrire dans le domaine p :

$$a\left[p^2F(p)-p.f(0)-\dot{f}(0)\right] + b\left[p.F(p)-f(0)\right] + c.F(p) = G(p)$$

soit encore :

$$F(p)\left[a.p^2+b.p+c\right] = G(p)+a.p.f(0)+a.\dot{f}(0)+b.f(0)$$

$$\boxed{F(p) = \frac{G(p)+a.p.f(0)+a.\dot{f}(0)+b.f(0)}{a.p^2 + b.p + c}}$$

Connaissant G(p), on pourra alors trouver la solution f(t) de l'équation différentielle en cherchant la transformée inverse de F(p). Le résultat précédent appelle plusieurs remarques :

- on constate que l'expression de F(p) inclut les conditions initiales : l'expression de f(t) obtenue par transformation inverse tiendra donc compte automatiquement de ces conditions initiales.
- le dénominateur de l'expression de F(p) est formellement identique à l'équation dite caractéristique de l'équation différentielle. Une dérivation à l'ordre n de f(t) sera représentée par la puissance n[ème] de p.
- G(p) sera très souvent une fraction rationnelle en p, si bien que F(p) sera elle-même une fraction rationnelle en p. Très souvent, le degré du numérateur de cette fonction sera inférieur à celui du dénominateur.

Exemple

Soit à résoudre l'équation suivante :

$$\ddot{f} - \dot{f} - 6.f = 2.\Gamma(t) \text{ avec } f(0) = 1 \text{ et } \dot{f}(0) = 0$$

où Γ(t) est l'échelon de Heaviside. Dans le domaine p cette équation prend pour expression :

$$F(p)\left[p^2-p-6\right] - \left[p-1\right] = \frac{2}{p}$$

soit :

$$F(p) = \frac{p^2-p+2}{p\left[p^2-p-6\right]}$$

Pour trouver f(t), on décompose alors la fraction rationnelle en éléments simples, soit ici (en sautant les calculs dont nous rappellerons le principe par la suite) :

$$F(p) = \frac{p^2-p+2}{p\left(p^2-p-6\right)} = \frac{p^2-p+2}{p(p-3)(p+2)} = -\frac{1}{3p} + \frac{8}{15(p-3)} + \frac{4}{5(p+2)}$$

En effectuant la transformée inverse, il vient :

$$\underline{f(t) = \left(-\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t}\right)\Gamma(t)}$$

Bien sûr, ce résultat aurait pu être obtenu par un calcul direct mais il faut remarquer que la méthode devient particulièrement efficiente d'une part pour des fonctions g(t) plus complexes et d'autre part pour des équations linéaires d'ordre supérieur ou pour des systèmes d'équations linéaires. Par ailleurs, les conditions initiales sont automatiquement intégrées au résultat.

II/ RAPPELS SUR LA DECOMPOSITION DES FRACTIONS RATIONNELLES

II.1) Position du problème

Comme il a été dit précédemment, on aura souvent à déterminer l'original d'une fraction rationnelle du type :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$$

où N(p) et D(p) sont des polynômes en p. Très souvent encore, le degré de N(p) sera inférieur à celui de D(p)[2] : nous supposerons ici que ce sera le cas. On sait alors que l'on peut décomposer la fraction rationnelle en éléments simples dont on connait les originaux. En effet, l'on a :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{p-\alpha}\right) = e^{\alpha t}\Gamma(t) \text{ et } \mathcal{L}\left(\frac{1}{(p-\alpha)^n}\right) = \frac{e^{\alpha t}t^{n-1}\Gamma(t)}{(n-1)!}$$

Les racines de D(p) sont appelées **pôles** de F(p), celles de N(p) étant les **zéros** de F(p).

---

[2] Si tel n'était pas le cas, F(p) présenterait alors une partie entière E(p) qui est un polynôme traduisant l'existence de discontinuités comme on le verra dans le chapitre suivant.

II.2) Cas où tous les pôles sont réels et simples

II.2.a) Méthode générale

Soit par exemple la fraction rationnelle :

$$F(p) = \frac{p-1}{p^2+3p+2}$$

Les pôles de cette fraction sont -1 et -2 et donc l'on a :

$$F(p) = \frac{p-1}{(p+1)(p+2)}$$

On sait alors que l'on peut décomposer cette fraction sous la forme suivante :

$$F(p) = \frac{A}{(p+1)} + \frac{B}{(p+2)}$$

Pour trouver A et B on peut procéder de deux manières :

— soit réduire au même dénominateur et identifier les termes du numérateur de même degré :

$$A(p+2) + B(p+1) = (A+B)p + (2A+B) = p-1 \Rightarrow$$

$$A+B = 1 \text{ et } 2A+B = -1 \Rightarrow A = -2 \text{ et } B = 3$$

— soit, pour trouver la constante A_k correspondant au pôle p_k, on multiplie la fraction rationnelle par $(p-p_k)$ et on fait $p = p_k$ et l'on a ainsi :

$$A_k = F(p)(p-p_k)\Big|_{p=p_k}$$

Dans le cas présent, on a donc :

$$F(p) = \frac{-2}{(p+1)} + \frac{3}{(p+2)}$$

et donc :

$$\underline{f(t) = (-2.e^{-t} + 3.e^{-2t})\Gamma(t)}$$

II.2.b) Développement de Heaviside

Considérons donc une décomposition en éléments simples lorsque **tous les pôles sont tous simples.** On a donc :

$$F(p) = \frac{N(p)}{D(p)} = \sum_k \frac{A_k}{p-p_k}$$

Nous avons vu que :

$$A_k = \frac{N(p)}{D(p)}(p-p_k)\Big|_{p=p_k}$$

Or on peut écrire le dénominateur sous la forme suivante :

$$D(p) = (p-p_k)R(p)$$

où R(p) représente le produit des autres termes du dénominateur.

On a alors :

$$\frac{dD[p]}{dp} = D'(p) = (p-p_k)R'(p) + R(p)$$

D'où, lorsque $p = p_k$, on a :

$$D'(p_k) = R(p_k)$$

Ainsi :

$$A_k = \frac{N(p)}{D(p)}(p-p_k)\Big|_{p=p_k} = \frac{N(p)}{R(p)}\Big|_{p=p_k} = \frac{N(p_k)}{D'(p_k)}$$

En prenant la transformée inverse, il vient donc :

$$\boxed{f(t) = \Gamma(t)\sum_k \left[\frac{N(p_k)}{D'(p_k)}\right]\exp(p_k t)}$$

C'est la formule du développement de Heaviside à n'utiliser que si les pôles sont tous simples.

II.3) Cas où il existe des pôles multiples

Soit par exemple la fraction rationnelle suivante :

$$F(p) = \frac{1}{p(p^2+6p+9)} = \frac{1}{p(p+3)^2}$$

Par décomposition en éléments simples on a alors :

$$F(p) = \frac{A}{p} + \frac{B}{(p+3)^2} + \frac{C}{p+3}$$

Pour trouver A, B et C on peut réduire au même dénominateur et identifier les termes de même degré du numérateur :

$$A(p+3)^2 + B.p + C(p+3)p = (A+C)p^2 + (6A+B+3C)p + 9A = 1$$

On en déduit immédiatement que :

$$A = \frac{1}{9} \; ; \; C = -A = -\frac{1}{9} \; ; \; B = -\frac{1}{3}$$

Ainsi, par transformation inverse de F(p), on obtient :

$$\underline{f(t) = \left[\frac{1}{9} - \frac{1}{3}t.e^{-3t} - \frac{1}{9}e^{-3t}\right]\Gamma(t)}$$

On généralise aisément la méthode lorsque le pôle est d'ordre n.

II.4) Cas où les pôles sont complexes

Soit par exemple la fraction :

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+4p+5} = \frac{p+1}{(p+2+j)(p+2-j)}$$

On sait que, dans le cas général, s'il existe un pôle complexe,

alors le nombre complexe conjugué est aussi un pôle. On effectue là encore une décomposition en éléments simples :

$$F(p) = \frac{A}{(p+2+j)} + \frac{B}{(p+2-j)}$$

On sait alors que l'on a nécessairement $B = A^*$ où A^* est le complexe conjugué de A. En réduisant au même dénominateur et en identifiant, il vient alors :

$$(A+A^*)p + A(2-j) + A^*(2+j) = p+1$$

soit donc :

$$A = 0,5(1-j)$$

D'où, par transformation inverse :

$$f(t) = \left[0,5(1-j)\exp[-(2+j)t] + 0,5(1+j)\exp[-(2-j)t]\right]\Gamma(t) =$$

$$\underline{f(t) = e^{-2t}\left[\cos[t]-\sin[t]\right]\Gamma(t)}$$

On peut également utiliser le développement de Heaviside s'il n'y a pas de pôles multiples.

II.5) Décomposition canonique

Reprenons l'exemple précédent ; nous pouvons écrire le dénominateur sous la forme suivante :

$$F(p) = \frac{p+1}{p^2+4p+5} = \frac{p+1}{(p+2)^2+1} = \frac{p+2}{(p+2)^2+1} - \frac{1}{(p+2)^2+1}$$

En utilisant alors les transformées translatées des fonctions sinusoïdales, il vient directement :

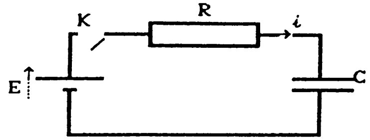
$$f(t) = e^{-2t}\left[\cos[t] - \sin[t]\right]$$

On aura tout intérêt à utiliser cette méthode lorsque le dénominateur sera du second degré afin d'utiliser les transformées des fonctions circulaires (ou hyperboliques si le terme additionnel du carré est négatif). On prendra garde de faire apparaître au numérateur de la transformée des fonctions cosinus le terme $p+\alpha$ qui apparait au carré au dénominateur ; quant au numérateur des transformées des fonctions sinus, on fera apparaître la racine du terme additionnel.

III/ APPLICATION DU CALCUL OPERATIONNEL AUX CIRCUITS LINEAIRES

III.1) Exemples

Considérons le circuit suivant :



On suppose qu'à l'instant initial, on a : $q(0) = q_o$ et $i(0) = 0$. En écrivant la loi des mailles, il vient :

$$E.\Gamma(t) = R.i + \frac{q}{C}$$

Or on a :

$$dq = i.dt \Rightarrow \int_{q_o}^{q} dq = q(t) - q_o = \int_{o}^{t} i.dt \Rightarrow$$

$$q(t) = q_o + \int_{o}^{t} i.dt$$

Ce qui s'interprète en disant que la charge instantanée du condensateur est égale à sa charge initiale à laquelle s'ajoute la charge transportée par le courant.

En passant dans le domaine p, l'équation des mailles devient :

$$\frac{E}{p} = R.I(p) + \frac{1}{C}\left(\frac{q_o}{p} + \frac{I(p)}{p} - i(0)\right)$$

soit :

$$\left(R + \frac{1}{Cp}\right)I(p) = \left(E - \frac{1}{C}q_o\right)\frac{1}{p}$$

A ce stade du calcul, on remarque que le terme en facteur de I(p) est analogue à l'impédance en régime harmonique, le paramètre p remplaçant le terme $j\omega$ (qui, rappelons le, est un paramètre p à partie réelle nulle) ; on appelle donc ce terme **impédance opérationnelle** du circuit et on pose :

$$Z(p) = R + \frac{1}{Cp}$$

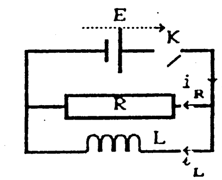
Cherchons alors l'expression de $i(t)$:

$$I(p) = (C.E - q_o)\frac{1}{1 + RCp} = \left(\frac{E}{R} - \frac{q_o}{RC}\right)\frac{1}{p + (1/RC)}$$

Posons $\tau = RC$ et on a alors :

$$\underline{i(t) = \left(\frac{E}{R} - \frac{q_o}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\Gamma(t)}$$

Considérons maintenant l'exemple suivant :



On suppose qu'à t = 0, l'intensité dans l'inductance est nulle. En exprimant la loi des noeuds, il vient :

$$i = \frac{E}{R}\Gamma(t) + i_L$$

Par ailleurs, on a :

$$E.\Gamma(t) = L.\frac{d}{dt}i_L \Rightarrow \frac{E}{p} = Lp.I_L(p)$$

Ainsi la loi des noeuds dans le domaine p a pour expression :

$$I(p) = \frac{E}{Rp} + \frac{E}{Lp^2} = \frac{E}{p}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{Lp}\right)$$

On remarquera que le facteur de E/p est analogue à l'admittance du régime harmonique où l'on a substitué p à $j\omega$; on appellera donc **admittance opérationnelle du circuit** l'expression :

$$Y(p) = \frac{1}{R} + \frac{1}{Lp}$$

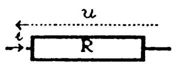
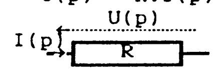
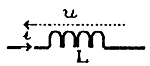
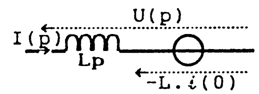
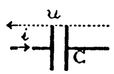
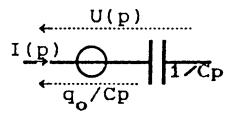
On obtient directement $i(t)$ de la façon suivante :

$$\underline{i(t) = \left(\frac{E}{R} + \frac{E}{L}.t\right)\Gamma(t)}$$

Bien sûr, on peut résoudre les deux exemples qui précèdent sans utiliser le calcul opérationnel ; on remarquera néanmoins, comme il a déjà été dit, que le calcul intègre automatiquement les conditions initiales et on imagine aisément que la méthode utilisée ici permettra de résoudre des problèmes plus complexes en passant par le domaine p.

III.2) Représentation d'un circuit dans le domaine p

On sait qu'il n'existe que trois types d'éléments linéaires passifs liant tension et intensité : la résistance, l'inductance et la capacité. Pour "passer à la tension", ces trois éléments effectuent de fait une opération linéaire sur l'intensité, à savoir respectivement une multiplication, une dérivation et une intégration. On pourra ainsi représenter ces éléments dans le domaine p en leur associant une impédance opérationnelle, les conditions initiales étant représentées par des sources de tension. On peut évidemment passer de la tension à l'intensité en utilisant des admittances opérationnelles (inverses des impédances correspondantes). On obtient ainsi le tableau des correspondances suivant :

DOMAINE TEMPOREL	DOMAINE p
RESISTANCE	
$u = R.i$ 	$U(p) = R.I(p)$ 
INDUCTANCE	
$u = L.\frac{di}{dt}$ 	$U(p) = Lp.I(p) - Li(0)$ 
CAPACITE	
$u = \frac{q_o}{C} + \frac{1}{C}\int_o^t i.dt$ 	$U(p) = \frac{q_o}{Cp} + \frac{I(p)}{Cp}$ 

On représentera les circuits complets en associant aux sources de tension e(t) et aux sources de courant j(t) leur image E(p) et J(p) et on pourra raisonner directement sur le circuit représenté dans le domaine p comme l'on raisonne sur les circuits en représentation harmonique, c'est-à-dire qu'on pourra leur appliquer toutes les techniques de calcul linéaire comme :

— le théorème de superposition ;

— les lois de Kirchhoff (qui, croit-on, se serait prénommé Marcel), à savoir la loi des mailles et la loi des noeuds ;

— les (grands) théorèmes de Thévenin et de Norton ;

— la représentation matricielle des réseaux, etc...

*　　*　　*

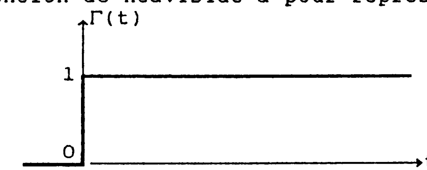
ELEMENTS D'ANALYSE IMPULSIONNELLE

Nous nous proposons ici de donner un outil supplémentaire permettant d'une part de trouver rapidement la transformée de Laplace de certaines fonctions et d'autre part de prendre en compte les discontinuités des fonctions temporelles.

I/ IMPULSION DE DIRAC

I.1) Rappels sur l'échelon de Heaviside

On a vu que l'échelon de Heaviside a pour représentation :

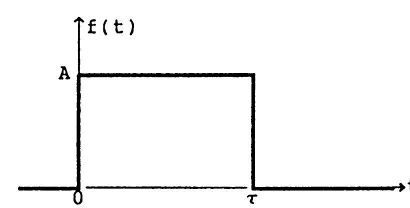


On a par ailleurs déterminé les transformées de cet échelon et de ses primitives successives :

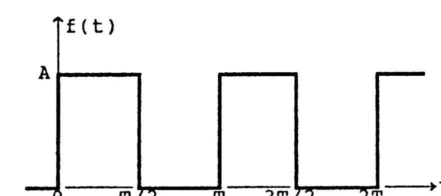
$$\mathcal{L}[\Gamma(t)] = p^{-1} \; ; \; \mathcal{L}[t.\Gamma(t)] = p^{-2} \; ; \; \mathcal{L}[\frac{t^2}{2}.\Gamma(t)] = p^{-3} \; ;$$

$$\mathcal{L}[\frac{t^3}{3.2}.\Gamma(t)] = p^{-4} \; ; \; .... \; \mathcal{L}[\frac{t^2}{n!}.\Gamma(t)] = p^{-(n+1)}$$

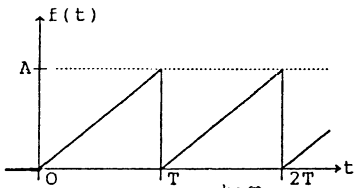
Notons enfin que l'échelon de Heaviside permet de représenter analytiquement des fonctions qui, sans cela, ne sont définissables que par parties. A titre d'exemple, on vérifiera aisément que :



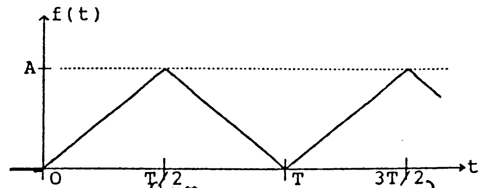
$f(t) = A\left[\Gamma[t] - \Gamma[t-\tau]\right]$



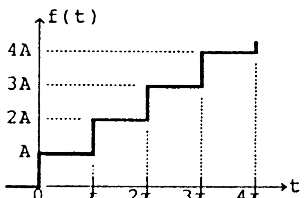
$f(t) = A\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^n\Gamma[t-k\frac{T}{2}]$



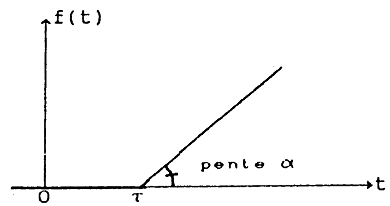
$$f(t) = \frac{A}{T}t.\Gamma[t] - A\sum_{k=1}^{k=\infty}\Gamma[t-kT]$$



$$f(t) = \frac{4A}{T}\left[\sum_{k=0}^{k=\infty}(-1)^n\left(t-k\frac{T}{2}\right)\Gamma[t-k\frac{T}{2}]\right] - \frac{2A}{T}$$



$$f(t) = A\sum_{k=0}^{k=\infty}\Gamma[t-k\tau]$$



$$f(t) = \alpha(t-\tau)\Gamma[t-\tau]$$

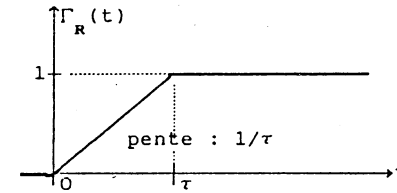
En utilisant ces expressions analytiques, on peut alors trouver aisément la transformée de Laplace connaissant celle de $\Gamma(t)$ et en utilisant le théorème sur la translation temporelle (dit encore *théorème du retard*).

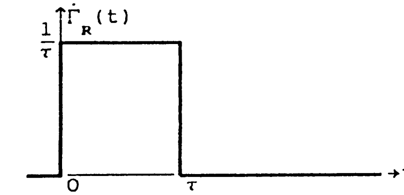
I.2) Dérivée d'un échelon de Heaviside

L'échelon de Heaviside, tel qu'il est défini, n'est qu'une idéalité mathématique : il n'existe pas dans la nature des phénomènes présentant des temps de montée ou de descente nuls[1]. On peut alors symboliser un échelon réel que nous noterons $\Gamma_R(t)$ par une courbe présentant un temps de montée τ et tendre ensuite vers l'échelon de Heaviside en faisant tendre τ vers 0. On a représenté ci-après

[1] Le cadre théorique actuel, et en particulier la théorie de la relativité, interdit de fait de tels phénomènes qui nécessiteraient des vitesses d'évolution infinies.

un tel échelon ainsi que sa dérivée temporelle.





On peut donc écrire que la dérivée temporelle d'un échelon réel a pour expression :

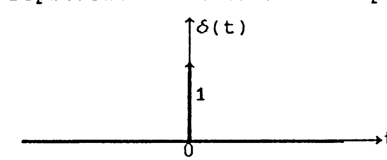
$$\dot{\Gamma}_R(t) = \frac{1}{\tau}\Big(\Gamma(t) - \Gamma(t-\tau)\Big)$$

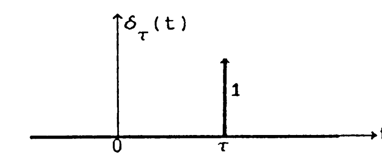
Par définition, on appelle **impulsion de Dirac**[2] $\delta(t)$ la limite de cette dérivée lorsque τ tend vers 0 :

$$\boxed{\delta(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Gamma(t) - \Gamma(t-\tau)}{\tau}}$$

On reconnait là la définition formelle de la dérivée de $\Gamma(t)$ et on écrira donc : $\boxed{\delta(t) = \dot{\Gamma}(t)}$

On représentera alors cette impulsion de la manière suivante :





On a également donné ci-dessus la représentation de l'impulsion translatée $\delta_\tau(t)$ définie par :

$$\delta_\tau(t) = \delta(t-\tau)$$

[2] Paul Adrien Dirac (1902-1984), physicien anglais à qui l'on doit des percées très importantes en mécanique quantique relativiste (prévision de l'existence de l'anti-matière, théorie quantique de l'électromagnétisme,...). Comme Heaviside pour le calcul opérationnel, Dirac introduisit l'impulsion qui porte son nom de façon relativement intuitive ; ses idées furent affinées par la théorie dite des distributions.

I.3) Propriétés de $\delta(t)$

I.3.a) Aire de l'impulsion

En utilisant la définition précédente et en étendant les techniques du calcul différentiel et intégral aux échelons et aux impulsions (objets de la théorie des distributions), on a donc :

$$\int_{t_1<0}^{t_2>0} \delta(t).dt = \int_{t_1<0}^{t_2>0} \dot{\Gamma}(t).dt = \int_0^1 d(\Gamma[t]) = 1$$

Cette intégrale représente l'**aire de l'impulsion** dont on indique la valeur à côté de la flèche représentative de l'impulsion. Si l'échelon a une amplitude A, l'aire de l'impulsion est alors A et on peut écrire :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} A.\delta(t).dt = A}$$

I.3.b) Dérivées de $\delta(t)$

Par définition, la dérivée $n^{\text{ème}}$ de $\delta(t)$ est la dérivée $(n+1)^{\text{ème}}$ de $\Gamma(t)$, c'est à dire que l'on a :

$$\frac{d^n}{dt^n}\delta(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\Gamma(t) = \lim_{\tau\to 0}\frac{\Gamma^{(n)}(t) - \Gamma^{(n)}(t-\tau)}{\tau}$$

On fera l'hypothèse de l'existence de ces dérivées ; il n'existe pas de représentation graphique de ces objets mathématiques.

I.3.c) Transformée de Laplace de $\delta(t)$

Cherchons :

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \mathcal{L}[\dot{\Gamma}(t)] = p.\mathcal{L}[\Gamma(t)] = 1$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta(t)] = 1}$$

Il est possible d'utiliser cette propriété comme définition de l'impulsion de Dirac, à savoir que c'est l'objet mathématique dont la transformée de Laplace vaut 1.

On aura donc : $\boxed{\mathcal{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-p\tau}}$

Enfin, pour ce qui est des dérivées de $\delta(t)$:

$$\mathcal{L}[\dot{\delta}(t)] = p \; ; \; \mathcal{L}[\ddot{\delta}(t)] = p^2 \; ; \; ...$$

$$\boxed{\mathcal{L}[\delta^{(n)}(t)] = p^n}$$

Ainsi, la transformée inverse d'un polynôme en p est une combinaison linéaire coefficientée par les coefficients du polynôme de l'impulsion de Dirac et de ses dérivées :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\sum_{k=0}^{k=n} a_k p^k\right] = \sum_{k=0}^{k=n} a_k \delta^{(k)}(t)$$

I.3.d) Propriété essentielle de $\delta(t)$

Soit la transformée de Laplace d'une fonction f(t) :

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(p) = 1.F(p)$$

Conformément au théorème de Borel et à la commutativité du produit de convolution, on a donc :

$$\boxed{f(t) = \delta(t)*f(t) = f(t)*\delta(t)}$$

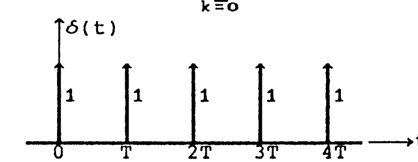
L'impulsion de Dirac est l'élément neutre du produit de convolution.

II/ APPLICATION DE L'IMPULSION DE DIRAC

II.1) "Peigne" de Dirac

Par définition, on appelle "peigne" de Dirac la distribution $\Pi(t)$ définie par :

$$\Pi(t) = \sum_{k=0}^{k=\infty} \delta(t-kT)$$



La transformée de Laplace d'un peigne de Dirac est donc :

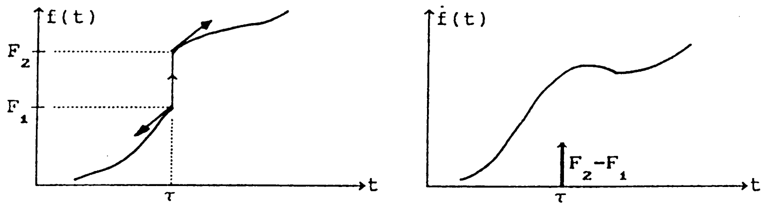
$$\boxed{\mathcal{L}[\Pi(t)] = \sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-kT} = \frac{1}{1 - e^{-kT}}}$$

On reconnait là la signature de la transformée d'une fonction périodique.

Ces peignes de Dirac trouveront de multiples applications en théorie du signal (échantillonnage). On pourra éventuellement considérer des peignes définis depuis $t = -\infty$ et avoir des peignes d'impulsions d'aire variable.

II.2) Discontinuités - Recherche de transformées de Laplace

Considérons une fonction discontinue mais pouvant présenter une dérivée continue :



La discontinuité observée peut-être traduite par un échelon translaté de τ et d'amplitude F_2-F_1 se superposant à une fonction continue $f_c(t)$ et on a donc :

$$f(t) = f_c(t) + (F_2-F_1)\Gamma(t-\tau)$$

En prenant la dérivée de f(t), on fera donc apparaître une impulsion de Dirac à l'instant τ. La transformée de Laplace de la dérivée sera donc :

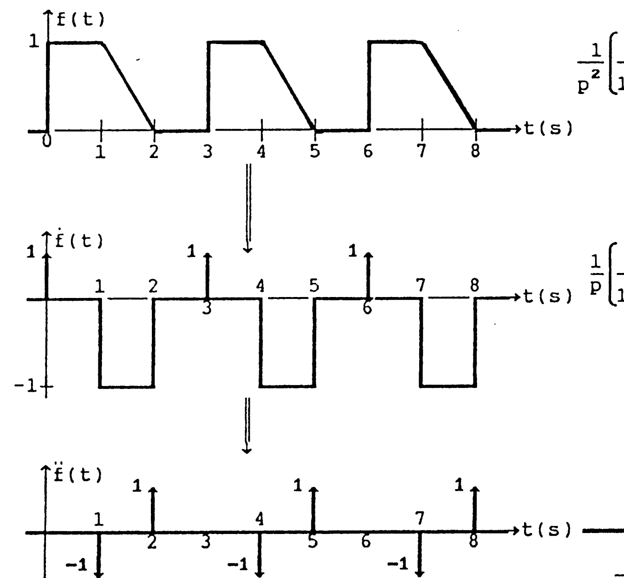
$$\mathcal{L}(\dot{f}) = \mathcal{L}(\dot{f}_c) + (F_2-F_1)$$

Inversement, lorsque l'on aura des termes constants ou des monômes en p dans l'expression de la transformée de Laplace d'une dérivée, on pourra donc inférer qu'il existe des discontinuités type échelon ou impulsion dans la fonction primitive.

Cette remarque est particulièrement intéressante lorsque l'on recherche la transformée de Laplace d'une fonction **définie par parties sous forme de termes polynômiaux en temps**. En effet, la dérivée $n^{ème}$ de t^n (avec $t \geq 0$) est égale à $n!$, c'est-à-dire à une constante, donc à un échelon. La dérivée $(n+1)^{ème}$ de t^n est donc une impulsion d'aire $n!$. Plus généralement, la dérivée $(n+1)^{ème}$ d'une fonction polynomiale de degré n définie sur $\mathbb{R}^+$ est donc une impulsion. La transformée d'une impulsion étant une constante égale à son aire, on obtiendra ainsi la transformée de la fonction en remontant de celle de l'impulsion en divisant à chaque intégration la transformée intermédiaire par p. Les deux exemples ci-

dessous illustrent la méthode ainsi préconisée.

Exemple 1



Peigne d'impulsions +1 translaté de 2
et peigne d'impulsion -1 translaté de 1

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{p^2}\left(\frac{e^{-2p}}{1-e^{-3p}} - \frac{e^{-p}}{1-e^{-3p}}\right) \frac{1}{p}\left(\frac{1}{1-e^{-3p}}\right)$$

$$\mathcal{L}(\dot{f}) = \frac{1}{p}\left(\frac{e^{-2p}}{1-e^{-3p}} - \frac{e^{-p}}{1-e^{-3p}}\right) + \frac{1}{1-e^{-3p}}$$

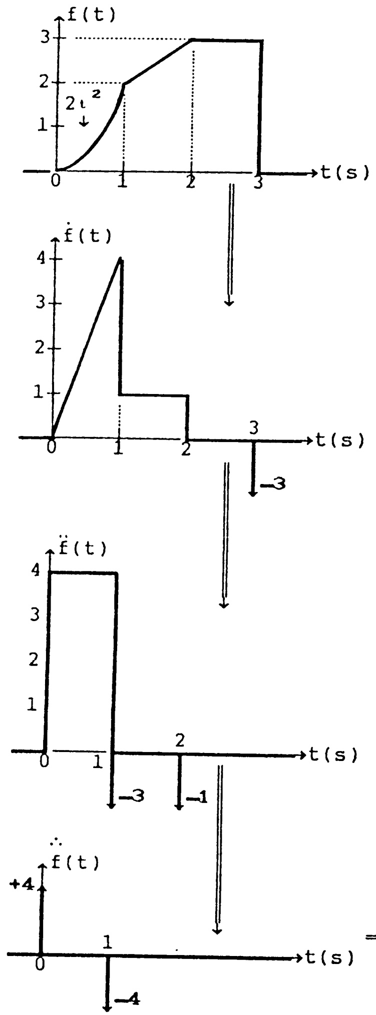
$$\mathcal{L}(\ddot{f}) = \frac{e^{-2p}}{1-e^{-3p}} - \frac{e^{-p}}{1-e^{-3p}}$$

La transformée de Laplace dans ce cas à donc pour expression :

$$\mathcal{L}(f) = \frac{1}{1-e^{-3p}}\left(\frac{e^{-2p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{1}{p}\right)$$

On retrouve ainsi la signature de la périodicité de la fonction. Par ailleurs, dans cet exemple, la transformée de la dérivée apparaît comme la somme de la transformée d'un signal périodique en créneaux négatifs et de celle d'un peigne de Dirac.

Exemple 2 Soit à rechercher la transformée de Laplace du signal suivant :



$$\mathcal{L}(f) = \frac{4}{p^3}\left[1 - e^{-p}\right] - \frac{1}{p^2}\left[3e^{-p} - e^{-2p}\right] - \frac{3}{p}e^{-3p}$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{L}(\dot{f}) = \frac{4}{p^2}\left[1 - e^{-p}\right] - \frac{1}{p}\left[3e^{-p} - e^{-2p}\right] - 3.e^{-3p}$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{L}(\ddot{f}) = \frac{4}{p}\left[1 - e^{-p}\right] - 3e^{-p} - e^{-2p}$$

$$\Uparrow$$

$$\mathcal{L}(\dddot{f}) = 4\left[1 - e^{-p}\right]$$

II.3) Analyse impulsionnelle d'un système linéaire

II.3.a) Réponse impulsionnelle

Considérons un système linéaire qui, sollicité par une excitation e(t), fournit une réponse s(t) et que l'on représentera par le schéma bloc suivant :

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\quad \mathcal{L} \quad} \longrightarrow s(t)$$

Dire que le système est linéaire, c'est dire que e(t) et s(t) sont liés par une relation linéaire exprimée sous forme d'équations différentielles linéaires du type :

$$a_n\frac{d^n e(t)}{dt^n} + \dots + a_2\frac{d^2 e(t)}{dt^2} + a_1\frac{de(t)}{dt} + a_o e(t) = \dots$$
$$\dots = b_m\frac{d^m s(t)}{dt^m} + \dots + b_2\frac{d^2 s(t)}{dt^2} + b_1\frac{ds(t)}{dt} + b_o s(t)$$

Si les grandeurs e(t) et s(t) et toutes leurs dérivées sont nulles à l'instant initial, la relation précédente prend pour forme dans le domaine p :

$$E(p)\sum_{k=o}^{k=n} a_k p^k = S(p)\sum_{l=o}^{l=m} b_l p^l$$

c'est-à-dire que l'on peut écrire :

$$S(p) = T(p).E(p)$$

où la fraction rationnelle T(p) est appelée **transmittance opérationnelle du système linéaire.**

Attaquons maintenant le système à l'aide d'une impulsion de Dirac $\delta(t)$. Dans le domaine p, la réponse $S_\delta(p)$ du système aura donc pour expression : $E(p) = 1 \Rightarrow S_\delta(p) = T(p)$

En d'autres termes, dans le domaine temporel, la réponse impulsionnelle $s_\delta(t)$ aura pour expression :

$$\boxed{s_\delta(t) = \mathcal{L}^{-1}[T(p)]}$$

La réponse impulsionnelle d'un système linéaire est la transformée de Laplace inverse de sa transmittance ; la transmittance opérationnelle d'un système linéaire est la transformée de Laplace de sa réponse impulsionnelle.

Par ailleurs, pour une excitation e(t) quelconque, on a dans le domaine en p :

$$S(p) = T(p).E(p)$$

Donc, conformément au théorème de Borel, on a dans le domaine temporel :

$$\boxed{s(t) = s_{\delta}(t)*e(t)}$$

Autrement dit, si l'on connait la réponse impulsionnelle d'un système linéaire, on connait sa réponse pour toute autre excitation. Cet aspect des choses nous montre qu'il n'est de fait pas véritablement nécessaire de travailler dans le domaine temporel : il suffit en effet de connaître la transmittance opérationnelle du système pour savoir comment évoluera ce système en fonction des excitations qui lui sont imposées.

II.3.b) Détermination de la réponse impulsionnelle à l'aide d'un échelon de Heaviside

Pratiquement parlant, il est plus facile de générer des échelons que des impulsions de bonne qualité. Aussi utilisera-t-on de tels échelons pour atteindre la réponse impulsionnelle, ce en tenant compte d'une propriété du produit de convolution. Cherchons en effet la dérivée d'un produit de convolution :

$$\frac{d}{dt}\left(f*g\right) = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} f(u)g(t-u)du = \frac{d}{dt}\int_0^{\infty} f(t-u)g(u)du = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left(f(u)g(t-u)\right)du = \int_0^{\infty}\frac{d}{dt}\left(f(t-u)g(u)\right)du = \ldots$$

$$\ldots = \int_0^{\infty} f(u)\dot{g}(t-u)du = \int_0^{\infty}\dot{f}(t-u)g(u)du$$

soit donc :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(f*g\right) = f*\dot{g} = \dot{f}*g}$$

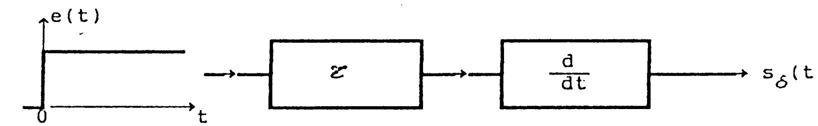
La réponse à un échelon de Heaviside a par ailleurs pour expression :

$$s_{\gamma}(t) = s_{\delta}(t)*\Gamma(t)$$

D'où, en dérivant par rapport au temps, il vient :

$$\dot{s}_{\gamma}(t) = s_{\delta}(t)*\dot{\Gamma}(t) = s_{\delta}(t)*\delta(t) = s_{\delta}(t)$$

Ainsi, la réponse impulsionnelle d'un système linéaire est égale à la dérivée temporelle de sa réponse à un échelon de Heaviside. On obtiendra donc la réponse impulsionnelle d'un système à l'aide de la chaîne suivante :



* * *

ANNEXE

TABLE DE TRANSFORMEES DE LAPLACE

LES OUTILS		
ORIGINAL	**IMAGE**	**COMMENTAIRES**
$f(t)$	$F(p) = \int_0^\infty f(t).e^{-pt}dt$	*Définition*
$\lambda.f(t) + \mu.g(t)$	$\lambda.F(p) + \mu.F(p)$	*Linéarité*
$\dot{f}(t)$	$p.F(p) - f(0)$	*Dérivée original 1*
$\ddot{f}(t)$	$p^2F(p) - p.f(0) - \dot{f}(0)$	*Dérivée original 2*
$\dot{f}^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - \sum_{k=1}^{k=n} p^{n-k}.\dot{f}^{(k-1)}_{(0)}$	*Dérivée original n*
$\int_0^t f(u).du$	$\frac{F(p)}{p}$	*Primitive*
$t.f(t)$	$-F'(p)$	*Dérivée image 1*
$t^2f(t)$	$F''(p)$	*Dérivée image 2*
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(p)$	*Dérivée image n*
$f(t-\tau)$	$e^{-p\tau}F(p)$	*Original translaté*
$e^{\alpha t}f(t)$	$F(p-\alpha)$	*Image translatée*
$f(kt)$	$\frac{1}{k}\cdot F(\frac{p}{k})$	*Homothétie original*
$\frac{1}{k}\cdot f(\frac{t}{k})$	$F(kp)$	*Homothétie image*
$f(t)*g(t)$	$F(p).G(p)$	*Convolution*

A PARTIR DE $\Gamma(t)$... TRANSFORMEES DES FONCTIONS USUELLES		
ORIGINAL	**IMAGE**	**CONDITION DE CONVERGENCE**
$\Gamma(t)$	$\frac{1}{p}$	$\mathcal{R}e(p)>0$
$t.\Gamma(t)$	$1/p^2$	$\mathcal{R}e(p)>0$
$t^n\Gamma(t) \quad n\in\mathbb{N}$	$n!/p^{n+1}$	$\mathcal{R}e(p)>0$
$\delta(t)$	1	
$\dot{\delta}(t)$	p	$\mathcal{R}e(p)>0$
$\dot{\delta}\{\xi\}$	p^n	$\mathcal{R}e(p)>0$
$\sum_{k=0}^{k=\infty}\delta(t-kT)$	$\frac{1}{1-e^{-pT}}$	$\mathcal{R}e(p)>0$
$e^{\alpha t}\Gamma(t) \quad \alpha\in\mathbb{C}$	$\frac{1}{p-\alpha}$	$\mathcal{R}e(p)>\mathcal{R}e(\alpha)$
$\cos(\omega t)\Gamma(t) \quad \omega\in\mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\mathcal{R}e(p)>0$
$\sin(\omega t)\Gamma(t) \quad \omega\in\mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\mathcal{R}e(p)>0$
$Ch(\omega t)\Gamma(t) \quad \omega\in\mathbb{R}$	$\frac{p}{p^2-\omega^2}$	$\mathcal{R}e(p)>\lvert\omega\rvert$
$Sh(\omega t)\Gamma(t) \quad \omega\in\mathbb{R}$	$\frac{\omega}{p^2-\omega^2}$	$\mathcal{R}e(p)>\lvert\omega\rvert$
$e^{\alpha t}\cos(\omega t)\Gamma(t)$	$\frac{p-\alpha}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathcal{R}e(p)>\mathcal{R}e(\alpha)$
$e^{\alpha t}\sin(\omega t)\Gamma(t)$	$\frac{\omega}{(p-\alpha)^2+\omega^2}$	$\mathcal{R}e(p)>\mathcal{R}e(\alpha)$

*   *   *

SOURCES BIBLIOGRAPHIQUES

M. CHOSSAT, *Aide mémoire de mathématiques de l'ingénieur*, Dunod, Paris, 1977.

G. COEURE, *Méthodes mathématiques pour la physique et les sciences appliquées*, Dunod, Paris, 1980

J.A.EDMINISTER, *Théorie et applications des circuits électriques*, McGraw-Hill/Série Schaum, Paris, 1989.

P. LEFEVRE, *Théorie du signal*, Cours de Supélec, 1967.

F. MILSANT, *Cours d'électronique*, Tome 1 (*Circuits à régime variable*), Eyrolles, Paris, 1974.

J. QUINET, *Cours élémentaire de mathématiques supérieures*, Tome 1 (*Algèbre*) et Tome 4 (*Equations différentielles*), Dunod, Paris, 1977.

* * *