ROUEN

STAGE

UTILISATION DES ANALOGIES
EN PHYSIQUE

DE LA MECANIQUE DES FLUIDES A L'ELECTROMAGNETISME ET RETOUR

6 janvier 1992–10 janvier 1992

DE LA MECANIQUE DES FLUIDES A L'ELECTROMAGNETISME ET RETOUR

A/ LES "TOURBILLONS MAGNETIQUES"

I/ DESCRIPTION DU MOUVEMENT D'UN FLUIDE

I.1) Particule fluide

On appelle *particule fluide* une partie d'un fluide de volume $\delta\tau$ et de masse δm, cette particule constituant ainsi un système thermodynamique. Dans la suite, on supposera que cette particule obéit à l'**hypothèse du continu** durant tout son mouvement, c'est-à-dire que le volume $\delta\tau$ sera tel :

— qu'il n'est pas trop grand pour pouvoir lui appliquer les règles du calcul différentiel et intégral (en d'autres termes, $\delta\tau$ pourra être assimilé à un élément différentiel $d\tau$) ;

— qu'il n'est pas trop petit pour pouvoir contenir un très grand nombre d'entités élémentaires (en conséquence de quoi les grandeurs moyennes concernant la particule ne seront pratiquement pas perturbées par l'introduction ou le départ d'une de ces entités).

On définira alors la vitesse de cette particule à l'instant t par :
$$\vec{v}_{moy}(t) = \frac{1}{n}\sum \vec{v}_i$$
n étant le nombre d'entités élémentaires à l'instant t dans le volume $\delta\tau$, chacune de ces entités ayant alors une vitesse $\vec{v}_i$.

I.2) Description de Lagrange - Description d'Euler

Etant donné un fluide dont on veut étudier le mouvement, nous disposons de deux modes de description de ce fluide :

— La description dite de *Lagrange* (Joseph-Louis, 1736-1813) consiste à suivre une particule fluide quelconque au cours du temps. Dans le cadre de cette description, si la particule occupe à l'instant t une position M repérée dans un référentiel $\mathcal{R}$, sa vitesse sera donnée par :

$$\vec{v}_p(t) = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_R = \vec{v}_{moy}(t)$$

En d'autres termes, dans le cadre de cette description, **l'espace et le temps ne sont pas indépendants** et l'on est conduit à utiliser les outils de la **mécanique du point matériel** traditionnelle (mécanique lagrangienne, hamiltonienne). Si cette description est efficiente lorsque le fluide n'obéit pas à l'hypothèse du continu, ou plus généralement lorsque l'on a une **approche statistique** du mouvement du fluide, elle s'avère lourde lorsqu'on veut l'appliquer à un fluide ne présentant pas de discontinuité spatiale. Pour donner une image de la complexité de cette description dans ce cas, n'oublions pas qu'il s'agit d'exploiter l'ensemble de tous les films du mouvement de chacune des particules fluides, travail colossal s'il en est.

— La description dite d'*Euler* (Léonhard 1707-1783) consiste à observer l'ensemble du fluide à un instant donné : en d'autres termes, on prend une photo du fluide et, pour connaître son évolution, on étudiera la succession de ces photos. Ainsi, une grandeur locale caractéristique du fluide dépendra à la fois de **variables d'espace** et du **temps** qui cette fois seront **indépendants**. Autrement dit, la description d'Euler fait appel à la notion de **champ** et donc utilisera tout l'arsenal de l'analyse vectorielle (plus généralement : tensorielle). D'un point de vue cinématique, on pourra donc définir le **champ d'écoulement** comme étant le champ des vitesses moyennes d'un fluide à un instant donnée et on aura donc dans un référentiel $\mathcal{R}$ au point M et à l'instant t :
$$\vec{v}_R(M,t) = v_x(M,t).\vec{u}_x + v_y(M,t).\vec{u}_y + v_z(M,t).\vec{u}_z = \vec{v}_{moy}(t)$$
Il découle de ce qui précède **qu'en un point M de l'espace et à un instant t donné la description d'Euler doit coïncider avec la description de Lagrange** ; autrement dit, par exemple, le champ d'écoulement en un point et à un instant donné doit être égal à la vitesse de la particule se trouvant en ce point à cet instant :
$$\forall\ M,t, \quad \vec{v}_R(M,t) = \vec{v}_p(t)$$

Nous adopterons par la suite la description d'Euler, permettant de mettre en lumière de multiples analogies entre le domaine de la mécanique des fluides et celui de l'électromagnétisme.

Notons au passage quelques définitions :

— le champ d'écoulement sera dit **stationnaire** ou encore **permanent** s'il ne dépend pas du temps ($\frac{\partial}{\partial t}\vec{v}_R=\vec{0}$).

— le champ d'écoulement sera dit **uniforme** s'il ne dépend pas de l'espace ($\frac{\partial}{\partial M}\vec{v}_R=\vec{0}$).

Dans les deux cas précédents, on évitera de parler de champ constant sans préciser par rapport à quelle variable.

I.3) Trajectoires et lignes de courants

On illustrera la différence d'esprit entre les deux descriptions données précédemment de la manière suivante :

— dans la description de Lagrange, **les trajectoire des particules fluides** ont pour équation générique :

$$\boxed{d\overrightarrow{OM} = \vec{v}_P dt \rightarrow \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dt}$$

On obtiendra donc ces trajectoires en intégrant par rapport au temps t.

— dans la description d'Euler, on appelera **lignes de courant** les lignes du champ d'écoulement, les vecteurs champ d'écoulement étant en tout point tangents à ces lignes. Ainsi, on aura :

$$\boxed{\text{à t fixé, } \frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} = dk}$$

k représentant ici un paramètre "numérotant" les lignes. Dans ce cas, le temps t est une constante et on intègre par rapport à l'espace.

De ce qui précède, il résulte que trajectoires et lignes de courant sont tangentes à un instant donné au point considéré, mais ces courbes diffèrent dans le cas général, tout particulièrement lorsque le régime est non-stationnaire. Là encore, l'ensemble des lignes de courant constitue un instantané (au sens photographique du terme) du fluide, alors qu'une trajectoire donne le film du mouvement d'une particule fluide au cours du temps.

II/ ETUDE DU CHAMP D'ECOULEMENT

II.1) Remarque préalable sur le champ des vitesses d'un solide

Soit un solide en rotation autour d'un point fixe O. Son champ des vitesses est donné par :

$$\vec{v}_R(M,t) = \vec{\Omega}(t)_{S/R} \wedge \overrightarrow{OM}$$

Si nous calculons $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}_R)$, nous trouvons très aisément que :

$$\boxed{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{v}_R) = 2.\vec{\Omega}(t)_{S/R}}$$

Ainsi nous pourrions éventuellement définir la vitesse angulaire de rotation d'un solide autour d'un point fixe comme étant égale à la moitié du rotationnel de son champ des vitesses. Ce résultat est d'ailleurs tout à fait généralisable en prenant comme référentiel le référentiel barycentrique $\mathcal{R}_b$ et la rotation locale autour du centre d'inertie G.

On remarquera en passant que l'on a également pour un solide :

$$\boxed{\text{div}(\vec{v}_R) = 0}$$

résultat dont nous comprendrons la signification plus loin.

II.2) Champ d'écoulement d'un fluide en deux point voisins

Considérons un champ d'écoulement et deux points de l'espace M et M' tels que :

$$\overrightarrow{MM'} = d\overrightarrow{OM} = dx.\vec{u}_x + dy.\vec{u}_y + dz.\vec{u}_z$$

On notera ainsi par la suite : M' = M+dM et on aura également :

$$\vec{v}_R(M+dM) - \vec{v}_R(M) = d\vec{v}_R = dv_x.\vec{u}_x + dv_y.\vec{u}_y + dv_z.\vec{u}_z$$

En développant les différentielles des composantes du champ d'écoulement à t donné et en présentant l'expression sous forme matricielle, on aura :

$$[d\vec{v}_R] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}v_x & \frac{\partial}{\partial y}v_x & \frac{\partial}{\partial z}v_x \\ \frac{\partial}{\partial x}v_y & \frac{\partial}{\partial y}v_y & \frac{\partial}{\partial z}v_y \\ \frac{\partial}{\partial x}v_z & \frac{\partial}{\partial y}v_z & \frac{\partial}{\partial z}v_z \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = [J(v_R)] \cdot [\overrightarrow{MM'}]$$

$[J(\vec{v}_R)]$ représentant la matrice jacobienne de $\vec{v}_R(M)$. Or, comme pour toute matrice carrée, on sait que cette matrice jacobienne est décomposable en la somme d'une matrice antisymétrique et d'une matrice symétrique :

$$[J(\vec{v}_R)] = [\Omega(M)] + [D(M)]$$

$$\text{avec } [\Omega(M)]^T = -[\Omega(M)] \text{ et } [D(M)]^T = [D(M)]$$

On obtient ainsi :

$$[\Omega(M)] = \frac{1}{2}\left([J(\vec{v}_R)]-[J(\vec{v}_R)]^T\right) \text{ et } [D(M)] = \frac{1}{2}\left([J(\vec{v}_R)]+[J(\vec{v}_R)]^T\right)$$

Etudions l'effet de $[\Omega(M)]$; nous pouvons toujours écrire cette matrice sous la forme : $[\Omega(M)] = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_z & +\Omega_y \\ +\Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & +\Omega_x & 0 \end{bmatrix}$

et on aura alors :

$$[\Omega(M)]\cdot[\overrightarrow{MM'}] = \begin{bmatrix} \Omega_y dz-\Omega_z dy \\ \Omega_z dx-\Omega_x dz \\ \Omega_x dy-\Omega_y dx \end{bmatrix} = [\vec{\Omega}(M)\wedge\overrightarrow{MM'}]$$

On pourra donc traduire l'action de la matrice antisymétrique sur $\overrightarrow{MM'}$ à l'aide d'un produit vectoriel entre un certain champ vectoriel $\vec{\Omega}(M)$ de composantes $(\Omega_x,\Omega_y,\Omega_z)$ et $\overrightarrow{MM'}$ (ce résultat est d'ailleurs tout à fait général, concernant les applications linéaires antisymétriques). Compte tenu de la définition de $[\Omega(M)]$ en fonction du jacobien, on a par ailleurs :

$$\Omega_x = \vec{\Omega}(M)\cdot\vec{u}_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}v_z-\frac{\partial}{\partial z}v_y\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}_R)\cdot\vec{u}_x$$

idem suivant $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ et donc on définira le champ :

$$\boxed{\vec{\Omega}(M) = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}_R)}$$

comme étant le **champ tourbillon** de l'écoulement, le champ rotationnel du champ d'écoulement étant par ailleurs appelé **vorticité**.
Quant à la matrice symétrique $[D(M)]$, elle a pour expression générale :

$$[D(M)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x}v_x & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_y+\frac{\partial}{\partial y}v_x\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_z+\frac{\partial}{\partial z}v_x\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_y+\frac{\partial}{\partial y}v_x\right) & \frac{\partial}{\partial y}v_y & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}v_z+\frac{\partial}{\partial z}v_y\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}v_z+\frac{\partial}{\partial z}v_x\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}v_z+\frac{\partial}{\partial z}v_y\right) & \frac{\partial}{\partial z}v_z \end{bmatrix}$$

C'est la matrice représentative du **tenseur des déformations**.
On peut donc écrire en définitive :

$$\boxed{\vec{v}_R(M+dM) = \vec{v}_R(M) + \vec{\Omega}(M)\wedge\overrightarrow{dOM} + [D(M)]\cdot[\overrightarrow{dOM}]}$$

II.3) Interprétation

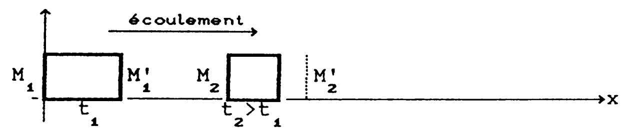
Si l'on ne tient pas compte du troisième terme de la somme, on reconnaît dans l'expression précédente un champ de vitesses d'un solide, $\vec{\Omega}(M)$ étant analogue à la vitesse angulaire d'un solide. Il y a cependant une différence majeure : en termes de champ, si le champ vitesse angulaire d'un solide est, par définition, uniforme, le champ tourbillon peut dépendre de l'espace.
Le troisième terme introduit la véritable nouveauté par rapport aux solides : la matrice $[D(M)]$ étant symétrique, elle est **diagonalisable** et l'on pourra donc toujours trouver un repère dans lequel cette matrice est diagonale, ce repère étant appelé **repère principal de dilatation.**
Pour voir l'effet du tenseur des déformations, considérons par exemple le champ d'écoulement suivant :

$$\vec{v}_R(M) = v(x).\vec{u}_x$$

Dans ce cas, le champ tourbillon est nul et on a par application de la relation trouvée :

$$v(M+dM) = v(M) + \frac{\partial v}{\partial x}dx$$

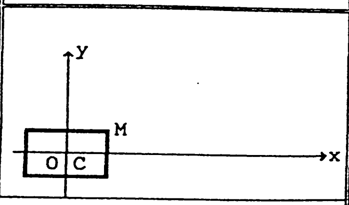
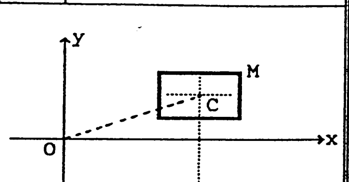
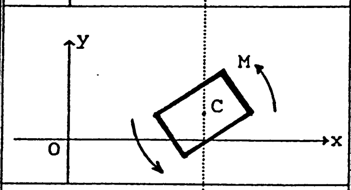
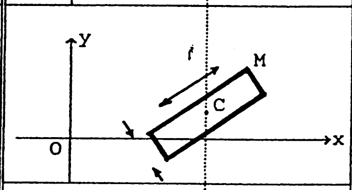
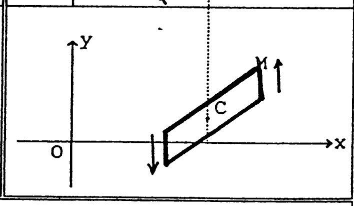
Si la vitesse décroît suivant les x croissants, on constate donc que la particule doit se contracter suivant son mouvement, les points "en avant" de la particule se déplaçant moins vite que les points "en arrière" :



En toute généralité, les termes diagonaux de la matrice $[D(M)]$ provoqueront des dilatations-contractions sur les particules fluides, les termes non diagonaux provoqueront des glissements (variation d'angles sans variation de longueur).

On a représenté schématiquement sur la page ci-après le mouvement le plus général d'une particule fluide en écoulement permanent.

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE FLUIDE

MOUVEMENT PARTIEL	VISUALISATION	VITESSE
POSITION INITIALE		
TRANSLATION		$\vec v(C)$
ROTATION		+ $\frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\left[\vec v(C)\right]\wedge\overrightarrow{CM}$
DILATATION		+ $\overrightarrow{[D_d][\overrightarrow{CM}]}$ $[D_d]$: *matrice diagonale*
GLISSEMENT		+ $\overrightarrow{[D_g][\overrightarrow{CM}]}$
		= $\vec v(M)$

$$[x_1,x_2,x_3] = [x,y,z] \;;\; [\vec v(C)] = [v_1,v_2,v_3]$$

$$[D_d] + [D_g] = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}v_j + \frac{\partial}{\partial x_j}v_i\right]$$

III/ ETUDE DU CHAMP TOURBILLON

III.1) Définition

Un écoulement sera dit **rotationnel** ou enore **tourbillonaire** si sa vorticité est non nulle en certains points de l'espace ; son champ tourbillon sera alors défini par :

$$\vec\Omega(M,t) = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}(\vec v_R) \neq \vec 0$$

En conséquence immédiate, on peut dire qu'un tel écoulement est à circulation non conservative là où il est tourbillonaire et on aura par application du théorème de Stokes :

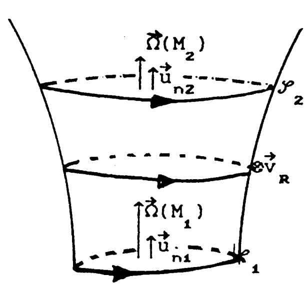
$$\forall(\Gamma) \quad \oint_\Gamma \vec v_R\cdot d\vec l = \iint_{\mathcal S}\overrightarrow{rot}(\vec v_R)\,d\mathcal S.\vec u_n = 2\iint_{\mathcal S}\vec\Omega(M,t)\,d\mathcal S.\vec u_n$$

Ainsi, la circulation du champ d'écoulement sur tout contour fermé (Γ) est égal au double du flux du champ tourbillon à travers toute surface s'appuyant sur ce contour (Γ).

III.2) Flux du champ tourbillon

De par sa définition même, on a :

$$\boxed{\mathrm{div}(\vec\Omega) = 2.\mathrm{div}(\overrightarrow{rot}(\vec v_R)) = 0}$$



En d'autres termes, le champ tourbillon est à flux conservatif. Ainsi, en considérant un tube de champ tourbillon et deux sections droites de ce tube, on aura :

$$\iint_{\mathcal S_1}\vec\Omega(M_1)\cdot d\mathcal S_1\vec u_{n1} = \iint_{\mathcal S_2}\vec\Omega(M_2)\cdot d\mathcal S_2\vec u_{n2}$$

et plus simplement, si le champ tourbillon est pratiquement uniforme sur les section droites :

$$\Omega_1\mathcal S_1 = \Omega_2\mathcal S_2$$

Ainsi, un évasement de tube de champ tourbillon correspondra à une diminution de l'intensité du champ tourbillon.

III.3) Modèle du tourbillon cylindrique

Considérons un écoulement tourbillonaire de symétrie cylindrique caractérisé par le champ tourbillon suivant :

$$0<r_p<a \ : \ \vec{\Omega}(M) = \Omega_o\vec{u}_z \qquad r_p>a \ : \ \vec{\Omega}(M) = \vec{0}$$

En d'autres termes, l'écoulement n'est tourbillonaire que dans un cylindre d'axe $\vec{u}_z$ supposé infini et non tourbillonaire à l'extérieur de ce cylindre. La relation entre le champ d'écoulement et le champ tourbillon et des considérations de symétrie nous conduisent à la conclusion que le champ d'écoulement est nécessairement orthoradial et ne dépend que de r_p. Nous avons donc tout intérêt à calculer sa circulation sur des cercles de rayon r_p et on aura ainsi :

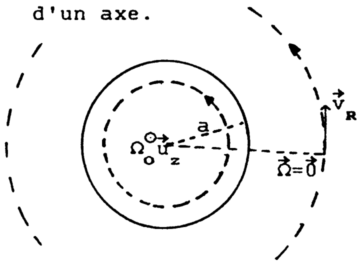
$$\oint_\Gamma \vec{v}_R\cdot d\vec{l} = 2\pi r_p.\upsilon$$

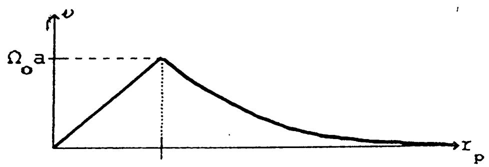
Nous avons vu par ailleurs que cette circulation est égale au flux du champ tourbillon à travers toute surface s'appuyant sur le cercle où est calculée la circulation, donc en particulier à travers la surface limitée par ce cercle ; on aura ainsi :

$$0<r_p<a \ : \ 2\pi r_p.\upsilon = 2\Omega_o\pi r_p^2 \Rightarrow \upsilon = \Omega_o r_p$$

$$r_p> a \ : \ 2\pi r_p.\upsilon = \Omega_o\pi a^2 \Rightarrow \upsilon = \Omega_o a\left(\frac{a}{r_p}\right)$$

Nous obtenons ainsi la distribution des vitesses de l'écoulement, en remarquant au passage qu'à l'intérieur du tourbillon, cette distribution est analogue à celle d'un solide en rotation autour d'un axe.





III.4) Analogue magnétique

La relation entre le champ d'écoulement et le champ tourbillon est donc donnée par :

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}_R(M)) = 2\vec{\Omega}(M)$$

Nous avons des relations analogues en magnétostatique ; en effet :

théorème d'Ampère : $\overrightarrow{rot}(\vec{B}(M)) = \mu_o\vec{J}(M)$

relation champ-potentiel magnétique : $\overrightarrow{rot}(\vec{A}(M)) = \vec{B}(M)$

Ainsi pourrons nous transférer les résultats obtenus dans le domaine de la cinématique des fluides à celui de la magnétostatique ; par exemple, l'étude de l'écoulement à tourbillon cylindrique est tout à fait analogue à celle du champ magnétique créé par un tube de courant uniforme ou encore à celle du potentiel vecteur magnétique créé par un courant solénoïdal infini.

Historiquement, la magnétostatique s'est précisément construite sur le modèle de l'hydrodynamique tourbillonaire. Dès le tout premier texte sur lequel se fonda l'électromagnétisme, on trouve cette représentation tourbillonaire des phénomènes magnétiques. En effet, Jean Christion Oersted écrit dans *Expériences concernant l'effet du conflit électrique sur l'aiguille magnétique* (21 juillet 1820) : "*Il est permis de conclure... des observations que le conflit exécute des mouvements circulaires, car il semble que cette condition soit nécessaire... En outre, il semble que le mouvement circulaire allié à un mouvement progressif doive former une vis ou une ligne spirale selon la longueur du conducteur...*"[1].

Cette représentation sera reprise et amplement développée par J.C. Maxwell dans ses premières moutures de la théorie électromagnétique (vortex) avant d'être abandonnée par ce même Maxwell quand il renonça à donner un *modèle mécanique stricto-sensu* des phénomènes électromagnétiques.

---

[1] Traduction personnelle à partir du texte latin d'Oersted. On pourra assimiler le conflit dont parle Oersted ici à notre champ magnétique.

B/ LES "SOURCES" DU CHAMP ELECTRIQUE

I/ DU DEBIT AU FLUX ET RETOUR

I.1) Champ densité de courant

Par définition, on appellera champ densité de courant de matière le champ défini par :

$$\vec{j}_m(M,t) = \rho_m(M,t).\vec{v}_R(M,t)$$

$\rho_m(M,t)$ représentant le champ scalaire de la masse volumique du fluide et $\vec{v}_R(M,t)$ le champ d'écoulement.

Cette définition est l'expression particulière d'une définition plus générale. En effet, si on appelle X toute grandeur extensive relative à un fluide homogène, c'est-à-dire, dans ce cas, toute grandeur directement proportionnelle à la quantité de matière de fluide (par exemple, la masse, la charge électrique, l'énergie sous toutes ses formes, la résultante cinétique, le moment cinétique,...), on pourra définir un X volumique par :

$$\rho_X = \frac{dX}{d\tau}$$

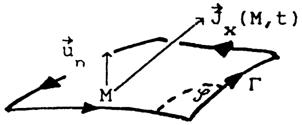
et un champ densité de courant X-ique par :

$$\vec{j}_X = \rho_X\vec{v}_R$$

Par exemple, si X est la charge électrique q, on aura $\vec{j} = \rho_q\vec{v}_R$, et on retrouve le champ densité de courant de conduction. Si X est l'énergie cinétique, on aura : $\rho_{ec} = \frac{1}{2}\rho_m v^2$ et $\vec{j}_{ec} = \frac{1}{2}\rho_m v^2\vec{v}_R$. Enfin, si X représente le volume de fluide, on a $\rho_v = 1$ et le champ densité de courant de volume s'identifie avec le champ d'écoulement.

I.2) Débits

Etant donnée une surface $\mathcal{S}$ orientée soit directement, soit par l'intermédiaire de l'orientation du contour sur lequel elle s'appuie, on appelera débit X-ique le flux du champ densité de courant X-ique à travers cette surface.



$$\boxed{D_X = \iint_{\mathcal{S}} \vec{j}_X(M,t).d\mathcal{S}.\vec{u}_n = \iint_{\mathcal{S}} \rho_X\vec{v}_R d\mathcal{S}.\vec{u}_n}$$

L'unité de D_X est alors celle de X par seconde : en effet, on vérifie aisément que D_X représente la quantité de X qui traverse $\mathcal{S}$ par unité de temps :

$$D_X = \lim_{\delta t \to 0}\left(\frac{\delta X}{\delta t}\right)_D = \left(\frac{dX}{dt}\right)_D$$

l'indice D signifiant que l'on considère la variation de X au cours du temps via un débit.

Un débit énergétique sera ainsi homogène à des watts, un débit d'électricité sera plus communément appelé *intensité électrique* et exprimé en ampère. On définira également les débits volumiques et massiques par :

$$\boxed{D_v = \iint_{\mathcal{S}} \vec{v}_R.d\mathcal{S}\vec{u}_n \qquad D_m = \iint_{\mathcal{S}} \rho_m\vec{v}_R.d\mathcal{S}\vec{u}_n = \iint_{\mathcal{S}} \rho_m dD_v}$$

Le premier débit s'exprime en m^3/s, le second en kg/s.

Dans la suite, on aura souvent à considérer des surfaces fermées orientées vers l'extérieur dites **surfaces de contrôle** : ces surfaces sont indépendantes de l'existence du fluide et choisies de ce fait relativement arbitrairement. Toutefois, on fera en sorte que ces surfaces tiennent compte des symétries de l'écoulement, ou encore qu'elles soient localement ou parallèles, ou perpendiculaires aux lignes de courant.

II/ EQUATION DE REYNOLDS - EQUATION DE CONTINUITE

II.1) Equation de Reynolds

Considérons un écoulement quelconque et une surface de contrôle $\mathcal{S}_c$. Nous nous proposons d'évaluer le taux de variation temporelle d'une grandeur extensive X contenue à l'intérieur de la surface de contrôle à un instant donné. La variation totale δX de X durant δt peut se mettre sous la forme d'une somme de deux termes :

— la variation de X par débit X-ique à travers la surface de contrôle et que l'on peut noter $D_X\delta t$:

— la variation résultant des variations locales de la grandeur X et que l'on peut noter $\left(\frac{dX}{dt}\right)_M\delta t$, la dérivée ainsi introduite étant appelée **dérivée locale**.

On aura donc : $$\delta X = D_X\delta t + \left(\frac{dX}{dt}\right)_M\delta t$$

En faisant alors tendre δt vers 0, la **dérivée (temporelle) totale** de X aura pour expression :

$$\frac{dX}{dt} = \left(\frac{dX}{dt}\right)_D + \left(\frac{dX}{dt}\right)_M = D_X + \left(\frac{dX}{dt}\right)_M$$

$$\boxed{\frac{dX}{dt} = \oint_{\mathscr{S}_c} \rho_X \vec{v}_R \cdot d\mathscr{S}\vec{u}_n + \left(\frac{dX}{dt}\right)_M}$$

La dérivée totale de toute grandeur X à l'intérieur d'une surface de contrôle $\mathscr{S}_c$ est égale à la somme du débit X-ique à travers cette surface et de la dérivée locale de la grandeur X : c'est l'équation de Reynolds (Osborne, 1842-1912), fondamentale dans l'étude de tous les phénomènes de transport.

II.2) Equation locale de Reynolds

Déterminons l'expression de la dérivée locale de X. On a :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_M = \frac{d}{dt}\int_{\mathcal{V}c} \rho_X(M,t)d\tau$$

$\mathcal{V}_c$ représentant le volume dit de contrôle à l'intérieur de la surface de contrôle $\mathscr{S}_c$; or cette dernière surface étant choisie arbitrairement fixe dans l'espace, on peut donc permuter la dérivation temporelle et l'intégration spatiale. On aura donc :

$$\left(\frac{dX}{dt}\right)_M = \int_{\mathcal{V}c}\left[\frac{\partial}{\partial t}\rho_X(M,t)\right]d\tau$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème d'Ostrogradski, on a :

$$D_X = \oint_{\mathscr{S}_c} \rho_X \vec{v}_R \cdot d\mathscr{S}\vec{u}_n = \int_{\mathcal{V}c} \mathrm{div}(\rho_X \vec{v}_R)d\tau$$

Ainsi donc : $$\frac{dX}{dt} = \int_{\mathcal{V}c}\left[\mathrm{div}(\rho_X \vec{v}_R) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_X\right]d\tau$$

Or, ce qui provoque la variation de X dans $\mathcal{V}_c$ peut être dû localement à l'existence de **sources** caractérisées par une densité volumique de débit X-ique $\rho_{DX}(M,t)$ positive ou de **puits** dont la densité volumique de débit X-ique est négative. On a alors :

$$\frac{dX}{dt} = \int_{\mathcal{V}c} \rho_{DX} d\tau$$

En identifiant les termes et en tenant compte du fait que la surface de contrôle est arbitraire, il vient finalement :

$$\boxed{\mathrm{div}(\rho_X \vec{v}_R) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_X = \rho_{DX}}$$

C'est l'équation locale de Reynolds qui n'est que l'expression de l'équation intégrée appliquée à la surface de contrôle élémentaire

enfermant le volume élémentaire $d\tau$.

II.3) Conservation - Equation de continuité

On dira alors qu'une grandeur X se conserve si, quelque soit la surface de contrôle, sa dérivée totale est nulle. On a alors :

$$\oint_{\mathscr{S}_c} \rho_X \vec{v}_R \cdot d\mathscr{S}\vec{u}_n + \left(\frac{dX}{dt}\right)_M = 0$$

En d'autres termes, toutes variation locale de X se traduira par un débit X-ique à travers $\mathscr{S}_c$ et réciproquement.
Localement, on pourra donc écrire :

$$\boxed{\mathrm{div}(\rho_X \vec{v}_R) + \frac{\partial}{\partial t}\rho_X = 0}$$

C'est **l'équation de continuité** traduisant la continuité de la grandeur X dans l'écoulement.
Cette dernière équation est d'une importance fondamentale en physique et traduit donc localement le caractère de conservation de toute grandeur extensive. Appliquée à la charge électrique, elle traduit ainsi la conservation de l'électricité ; appliquée à la masse, elle traduit la conservation de la matière ; etc...
Remarqons que cette équation peut aussi s'écrire sous la forme suivante :

$$\vec{v}_R \cdot \vec{\nabla}(\rho_X) + \frac{\partial}{\partial t}(\rho_X) + \rho_X \mathrm{div}(\vec{v}_R) = 0$$

On introduit alors l'opérateur **dérivée particulaire** $\frac{D}{Dt}$ (notation de Stokes) défini par : $\frac{D}{Dt} = \vec{v}_R \cdot \vec{\nabla} + \frac{\partial}{\partial t}$
Cet opérateur représente en quelque sorte une dérivée (temporelle) totale appliquée aux grandeurs intensives et l'équation de continuité peut aussi s'exprimer par :

$$\boxed{\rho_X \cdot \mathrm{div}(\vec{v}_R) + \frac{D}{Dt}\rho_X = 0}$$

III) ETUDE DES ECOULEMENTS INCOMPRESSIBLES

III.1) Définition

Un fluide sera dit incompressible si sa masse volumique est uniforme dans l'espace et constante dans le temps. La dérivée particulaire de cette masse volumique sera donc nulle et on aura :

$$\mathrm{div}(\vec{v}_R) = 0$$

Inversement, si un écoulement répond à cette dernière condition, alors la dérivée particulaire de sa masse volumique doit être nulle. Il peut en être ainsi pour un écoulement gazeux, un gaz étant pourtant le prototype du fluide compressible. On définira donc un **écoulement incompressible** comme étant un écoulement dont la divergence du champ d'écoulement est nulle en tout point et à tout instant :

$$\boxed{\text{écoulement incompressible} \Leftrightarrow \mathrm{div}(\vec{v}_R) = 0}$$

Il en résulte immédiatement deux conséquences :

— qu'un tel écoulement est à **débit volumique conservatif** et donc, par exemple, que le débit volumique entrant dans un tube de courant et égal au débit volumique sortant de ce tube.

— qu'un tel écoulement dérive d'un potentiel vecteur, c'est-à-dire qu'il existe un champ vectoriel $\vec{u}(M,t)$ tel que :

$$\vec{v}_R(M,t) = \overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{u}(M,t))$$

Ce potentiel vecteur permettra alors de calculer le débit volumique par intégration sur un contour fermé puisque l'on a, conformément au théorème de Stokes :

$$D_\upsilon = \iint_{\mathscr{S}_f} \vec{v}_R . d\mathscr{S}\vec{u}_n = \oint_\Gamma \vec{u}.d\vec{l}$$

III.2) Ecoulement incompressible irrotationnel

Dire que l'écoulement est irrotationnel, c'est dire que :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{v}_R) = \vec{0}$$

En d'autres termes, le champ d'écoulement est à circulation conservative et il existe un potentiel scalaire $\varphi(M,t)$ tel que :

$$\vec{v}_R(M,t) = +\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi[M,t])$$

Remarquons qu'à notre connaissance, c'est le seul cas où le gradient est précédé du signe "+" : il ne faut voir là que le résultat d'une habitude qu'il serait peut-être judicieux de corriger, car rien ne légitime vraiment ce choix, alors qu'un souci de cohérence et de rationalisation inclinerait à choisir le signe "-". Mais n'oublions pas que l'inertie et la conservation sont des concepts clés de la physique...

Toujours est-il que dans le cas d'un écoulement incompressible irrotationnel on aura, en absence de source ou de puits :

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}[\varphi]) = \Delta\varphi = 0$$

Autrement dit, le potentiel scalaire d'écoulement obéit à une équation de Laplace. Ainsi, lorsque l'écoulement présente une symétrie sphérique, on aura :

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\cdot\frac{d^2}{dr^2}(r\varphi) = 0 \Rightarrow r\varphi = \alpha + \beta r \Rightarrow \varphi(r) = \frac{\alpha}{r} + \beta$$

Si l'on pose par ailleurs que le potentiel doit être nul à l'infini, on en conclut que le potentiel d'écoulement est un potentiel en $\frac{1}{r}$, analogue au potentiel newtonien.

III.3) Ecoulement incompressible irrotationnel à source ponctuelle

Considérons maintenant un écoulement incompressible irrotationnel généré par une source ponctuelle de débit massique D_s située en O, en supposant que l'écoulement présente une symétrie sphérique (un peu analogue aux fontaines-boulles que l'on voit sur certains squares). Puisqu'il y a une source, il faut utiliser l'équation locale de Reynolds relative à la masse (X = m) et donc, si l'on désigne par ρ_o la masse volumique du fluide (constante par hypothèse), on a :

$$\mathrm{div}(\rho_o\vec{v}_R) = \rho_{Dm}$$

Soit encore :

$$\mathrm{div}(\vec{v}_R) = \rho_{Dm}/\rho_o$$

On notera déjà l'analogie entre cette équation et l'équation de Gauss liant le champ électrique $\vec{E}$ à la densité d'électricité ρ_q :

$$\mathrm{div}(\vec{E}) = \rho_q/\varepsilon_o$$

Le problème présentant une symétrie sphérique et l'écoulement étant irrotationnel, le potentiel φ ne peut dépendre que de r. On aura donc :

$$\vec{v}_R = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\varphi) = \frac{d\varphi}{dr}\vec{u}_r$$

Le champ d'écoulement est donc ici radial. Si l'on applique le théorème d'Ostrogradski, on a en toute généralité :

$$\oint_{\mathscr{S}_c} \vec{v}_R \cdot d\mathscr{S}\vec{u}_n = \frac{1}{\rho_o}\sum D_{si}$$

$\sum D_{si}$ représentant la somme des débits massiques des sources-puits se trouvant à l'intérieur de la surface de contrôle. Dans le cas présent, en choisissant comme surface de contrôle une sphère de rayon r et de centre O, on aura donc :

$$v.4\pi r^2 = \frac{1}{\rho_o}D_s$$

ou encore, en utilisant le fait que $\vec{v}_R$ est un champ radial :

$$\boxed{\vec{v}_R(M) = \frac{D_s}{4\pi\rho_o}\cdot\frac{\vec{OM}}{OM^3}}$$

On ne peut s'empêcher de rapprocher cette expression du champ créé par une charge ponctuelle :

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{\vec{OM}}{OM^3}$$

Sachant par ailleurs que $\vec{OM}/OM^3 = \vec{grad}(-\frac{1}{OM})$ et en posant de plus que le potentiel scalaire d'écoulement est nul à l'infini, on a donc :

$$\varphi(M) = -\frac{D_s}{4\pi\rho_o}\cdot\frac{1}{OM}$$

à rapprocher évidemment du potentiel scalaire coulombien V(M) :

$$V(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{OM}$$

III.4) Résolution de l'équation de Poisson

L'origine de l'analogie formelle précédente réside en fait dans l'existence de deux équations de Poisson analogues régissant les deux phénomènes. En effet, on aura d'une part :

$$\Delta(-\varphi) + \rho_{Dm}/\rho_o = 0$$

et d'autre part :

$$\Delta V + \rho_q/\varepsilon_o = 0$$

Or, on peut trouver l'expression générale du potentiel scalaire d'écoulement en considérant une source étendue de volume $\mathcal{V}$ caractérisée par une densité volumique de débit massique $\rho_{Dm}(N)$. On aura en effet en considérant un élément $d\tau$ de la source :

$$d\varphi(M) = -\frac{\rho_{Dm}(N)d\tau}{4\pi\rho_o}\cdot\frac{1}{NM}$$

Soit, en intégrant sur tout le volume $\mathcal{V}$ de la source :

$$-\varphi(M) = \int_{\mathcal{V}}\frac{\rho_{Dm}(N)d\tau}{4\pi\rho_o}\cdot\frac{1}{NM}$$

On obtient là la solution générale de l'équation de Poisson en hydrodynamique. En observant les correspondances analogiques suivantes :

$$-\varphi(M) \longleftrightarrow V(M)\ ;\ \rho_{Dm}(N) \longleftrightarrow \rho_q(N)\ ;\ \rho_o \longleftrightarrow \varepsilon_o$$

on obtiendra ainsi l'expression générale du potentiel électrostatique :

$$V(M) = \int_{\mathcal{V}}\frac{\rho_q(N)d\tau}{4\pi\varepsilon_o}\cdot\frac{1}{NM}$$

et plus généralement, si l'on a une équation de Poisson de la forme :

$$\Delta f(M) + g(M) = 0$$

on peut affirmer que sa solution générale sera de la forme :

$$\boxed{f(M) = \int_{\mathcal{V}}\frac{g(N)d\tau}{4\pi}\cdot\frac{1}{NM}}$$

Pour conclure, on remarquera que, dans ce qui précède, il ne s'agit en fait que d'analogies formelles et, jusqu'à preuve du contraire, absolument pas d'analogies phénoménologiques (dans un cas il y a mouvement, alors que dans l'autre, le phénomène est statique). Par ailleurs, si l'analogie fonctionne pour les champs, force est de constater qu'il n'y a pas d'analogue de la force de Coulomb en hydrostatique. Il n'en reste pas moins que l'analogie formelle présente de nombreux attraits (ne serait-ce que mnémotechniques) qui nous ferait presque rêver à une analogie phénoménologique... et on comprend mieux pourquoi l'ensemble des physiciens du XIXè siècle se sont tant accrochés au concept d'un éther immatériel, support des phénomènes électromagnétiques : après-tout, pour parler d'un champ d'écoulement, il faut d'abord qu'il y ait un fluide.

* * *