

RSUEN

STAGE
*UTILISATION DES ANALOGIES
EN PHYSIQUE*

ANALOGIES INTERNES
A
L'ELECTROMAGNETISME

6 janvier 1992 - 10 janvier 1992

ANALOGIES INTERNES A L'ELECTROMAGNETISME

On se propose ici de mettre en lumière un certain nombre d'analogies existant au sein même de l'électromagnétisme, le choix proposé étant loin d'être exhaustif. Pour mieux saisir l'essence de ces analogies, il convient toutefois de construire l'électromagnétisme à partir de ce qui constitue ses équations fondamentales, à savoir les **équations de Maxwell** (James-Clerk, 1831-1879), celles-ci étant admises au titre de postulats. C'est une démarche en partie analogue à celle suivie par Heinrich Hertz (1857-1894) en 1890 dans deux mémoires célèbres et devenus classiques : "Equations fondamentales de l'électrodynamique pour des corps au repos" et "Equations fondamentales de l'électrodynamique pour des corps en mouvement".

I/ EQUATIONS DE MAXWELL

I.1) Enoncé

On admettra que l'ensemble des propriétés électromagnétiques de l'espace sont traduites par les champs suivants :

— les champs sources au nombre de deux, à savoir le *champ scalaire densité d'électricité* $\rho_q(M,t)$ et le *champ vectoriel densité de courant* $\vec{J}(M,t)$;

— les champs générés, également au nombre de deux, à savoir le *champ électrique* $\vec{E}(M,t)$ et le *champ magnétique* $\vec{B}(M,t)$.

Etant admise l'existence de ces champs, leur interdépendance est traduite par le truchement des équations suivantes :

$$(I) \quad \text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$(II) \quad \text{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$(III) \quad \text{div}(\vec{E}) = \rho_q / \epsilon_0$$

$$(IV) \quad \text{rot}(\vec{B}) - c^{-2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{J}$$

ϵ_0 désignant la permittivité électrique du vide, μ_0 la perméabilité magnétique du vide et c la célérité de la lumière dans le vide, ces trois constantes étant liées par la relation :

$$\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$$

Telles qu'elles sont données, ces équations sont applicables éga-

lement dans les milieux matériels si l'on considère que ρ_q et \vec{J} représentent des densités **totales**, intégrant les densités de polarisation et d'aimantation. On sait que ces dernières sont liées au champ de polarisation $\vec{P}(M,t)$ (densité volumique de moments électriques) et au champ d'aimantation $\vec{M}(M,t)$ (densité volumique de moments magnétiques). Nous n'aurons cependant pas à tenir compte de ces aspects dans ce qui suit.

On a écrit les équations de Maxwell en séparant les termes de champs générés des termes de sources. On constate par ailleurs que les équations (I) et (II) ne font pas intervenir les sources : ce sont les **équations intrinsèques** du champ électromagnétique (ou encore premier groupe des équations de Maxwell, la (III) et la (IV) en constituant le deuxième groupe).

Telles quelles, ce sont des équations locales et surtout ce sont des équations **linéaires** : c'est là que trouve son origine le fameux **théorème de superposition** dont on connaît l'importance en électrocinétique. Ce théorème de superposition permet également d'utiliser toutes les ressources de l'analyse de Fourier et donc de privilégier l'étude des champs harmoniques en particulier et plus généralement les ondes dites planes.

I.2) Equations intégrées

I.2.a) Conservation du flux magnétique

En appliquant le théorème d'Ostrogradski à l'équation (I) on a :

$$\oint_{\mathcal{V}} \vec{B} \cdot d\vec{\mathcal{U}}_n = 0$$

Autrement dit, en considérant un tube de champ magnétique, le flux magnétique entrant dans le tube est égal au flux magnétique sortant.

Bien que l'équation (I) ressemble à l'équation (III), elle traduit une différence fondamentale entre le domaine du magnétisme et celui de l'électricité : elle traduit en effet que, contrairement aux sources électriques, il n'existe pas de sources monopolaires magnétiques macroscopiques et formalise en quelque sorte la très vieille expérience des aimants brisés (on ne peut séparer les deux pôles d'un aimant).

I.2.b) Théorème de Faraday-Hertz

La forme de l'équation (II) incline à l'intégrer sur une surface et à utiliser le théorème de Stokes :

$$-\int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{B} \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n = -\frac{d\Phi}{dt} = \int_{\mathcal{S}} \text{rot}(\vec{E}) \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n = \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{t}$$

soit :

$$e = -\frac{d\phi}{dt}$$

C'est la loi trouvée empiriquement par Faraday (Michaël, 1791-1867) et formalisée par Hertz, stipulant que la mal nommée force électromotrice e induite le long d'un contour fermé est égale à l'opposé du taux de variation temporelle du flux magnétique à travers ce contour, le signe "-" traduisant la loi d'inertie électromagnétique de Lenz.

I.2.c) Théorème de Gauss

La forme de l'équation (III) incline à l'intégrer sur un volume, ce qui donne par application du théorème d'Ostrogradski :

$$\frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho_q d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{int} = \int_V \text{div}(\vec{E}) d\tau = \oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n$$

$$\oint_{\mathcal{S}} \vec{E} \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n = \frac{1}{\epsilon_0} \sum q_{int}$$

$\sum q_{int}$ représentant les charges à l'intérieur du volume \mathcal{V} limité par la surface fermée \mathcal{S} : c'est le **théorème de Gauss** (Carl Friedrich, 1777-1855) stipulant que le flux du champ électrique à travers une surface fermée est proportionnel à la somme des charges se trouvant à l'intérieur de cette surface.

I.2.d) Théorème d'Ampère-Maxwell

Considérons enfin la quatrième équation en supposant que le champ électrique ne varie pas trop vite, ce qui permet de négliger le terme $c^{-2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ (régime quasi-stationnaire). La forme obtenue incite à intégrer sur une surface et à utiliser le théorème de Stokes, ce qui donne :

$$\int_{\mathcal{S}} \text{rot}(\vec{B}) \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n = \oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{t} = \mu_0 \int_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot d\mathcal{S} \vec{u}_n = \mu_0 \sum I_i$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{t} = \mu_0 \sum I_i$$

C'est le théorème d'Ampère (André-Marie, 1775-1836) stipulant que la circulation du champ magnétique sur un contour fermé est proportionnelle à la somme des intensités électriques traversant ce

contour : le théorème d'Ampère est à la magnétostatique ce que le théorème de Gauss est à l'électrostatique.

C'est Maxwell qui a introduit le terme de courant dit de déplacement égal à $c \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ pour une raison que nous verrons plus loin. On remarquera au passage qu'en absence de courant, la quatrième équation est alors symétrique, voire analogue à l'équation de Faraday-Hertz : toute variation du flux électrique à travers un contour fermé induira le long de ce contour une circulation de champ magnétique non nulle (force magnéto-motrice induite). L'existence du facteur c^{-2} nécessite que les variations de $\vec{E}(M,t)$ soient très rapides pour que l'effet soit observable.

II/ CONSEQUENCES IMMEDIATES DES EQUATIONS DE MAXWELL

II.1) Conservation de l'électricité

Considérons l'équation (IV) et appliquons lui l'opérateur divergence :

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{B})) - c^{-2} \text{div} \left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -c^{-2} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(\vec{E}) = \mu_0 \text{div}(\vec{J})$$

En utilisant l'équation (III) et la relation entre les coefficients électromagnétiques du vide, il vient :

$$\text{div}(\vec{J}) + \frac{\partial}{\partial t} \rho_q = 0$$

On trouve ici une équation de continuité traduisant le principe de conservation de l'électricité de Franklin (Benjamin, 1706-1790). Sous forme intégrée, on aura donc :

$$\frac{Dq}{Dt} = \left(\frac{dq}{dt} \right)_D + \left(\frac{dq}{dt} \right)_M = I + \left(\frac{dq}{dt} \right)_M = 0$$

En d'autres termes, toute variation locale de charge électrique à l'intérieur d'une surface de contrôle se traduira par l'apparition d'un courant électrique traversant cette surface de contrôle.

C'est là l'une des origines de l'introduction par Maxwell du courant de déplacement : en effet, où l'on acceptait le théorème d'Ampère, mais alors il fallait rejeter le principe de conservation de l'électricité, ou l'on acceptait ce dernier (et un physicien répugnera toujours à abandonner avec légèreté un principe de conservation), et il fallait alors modifier le théorème d'Ampère à l'aide d'un terme nul en régime stationnaire ou très petit en régime quasi-stationnaire : c'est ce qu'a fait Maxwell.

II.2) Existence de potentiels

L'équation (I) implique que le champ magnétique est à flux conservatif et donc :

$$\exists \vec{A}(M,t) / \vec{B}(M,t) = \text{rot}(\vec{A}(M,t))$$

$\vec{A}(M,t)$ est le **potentiel vecteur magnétique**. Comme on le voit, ce potentiel n'est pas défini de façon univoque puisque toute solution augmentée d'un gradient de champ scalaire quelconque sera aussi solution ; cet aspect des choses, a priori gênant (un physicien préfère l'univocité des concepts qu'il introduit), permettra néanmoins d'ajouter pour les besoins de la cause une condition supplémentaire régissant ce potentiel (condition de jauge). Par ailleurs, $\vec{A}(M,t)$ sera souvent très commode pour calculer le flux de $\vec{B}(M,t)$ à travers un contour fermé.

En utilisant alors l'équation (II), on obtient :

$$\text{rot}(\vec{E}) + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(\vec{A}) = \text{rot}(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}) = \vec{0}$$

Ainsi :

$$\exists V(M,t) / \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\text{grad}(V)$$

$V(M,t)$ est le **potentiel scalaire électrique**, lui aussi non défini de façon univoque.

III/ PREMIERE ANALOGIE : EQUATIONS FONDAMENTALES EN REGIME STATIONNAIRE

En régime stationnaire, les équations de Maxwell prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E}) &= \rho_q / \epsilon_0 & \text{div}(\vec{B}) &= 0 \\ \text{rot}(\vec{E}) &= \vec{0} & \text{rot}(\vec{B}) &= \mu_0 \vec{J} \end{aligned}$$

On constate immédiatement que champ électrique et magnétique sont alors découplés, ce qui permet d'étudier indépendamment l'un de l'autre le domaine de l'électrostatique et celui de la magnétostatique. Chacun de ces domaines sont donc régis par deux équations fondamentales qui peuvent se réduire à une seule si l'on considère les potentiels. On a en effet :

$$\Delta V + \rho_q / \epsilon_0 = 0 \qquad \Delta \vec{A} + \mu_0 \vec{J} = \text{grad}(\text{div}(\vec{A}))$$

On constate alors que la magnétostatique n'est pas d'emblée régie par une équation de Poisson. Mais, en utilisant la non-univocité de $\vec{A}(M)$, on peut ajouter une condition supplémentaire pour qu'il

en soit ainsi, et la condition qui s'impose ici est :

$$\text{div}(\vec{A}) = 0$$

C'est la **jauge de Coulomb** qui impose au potentiel vecteur d'être un champ à flux conservatif... et donc d'être dérivable lui-même d'un potentiel vecteur. Ainsi, lorsque $\vec{A}(M)$ obéit à la jauge de Coulomb, il est régi par une équation de Poisson.

Or nous connaissons la solution générale d'une telle équation, solution que l'on peut retrouver aisément en reconstruisant l'électrostatique à partir du champ électrique créé par une charge ponctuelle dont on trouve l'expression par application du théorème de Gauss (potentiel coulombien). En superposant des potentiels coulombiens, on obtient en effet :

$$V(M) = \int_V \frac{\rho_q(N) d\tau}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{NM}$$

En utilisant le tableau de correspondance suivant :

$$V(M) \longleftrightarrow \vec{A}(M) \quad \rho_q(N) \longleftrightarrow \vec{J}(N) \quad 1/\epsilon_0 \longleftrightarrow \mu_0$$

on obtient :

$$\vec{A}(M) = \int_V \frac{\mu_0 \vec{J}(N) d\tau}{4\pi} \cdot \frac{1}{NM}$$

Connaissant $\vec{A}(M)$ (dont la divergence est ici automatiquement nulle par contrainte de jauge), on en déduit le champ magnétique :

$$\vec{B}(M) = \text{rot}(\vec{A}(M)) = \int_V \frac{\mu_0 \vec{J}(N) d\tau}{4\pi} \cdot \frac{\vec{NM}}{NM^3}$$

C'est la loi de **Biot et Savart** (en fait formalisée par Laplace). On peut généraliser cette expression pour toute distribution \mathcal{D} de courants en introduisant l'élément source $d\vec{E}(N)$ tel que :

$$\begin{aligned} d\vec{E}(N) &= \vec{J}(N) d\tau \quad (\text{distribution volumique}) \\ &= I \cdot d\vec{l} \quad (\text{distribution linéique}) \\ &= \vec{K}(N) d\Sigma \quad (\text{distribution surfacique}) \end{aligned}$$

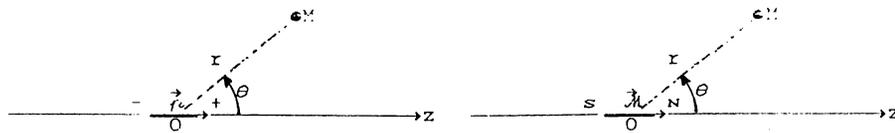
et on aura :

$$\vec{A}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0 d\vec{E}(N)}{4\pi} \cdot \frac{1}{NM} \quad \text{et} \quad \vec{B}(M) = \int_{\mathcal{D}} \frac{\mu_0 d\vec{E}(N)}{4\pi} \cdot \frac{\vec{NM}}{NM^3}$$

IV/ DEUXIEME ANALOGIE : DIPOLES

Il n'est pas question ici de refaire tous les calculs relatifs respectivement au dipôle électrique et au dipôle magnétique. On dressera cependant un tableau analogique mettant en lumière le parallélisme des formules trouvées (ces formules valant lorsque le

point M est loin du dipôle).



$$V(M) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3}$$

$$\vec{E}(M) = -\text{grad}(V[M])$$

$$\vec{E}(M) \approx -\text{grad} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3} \right)$$

$$\vec{A}(M) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \cdot \vec{OM}}{OM^3}$$

$$\vec{B}(M) = \text{rot}(\vec{A}[M])$$

$$\vec{B}(M) \approx -\text{grad} \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \cdot \vec{OM}}{OM^3} \right)$$

On constate qu'en définitive, champ électrique et champ magnétique sont formellement analogues, bien qu'usuellement l'un dérive d'un potentiel scalaire, alors que l'autre dérive d'un potentiel vecteur. Cette analogie conduit évidemment à ce que la distribution des lignes de champ soit strictement identique dans un cas comme dans l'autre (et on obtiendrait une distribution analogue avec un doublet hydraulique constitué d'une source et d'un puits de même débit en valeur absolue).

On peut alors légitimement se demander où réside l'origine d'une analogie aussi forte. Il suffit pour cela d'observer les équations de Maxwell : rappelons que les solutions données sont valables lorsque le point d'observation M est loin du dipôle, c'est-à-dire que l'on considère dans les deux cas une zone d'espace vide de sources électromagnétiques et dans ce cas, les équations de Maxwell ont pour expression :

$$\text{div}(\vec{E}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{E}) = \vec{0}$$

$$\text{div}(\vec{B}) = 0$$

$$\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$$

Autrement dit, l'électrostatique et la magnétostatique en absence de charge et de courant sont régies par des équations formellement similaires : il est donc normal que l'on obtiennent les mêmes solutions lorsque l'on a éliminé le cas où la charge de la source de champ électrique est non nulle (solution monopolaire). C'est pour cela que l'on parle parfois de potentiel scalaire magnétique d'expression :

$$V_m(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{\vec{M} \cdot \vec{OM}}{OM^3}$$

C'est un potentiel dipolaire, tout comme le potentiel dipolaire électrique, et son existence résulte du fait que le rotationnel du champ $\vec{B}(M)$ est nul en absence de courant. Mais on pourrait tout aussi bien alors parler de potentiel vecteur électrique dont l'expression serait :

$$\vec{A}_e(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{p} \cdot \vec{OM}}{OM^3}$$

l'existence de ce potentiel résultant du fait que la divergence du champ électrique est alors nulle en absence de charge.

On remarquera que l'analogie se poursuit également lorsque l'on considère les actions s'exerçant sur les dipôles :

énergie potentielle dans un champ extérieur	
$\mathcal{E}_p = -\vec{p} \cdot \vec{E}$	$\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$
couple exercé par un champ uniforme	
$\vec{C} = \vec{p} \wedge \vec{E}$	$\vec{C} = \vec{M} \wedge \vec{B}$

etc...

V/ TROISIEME ANALOGIE : CIRCUITS MAGNETIQUES

En présence d'un milieu, il peut être utile d'utiliser le champ excitation magnétique $\vec{H}(M)$ dans les équations de Maxwell de sorte que les équations fondamentales de la magnétostatique ont pour forme :

$$\text{div}(\vec{B}) = 0 \quad \text{rot}(\vec{H}) = \vec{J}_c$$

\vec{J}_c désignant les seuls courants de conduction ; le champ magnétique est alors lié à l'excitation magnétique par la perméabilité magnétique absolue (dans le cas d'un milieu homogène et isotrope) :

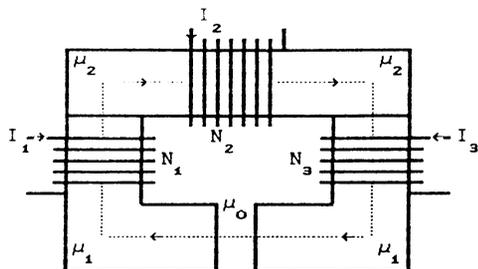
$$\vec{B}(M) = \mu \cdot \vec{H}(M)$$

Dans le cas des milieux ferromagnétiques, cette perméabilité peut dépendre du module de \vec{H} (non linéarités).

Sous forme intégrée, ces équations peuvent s'exprimer de la façon suivante :

- le flux magnétique entrant dans un tube de champ magnétique est égal au flux magnétique qui en sort.
- la circulation de l'excitation magnétique sur un contour fermé est égale à la somme des intensités des courants de conduction traversant ce contour.

Considérons alors à titre d'exemple le circuit magnétique représenté ci-dessous :



Ce circuit est constitué d'un entrefer, de deux noyaux de perméabilité μ_1 et d'une culasse de perméabilité μ_2 . Nous appellerons respectivement S_0 , S_1 et S_2 la section moyenne offerte au champ magnétique \vec{B} dans chacune des parties (et par définition de la notion de section moyenne, nous supposons que \vec{B} est uniforme sur chacune de ces sections) et ℓ_0 , ℓ_1 et ℓ_2 la longueur de la ligne de champ moyenne dans chacune des parties (et nous supposons que le long de chacune de ces portions, \vec{H} est constant en module et tangent à cette ligne de champ moyenne). La première loi fondamentale de la magnétostatique nous permet alors d'écrire :

$$B_0 S_0 = B_1 S_1 = B_2 S_2 = \phi$$

ϕ représentant le flux utile à l'intérieur du circuit. La deuxième loi nous permet d'écrire quant-à-elle :

$$H_0 \ell_0 + H_1 \ell_1 + H_2 \ell_2 = N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3$$

En utilisant le fait que $B = \mu \cdot H$, on obtient :

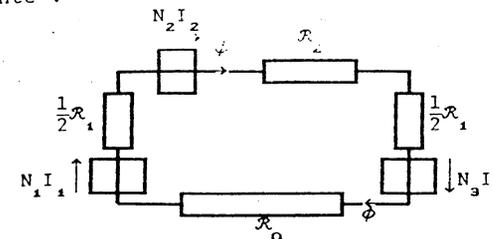
$$\left(\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\ell_0}{S_0} + \frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\ell_1}{S_1} + \frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\ell_2}{S_2} \right) \phi = \sum N_i I_i$$

On constate qu'apparaît un coefficient de la forme $\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\ell}{S}$ que l'on appelle réluctance (en H^{-1}) et que l'expression obtenue présente de fortes similitudes avec la loi dite de Pouillet, bien connue en électrocinétique. En utilisant le tableau de correspondances suivant :

intensité électrique I	\longleftrightarrow	flux magnétique ϕ
forces électro-motrices E	\longleftrightarrow	forces magnéto-motrices NI
résistance R	\longleftrightarrow	réluctance \mathcal{R}

on pourra représenter schématiquement le circuit magnétique de la

manière suivante :



Cette analogie électrocinétique d'un circuit magnétique présente de multiples intérêts :

— Tout d'abord, l'expression de la réluctance est formellement analogue à celle de la résistance d'un conducteur filiforme, la perméabilité jouant ici le rôle de la conductivité. Ainsi peut-on mieux comprendre la signification de ce terme perméabilité magnétique : un milieu de faible perméabilité (comme le vide) est de fait peu "perméable" au champ magnétique, c'est-à-dire "résiste" non pas au passage mais à l'établissement de ce champ pour une excitation donnée.

— De même que les f.e.m. localisent les transformations d'une forme d'énergie (mécanique, chimique) en énergie électrique, les f.m.m. (forces magnéto-motrices) sont ici localisées et traduisent le passage de l'électrique au magnétique.

— Dans l'exemple traité, les réluctances \mathcal{R}_1 et \mathcal{R}_2 sont analogues à des résistances internes de générateurs ou encore aux résistances des fils de connection : on aura donc intérêt à les rendre les plus petites possible et à utiliser des matériaux magnétiquement très perméables (fers doux).

— La perméabilité du vide étant de l'ordre de 1000 fois moins grande que celle des matériaux ferromagnétiques usuels, à section égale 1 mm d'entrefer sera équivalent à environ 1 m de matériau. Autrement dit, toute augmentation de l'entrefer augmentera considérablement la réluctance du circuit et donc, à f.m.m. imposées, diminuera le flux, donc le champ magnétique dans l'entrefer. Aussi sera-t-on conduit à ménager des entrefers les plus faibles possibles, lorsqu'ils sont nécessaires, afin de ne pas avoir à trop "exciter" le circuit (ce qui se traduira en particulier par des pertes Joule dans les bobinages).

On peut développer l'analogie précédente en considérant des branches magnétiques en parallèle, les lois régissant l'association des réluctances étant du type 1901 et donc analogues à celles régissant les résistances. Plus généralement, on pourrait développer une magnéto-cinétique (comme il y a une électro-cinétique) où la loi des noeuds s'exprimerait de la façon suivante : "la somme des flux magnétiques qui convergent vers un noeud de circuit magnétique est égale à la somme des flux magnétiques qui en divergent". La loi des mailles nécessiterait l'introduction de la notion de tension magnétique définie comme étant la circulation de l'excitation magnétique, cette dernière étant analogue au champ électrique en électricité et on pourrait alors énoncer la loi des mailles de la façon suivante : "la somme algébrique des tensions magnétiques sur une maille est nulle". Toutefois, force est de reconnaître qu'une telle généralisation serait de peu d'intérêt, les circuits magnétiques étant usuellement de structure simplissime, ce qui n'est pas le cas des circuits électriques. Aussi se bornera-t-on à cette loi analogue de celle de Pouillet (Claude, 1790-1868) :

$$\left[\sum R_i \right] \phi = \sum N_j I_j$$

* * *