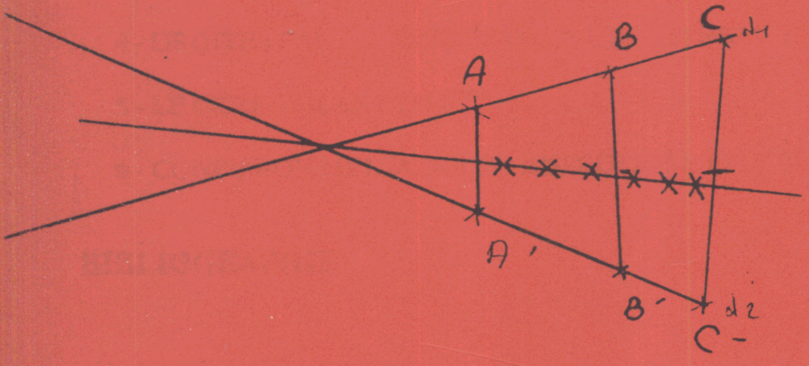
UNIVERSITE de ROUEN - S.C.U.R.I.F.F.

INSTITUT de RECHERCHE
sur
l'ENSEIGNEMENT des MATHEMATIQUES

IREM
tél : 35 14 61 41

Des activités pour raisonner au collège



.Qui sont tous les points O à égale distance de d1 et d2 ?

-On mesure la distance entre le segment[AA'], on cherche la moitié de ce segment.

-On trace la droite : milieu du segment [AA'] jusqu'à l'intersection de d1 et d2, donc tous les point B sont sur cette droite.

BERGUE Daniel, BORREANI Jacqueline, POULAIN Brigitte.

Groupe Didactique de l'IREM de Rouen

IREM de ROUEN

1, rue Thomas Becket - BP 153, 76135 Mont-Saint-Aignan Cédex

TABLE DES MATIERES

I - RAISONNER AU COLLEGE : NOS OPTIONS

Après avoir travaillé sur le passage de la figure à la démonstration *, nous continuons au travers de situations proposées souvent dans les manuels, à approfondir notre réflexion sur le raisonnement. Ces situations sont exploitées de façon à susciter un raisonnement et son explication. Ce sont des activités de construction, de réinvestissement d'outils au sens propre (équerre, règle, etc...) et figuré (propriétés des quadrilatères, triangles, médiatrices, etc...). Diverses par leur contenu, leur environnement, la classe à laquelle elle s'adresse, elles ont cependant un certain nombre de points communs qui sont le reflet d'options quant à l'apprentissage du raisonnement et à la gestion de la classe.

C'est tout d'abord l'importance de **l'expression orale.** La prise en compte de la parole se fait à deux niveaux :

- par les élèves entre eux : en 6ème pour tous les élèves (et plus particulièrement pour ceux en difficulté) l'expression orale permet d'émettre plus aisément des conjectures. Le dialogue entre les élèves les incitent à entrer dans une démarche heuristique en piquant leur curiosité.

- par le professeur plus particulièrement dans les séquences avec la classe entière : il est attentif à favoriser l'expression de toutes les remarques, essayer de tout prendre en considération, sans faire semblant de n'entendre que ce qui lui semblerait mieux convenir à son propos... !!(exemple : Point commun de droites p 21)**

Les diverses confrontations mettent en évidence des conceptions implicites justes ou fausses, des erreurs de raisonnement. Notre propos est de les utiliser comme levier pour faire rebondir les situations, les élèves sont motivés par la volonté de convaincre de la justesse de leur conception. De fait, le problème qui alimente l'activité de raisonnement est posé par eux (voir par exemple angle obtus dans un triangle dans : une utilisation du logiciel "géomètre" p 11). Le problème peut aussi être posé par le professeur (exemple : les renseignements manquants dans Le cerf-volant p 35).

Par ailleurs au cours des recherches de solution, il est souvent sollicité des élèves l'expression des propriétés de géométrie. D'où **une confrontation provoquée de la figure et des propriétés.** Cette confrontation va permettre de faire évoluer le statut du dessin vers celui de la figure. Ce changement reste souvent au niveau implicite. Dans les activités, l'erreur sert de point d'entrée, elle n'est pas pointée par le professeur comme incohérence entre la propriété proposée et la figure. L'entrée a lieu suivant deux directions :

* *De la figure vers la démonstration tomes I et II IREM de Rouen*
** *Les activités citées sont regroupées dans la partie II*

- "on voit" sur le dessin des propriétés qui ne sont pas celles de la figure (exemple : Point commun de droites en 6ème p 21) ;

- les élèves "voient" des propriétés avant même de faire le dessin et c'est ce dessin qui vient contredire leur conjecture (exemple : Confusion médiatrice - bissectrice en 6ème p 37).

Dans toutes les activités, il s'agit pour les élèves **de prouver leurs conjectures**. Quels outils ont-ils mis en oeuvre ?

La recherche nécessite souvent un changement de point de vue sur la figure. Lorsque la figure est donnée, la justification nécessite de la part des élèves un autre regard : ils doivent isoler des "morceaux de figures" (exemple : Droites particulières dans le triangle en 4ème p 29). Les élèves ont une conception globalisante de la figure ou des propriétés. Penser à un carré comme étant un rectangle est particulièrement déstabilisant en 6ème, un quadrilatère possédant l'ensemble de toutes ses propriétés simultanément (exemple : Construire un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux en 6ème p 25 et Le cerf-volant p 35).
Un autre outil de preuve, utilisé au cours de certaines activité, est la recherche d'un contre-exemple (exemple : Confusion médiatrice-bissectrice p 37) mais pas toujours exhibé (exemple : Une utilisation du logiciel géomètre en 5ème p 11).

Enfin de même que l'oral, **l'écrit** joue un rôle particulier. Il est au départ une simple transcription de l'oral (indépendant en particulier de l'orthographe). On décrit, on explique, on justifie à sa façon. Dans cette phase, aucune volonté de formalisation n'est présente pour le professeur. Cependant au fur et à mesure que l'année scolaire se déroule le niveau de langage accepté va progressivement évoluer dans un souci de communication claire des résultats (exemples présents dans toutes les activités).

Les situations qui sont décrites, montrent toutes, l'émergence **d'obstacles cognitifs** pour les élèves. Cela peut être aussi des représentations fausses. Nous prenons ces obstacles en compte pour faire évoluer la situation et permettre aux élèves de tenter de les franchir. Parfois nous nous trouvons dans la situation suivante : nous proposons une activité dans le cadre de notre progression et malgré notre analyse à priori nous sommes confrontés à des obstacles inattendus. Une attitude possible est d'ignorer ces "dysfonctionnements" pour conserver le déroulement prévu. Ceci correspondrait pour nous à une rupture du contrat de classe, c'est ce que nous refusons. Pour tenir compte des propositions des élèves, il faut donc être capable de construire rapidement des stratégies de réponses. C'est en cela que le concept de conflit cognitif est un outil précieux. Plutôt que de répondre seulement par des fiches d'aide, par un cours formel ou par des exercices répétitifs, nous préférons instaurer lorsque cela est possible un débat dans la classe pour qu'il soit le moteur du franchissement de ces obstacles.

Parallèlement à l'évolution de la situation, se construit le savoir des élèves et se modifient leurs représentations. Seulement le franchissement des obstacles est alors fortement contextualisé et l'obstacle peut éventuellement resurgir. Certaines des situations se prêtent plus facilement que d'autres à une décontextualisation. Par exemple dans "Point commun de droites", deux obstacles sont présents : différenciation langage naturel, langage mathématique et représentation de droites. L'obstacle est levé par les interactions entre les élèves. Cette situation servira de référence ultérieure dans d'autres exercices.

Une autre constante dans notre mode fonctionnement est la mise en place **d'une relation très forte élève-savoir** qui est médiatisée non pas seulement par le professeur mais par les élèves. L'influence des autres élèves sur la construction d'un savoir est renforcée par une gestion de classe souvent en groupe pour la recherche. Emettre des conjectures, convaincre ou se convaincre de leur justesse dans un débat mené dans le groupe ou la classe permet de rejeter l'erreur ou de valider la conjecture. Se mettre d'accord pour la production d'une réponse unique favorise l'émergence d'une argumentation. (ex : Droites particulières dans le triangle en 4ème p 29).
Le savoir ainsi construit est institutionnalisé ensuite. Cette partie n'est pas décrite dans les activités proposées.

Ces quelques situations illustrent la possibilité de raisonner au collège dès la sixième. Pourtant, elles ne sont pas des moments isolés dans notre fonctionnement. Il n'y a pas que des activités spécifiques, beaucoup peuvent permettre de raisonner à condition de provoquer ou de saisir les occasions.

La diversité, la richesse des productions des élèves dans ce cadre est un garant contre la routine, pour conserver notre créativité.

Notre souci est de donner aux élèves des outils, outils méthodologiques au même titre que connaissances de propriétés, pour leur permettre de chercher, de gérer leurs apprentissages. Pour (r)éveiller leur curiosité notre demande n'est plus seulement résoudre un problème mais aussi se poser un problème, le faire évoluer à partir de ses erreurs, de ses confusions, de la prise de conscience de ses implicites. C'est pourquoi, nous souhaitons partir de "représentations-consensus" de la classe ou du groupe. Sans faire une analyse précise des types d'erreurs commises par les élèves, nous essayons de faire évoluer le statut de l'erreur dans le cours même de l'apprentissage.

Si l'état d'esprit dans lequel nous travaillons est reproductible, il est probable que chaque situation décrite est très contextualisée et donc non reproductible telle qu'elle dans une autre classe.

II - DESCRIPTION DES ACTIVITES

1 - UNE UTILISATION DU LOGICIEL "GEOMETRE" EN 5ème

Description d'une séquence autour de l'orthocentre et du centre du cercle circonscrit à un triangle ; découverte de quelques propriétés.

Introduction

Les programmes de 6ème et 5ème proposent une initiation progressive au raisonnement. En géométrie, le raisonnement est souvent considéré comme synonyme de démonstration et devrait être pris en compte selon trois phases :

1) une appropriation du problème qui se fait par l'intermédiaire de la construction et l'explicitation des données sous forme d'"hypothèses".
2) une recherche de la solution qui demande un tri parmi des propriétés connues pour déterminer celles pouvant être utiles : va-et-vient constant du regard et de l'esprit entre le cas particulier de la figure et l'expression générale des propriétés ("cas particulier de la figure" qui ne doit pas l'être au sens habituel du terme).
3) une mise en forme écrite de la solution qui fait apparaître les étapes d'un raisonnement déductif.

Chaque phase doit faire l'objet d'un apprentissage spécifique. De plus, entre la première phase et la seconde, l'objet construit change de statut. De dessin concret sur une feuille de papier, il devient figure générale, objet idéal. Au niveau 6ème - 5ème, ce concept est un peu ou pas disponible.

Dans la brochure "De la figure vers la démonstration" de l'IREM de Rouen, nous avons présenté un certain nombre d'activités qui permettent de faire évoluer les conceptions des élèves. En particulier, la prise en compte des contraintes liées à la figure permet de donner du sens à l'étape de la recherche de la solution. Or, souvent, les élèves confondent contraintes spécifiques à l'exercice avec construction de cas particuliers et élimination de ceux-ci (triangles isocèles et équilatéraux, rectangles, carrés etc...). Devant cette difficulté des élèves, la construction de plusieurs dessins peut aider à faire émerger les contraintes spécifiques du problème.

C'est à ce niveau qu'un logiciel tel que "Le Géomètre" peut être outil utile. En effet, la figure étant construite, on peut la faire évoluer sur l'écran en continu. Les élèves vont donc avoir une vision concrète des différentes constructions possibles et non une juxtaposition de plusieurs dessins. Le changement de "point de vue" sur la figure peut se faire plus aisément.

La construction de plusieurs dessins est une des méthodes proposées pour que d'une part les élèves se construisent le concept de figure, et que d'autre part, les caractères invariants de ces figures apparaissent. Or dans la suite d'images créées à l'écran, il est possible de comprendre que par exemple les différents triangles n'ont été définis qu'une fois et donc sont représentants d'une même figure. Les élèves peuvent ensuite proposer des contraintes, 2 côtés perpendiculaires ou de même longueur, et voir, grâce à l'évolution continue permise par "Géomètre", que la réalisation simultanée de deux séries de contraintes n'est possible que dans un cas particulier.

De plus, il ne s'agit pas de produire à l'aide de "Géomètre" un imagiciel qui permette d'illustrer de manière nouvelle une partie du cours et de poursuivre ensuite une apprentissage avec l'environnement habituel, mais de l'utiliser pour aller plus loin : c'est une aide pour faire évoluer la recherche du problème par les élèves.

R. Gras affirme : "*les activités dialectiques de nature expérimentales qui se limitent au seul spectacle visuel des faits (mobilité des points...) sont d'effet illusoire sur l'apprentissage... . Au niveau du produit logiciel, ... il y aura nécessité de négociation régulière maître-élève, faute de quoi on pourrait assister à un vide audiovisuel*". Le lien entre les hypothèses émises par les élèves pour faire évoluer la figure avec les propriétés de géométrie connues et leurs conséquences devra le plus possible être verbalisé, un apprentissage de pratiques du raisonnement étant visé. C'est un obstacle important en géométrie dès la 6ème - 5ème. L'environnement créé avec "Géomètre" peut aider à le lever.

1. Objectifs

objectifs cognitifs (propres à la séquence) :

- réinvestir des droites particulières d'un triangle.
- définir l'orthocentre, le centre du cercle circonscrit à un triangle.
- étudier dans le cas particulier du triangle rectangle le point de concours des hauteurs, des médiatrices.
- réinvestir la propriété de la somme des angles d'un triangle.

objectifs cognitifs généraux :

- comprendre la nécessité d'une preuve.
- mettre en oeuvre différents niveaux de validation.

objectifs méthodologiques :

- rédiger, formuler des résultats.
- poursuivre l'apprentissage de certaines règles de logique (différence entre "un" et "tous", "les" et "des" ; utilisation d'expressions du type "si... alors...").
- apprendre à passer de l'expérience sensible à l'objet idéal (notion de figure).

2. Prérequis

- définition de la hauteur d'un triangle, de la médiatrice d'un segment, du triangle rectangle.
- notions d'angle obtus, aigu.
- somme des angles d'un triangle (énoncé de la propriété).

3. Description de la séquence

3.1 mise en place

La séquence se déroule avec l'ensemble de la classe (24 élèves). Les élèves travaillent individuellement.

L'ordinateur unique (avec souris) est relié à une tablette rétroprojectable. Les figures obtenues sont projetées sur un tableau blanc (sur lequel il possible d'écrire). On peut donc aussi utiliser la figure projetée comme on le fait ordinairement d'un dessin au tableau.

Au cours de la séquence, c'est la modification progressive qui a été utilisée, ce sont le plus souvent les élèves qui sont venus manipuler eux-mêmes en réponses aux conjectures qui étaient proposées par eux-mêmes ou par l'ensemble de la classe. Les élèves ont effectué les dessins sur leur cahier d'exercices et ont noté les résultats obtenus au fur et à mesure (phase d'institutionnalisation).

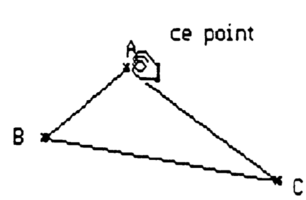
L'ensemble du travail avec l'ordinateur a duré environ 2h30 et a eu lieu mi-février 1991.

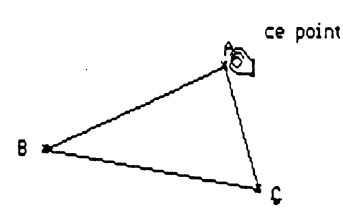
3.2 déroulement : première étape

a) Définition d'un triangle

"Géomètre" définit un triangle à partir de 3 points. Le logiciel permet de les nommer A, B, C. (cela sera utile dans la partie f de cette étape).

A l'aide de "Géomètre", on "saisit" l'un quelconque des sommets et on le



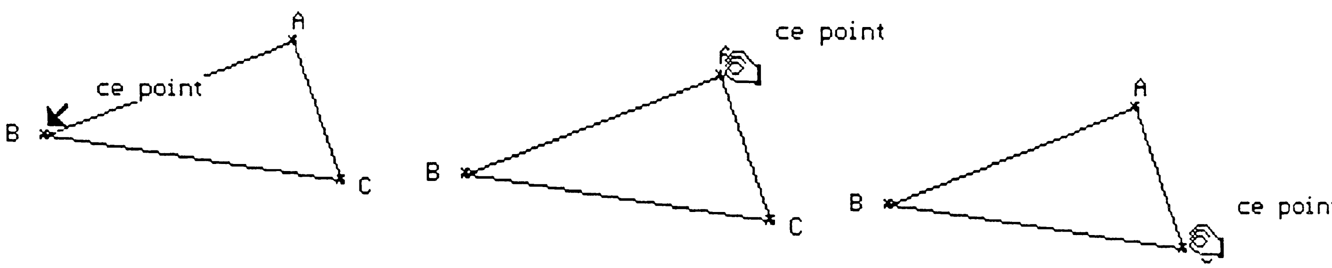


déplace. Cela permet de pointer le fait qu'un triangle n'est pas le dessin obtenu, mais un "objet" défini par trois points (au sens outil-objet de R. Douady).

Par le déplacement, on recherche à obtenir des triangles isocèles, équilatéraux, rectangles. Les élèves parallèlement rappellent oralement les caractéristiques. C'est sur l'image projetée que les élèves viennent mesurer les côtés ainsi que les angles (les erreurs de mesure permettent de souligner la différence entre l'objet idéal et le dessin obtenu).

b) Mesure des angles

A la suite de la manipulation précédente, les élèves demandent à mesurer les angles. "Géomètre" définit l'angle par trois points ordonnés, exactement comme

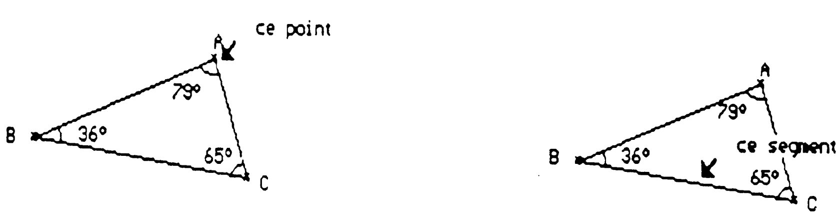


on le fait en écrivant. Le professeur montre sur un exemple le procédé, deux élèves viennent définir les deux autres angles du triangle (surveillés avec attention par la classe !).

Les élèves viennent "faire" dessiner des triangles particuliers en s'intéressant cette fois aux propriétés des angles du triangle.

c) Construction des hauteurs

Pour construire une hauteur, "Géomètre" suit pas à pas la définition : c'est une droite perpendiculaire, passant par un point (le sommet), perpendiculaire à une droite (le côté opposé).



Cette rigueur dans la définition exigée par l'ordinateur sous-tend celle exigée par la géométrie : c'est l'obligation de réfléchir de **façon successive** et **non globalement** qui va permettre le succès des constructions réalisées par les élèves de cette classe sur leur cahier dans la phase d'institutionnalisation.

Deux élèves viennent "dessiner" les deux autres hauteurs. L'orthocentre apparaît. On le définit comme l'intersection des hauteurs. "Géomètre" ne considérant pas les lignes comme des ensembles de points, il ignore donc l'intersection des hauteurs tant qu'elle n'a pas été définie comme intersection de deux droites (que l'on peut faire nommer H).

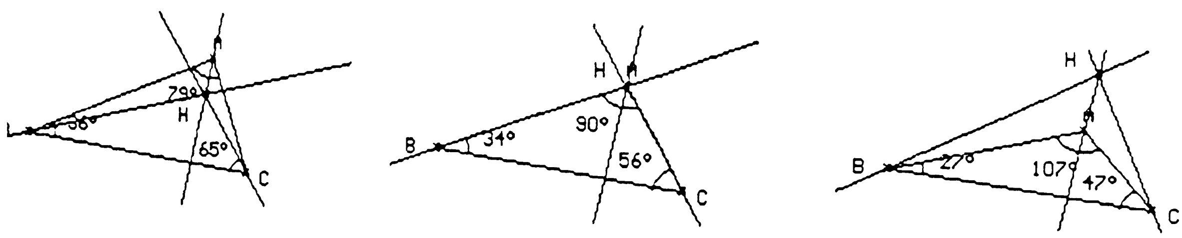
d) Phase d'institutionnalisation

Les élèves reproduisent le dessin dans leur cahier et écrivent : "*les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes, leur point de concours s'appelle l'orthocentre*".

Les élèves n'ont aucune hésitation pour réaliser les constructions à la main, même pour ceux qui sont le plus en difficulté.

e) Variation de la position de l'orthocentre

Le cas où l'orthocentre se trouve à l'extérieur du triangle est toujours une difficulté pour de nombreux élèves. "Géomètre" permet en faisant varier la position de l'un des sommets du triangle de faire varier celle de l'orthocentre dans le triangle.



En utilisant une dynamique de la figure, l'observation faite par la classe ressemble à l'utilisation d'un dessin animé : après quelques variations successives de l'orthocentre, les élèves se font leur opinion et après discussion entre eux par petits groupes, proposent les règles suivantes : "*si l'angle est aigu, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ; quand l'angle devient obtus, l'orthocentre passe à l'extérieur*".

L'un d'entre eux souhaite préciser la position pour laquelle l'orthocentre sort du triangle. Il vient donc manipuler la souris. Par essais successifs, il obtient un triangle rectangle. Ce triangle apparaît donc aux élèves comme un triangle particulier non plus à cause de son angle droit, mais parce que un de ses sommets est l'orthocentre du triangle (ceci est écrit dans le cahier et sera utilisé lors des calculs d'aires des triangles).

f) Les angles obtus d'un triangle

Lorsqu'on veut institutionnaliser les résultats obtenus, les élèves proposent d'écrire : "*si les angles d'un triangle sont aigus, alors l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ; si les angles d'un triangle sont obtus, alors l'orthocentre est à l'extérieur du triangle*".

L'utilisation de la formulation "si... alors..." avait déjà été rencontrée au début de l'année et est réinvestie convenablement. Par contre, l'énoncé de la deuxième partie de façon symétrique montre comment l'énoncé des propriétés se fait par mimétisme indépendamment de leur sens. La logique de construction des élèves semble être du type "*modification à moindre frais*".

On va donc expérimenter grâce à "Géomètre" la conjecture "les angles d'un triangle sont obtus". Oralement le professeur fait préciser le sens donné à "les angles du triangle". Les élèves se mettent d'accord sur le fait que cela signifie que les 3 angles sont obtus. Un élève vient donc manipuler : il part d'un triangle ABC ayant l'angle A obtus (B et C sont donc aigus). Il déplace le point pour obtenir l'angle B obtus. La classe observe et l'encourage. La déception est grande lorsque B étant obtus, les élèves s'aperçoivent que A est devenu aigu et cela ne convainc pas encore qu'un triangle ne peut avoir plusieurs angles obtus. Un autre élève propose de choisir l'angle C et de recommencer. Nouvelle déception. Les élèves voient bien qu'un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus mais n'en sont pas convaincus.

La nécessité d'une preuve mathématique non liée à l'observation fait son chemin : c'est un réel pas en avant pour tous les élèves de cette classe.

Il faut l'aide de propriétés "sélectionnées" ci-dessous pour que la preuve soit exprimée clairement :

- définition d'un angle obtus ;
- somme des angles d'un triangle.

Tous vont se mettre d'accord pour dire ou écrire : "si deux angles sont plus grands que 90°, leur somme fait plus que 180° donc il n'y a plus de place pour le troisième".

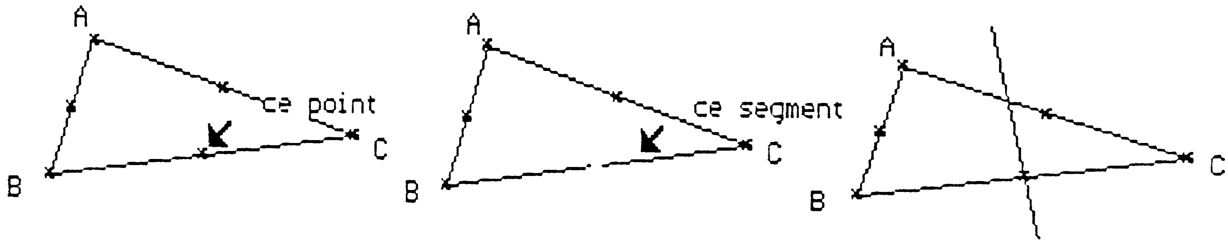
Finalement, on écrit dans le cahier : "*un triangle ne peut avoir qu'un seul angle obtus*", puis les règles concernant la position de l'orthocentre. Les élèves insistent bien sur l'écriture correcte "si un triangle a un angle obtus, alors son orthocentre est à l'extérieur du triangle".

3.3 déroulement : deuxième étape

Un travail de même type est mené à propos des médiatrices.

a) Construction des médiatrices (sans la procédure médiatrice)

Le triangle ABC est construit comme dans la première étape. "Géomètre" demande pas à pas, comme pour les hauteurs, les éléments nécessaires à la construction de la médiatrice, c'est la droite :



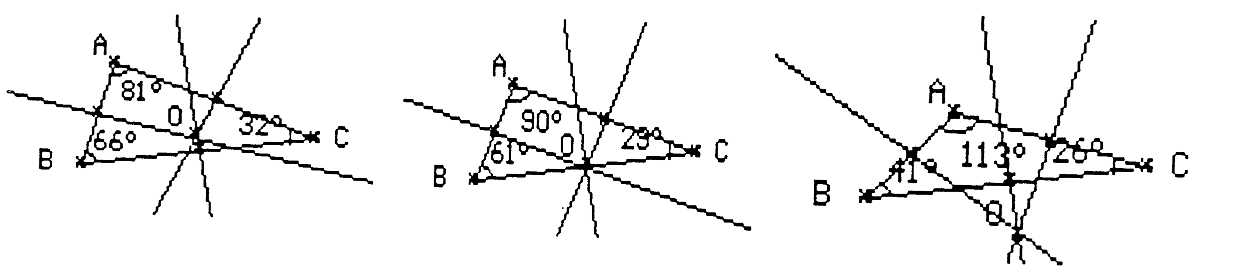
- perpendiculaire
- passant par le milieu du segment
- perpendiculaire au segment.

Certains élèves sont étonnés : les médiatrices ne passent par les sommets. Ils vont donc venir modifier le triangle pour faire passer une médiatrice par un sommet. La condition : "ce n'est possible que si le triangle est isocèle" est énoncée. Est-ce suffisant pour retirer de leur esprit la confusion médiane-médiatrice ?

On en profite pour rappeler oralement la propriété de l'équidistance des points de la médiatrice.

b) Variation de la position du point de concours

Cette manipulation est demandée par les élèves par imitation de celle de l'orthocentre.

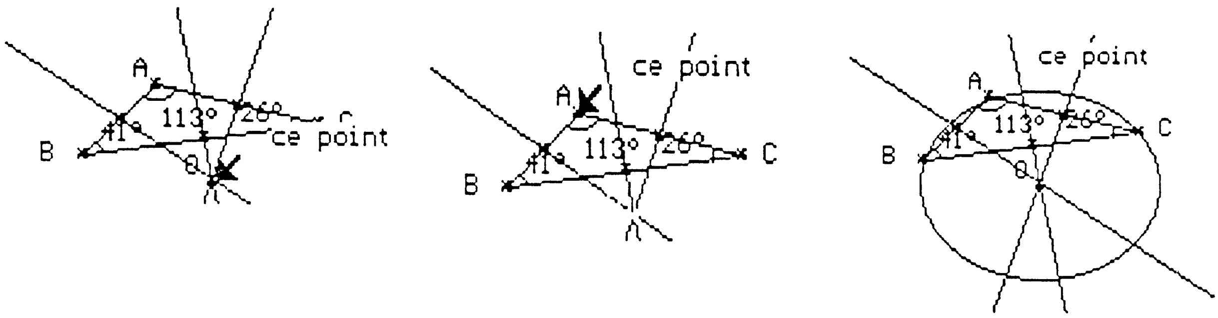


Les variations "angle aigu - angle obtus" sont réinvesties avec succès, mais cette fois le triangle rectangle "apparaît" lorsque le point de concours est sur l'hypoténuse (ce mot de vocabulaire est rappelé à cette occasion). Préciser qu'il s'agit du milieu de l'hypoténuse ne pose pas de difficulté : le lien entre milieu et médiatrice est très fort dans la tête des élèves (plus que celui de perpendiculaire - médiatrice d'où les confusions médiane - médiatrice probablement).

c) Le centre du cercle circonscrit

C'est le professeur qui propose de construire un cercle circonscrit au triangle précédent ayant pour diamètre l'hypoténuse. On utilise la procédure du cercle défini par 2 points. Les élèves constatent que le cercle passe par le troisième sommet du triangle. On écrit dans le cahier cette propriété du triangle rectangle.

La variation de la forme du triangle permet de montrer qu'un triangle quelconque est inscrit dans un cercle. Le centre est précisé au tableau, des mesures permettent de le confirmer.



Ce résultat écrit dans le cahier est ensuite démontré (sans vouloir atteindre un niveau de formalisation type quatrième), les élèves cherchent surtout à se convaincre d'un résultat en utilisant des règles mathématiques admises par tous.

4. Conclusion

L'utilisation de la dynamique de l'image grâce au logiciel a permis une confrontation entre les conjectures des élèves et la "réalité" :

- non-existence de plusieurs angles obtus dans un triangle
- confusion entre médiane et médiatrice.

Le débat instauré alors dans la classe a montré comment l'essai de construction des figures répondant aux hypothèses émises permet de se faire une opinion. Faire de nombreux dessins pour résoudre un problème, ne pas émettre une hypothèse seulement à la vision d'une figure, est une méthodologie que les élèves ont réinvestie dans d'autres recherches.

Par ailleurs, la construction des divers objets nécessite la connaissance de définitions (ou de propriétés) précises et rigoureuses. D'autant plus que l'ordinateur ne se contente pas d'un énoncé plus ou moins incantatoire : il exige que l'on décortique chacun des éléments de l'énoncé (exemple : médiatrice, **droite** passant par un **milieu, perpendiculaire** à un **segment** donné).

Le logiciel permet de dégager l'élève des difficultés de constructions plus ou moins maladroites. Ce dernier type d'activité n'est certes pas à rejeter, mais ici, c'est l'activité raisonnement qui est objet de l'apprentissage.

Enfin, et c'est le plus intéressant, ces séquences permettent "*plusieurs formes et plusieurs niveaux de validation dont la mobilisation et la mise en oeuvre sont provoquées par les exigences de la situation dans laquelle se trouve l'élève*". (Balacheff : Preuves et démonstration au collège RDM vol. 3.3).

En effet, quand, ayant fini de construire l'orthocentre, les élèves observent son déplacement, ils ne vont pas se contenter de constatations, ils vont essayer d'organiser leurs résultats : c'est cela qui les conduit à préciser le rôle particulier de l'angle droit.

Lorsque les élèves veulent construire un triangle ayant plusieurs angles obtus, ce problème n'apparaît que comme réponse au triangle ayant trois angles aigus. La mobilité des points et la lecture immédiate des angles va leur permettre de chercher à valider leur hypothèse par la construction d'une "figure-exemple" qui puisse être exhibée comme une preuve. L'impossibilité d'obtenir deux angles obtus se constitue en obstacle tellement gênant que c'est à partir de là que la nécessité d'un **raisonnement déductif** s'impose. La figure, parce qu'elle ne se plie pas aux hypothèses, devient tout à coup inutile, négligeable. Les élèves souhaitent travailler à un autre niveau de validation.

Il faut rechercher la multiplication de telles structures conjecturelles, pour donner une autre représentation des problèmes de raisonnement à nos élèves.

Enfin, le travail sur les médiatrices montre comment dépasser le cadre de l'expérimentation pour arriver à celui de la démonstration ; mais ici, l'obstacle reste encore celui de la rédaction. L'écriture peut être simplifiée par l'intermédiaire de propriétés stockées dans une "banque de données".

2 - POINT COMMUN DE DROITES EN $6^{ème}$

1. Objectifs

- améliorer la perception illimitée de la droite.
- faire la distinction entre la notion de droite (illimitée) et sa représentation (limitée).
- faire la distinction entre la notion de droites parallèles et celles de droites qui ne se rencontrent pas.
- utiliser la notion de droites sécantes.
- différencier droite et segment.

2. Prérequis

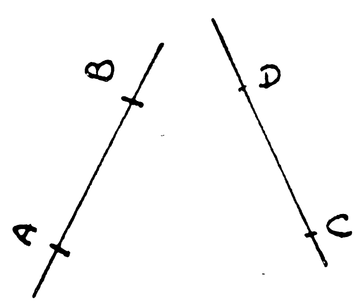
aucun.

3. Description de la séquence

3. 1 mise en place

La classe a 30 élèves, le travail est individuel.

La feuille suivante est distribuée (les deux segments [AB] et [CD] ont presque la même longueur).



La consigne donnée oralement est : Les droites (AB) et (CD) ont-elles un point commun ?

3. 2 déroulement

Les élèves répondent par écrit à la question et doivent expliquer leur réponse. Après tri et regroupement des réponses par le professeur, une mise en commun orale est faite dans la classe. Les élèves s'expriment à tour de rôle : l'un donne sa réponse, les autres lui demandent de préciser, réagissent en fonction de leurs connaissances, disent pourquoi ils ne sont pas d'accord.

Le bilan permet de corriger les erreurs et de préciser la notion de droite et de point commun.

Les élèves ont écrit sur leur cahier qu'une droite est illimitée, qu'un segment est limité et que des droites sécantes ont un point d'intersection.

4. Analyse

Pendant le travail de mise en commun les élèves ont été très actifs. Cela a permis de dégager deux types de réponses.

4. 1 réponses liées à la différenciation entre langue naturelle et langage mathématique

Les droites (AB) et (CD) ont un point commun car elles ont toutes les deux un segment dessus.

Les droites (AB) et (CD) ont un point commun car elles ont toutes deux, deux points marqués sur les droites.

Elles ont un point commun car ce sont toutes les deux des droites.

Ce type de réponse est lié au sens donné à l'expression de "point commun". L'élève lui donne le sens du langage courant : avoir un point commun, c'est avoir la même caractéristique. Le professeur pense lui en terme de point d'intersection.

Dans ces réponses, il est à souligner que le "*car*" est venu naturellement dans les écrits des élèves.

De plus, dans certains cas, il y a confusion entre droite et segment. Des élèves mesurent, sur les schémas, les segments ou la longueur des tracés des droites. Suivant que les mesures sont faites avec précision ou pas, les droites sont considérées avoir ou non un point commun.

Remarque : Il serait intéressant de voir l'évolution du nombre de réponses de ce type si les 2 portions de droites dessinées avaient la même dimension. De même pour les deux segments [AB] et [CD], l'influence d'avoir exactement la même mesure serait-elle préjudiciable ou favorisante ?

4. 2 réponses liées à la différence entre la droite et sa représentation

Pour la moitié des élèves, les droites ont un point commun, après avoir prolongé les représentations des droites et construit leur point d'intersection.

Pour quelques autres, les droites n'ont pas de point commun car elles ne se coupent pas.

Ici c'est la différence entre la droite et sa représentation qui doit être pris en compte. Prolonger les droites semble nécessaire, la seule vision du dessin ne suffit pas pour répondre par l'affirmative.

Remarque : Un dessin pourrait aussi être distribué avec des droites qui se coupent hors des limites de la feuille de papier. On pourrait même envisager d'avoir deux groupes dans la classe, ceux pour lesquels les droites se coupent sur la feuille, ceux pour lesquels les droites ne se coupent pas sur la feuille, et confronter les réponses.

5. Conclusion

A la suite de ce travail, les élèves ont correctement manipulé et distingué les droites et segments. La séquence a servi de référence pour éliminer plus tard du vocabulaire spontané "le milieu d'une droite".

3 - CONSTRUIRE UN RECTANGLE QUI A DEUX COTES CONSECUTIFS EGAUX EN 6ème

1. Objectifs

- utiliser des propriétés du rectangle.
- apprendre à expliquer sa démarche de construction.

2. Pré-requis

- savoir construire un rectangle.
- connaître les propriétés du rectangle.

3. Description de la séquence (1h)

3.1 mise en place

La classe est composée de 27 élèves répartis en 9 groupes de 3.

Le matériel fourni est pour chaque groupe : 2 feuilles blanches, une pour le brouillon, une pour la réponse finale (la gomme est interdite).

La consigne écrite au tableau est : "tracer un rectangle ayant 2 côtés consécutifs de même longueur".

3.2 déroulement

1er temps : réalisation de la construction.

2ème temps : lorsque la construction est terminée par un groupe, la question suivante lui est posée : "vous avez obtenu un carré, comment cela se fait-il ?".

3ème temps : lorsqu'un groupe estime avoir terminé son travail, il lui est demandé : "avez-vous expliqué de façon assez précise comment vous avez obtenu ce carré ?".

4. Analyse

4.1 analyse a priori

Le mot "consécutif" n'est pas connu des élèves. Des dictionnaires sont mis à leur disposition. Il faudra cependant vérifier si pour chaque groupe le sens du terme a été compris.

Les constructions envisagées pour le rectangle utilisent équerre et double décimètre ou équerre et compas.

La méthode de construction par report de longueurs égales peut préparer à la démarche d'explication.

Les explications "acceptables" peuvent être données sous des formes très variées : des phrases, des dessins, peut-être même des écritures d'égalités de longueurs.

Remarque : ce problème a été choisi parce que l'explication attendue ne fait appel qu'aux propriétés d'égalités des côtés opposés du rectangle.

4.2 analyse des démarches

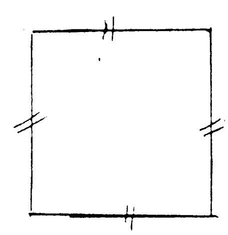
Des groupes ont rencontré des difficultés à propos du mot "consécutif". Le mot "succéder" étant utilisé dans le dictionnaire, il est interprété comme "en file indienne". "*2 côtés consécutifs c'est 2 côtés qui sont comme ça ...mais on ne peut pas faire un rectangle*".

D'autres groupes, pour justifier, refont plusieurs fois la construction et en concluent que ça donne toujours un carré.

La réponse orale fournie à la question "comment avez-vous obtenu un carré ?" est souvent du type : "*si ce n'était pas de la même longueur, ça ne serait pas droit*".

Quelques-uns formulent une telle explication par écrit de façon plus précise "*si les 2 côtés consécutifs sont égaux, les 2 autres le sont aussi parce que si on doit faire un rectangle ses côtés opposés doivent être de même longueur*".

Un groupe a produit ce dessin.



Bien que le carré ait déjà été rencontré comme rectangle particulier des élèves continuent à dire "un rectangle n'a pas ses côtés consécutifs égaux".

4. Conclusion

La question posée aux élèves "comment cela se fait-il que vous obtenez un carré ?" peut être considérée comme un piège. Mais ces élèves sont habitués depuis 3 mois à essayer d'aller plus loin que le simple constat.

Selon leur degré de conviction, des élèves recommencent leur construction ou ils essaient de produire une réponse à la question posée.

Dans cette activité la plupart des élèves se heurtent au fait que la figure obtenue est un carré.

Ce qui entraîne 2 sortes d'attitudes :

- comme c'est un carré alors il n'y a pas lieu d'en dire plus. Les explications sont des répétitions de la consigne.
- le carré n'est pas perçu comme un rectangle particulier. C'est le dessin qui est remis en cause.

On peut se rappeler que d'une part le niveau de langage d'un élève de sixième est encore essentiellement descriptif et que le carré et le rectangle restent pour lui deux objets distincts.

Une telle activité permet de faire évoluer langage et représentation.

DROITES PARTICULIERES DANS LE TRIANGLE EN $4^{ème}$
(hauteurs et médiatrices)

1. Objectifs

- rédiger, formuler des résultats (expliciter de façon mathématique les informations contenues dans la figure).
- écrire ces informations sous forme d'hypothèses.
- expliciter les propriétés utiles.
- faire le tri de ces propriétés pour répondre au problème.
- mettre en forme les étapes de la démonstration pour rédiger une solution.
- ressentir la nécessité de raisonnement.

2. Prérequis

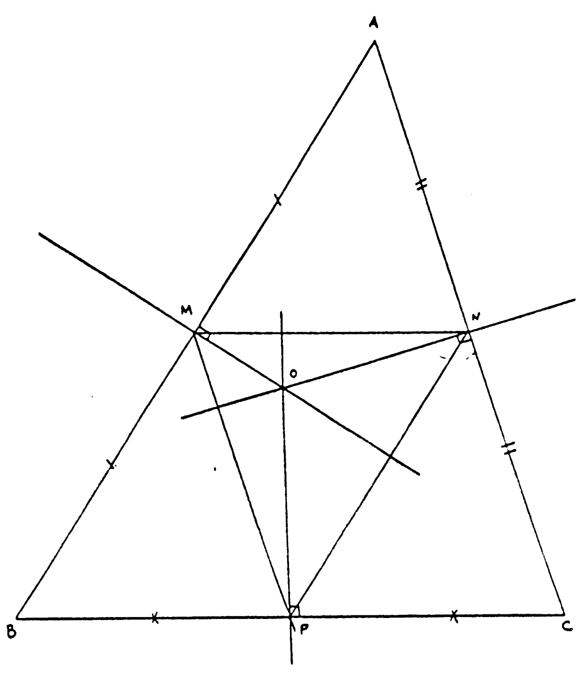
- définitions et propriétés des hauteurs et des médiatrices d'un triangle.
- énoncé de la propriété de la droite passant par les milieux de deux côtés d'un triangle.
- énoncés concernant les droites parallèles et perpendiculaires.

3. Description de la séquence

3.1 mise en place

La séquence se déroule, début avril, dans une classe de $4^{ème}$ de 25 élèves en grande difficulté.

Une feuille comportant une figure codée est distribuée à chaque élève, ainsi qu'une feuille blanche.



Consigne : Pierre dit "O est le point commun des trois hauteurs du triangle MNP". Jacques dit "O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC".
Qui a raison ? Justifier.

3.2 déroulement

Après distribution de la consigne, lors d'une phase individuelle de 5 minutes, les élèves mesurent, vérifient à l'aide d'instruments sur la figure. Puis ils confrontent par deux leurs résultats. Ils échangent sur les caractéristiques de la figure et notent au fur et à mesure les définitions et propriétés des hauteurs, du cercle circonscrit et des médiatrices. Cette recherche dure 1 heure.

A la suite de ce travail, les échanges ont été nombreux, hors de la classe. C'est pourquoi, à la demande des élèves, au début de la deuxième heure de la séquence, définitions et propriétés sont précisées. Puis les élèves se répartissent en groupes de 3 ou 4 pour une recherche des propriétés intervenant dans la justification. Par contre pour un essai de rédaction, les élèves ont préféré réfléchir et rédiger à deux, reprenant les mêmes paires qu'au début.

4. Analyse

4.1 appropriation de la figure

Dans un premier temps, la figure reste un dessin concret sur une feuille de papier. Les angles droits sont vérifiés à l'équerre et les milieux de segments le sont par mesure. Le cercle circonscrit est tracé au compas avec diverses réussites. La fiabilité du matériel et/ou l'habilité de l'élève rend souvent imprécis les tracés et expliquent une courte phase d'indécision quant à la réponse à apporter.

Après les premiers tâtonnements et essais de vérification, la différence entre le dessin et la figure, se dégage. Les élèves débattent par paire et se convainquent très vite que Pierre et Jacques ont raison, sauf deux élèves pour lesquels ont peut avancer l'hypothèse d'une confusion des deux triangles.

4.2 le point sur les droites particulières d'un triangle

Après la phase d'utilisation des instruments, les élèves ont individuellement donné une réponse à la question de la consigne. Ces réponses font l'objet d'échange par paire et le débat qui s'instaure, entraîne la relecture de la consigne. A la suite de cette deuxième lecture, les élèves précisent le sens de chaque mot.

La définition de la hauteur, droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé, est connue et très souvent écrite correctement. Cependant deux groupes se sont centrés sur le terme de point commun. Ils ont tenté une justification en avançant le fait que dans un triangle les trois hauteurs sont

concourantes. Est-ce évident que les droites (MO), (NO), (OP) sont des hauteurs et que représentent, pour eux, les hauteurs ? La question est à se poser en lisant une tentative de définition "*ce sont des hauteurs car elles coupent les angles du triangle en 2*".
C'est à rapprocher du groupe qui écrit "*car la droite perpendiculaire de PN est la médiatrice de l'angle M passant par O*".

Si la confusion médiane - médiatrice n'existe pas ici c'est sans doute dû au libellé de la question sur le centre du cercle circonscrit. Même si ce n'est pas toujours écrit de manière explicite, la relation entre centre du cercle circonscrit et point de concours des médiatrices est établie et utilisée. Cette relation a été favorisée par une recherche active des élèves de définitions, sur leurs cahiers de cours, leurs fiches de propriétés et leur livre.

Encore plus ici que pour les hauteurs, l'accent est mis sur le point de concours des médiatrices. "*Les trois médiatrices sont concourantes en un point O qui est le centre du cercle circonscrit au triangle et ABC est inscrit dans ce cercle*".

En parallèle avec le centre du cercle, point d'intersection des médiatrices, droites perpendiculaires et passant par le milieu, certains groupes se sentent obligés d'écrire. "*Nous savons que Jacques a raison car quand on prend le compas on trouve que OA = OB = OC*".

Pour ces élèves la propriété semble être une preuve, mais elle est loin de les convaincre entièrement. Aussi ils insistent sur l'utilisation du compas, qui semble leur convenir davantage.

Dans le cas des deux élèves qui n'ont pas admis que Pierre et Jacques ont tous les deux raisons, les deux triangles ne sont pas dissociés. La vision globale du dessin reste prégnante. L'utilisation seule de l'équerre n'a pas permis à ces élèves de reconnaître les hauteurs du triangle MNP, "*Pierre : il n'a pas raison parce que O n'est pas le point commun des 3 hauteurs du triangle MNP*". Ces hauteurs ne sont pas reconnues comme telles car aucun codage n'indique sur la figure qu'elles sont perpendiculaires aux côtés du triangle MNP. Cette orthogonalité est même niée dans MNP, "*Ces trois droites ne sont pas des hauteurs car elles ne passent pas par un sommet et ne sont par perpendiculaires au côté opposé*". Par contre, ces mêmes droites sont reconnues comme médiatrices, les informations de la figure correspondant à l'énoncé de la propriété, "*Par contre ces droites sont des médiatrices car elles sont perpendiculaires et passent par le milieu du segment*".

4.3 analyse des justifications proposées

Il existe une opposition entre la phase heuristique où le centre du cercle circonscrit est pris comme le point à égale distance des 3 sommets A, B, C et la phase rédactionnelle où le centre du cercle est pris comme point de concours des trois médiatrices. Les médiatrices sont alors définies comme droites perpendiculaires passant par le milieu des côtés. La prégnance de cette propriété est compréhensible car la notion de médiatrice découle directement de la prise d'information sur la figure.

La liaison entre les deux triangles est rarement faite de manière explicite, les médiatrices de l'un étant les hauteurs de l'autre. Les hauteurs du triangle MNP sont reconnues mais leur justification est plus difficilement abordée. Il est vrai qu'à ce niveau la vision de la figure et les étapes de raisonnement se complexifient. La prise d'informations se mêle dans les 2 triangles et un travail doit être réalisé sur une partie de la figure avant de la plonger dans son ensemble.

La difficulté réside dans la recherche du champ des énoncés, dans le nombre de pas de la justification et dans la transformation du statut des divers énoncés (où la conclusion du précédent devient hypothèse du suivant).

Il est intéressant de constater que la propriété de la droite passant par les milieux des deux côtés d'un triangle est utilisée par la quasi totalité des groupes. "*On sait que dans le triangle ABC, N est le milieu de AC, P milieu de BC. Dans le triangle la droite qui joint les milieux des 2 côtés est parallèle au $3^{ème}$ côté donc MP//AB*".

Seules trois paires d'élèves ont justifié le parallélisme par une autre propriété : "*Dans le triangle ABC, N est milieu de AC, P est milieu de B.*
Théorème : Dans un triangle la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est la parallèle à un deuxième côté coupe le troisième côté en son milieu (NP) // (AB)".

Pourtant les hypothèses et conclusions sont bien formulées par rapport au dessin donné, là encore pour ces élèves la vision sur la figure, de droites parallèles induit le choix d'une propriété.

Si les droites (MO), (NO), (OP) ont bien été reconnues perpendiculaires à (NP), (MP), (MN), la justification n'a été donnée que par cinq élèves.
Pour ceux-là la démarche est correcte.

"*(NP)//(AB)* *(MO)* $\perp$ *(AB)*
deux droites étant parallèles toute perpendiculaire à l'un est perpendiculaire à l'autre.
(MO)$\perp$*(NP)*".

"Dans le triangle MNP la droite (NP) est parallèle à (AB) et (MO) est perpendiculaire à (AB) $\perp$ (MO) (NP)"

Progressivement toutes les propriétés utiles à la justification sont énoncées ou sous-jacentes à ce qui est dit et/ou écrit. Ces propriétés sont données dans un ordre pas toujours logique pour la démonstration mais les textes ont été rédigés avec soin.

5. Conclusion

La figure contient en elle-même la réponse à la question et la situation de confrontation entre pairs permet de prendre conscience du passage du raisonnement implicite au raisonnement explicite.

Les élèves ont réagi très vite à ce travail et la phase de recherche a été très active.

La situation est d'emblée complexe et les outils à utiliser pour pouvoir justifier la réponse obtenue sont nombreux. Pourtant la phase de tâtonnement avec les instruments est réduite, et la phase heuristique est centrée sur la recherche de définitions et théorèmes. L'articulation de l'ensemble de ces propriétés est difficile.

Les textes obtenus sont lourds avec des redites, la plupart du temps pour se convaincre avant de convaincre les autres. La difficulté reste au niveau d'une rédaction formelle bien que la qualité des textes montre un mieux sensible pour certains.

Même si le niveau de langage et de rédaction reste malhabile un net progrès est réalisé pour l'ensemble des groupes. Les élèves sont devenus autonomes dans la recherche de propriétés. C'est cette phase : chercher un corpus d'énoncés permettant d'accéder à la démonstration, qui devient dominante dans leur travail .

Actifs et critiques, les élèves ont le souci de dépasser l'observation de la figure pour essayer d'expliciter et de mettre en forme un raisonnement.

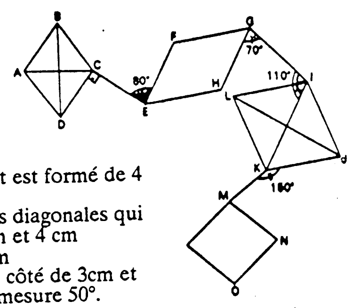
5 - LE CERF-VOLANT EN 6ème

1. Objectifs

- réinvestir les constructions du losange.
- utiliser les propriétés du losange en choisissant pour chaque construction celles qui conviennent.
- manipuler le rapporteur dans une situation complexe.

2. Prérequis

- connaître les propriétés du losange.
- connaître des constructions du losange.
- savoir utiliser le rapporteur.



Ce cerf-volant est formé de 4 losanges
- ABCD a des diagonales qui mesurent 3cm et 4 cm
- CE = 2.5 cm
- EFGH a un côté de 3cm et l'angle FEH mesure 50°.
- GI = 3.5cm
- IJKL a un côté de 3.2cm et la diagonale [IK] mesure 4cm
- KM = 2cm
- MNOP a ses diagonales de même longueur.

A partir des points A,C et P, dessine le cerf-volant (les points A,C et P sont indiqués sur la feuille distribuée aux élèves).

3. Description de la séquence

3.1 mise en place

La classe est composée de 28 élèves.
Une fiche est distribuée aux élèves (fiche construite à partir d'un exercice du livret géométrie 6ème Hatier).

3.2 déroulement (2h et du travail à la maison)

1er temps : la feuille est distribuée sans commentaire, le travail est individuel. Les élèves réalisent la construction.

2ème temps : le professeur fait la mise en commun sous la forme suivante : "comment avez-vous tracé le 1er losange ? le 2ème ?..." Des stratégies de construction sont proposées par les élèves, ils les comparent. Pour certains losanges plusieurs stratégies sont retenues comme "aussi bonnes".
Les élèves ayant utilisé des stratégies fausses ou compliquées refont leur construction.

3ème temps : travail en commun. Le professeur dit : "pour le 2ème losange on vous a seulement indiqué qu'un côté mesure 3 cm et vous avez tracé les quatre de la même longueur. Pourquoi ?", les élèves sont d'abord étonnés par cette question, l'évidence du processus de construction bloque d'abord tout essai d'explication.
Puis se dégage par essais successifs la propriété utilisée : les quatre côtés d'un losange sont égaux.

4ème temps : travail individuel. Les élèves expliquent par écrit leur propre construction en précisant pour chaque losange la propriété qui a permis de le construire.

5ème temps : confrontation des explications. Un élève indique sa construction et la propriété permettant sa construction. Pour que la démarche soit claire pour tous les élèves, le professeur reprend de la façon suivante : "apparemment je n'ai pas assez de renseignements dans mon texte pour faire le dessin mais ce que je sais du losange me permet d'obtenir les renseignements qui me manquent."
Ce qui se traduit par des formulations élèves du type : "*c'est écrit que EFGH a un côté de 3 cm, je sais dans ma tête qu'un losange a ses 4 côtés égaux...*"

4. Analyse

Cet exercice qui est au premier abord uniquement un exercice de construction, débouche en fait sur le maniement des propriétés du losange d'abord implicite (on pourrait en rester là), puis explicite.

Pour un élève de 6ème, toutes les propriétés d'une figure vont ensemble : "Un losange a ses côtés égaux, ses diagonales...".

Mettre en évidence les propriétés que l'on fait fonctionner lors d'une construction parait un exercice approprié pour des élèves de 6ème car il s'appuie sur la démarche de construction mise en oeuvre par l'élève.

ex : ABCD a ses diagonales qui mesurent 3 cm et 4 cm. Pour construire le losange l'élève trace 2 droites perpendiculaires, puis reporte de chaque côté du point d'intersection sur une droite un segment de 2 cm, sur l'autre un segment de 1,5 cm. Puis l'élève explicite : "*ce qu'on me dit ne me suffit pas* **mais** *je sais en plus que c'est un losange. Pour le construire je me sers d'abord des diagonales perpendiculaires, ensuite qu'elles se coupent en leur milieu*". L'élève passe de l'implicite à l'explicite, il mène une activité de raisonnement.

5. Conclusion

Le travail de construction a intéressé tous les élèves. Les confrontations, d'abord orales de méthodes de construction, puis écrites, ont contribué à préciser le vocabulaire.

La démarche qui consiste à dire "apparemment je n'ai pas assez de renseignements dans mon texte pour faire ma construction **mais** ce que je sais du losange me permet d'obtenir les renseignements qui me manquent" fonctionne bien. L'aspect recherche "d'indices" manquants, ainsi que la nouveauté de ce mode de fonctionnement a été perçu comme un défi par beaucoup d'élèves et surtout comme un défi qu'ils pouvaient relever.

6 - CONFUSION MEDIATRICE - BISSECTRICE EN 6ème

1. Objectifs

objectifs cognitifs (propre à la séquence) :
- réinvestir les définitions et propriétés de la médiatrice et de la symétrie orthogonale.
- utiliser les outils de construction habituels : règle, équerre, compas.
- découvrir la bissectrice comme ensemble de points.

objectifs cognitifs généraux :
- formuler une conjecture.
- valider une conjecture.
- faire évoluer le statut du dessin.

objectifs méthodologiques :
- formuler et rédiger des résultats.

2. Prérequis

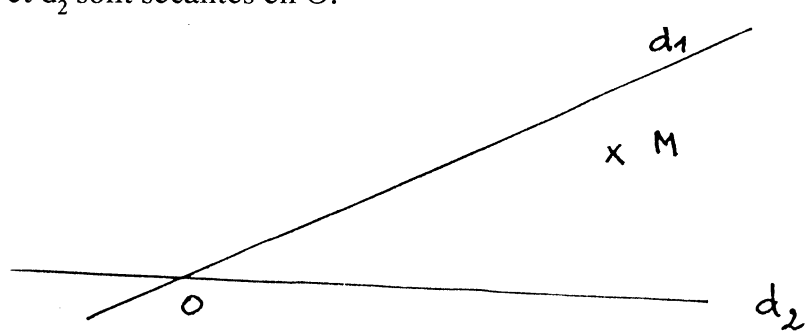
- Définitions et propriétés de la médiatrice.
- Définitions et propriétés de la symétrie orthogonale.
- Constructions avec règle, équerre et compas de la médiatrice et du symétrique d'un point.

3. Description de la séance

3.1 mise en place

Dans une classe de 6ème (24 élèves), à la suite de l'apprentissage de la symétrie orthogonale, l'exercice est proposé au mois de mai.

La consigne est écrite au tableau :
"2 droites d_1 et d_2 sont sécantes en O.



construire le symétrique M_1 de M par rapport à d_1.
construire le symétrique M_2 de M par rapport à d_2".

La séquence dure 2h. avec un temps de recherche à la maison (entre les deux séances d'une heure).

Les élèves travaillent dans une première phase individuellement puis par groupes de 3 ou 4.

3.2 déroulement

Première phase

Les élèves reproduisent le dessin individuellement. Presque tous tracent la droite (OM). A ce moment, une grande majorité des élèves (19) pose comme conjecture avant même d'avoir effectué toute construction : "*(OM) va être la médiatrice du segment [M_1M_2]*".

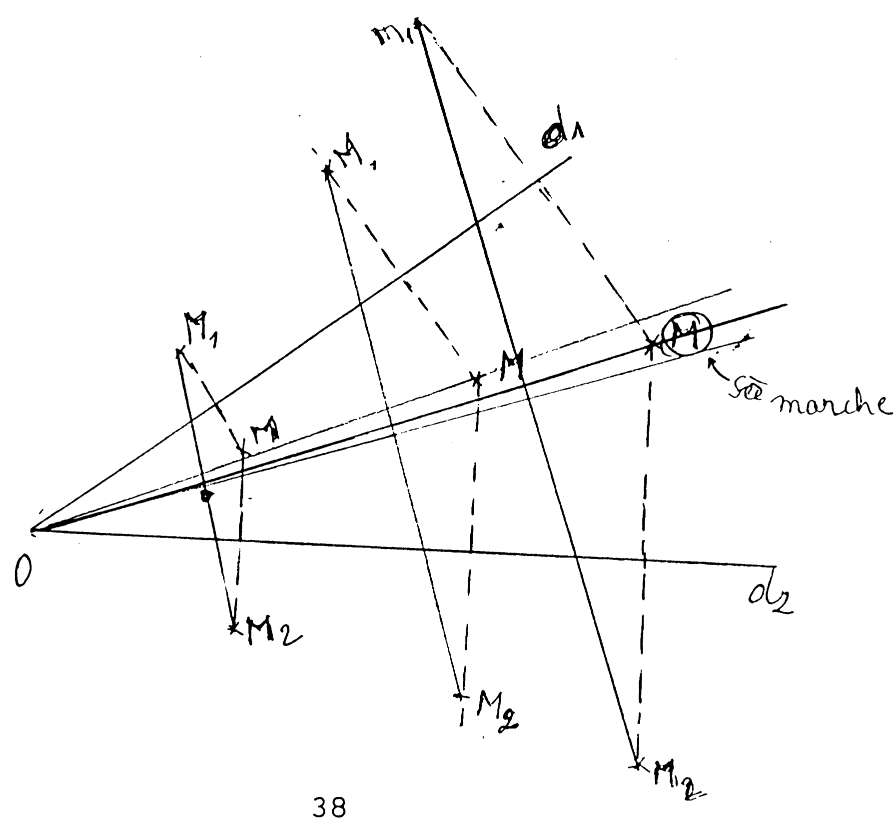
A la première mise en commun, le professeur pose la question : "qu'est-ce qui vous fait penser que (OM) est la médiatrice ?" Un élève propose "*on va avoir* $OM_1 = OM_2$". Cette réponse est admise par tous. Le professeur demande à chacun de faire la construction pour vérifier : grosse déception ! (OM) n'est pas médiatrice du segment [M_1M_2].

Deuxième phase

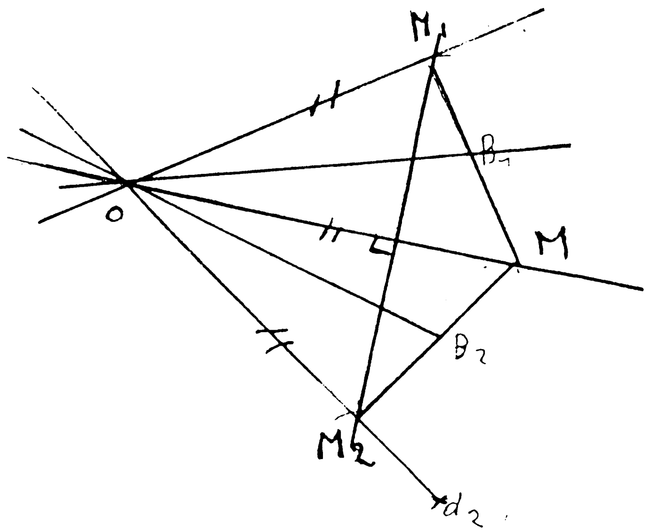
Le professeur propose "Peut-être est-ce vrai pour certaines positions du point M ?"

Les élèves se mettent en groupe pour chercher. Deux stratégies apparaissent :

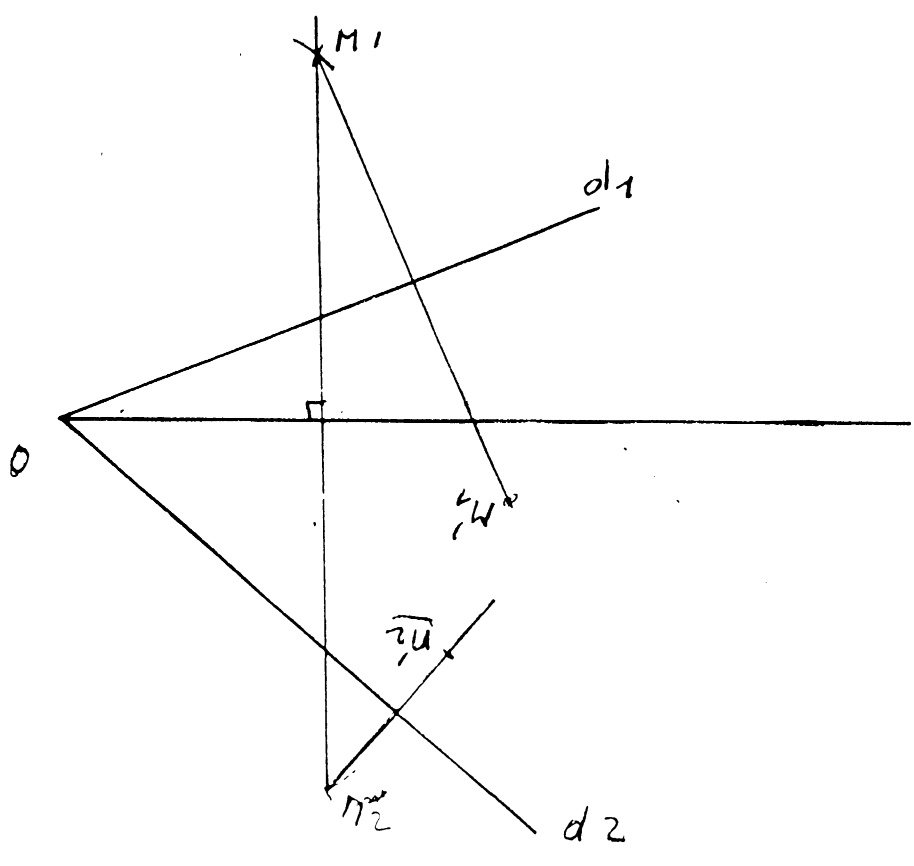
* 1ère stratégie : "*on va faire comme pour les satellites*" (référence à la situation du suivi scientifique 6ème - travaillée par ces élèves en apprentissage de la médiatrice). "*on essaye des points - on va bien trouver* !".



* 2ème stratégie : les élèves choisissent deux points M_1 et M_2 au hasard en respectant la condition $OM_1 = OM_2$. Ils construisent ensuite la médiatrice de $[M_1 M_2]$, puis prennent un point M sur la médiatrice. Ils construisent les milieux B_1 et B_2 de $[MM_1]$ et $[MM_2]$ et constatent que (OB_1) et (OB_2) ne sont pas les médiatrices de $[MM_1]$ et de $[MM_2]$.

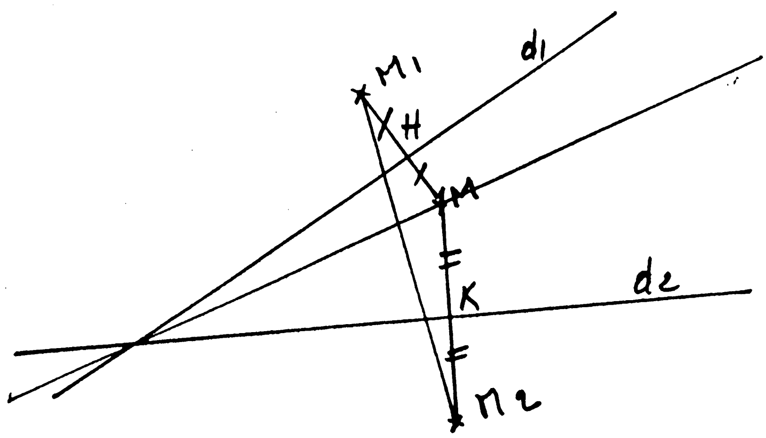


Un groupe modifie alors la stratégie : après avoir construit la médiatrice de $[M_1M_2]$, ils construisent les symétriques M'_1 et M'_2 de M_1 et M_2. Mais bien sûr, M'_1 et M'_2 ne sont pas confondus. Le groupe explique "*pour que ce soit le même point , il faut que les longueurs $M'_1 M_1$ et $M'_2 M_2$ soient égales*".



Troisième phase

Les différentes stratégies sont exposées par les élèves. Le dessin correspondant à la consigne est au tableau.



La discussion s'engage :
Un élève écrit au tableau les propositions sûres. "*Il faut* $MM_1 = MM_2$".
Un élève affirme : "*ce sont des symétriques donc c'est le double*".
Un autre fait préciser : "*c'est le double de quoi ?*"
Un troisième complète : "*c'est le double de* Md_1 *ou* Md_2".

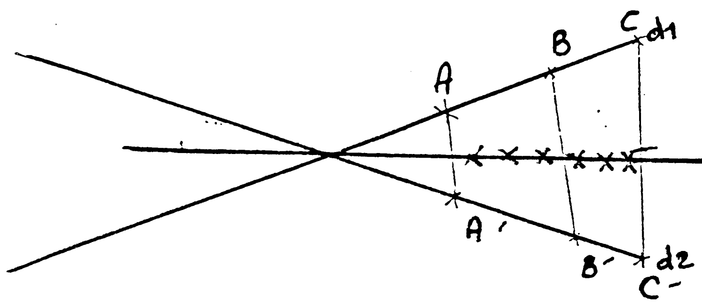
Le professeur propose de nommer H le milieu de $[MM_1]$ et K le milieu de $[MM_2]$ pour arriver à s'exprimer plus correctement. Il propose d'écrire ce qui vient d'être dit en utilisant H et K.

L'ensemble de la classe "réfléchit".
Un élève propose "$MM_1 = 2\,HM$ *et* $MM_2 = 2MK$"
Un autre déduit "*Il faut* $HM = MK$"

Cette égalité permet de proposer un nouveau moyen de trouver des points M : "*Trouver tous les points à égale distance de* d_1 *et* d_2".

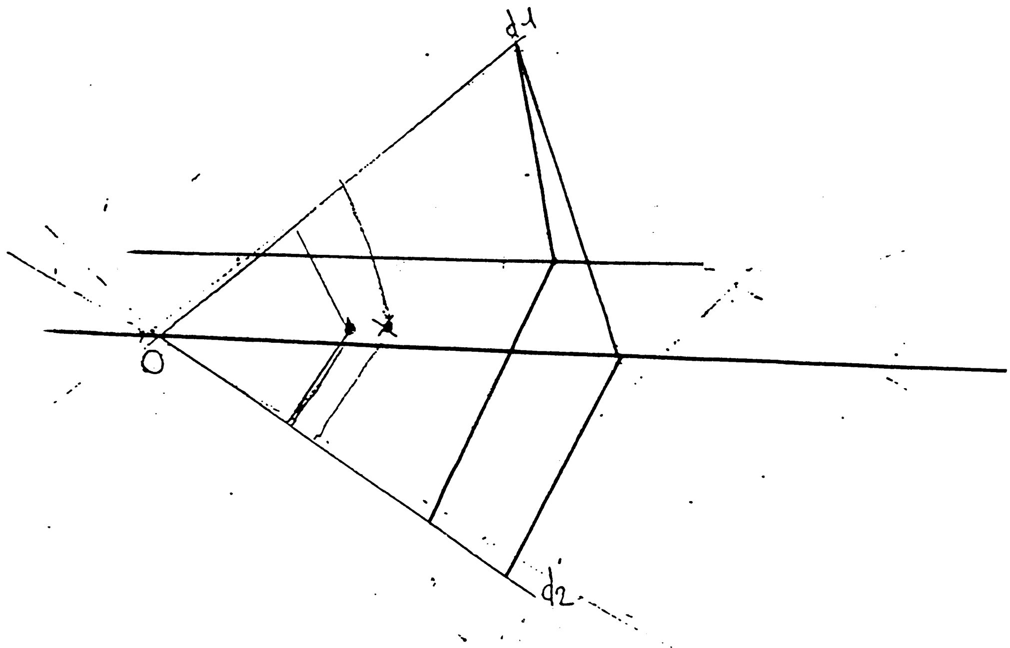
Quatrième phase

A partir de cette nouvelle proposition, les élèves font un travail de recherche à la maison. Les différents travaux sont présentés au début de la deuxième heure.
exemple de conjecture : "*je prends deux points sur* d_1 *et* d_2 *et je prends le milieu. Tous les milieux sont des points M.*"

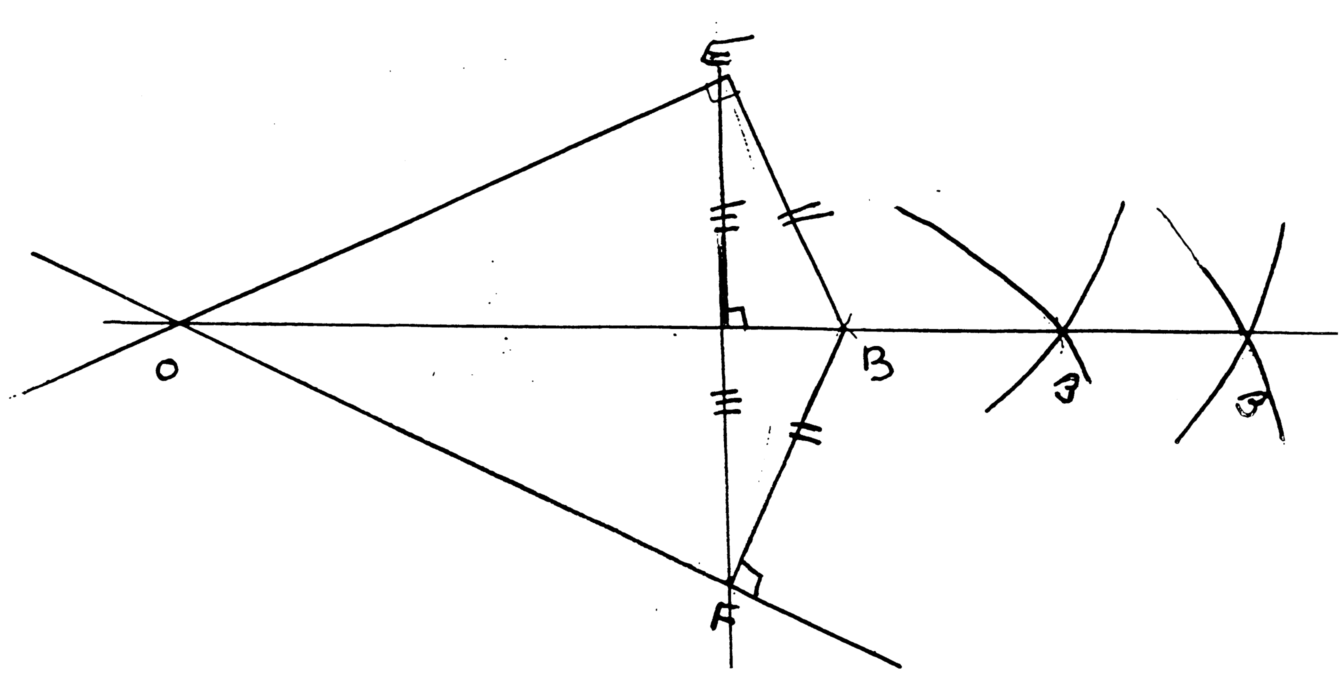


-On mesure la distance entre le segment[AA'], on cherche la moitié de ce segment.
-On trace la droite : milieu du segment[AA']
-jusqu'à l'intersection de d1 et d2, donc tous les points B sont sur cette droite.

exemple de construction par essais erreurs.



Plusieurs groupes au cours de leurs essais obtiennent des points qui conviennent. Certains dessins sont codés.



Après une mise en commun, on obtient finalement les conditions menant à la construction habituelle des points de la bissectrice, la propriété d'axe de symétrie de l'angle est mise en évidence par les élèves en utilisant le pliage.

4. Conclusion

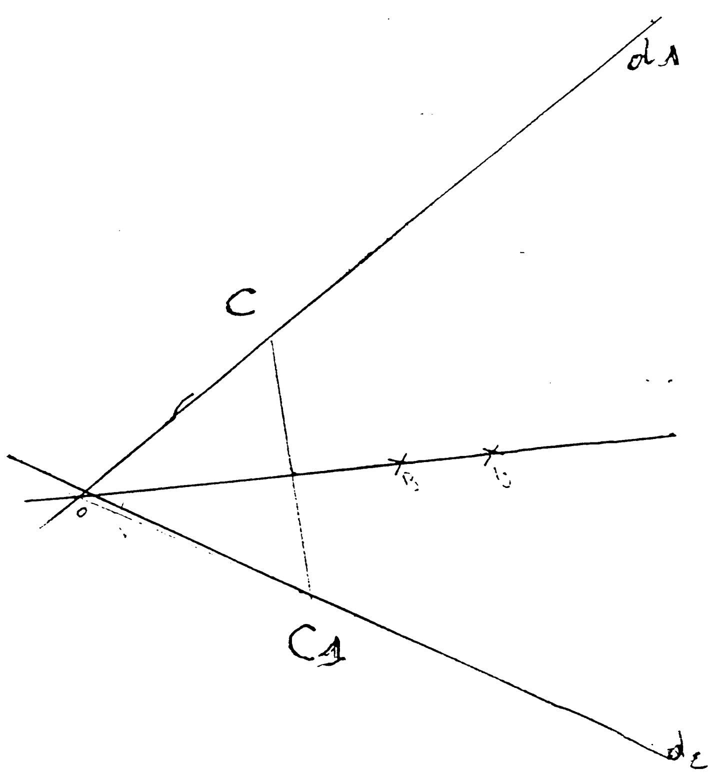
Cette séquence permet de travailler sur la confusion médiatrice - bissectrice.

Avec deux outils médiatrice et symétrie orthogonale, cette situation permet de concevoir la bissectrice comme un "cas particulier " du problème proposé et de la définir comme ensemble de points équidistants à deux droites sécantes.

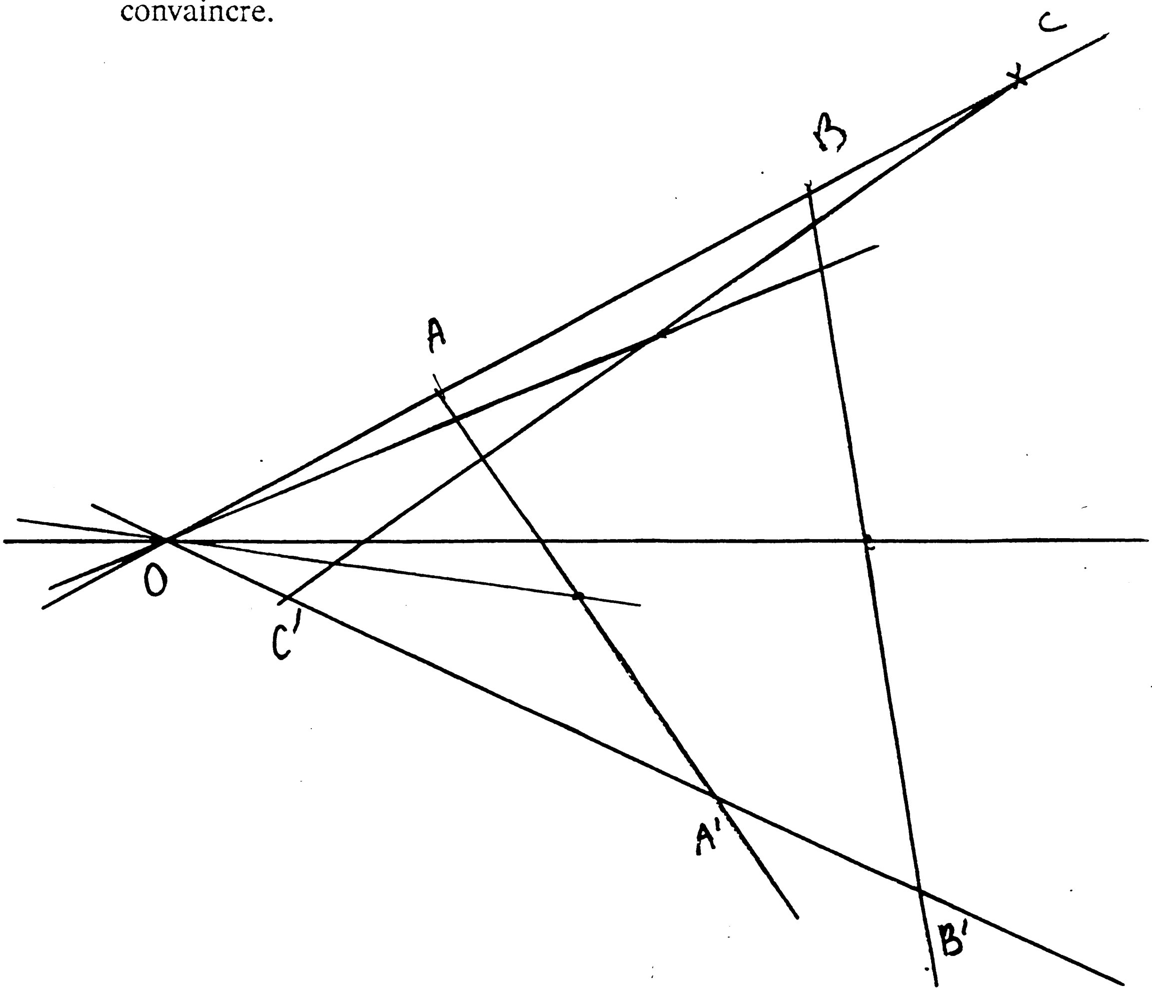
Les différentes stratégies et les arguments explicités par les élèves pour les justifier montrent que la confusion médiatrice-bissectrice n'est pas seulement au niveau du vocabulaire. Elle est confortée par l'utilisation de l'équidistance pour définir les points de l'une et l'autre et par l'usage du compas pour la construction.

Cette séquence a permis de faire émerger des conceptions fausses et de les pointer : par exemple, on prend deux points sur les côtés de l'angle et la bissectrice passe par le milieu du segment joignant les deux points.

Ils ont compris pourquoi cela marchait parfois : en effet les élèves ont remarqué qu'implicitement ils choisissaient des distances égales sur les côtés.



D'où l'intérêt du contre-exemple proposé par un groupe pour bien se convaincre.



D'autre part le changement d'objet de recherche de la séquence (passant de la construction de symétriques de points à la construction de points équidistants de 2 droites) résulte :

- de la prise en compte d'une idée a priori sur la figure,
- de son évolution par raisonnement à partir de propriétés.

Ces différentes étapes constituent une stratégie de recherche et doivent faire l'objet d'un apprentissage.

BIBLIOGRAPHIE

ALIBERT D., Sur le rôle du groupe classe pour obtenir et résoudre, une situation a-didactique
in Rechercher en didactique des mathématiques, col 11/1,1991

AUDIBERT G., Démarches de pensée et concepts utilisés par les élèves de l'enseignement secondaire en géométrie euclidienne plane. Thèse-Etat-Mathématiques, 1982, Montpellier, 2 vol. ; rééd. Paris, APMEP, 1984.

BALACHEFF N., Preuve et démonstration en mathématiques au collège
in Recherches en didactique des mathématiques, vol. 3/3, 1982.

Didactique des mathématiques. Le dire et Le faire, sous la direction d'Alain Bouvier, Cedic-Nathan, 1986.

DUVAL R., Ecarts sémantiques et cohérence mathématique.
in Annales de didactique et de sciences cognitives vol 1 1988.

DUVAL R., Pour une approche cognitive des problèmes de géométrie en termes de congruence.
in Annales de didactique et de sciences cognitives vol 1 1988.

DUVAL R. EGRET M.A., L'organisation déductive du discours : inter action entre structure profonde et structure de surface dans l'accès à la démonstration.
in Annales de didactique et de sciences cognitives, I.R.E.M. Strasbourg, vol. 2, 1989

DUVAL R. EGRET M.A., Comment une classe de 4ème a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration.
in Annales de didactique et de sciences cognitives, I.R.E.M. Strasbourg, vol. 2, 1989

GRAS R. GIORGIUTTU I. Le micro-ordinateur outil interactif de révélation, d'analyse et d'apprentissage en géométrie.
in Actes de l'Université d'été Informatique et Enseignement de la géométrie IREM de Toulouse,1990

GRAS R., Publications de l'IRMAR fascicule 5, 1988-1989.

LABORDE C., Problèmes de l'enseignement de la géométrie au collège
in Annales de didactique et de sciences cognitives, I.R.E.M. Strasbourg, vol. 1, 1988.

LEGRAND M., Rationalité et démonstration mathématiques, le rapport de la classe à une communauté scientifique
in Recherche en didactique des Mathématique vol 9/3, 1988.

MESQUITA A.L., RAUSCHER J.C., Sur une approche d'apprentissage de la démonstration
in Annales de didactique et de sciences cognitives, I.R.E.M. Strasbourg, vol. 1, 1988.

PLUVINAGE F., Aspects multidimentionnels du raisonnement en géométrie.
in Annales de didactique et de sciences cognitives, I.R.E.M. Strasbourg, vol. 2, 1989

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de sixième, 1985-1986 Bulletin Inter-I.R.E.M. premier cycle,rééd.1989.

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de cinquième, 1986-1987. Bulletin Inter-I.R.E.M. premier cycle, rééd.1989.

Suivi scientifique. Nouveaux programmes de quatrième, 1987-1988. Bulletin Inter-I.R.E.M. premier cycle, rééd. 1989.

Logiciel "Le géomètre". Edition Nathan.

Titre : **Des activités pour raisonner au collège**

AUTEURS : D. BERGUE, J. BORREANI, B. POULAIN.

PUBLIC CONCERNE : enseignants de collèges.

NIVEAU : collège.

RESUME : Présentation d'activités qui font émerger des obstacles cognitifs par confrontations provoquées entre figures et propriétés. Ces activités permettent une explicitation d'un raisonnement dès la sixième en favorisant l'expression orale et en pointant le rôle particulier de l'écrit.

MOTS CLEFS : Raisonnement
Figure
Expression orale et écrite

DATE : Déc. 1991.
NOMBRE DE PAGES : 45.
FORMAT : A4
PRIX : 25 frs

PUBLICATION : ISBN : 2-86239-035-6
Dépôt légal : 4ème trimestre 1991