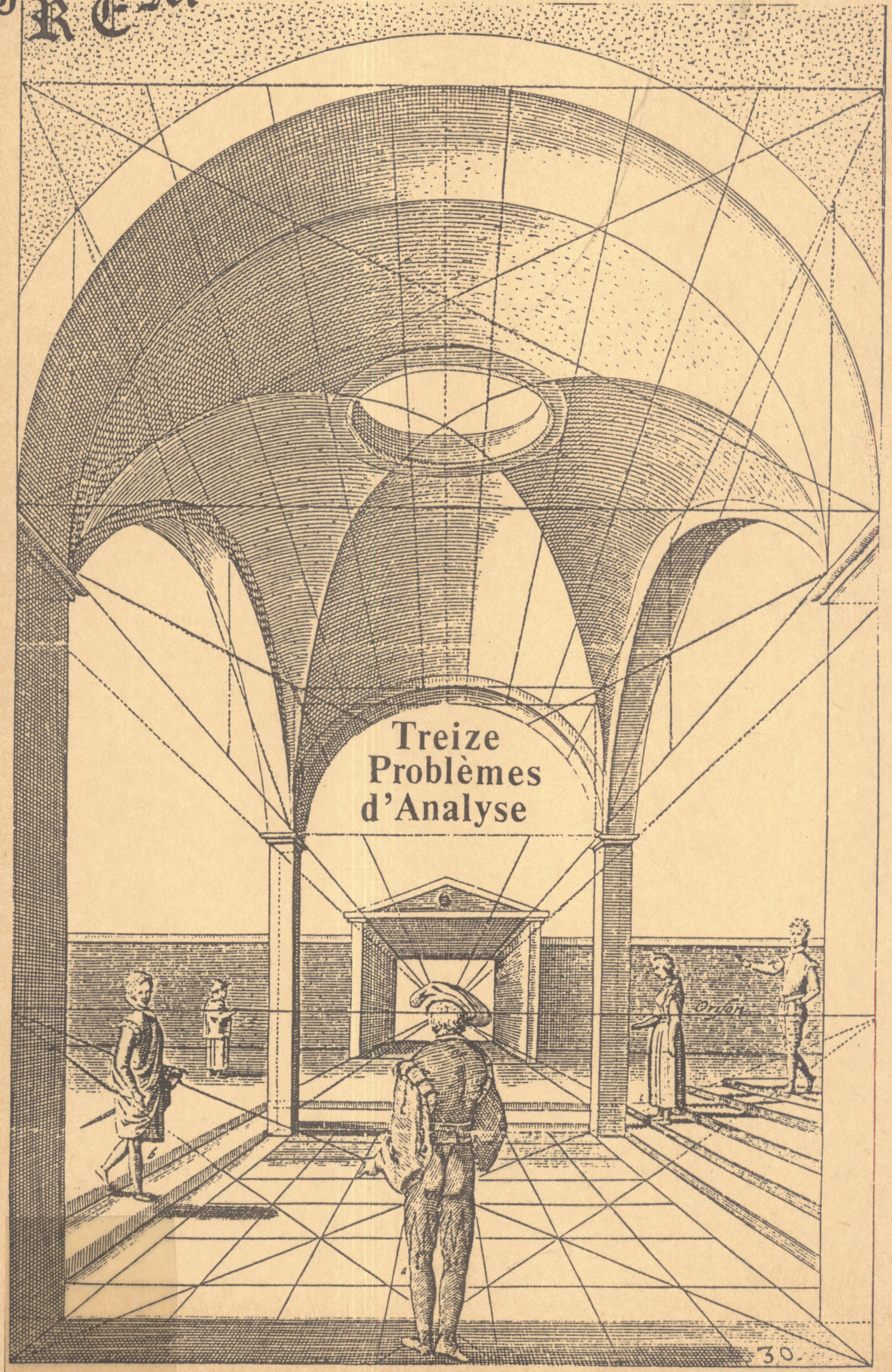
UNIVERSITE de ROUEN - S.C.U.R.I.F.F.

IREM de ROUEN

1, rue Thomas Becket 76130 Mont-Saint-Aignan tél: 35 14 61 41



Treize Problèmes d'Analyse

T.HAMEL F.LACHAUX G. LE HIR L.SINEGRE

S O M M A I R E

INTRODUCTION

Ces 13 problèmes d'analyse s'adressent aux étudiants de 1er cycle de l'enseignement supérieur et aux élèves des classes terminales C et D.

Si, de prime abord, figurent de nombreux thèmes classiques dépassant les classes de lycée, la rédaction adoptée pour chaque problème reste conforme aux programmes du second cycle.

Nous espérons avoir évité le plus souvent l'écueil de plagier les théorèmes généraux. Le rythme des questions intermédiaires favorise la recherche de ceux des étudiants qui ne dominent pas encore les outils et les techniques de l'analyse réelle. Cette présentation pourra intéresser tous les professeurs qui trouveront dans l'index, en fin de volume, les grands thèmes abordés et les problèmes qui s'y réfèrent, leur degré de difficulté - très variable - permettra de choisir ce qui convient le mieux au niveau des élèves ou des étudiants.

L'étude de fonctions définies par une intégrale est le fil conducteur du recueil, mais certains problèmes touchent d'autres champs, comme les équations différentielles ou les probabilités.

Les outils fondamentaux de l'analyse sont employés :

* majoration - minoration - encadrement
* séparation des intervalles pour isoler les difficultés
* utilisation des suites, etc.,

sans oublier les techniques propres au calcul intégral.

Cependant, conformément à l'esprit des programmes du second cycle, nous n'appliquons que des théorèmes ou des résultats "globaux" et avons proscrit tout ce qui est "local" (les ε ou les voisinages...), ce qui ne gêne nullement pour établir quelques résultats fins.
Parallèlement à la préparation des examens, nous souhaitons que ce recueil contribue à élargir l'horizon mathématique des élèves et des étudiants.

Certains professeurs - les stagiaires de CPR, par exemple - pourront y chercher quelques pistes, ne serait-ce que par curiosité.

La résolution d'exercices et de problèmes reste un élément fondamental pour progresser et comprendre les mathématiques. Nous espérons que ce fascicule donnera au lecteur l'envie, et peut être aussi le plaisir, de s'atteler à ce travail.

*

*   *

PROBLEME n°1

Soit f une fonction strictement croissante et dérivable sur l'intervalle $[0,a]$, telle que $f(0)=0$.

Soit $g = f^{-1}$; préciser les variations de g.

On note F et G des primitives de f et g sur $[0,a]$ et $[0,f(a)]$ respectivement.

1°) Pour $x\in[0,a]$, soit $h(x)=\int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt$ et $k(x)=xf(x)$.

Calculer $h'(x)$ et $k'(x)$. Que peut on conclure ?

Calculer $h(0)$ et $k(0)$, en déduire :

$$(\forall\ x \in [0,a]\ )\quad \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt = xf(x)$$

Interpréter géométriquement cette relation et calculer : $\int_0^1 \sin^{-1} t\ dt$

2°) Soit u un réel de $[0,a[$ fixé . Etudier les variations de :

$$H(x) = \int_0^u f(t)dt + \int_0^{f(x)} g(t)dt - uf(x) \quad \text{pour } x \in [0,a]$$

En déduire que pour tout $u \in [0,a[$ et tout $v \in [0,f(a)[$:

$$uv \le \int_0^u f(t)dt + \int_0^v g(t)dt$$

3°) Application : Soient p et q , tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} =1$,$(p,q) \in [1,+\infty[^2$

a)exprimer le rapport $\frac{p}{q}$,en fonction de p seul, puis de q seul .

b)soit f définie sur $\mathbf{R}^+$ par $f(x)= x^{p-1}$, définir $g = f^{-1}$, puis calculer $\int_0^u f(t)dt + \int_0^v g(x)dx$ $(u,v) \in \mathbf{R}_+^2$; en déduire que :

$$uv \le \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}$$

PROBLEME n°2

A) Soit f une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que $f(]a,b[) \subseteq \mathbb{R}^{+*}$ et n un entier naturel non nul fixé.

On pose $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ et $F(b)=S$

1°) Démontrer qu'il existe un unique réel x_1 de $]a,b[$ tel que

$$F(x_1)=\frac{S}{n}$$

2°) Démontrer qu'il existe une suite unique $a=x_0<x_1<x_2<....<x_n=b$

telle que $$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(t)\,dt = \frac{S}{n}$$

3°) Interpréter géométriquement le résultat de **2°)** et expliciter la suite des x_i lorsque $a=0$, $b=1$ et $f(x)=\sqrt{x}$.

B) 1°) Soit g une fonction positive continue sur $[0,S]$, interpréter géométriquement la somme $S_n = \frac{S}{n}\sum_{i=0}^{n-1} g\left(\frac{i.S}{n}\right)$

en déduire $\lim_{+\infty} S_n$

2°) Chercher $\lim_{+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)^{\frac{1}{3}}$

C) 1°) On pose $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i)$, interpréter géométriquement u_n.

2°) Démontrer que : $u_n=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\left(f\circ F^{-1}\right)\left(\frac{i.S}{n}\right)$

3°) En utilisant **B,** déduire $\lim_{+\infty} u_n = \frac{1}{S}\int_0^S (f\circ F^{-1})(t)dt$

4°) Soit $H(x) = \int_a^x f^2(z)dz$ pour $x \in [a,b]$

a) démontrer qu' il existe une fonction G dérivable sur $]0,S[$ telle que $H(x)=G(t)$ et $t=F(x)$.

b) démontrer que pour $t \in]0,S[$ $G'(t)=f \circ F^{-1}(t)$.

c) en déduire que $\lim\limits_{+\infty} u_n = \dfrac{\int_a^b f^2(z)dz}{\int_a^b f(x)dx}$

d) retrouver le B **2°)**.

PROBLEME n°3

A) Pour tout réel u , on pose :

$$R_n(u) = e^u - \sum_{k=0}^{n} \frac{u^k}{k!}$$

le but de la partie **A** est de démontrer :

$$\lim_{n \to +\infty} R_n(u) = 0$$

1°) Soit $\alpha \in]0,+\infty[$;on pose $a_n = \frac{\alpha^n}{n!}$, étudier $\frac{a_{n+1}}{a_n}$; en déduire qu'il existe un indice n_0 à partir duquel $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{1}{2}$

Démontrer que (a_n) converge vers 0.

2°) Prouver que $R_{n+1}(u)$ est une primitive de $R_n(u)$.

3°) On pose :

$$b_n = \int_0^u e^{-t} R_n(t)\,dt$$

en utilisant une intégration par parties , démontrer :

$$b_n - b_{n+1} = \int_0^u e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = e^{-u} R_{n+1}(u)$$

puis que

$$|b_n - b_{n+1}| \leq K \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!}$$

avec

$$K = |u| \operatorname{Sup}(1, e^{-u})$$

4°) En déduire que $R_n(u)$ converge vers 0.

B°) Soit (c_n) la suite définie par :

$$c_n = \frac{1}{n!} \int_1^x (\ln t)^n dt \quad , \quad x \text{ fixé dans } [1,+\infty[$$

Le but de cette partie est d'étudier la convergence puis de calculer la limite de la suite $S_n = c_0 + c_1 + \ldots\ldots + c_n$.

1°) Etudier c_n puis S_n dans le cas où x=1.

2°) Calculer c_0 , c_1 , $c_0 + c_1$.

3°) On suppose $x>1$;prouver que (S_n) est croissante et que :

$$c_n \leq (x-1)\,\frac{(\ln x)^n}{n!}$$

En déduire que (S_n) converge . (on pourra utiliser **A**)
En utilisant une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n, non nul :

$$c_n + c_{n-1} = x\,\frac{(\ln x)^n}{n!}$$

4°) Etablir l'égalité :

$$S_{n-1} + S_n - c_0 = x\,[x-R_n(\ln x)-1]$$

en déduire la limite de la suite (S_n).

PROBLEME n°4

f est une fonction continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}_+^*$

1°) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n la proposition : étant donnés n nombres positifs $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ leur moyenne arithmétique est supérieure ou égale à leur moyenne géométrique, c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n) \geq (a_1.a_2.\ldots.a_n)^{\frac{1}{n}}$$

a) Démontrer que P_2 est vraie .

b) k désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2, on suppose que P_k est vraie.

$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ étant k réels positifs fixés , on pose :

$$g(x) = \frac{1}{k+1}(x+a_1+a_2+\ldots+a_k) - (xa_1 a_2\ldots a_k)^{\frac{1}{k+1}}$$

Etudier les variations de g et en déduire que P_{k+1} est vraie .

Conclure et démontrer que si $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [a,b]^n$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \ln(f(x_k)) \leq \ln\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(x_k)\right]$$

2°) En utilisant la suite (x_i), $1 \leq i \leq n$ $\left(x_i = a_i + \frac{b-a}{n}\right)$, démontrer

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln(f(x))dx \leq \ln \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

3°) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, on définit $u_n = \frac{1}{n-1}\int_1^n \left(1+\frac{1}{x}\right)^x dx$

a)Démontrer que si $t \in \mathbb{R}^+$ $\ln(1+t) \leq t$; en déduire $u_n \leq e$.

b)Soit $v_n = \ln(u_n)$, démontrer que :

$$v_n \geq \frac{1}{2(n-1)}\left(n^2\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + n - 1 - \ln(1+n)\right)$$

c)en déduire que $\lim_{+\infty} u_n = e$.

PROBLEME n°5

A) Soit f une fonction continue décroissante et positive sur $]0,1]$.

On pose pour $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$ $\quad u_n = \frac{1}{n}\left(f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+.....+f(\frac{n-1}{n})\right)$

Remarque : f n'est pas nécessairement définie en 0.

1°) Montrer que pour tout entier naturel non nul :

$$u_n + \frac{1}{n}\left(f(1)-f(\frac{1}{n})\right) \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq u_n$$

2°) En déduire que $0 \leq u_n - \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$

3°) En appliquant ce résultat à la fonction $f_1 : x \dashrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}}$, montrer

que $2\sqrt{n} - 1$ est une approximation par excès à 1 près de :

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \qquad \text{pour } n\geq 2$$

4°) En appliquant le même résultat à la fonction $f_2 : x \dashrightarrow \ln\frac{1}{x}$,

montrer que pour tout entier naturel, n,non nul :

$$\left|\ln\left(\frac{1}{e}\right)^n - \ln n!\right| \leq \ln n + 1$$

B) Etude de quelques exemples.

Soient g_1, g_2, g_3 les fonctions définies par :

$$g_1(x) = \frac{1}{x} \qquad g_2(x) = \frac{-1}{x\ln(x/e)} \qquad g_3(x) = \frac{-\ln x}{\sqrt{x}}$$

1°) Montrer que les fonctions g_1, g_2, g_3 sont positives , continues et décroissantes sur $]0,1]$.

2°) On dit qu'une fonction continue sur $]0,1]$ vérifie la proposition P si et seulement si $\lim\limits_{x \to 0} xf(x)=0$.

On dit qu 'elle vérifie la proposition Q si et seulement si la suite $\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$ admet une limite finie lorsque n tend vers l'infini

a) Montrer que g_1 ne vérifie ni P ni Q.

b) Montrer que g_2 vérifie P mais pas Q .

c) Montrer que g_3 vérifie P et Q.

PROBLEME n°6

A) Soit n un entier naturel fixé.

1°) Démontrer que pour tout réel positif x :

$$\frac{1}{(n+1)!}\int_0^x t^{n+1} e^t \, dt \le \frac{x^{n+2} e^x}{(n+2)!}$$

2°) Démontrer que pour tout réel positif x :

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} \le e^x \le \sum_{i=0}^{n} \frac{x^i}{i!} + \frac{x^{n+1} e^x}{(n+1)!}$$

3°) Montrer qu'il existe un réel θ_n inférieur à 1 tel que :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \ldots\ldots + \frac{1}{n!} + \frac{e^{\theta_n}}{(n+1)!}$$

B°) Démontrer que le nombre e n'est pas un entier naturel .

C°) On suppose dans cette partie que e est rationnel , c'est à dire qu'il existe deux entiers r et s premiers entre eux tels que $e = \frac{r}{s}$.

1°) Démontrer que dans ce cas $\frac{e^{\theta_s}}{s+1}$ est un naturel .

2°) En remarquant que $\frac{e^{\theta_s}}{s+1} \in \left]0, \frac{e}{3}\right[$,conclure .

PROBLEME n°7

Soient a et r deux réels strictement positifs ; on pose $u_n = a+nr$;

$$a_n = \frac{u_0+u_1+\ldots\ldots+u_n}{n+1} \qquad b_n = (u_0\, u_1 \ldots . u_n)^{\frac{1}{n+1}}$$

Le but du problème est de montrer que $v_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ converge et de calculer sa limite.

1°) Montrer que $a_n = a + \frac{1}{2}nr$.

on pose $w_n = \ln(v_n)$.

2°) Vérifier que $w_n = \ln(\frac{r}{2} + \frac{a}{n}) - (\frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \ln(\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n}))$

3°) Soit x , y , z trois réels en progression arithmétique vérifiant $0<x<y<z$. Démontrer que :

$$\int_x^y \ln t \, dt \leq a.\ln y \leq \int_y^z \ln t \, dt$$

4°) Pour $n\geq 3$, démontrer que $(\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n})_{o\leq k\leq n}$ est arithmétique et donner sa raison.

5°) Déduire des questions **4°**) et **3°**) que :

$$\frac{1}{r}\int_{\frac{1}{n}(a+(k-1)r)}^{\frac{1}{n}(a+kr)} \ln t \quad dt \leq \frac{1}{n} \ln (\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n}) \leq \frac{1}{r}\int_{\frac{1}{n}(a+kr)}^{\frac{1}{n}(a+(k+1)r)} \ln t \quad dt$$

avec $n\geq 3$ et $1\leq k\leq n$

6°) Vérifier que :

$$\frac{1}{n} \ln (\frac{a}{n}) \leq \frac{1}{r}\int_{\frac{a}{n}}^{\frac{1}{n}(a+r)} \ln t \, dt$$

7°) On pose :

$$s_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \ln \left(\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n}\right)$$

En remarquant que :

$$\frac{n+1}{n} s_n = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{a}{n}\right) + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{a}{n} + \frac{k.r}{n}\right)$$

Encadrer s_n

8°) Calculer $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\frac{a}{n}\right)$ et $\lim\limits_{+\infty} \ln\left(\frac{r}{2} + \frac{a}{n}\right)$

9°) Déduire des questions précédentes que (w_n) converge vers $1-\ln 2$.

Montrer alors que (v_n) converge et déterminer sa limite .

10°) Calculer la limite de

$$\frac{n + 2}{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}$$

PROBLEME n°8

On appelle (*) l'équation différentielle $y' = y^2 - 1$ et $y(0)=0$.

On appelle (**) l'équation différentielle $y' = \sin y$ et $y(0)=\frac{\pi}{2}$.

A)1°) Montrer que l'application

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longrightarrow & \cos x \end{array}$$

est bijective .On appelle f sa bijection réciproque . Quel est l'ensemble de dérivabilité de f ?

2°) Soit h l'application définie pour tout réel x par :

$$h(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

a) Montrer que h est une solution de (*) sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que h est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]-1,1[$.

c) Soit

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2-1}\, dt$$

Démontrer que φ est dérivable sur $]-1,1[$ et $\varphi_\circ h$ sur $\mathbb{R}$.

En déduire la bijection réciproque de h .

3°) On considère une application ω ,solution de (*) sur un intervalle ouvert **U** contenant 0 .

a) Montrer que l'on peut trouver deux intervalles ouverts **I** et **J** ,**I** $\subseteq$ **U** et **J** $\subseteq$ $]-1,1[$,tels que ω soit une bijection de **I** vers **J** .

b).Résoudre (*) sur **I** .

B°) On appelle Ξ l'ensemble des solutions de (**) sur un intervalle ouvert **I** contenant 0.

1°) Si $y \in \Xi$ on pose $z = \cos y$

Démontrer qu' alors z est une solution de (*) sur **I** vérifiant $z(0) = 0$.

2°) Après avoir étudié le problème réciproque ,résoudre (**) en utilisant les fonctions f et g .

PROBLEME n°9

Pour n entier naturel non nul, on note :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad u_n = S_n - \ln n$$

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \qquad r_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$$

A).1°) Représenter graphiquement la fonction $f : x \longrightarrow \frac{1}{x+1}$, dans le plan muni d'un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ orthonormé, $x \in [0,1]$ et $\|\vec{i}\| = 10$ cm.

2°).En remarquant que

$$r_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}}$$

interpréter géométriquement r_n à l'aide de la question **1°**).

3°).Calculer r_5 ; $S_{10} - S_5$; S'_{10} ; u_{10} ; $2S_5 - S_{25}$; $S'_{10} - \ln 2$.

4°).Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :

$$r_n = S_{2n} - S_n = S'_{2n}$$

5°).En déduire

$$\lim_{+\infty} S'_{2n} = \ln 2$$

B).**1°**) Démontrer que (u_n) est décroissante.

2°) En déduire que (u_n) est convergente .On appelle C sa limite .

3°) Calculer $\lim_{+\infty} u_{2n}$ pour retrouver $\lim_{+\infty} S'_{2n}$.

4°)a) Chercher lim u_{n^2} ,en déduire que $(2S_n - S_{n^2})$ est convergente et calculer sa limite .

b) On définit pour $k \geq 1$

$$w_{2k-1} = \frac{2k-1}{k^2} \qquad w_{2k} = -\sum_{j=k^2+1}^{(k+1)^2-1} \frac{1}{j}$$

Démontrer que : $$W_n = \sum_{i=1}^{2n-1} w_i = 2S_n - S_{n^2}$$

c) En déduire $$\lim_{+\infty} W_n = C$$

PROBLEME n° 10

Nous admettrons que tout réel de]0,1[possède un développement décimal unique ,c'est à dire :pour tout x de]0,1[,il existe un unique suite $(a_n)_{n\geq 1}$ avec $a_n \in \{0,1,....,9\}$, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{10^n}$, telle qu'il n'existe pas de rang à partir duquel a_n soit constamment égal à 1.

Soit f : [0,1] -----> [0,1]

x=0,abc....------> f(x)=0,bac....

avec f(0)=0 et f(1)=1

1°) Calculer f(x) pour $x \in \{ 0{,}1127 \; ; 0{,}835 \; ; \frac{1}{\pi} \; ; \frac{\sqrt{2}}{2} \}$

puis f(x)-x pour $x \in \{ 0{,}5309 \; ; 0{,}5317 \; ; 0{,}5333 \; ; 0{,}5389 \}$

2°) Pour tout $k \in \{0 ;1 ;2 ;3 ;.... ;99\}$,on pose $k = 10a_k + b_k$ (a_k et b_k étant deux chiffres) ; montrer que :

sur $[\frac{k}{100} ; \frac{k+1}{100}[$, $f(x) = x + 0{,}b_k a_k - 0{,}a_k b_k$: en déduire que f est affine par morceaux .

3°) Prouver que f est continue sur $]\frac{k}{100} ; \frac{k+1}{100}[$,puis étudier la continuité à gauche et à droite de f(x) en $\frac{k}{100}$; $0 \leq k \leq 99$.

4°) Montrer que f est une bijection de [0,1] sur [0,1] et déterminer f^{-1}.

5°) Représenter dans un repère orthonormé direct la courbe représentative de f pour $x \in [0 ;0{,}04]$.

6°) Montrer que l'application

$F : \{0 ;1 ;2 ;.... ;99\} \longrightarrow \{0 ;1 ;2 ;.... ;99\}$
$k = 10a_k + b_k \longrightarrow f(k) = 10b_k + a_k$

est une bijection .

7°) Vérifier que $0,b_k a_k - 0,a_k b_k = \frac{9}{100}(b_k - a_k)$

en déduire la somme des aires des trapèzes délimités par les droites d'équations $y=0$, $x=\frac{k}{100}$ $(k\in\{0\,;1\,;2\,;\ldots 100\})$,et la courbe représentative de f.En déduire $\int_0^1 f(t)\,dt$.

PROBLEME n° 11

Le but de ce problème est d'étudier la fonction :

$$f : x \longrightarrow e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2}\, dt .$$

Vérifier qu'elle est impaire et que $f(0)=0$.

A)1°) Soit :

$$g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longrightarrow e^u - 1 - u - \frac{u^2}{2} \end{array}$$

calculer $g''(u)$,montrer que $g'(u)$ puis $g(u)$ sont strictement croissantes sur $\mathbb{R}^+$.Calculer $g(0)$,en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$

$$e^{t^2} > 1 + t^2 + \frac{t^4}{2}$$

2°) Pour $x > 0$, on pose

$$h(x) = \frac{e^{x^2}}{2x} - \int_0^x e^{t^2}\, dt$$

Prouver que h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. Déterminer $\lim_{x \to 0+} h(x)$, puis montrer qu'il existe un unique réel $a \in]0,1[$ tel que $h(a) = 0$.

B)1°) Démontrer que f est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 2x\, y = 1$$

2°) Soit $x > 0$; prouver :

$$\text{pour tout } t \in [0,x] , \quad e^{t^2} \leq e^{tx}$$

en déduire :

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}^+ , \ 0 \leq f(x) \leq e^{-x^2} \int_0^x e^{tx}\, dt$$

3°) Calculer

$$\int_0^x e^{tx}\, dt \quad , \text{ en déduire } \lim_{x \to +\infty} f(x) .$$

4°) Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, $f'(x)$ et $h(x)$ sont de même signe en déduire le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

C)

Soit $A(x) = 2x\, e^{-x^2} \int_0^{x-1} e^{t^2}\, dt$

et $B(x) = 2x\, e^{-x^2} \int_{x-1}^{x} e^{t^2}\, dt$

1°) Pour x > 1, prouver que :

$$A(x) \leq 2x\, e^{-x^2} e^{(x-1)^2} \quad (x-1)$$

En déduire :

$$\lim_{x \to +\infty} A(x) = 0$$

2°) En utilisant l'inégalité de la moyenne ,montrer que :

$$\frac{1}{x} \int_{x-1}^{x} te^{t^2}\, dt \leq \int_{x-1}^{x} e^{t^2}\, dt \leq \frac{1}{x-1} \int_{x-1}^{x} te^{t^2}\, dt$$

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} B(x) = 1 .$$

3°) Demontrer que :

$$\frac{\int_0^x e^{t^2}\, dt}{\dfrac{e^{x^2}}{2\,x}}$$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

PROBLEME n° 12

A)

Soit

$$u_n = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\dots + \frac{1}{n!}$$

1°)

Montrer que si $k \geq 2$ $\quad \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!}$

2°) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 3 et convergente . On note ℓ sa limite .

B)

Soit

$$v_n = \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots\dots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

1°) Démontrer que $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente . En déduire que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Démontrer que la suite $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et la suite $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ croissante .

2°) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la seule suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_0 = 1 \qquad \alpha_1 = 0 \\ (\forall n\in\mathbb{N}) \qquad \alpha_{n+2} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)\alpha_{n+1} + \frac{1}{n+2}\,\alpha_n \end{array}\right.$$

3°) On pose :

$$w_p = \sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^p}{k!(p-k)!}$$

a) Calculer w_1, w_2, w_3, w_4 .

b) Démontrer que si $p \geq 1$ $\quad w_p = 0$.

4°) On pose :

$$r_n = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{(n-j)!}\,(v_n - v_j)$$

Calculer r_0, r_1, r_2, r_3 .

5°) Montrer que pour tout entier n :

$$u_n v_n = \sum_{j=0}^{n} w_j + r_n$$

6°) En remarquant que si j est strictement inférieur à n

$$| v_n - v_j | \leq | v_j - v_{j+1} |$$

Démontrer que :

$$r_n \leq \frac{2^n}{n!}$$

En déduire que :

$$(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{1}{\ell}$$

C)1°) Montrer que pour tout entier k supérieur ou égal à 2 et tout entier n supérieur ou égal à k :

$$(n+1)! \leq (n-k)!\, n^{k+1}$$

2°) En utilisant la formule du binôme, démontrer que :

si $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (1 + \frac{1}{n})^n \leq u_n$

3°) Montrer que si n est pair non nul :

$$(1 - \frac{1}{n})^n \leq v_n$$

(on regroupera les termes deux par deux)

en déduire que $\ell = e$.

D) Applications .

n personnes investissent au hasard les n chambres (numérotées de 1 à n) d'un hôtel après avoir égaré les réservations .
Soit A l'évènement : aucune personne ne réside dans dans la chambre qui lui était destinée.

1°) Calculer la probabilité, q_n, de l'évènement A lorsqu'on autorise plusieurs personnes par chambre.

2°) On appelle p_n cette probabilité lorsque chaque personne occupe une chambre différente .

On appelle *B* l'évènement : la personne qui avait réservé la chambre n°1 occupe la chambre de celle qui réside au n°1.

Pour $n \geq 2$, calculer $p(B)$ en fonction de n et p_{n-2}, et démontrer que :

$$p_n = p_{n-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} p_{n-2}$$

Calculer alors p_n en fonction de n.

3°) Si n est pair comparer p_n et q_n.

4°) Calculer les limites de p_n et de q_n lorsque n tend vers l'infini.

5°) Calculer les probabilités, qu'au moins une personne retrouve sa chambre, puis qu'une personne retrouve sa chambre dans chacun des cas (un ou plusieurs occupants par chambre), puis la limite de ces probabilités.

6°) En utilisant une réunion d'évènements démontrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{v_{n-k}}{k\,!} = 1$$

en déduire que :

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j\, u_{n-j}}{j\,!} = 1$$

PROBLEME n°13

On note Γ_F la représentation graphique d'une fonction numérique F .

A)1°) Etudier et représenter dans un même repère les fonctions :

$$g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \frac{\sin u}{u} \quad (\text{si } u > 0)$$
$$0 \longrightarrow 1$$

$$g_1 : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$u \longrightarrow \frac{\sin u}{u + \pi}$$

2°) Comment peut on obtenir Γ_{g_1} à partir de Γ_g ?

3°) Donner par la méthode des rectangles une approximation à 0,01 près de l'aire comprise entre la courbe Γ_g et l'axe des abscisses pour : a) $0 \le x \le \pi$; b) $\pi \le x \le 2\pi$; c) $2\pi \le x \le 3\pi$

B) Pour $t \in \mathbb{R}_+^*$ on pose :

$$f(t) = \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u + t}\, du$$

1°) Montrer que f est définie sur $]0,+\infty[$ et interpréter géométriquement $f(\pi)$ grâce à **A)**.

2°) Démontrer que :

$$\forall\ t \in\ ]0,+\infty[\qquad 0 < f(t) \le \frac{\pi}{t}$$

en déduire

$$\lim_{t \to +\infty} f(t)$$

3°) Démontrer que f est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.

C) Etude de la dérivabilité de f .

Soit t_0 un réel strictement positif fixé et $h \in \left]-\frac{1}{2}t_0, \frac{1}{2}t_0\right[$.

1°) Montrer que pour tout réel strictement positif u :

$$\frac{1}{u+h+t_0} = \frac{1}{u + t_0} - \frac{h}{(u+t_0)^2} + \frac{h^2}{(u+t_0)^2(u+h+t_0)}$$

2°) En déduire que si F désigne une fonction continue sur $[0,\pi]$:

$$\int_0^{\pi} \frac{F(u)}{u+h+t_0}\,du = \int_0^{\pi} \frac{F(u)}{u+t_0}\,du + h\int_0^{\pi} \frac{-F(u)}{(u+t_0)^2}\,du + h^2\varphi(h)$$

avec $|\varphi(h)| \le \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{2|F(u)|}{(u+t_0)^3}\,du$

3°) En déduire que :

$$t \longrightarrow \int_0^{\pi} \frac{F(u)}{u+t}\,du$$

est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer sa fonction dérivée .

4°) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et démontrer que :

$$f'(t) = -\int_0^{\pi} \frac{\cos u}{(u+t)}\,du$$

5°) En déduire que f est solution sur $]0,+\infty[$ de l'équation différentielle :

$$y'' + y = \frac{1}{t+\pi} + \frac{1}{t}$$

Puis résoudre sur $]0,+\infty[$ cette équation .

D) Etude de l'allure de Γ_f au point d'abscisse 0.

1°) Démontrer que pour tout réel t strictement positif :

$$f(t) \le \pi - t\int_0^{\pi} \frac{1}{u+t}\,du$$

2°) En déduire que f possède un prolongement par continuité en 0 $\bar{f}$.

3°) Démontrer que pour tout réel t strictement positif :

$$\left| \int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u+t}\,du - \int_0^{\pi} g(u)\,du \right| \le 2\int_0^{\sqrt{t}} g(u)\,du + t\int_{\sqrt{t}}^{\pi} \frac{1}{u^2}\,du$$

En déduire que :

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \int_0^{\pi} g(u)\,du$$

4°) Démontrer que pour tout réel t strictement positif :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos u}{u+t}\, du \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \ln \left(\frac{\pi}{4t} + 1\right)$$

et que

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{u+t}\, du \quad \text{et} \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\cos u}{u+t}\, du$$

sont bornées .

En déduire que $\Gamma_{\bar{f}}$ possède au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale.

5°) Démontrer que pour tout entier naturel n :

$$\bar{f}(n\pi) = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (-1)^n\, g(u)\, du$$

6°) Tracer $\Gamma_{\bar{f}}$.

E) On appelle

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{f}\,(k\pi)$$

$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^n\, \bar{f}\,(k\pi)$$

1°) Démontrer que :

$$u_n = \int_0^{n\pi} |g(t)|\, dt$$

et

$$v_n = \int_0^{n\pi} g(t)\, dt$$

2°) Démontrer que pour tout réel t strictement positif :

$$f(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Big[\ln (u+t) \Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}$$

En déduire :

$$f(t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\frac{2\pi}{4t+\pi} - \left(\frac{2\pi}{4t+\pi}\right)^2 \right]$$

En remarquant que :

$$u_n \geq \int_0^{n\pi} \bar{f}(t)\, dt$$

démontrer que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$$

3°) En remarquant que (v_{2n}) décroit et (v_{2n+1}) croit, démontrer que la suite (v_n) est convergente.

F) Soit n un entier naurel non nul.
On introduit les fonctions suivantes :

$$\varphi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \frac{\sin^2 nu}{\sin^2 u}, \quad 0 \longmapsto n^2$$

$$\psi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \frac{\sin^2 nu}{\tan^2 u}, \quad 0 \longmapsto n^2$$

$$\zeta_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \frac{\sin^2 nu}{u^2}, \quad 0 \longmapsto n^2$$

$$\xi_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad u \longmapsto \frac{\sin nu}{\sin u}, \quad 0 \longmapsto n$$

1°) Démontrer que les fonctions φ_n, ψ_n, ζ_n, ξ_n sont continues sur $\mathbb{R}$.
On pose

$$A_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(u)\, du \qquad B_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \psi_n(u)\, du \qquad I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \zeta_n(u)\, du$$

2°) a) Montrer que pour tout réel x :

$$\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x) = \xi_{2n-1}(x)$$

$$\xi_{2n+1}(x) - \xi_{2n-1}(x) = 2\cos(2nx)$$

b) En déduire que :

$$A_n = n\frac{\pi}{2}$$

(on pourra montrer que la suite $(A_n - A_{n-1})$ est constante)

3°) Montrer que :

$$B_n = A_n - \frac{\pi}{4}$$

En déduire que :

$$\frac{I_n}{n} \text{ converge vers } \frac{\pi}{2}$$

(Comparer A_n, B_n et I_n.)

4°) En remarquant que :

$$\frac{I_n}{n} = \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \varphi_1(u)\,du$$

Calculer :

$$\lim_{+\infty} \int_0^{n\frac{\pi}{2}} \varphi_1(u)\,du$$

5°) Vérifier que :

$$\int_0^{n\frac{\pi}{2}} \varphi_1(u)\,du = \left[- \frac{\sin^2 u}{u}\right]_0^{n\frac{\pi}{2}} + \int_0^{n\pi} g(t)\,dt$$

En déduire que :

$$\lim_{+\infty} \int_0^{n\pi} g(t)\,dt = \lim_{+\infty} v_n = \frac{\pi}{2}$$

INDEX

Les numéros sont ceux des problèmes .

polynômes : 3A ; 6 .

TITRE: 13 PROBLEMES D'ANALYSE

AUTEURS: HAMEL T., LACHAUX F., LE HIR G., SINEGRE L.

FORMAT: A4 **Nombre de pages:** 30

PUBLIC CONCERNE: Elèves des Terminales Scientifiques
1° année cycle universitaire
Elèves professeurs, Candidats aux concours.

RESUME: Obtenir des résultats classiques parfois fins en analyse, aumoyen d'outils élémentaires:

- majoration
- minoration
- intégration par partie
- utilisation de suites.

OBSERVATIONS: Certains problèmes s'appliquent aux équations différentielles et aux calculs des probabilités

MOTS CLES: Suites et fonctions définies par une intégrale nombre e.

EDITEUR: IREM DE ROUEN

DIRECTEUR/responsable de publication: PICHARD Jean-François

DEPOT LEGAL: MARS 1989

ISBN: 2-86239-013-5