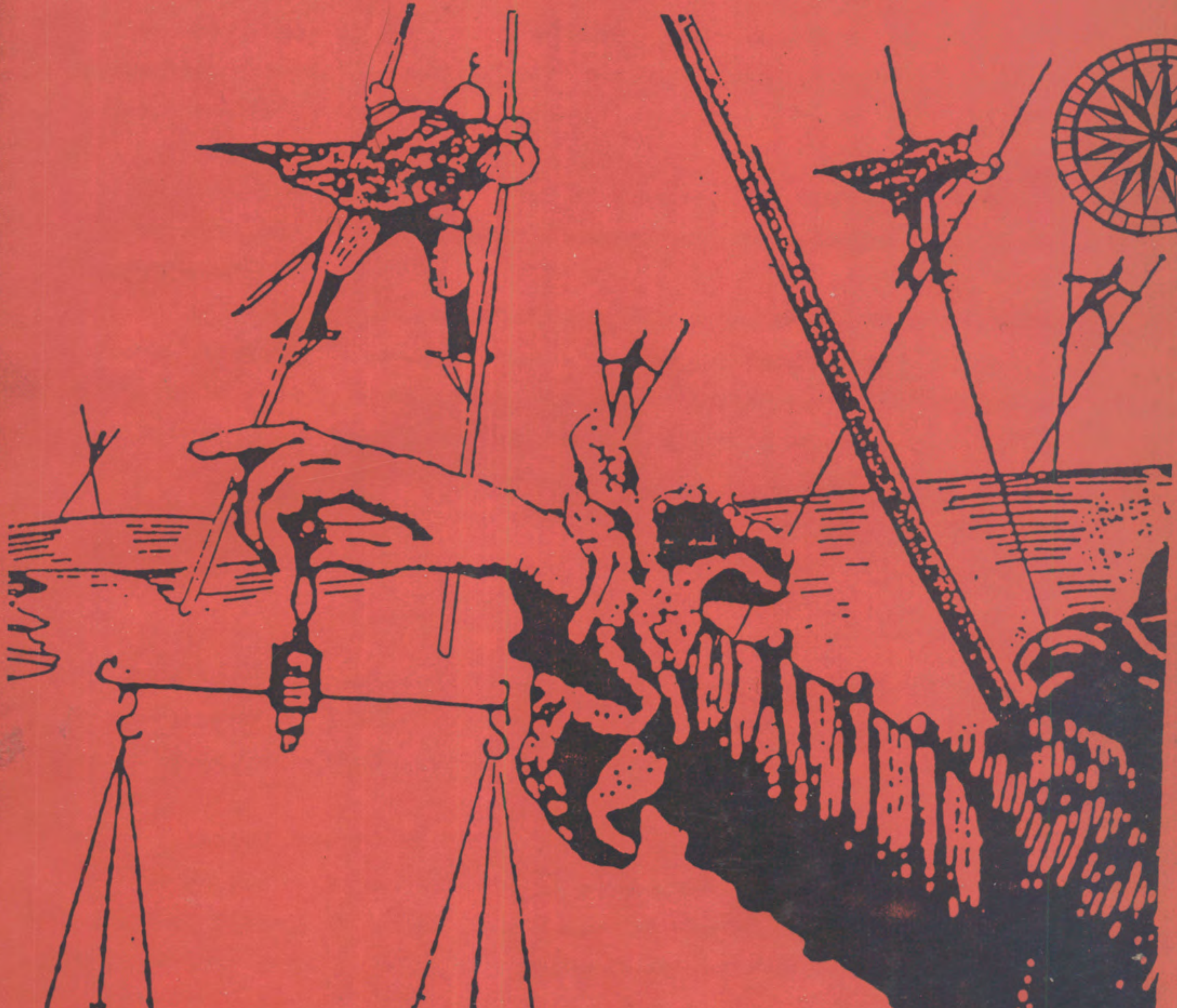
UNIVERSITE de ROUEN - S.C.U.R.I.F.F.

IREM de ROUEN

1, rue Thomas Becket 76130 Mont-Saint-Aignan tél: 35 14 61 41



EQUILIBRES

BARYCENTRES ASSOCIES

T.HAMEL F.LACHAUX L.SINEGRE

PREFACE

L'interprétation ou l'utilisation physique ou mécanique de la notion de barycentre n'est plus à faire depuis Archimède. Par contre adopter ce point de vue pour résoudre des exercices en cours de mathématiques comme le propose une équipe de professeurs de l'IREM de Bordeaux semble a priori plus surprenant.

Nous avons, depuis le début de l'année, introduit dans plusieurs classes et plusieurs niveaux cette "vision" au lycée Jacques Prévert de Pont-Audemer.

La superposition des équilibres, outre une pratique "physique" du barycentre, offre de nouveaux axes de recherche dans la résolution des exercices et permet dans certains cas de pallier l'absence d'"intuition" géométrique en lui substituant des méthodes algébriques, plus rassurantes pour certains élèves et tout aussi efficaces.
L'accueil dans les classes fut bon : beaucoup d'élèves semblent même "s'amuser" avec ce nouvel outil.

Nous présentons donc ici d'abord un cours, qui n'est en aucun cas un modèle pour la classe, pour exposer les fondements théoriques de la notion ,puis des exemples et des exercices corrigés .

La deuxième partie traite des "barycentres associés".

En effet il nous a paru utile (toujours en relation avec notre travail en classe) de donner un nom à cette configuration importante.Que se passe-t-il quand on modifie simplement un signe dans un équilibre de trois points, quelles relations algébriques ou géométriques unissent les deux systèmes ?

Autant de questions dont la résolution (aisée) permet de simplifier, de traiter parfois avec élégance, de mieux comprendre, enfin, de nombreux exercices: (lignes de niveau classiques, cercles d'Apollonius, propriétés géométriques des coniques).

Nous pensons que cette notion, reliée à la configuration du trapèze complet à côtés parallèles, peut aider de nombreux professeurs de Lycée qui doivent exposer l'homothétie et le barycentre.

Les plus anciens salueront sans doute ce timide retour de la "division harmonique" que nous avons vêtue d'habits récents et conformes aux programmes.

Nous avons terminé par un chapitre sur l'isogonalité, car les techniques précédentes, équilibres et barycentres associés, y sont très utiles.

Nous espérons qu'à la lecture de ce papier vous serez comme nous convaincus de l'intérêt de ces méthodes. Nous espérons aussi que vous en tirerez du plaisir.

*

* *

EQUILIBRES

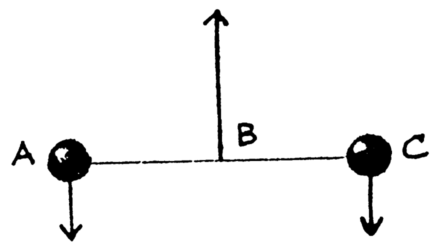
* * * *

A) INTRODUCTION , EXEMPLES :

1°) Soit B le barycentre du système (A,1) (C,1),que nous noterons:

B:(A,1) (C,1)

L'interprétation mécanique conduit à l'équilibre donné par la figure suivante :



Il est clair que cet équilibre traduit aussi que :

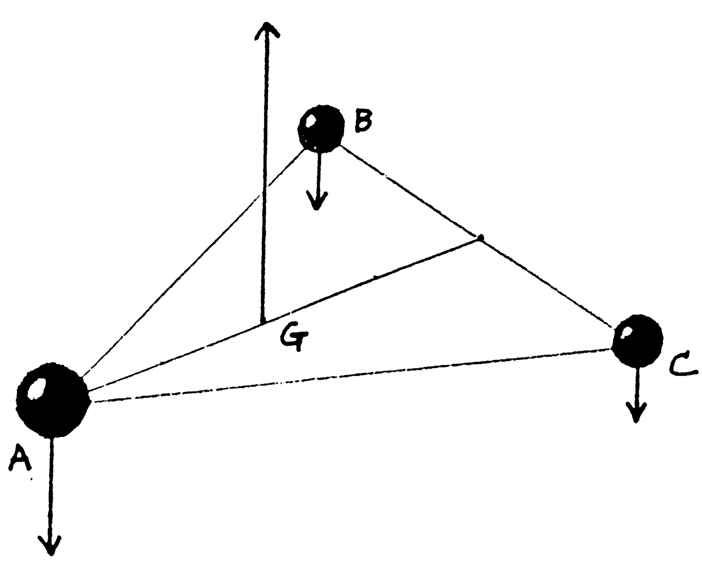
C:(A,1) (B,-2)

On peut ainsi toujours se ramener à des systèmes de deux points pondérés par des nombres positifs ce qui est particulièrement apprécié par les élèves.

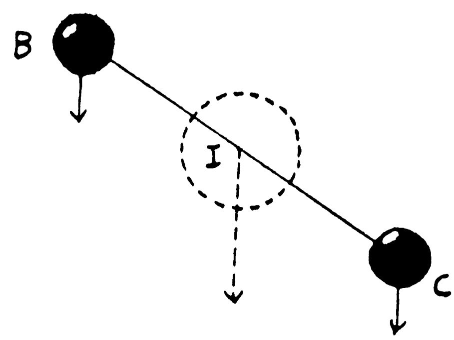
2°) Soit G le barycentre du système (A,2) (B,1) (C,1),que nous noterons:

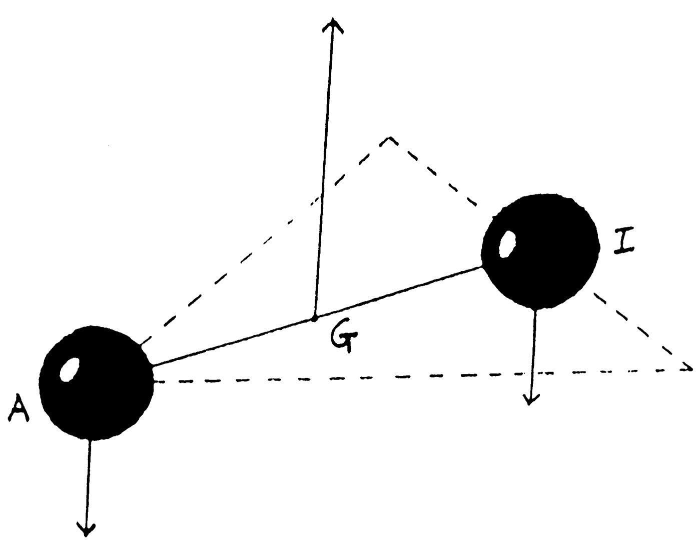
G:(A,2) (B,1) (C,1)

L'interprétation mécanique conduit à l'équilibre donné par la figure suivante :



La propriété d'associativité du barycentre se traduit par les schémas suivants:





La propriété d'associativité du barycentre correspond donc à des superpositions d'équilibres.

B) UN PEU DE THEORIE ...

On considère dans l'espace E un système de points pondérés

$$(A_i,\alpha_i)_{i\in I} \qquad I=\{1,2,\ldots\ldots,n\}$$

DEFINITION : Ce système sera dit "former un équilibre" si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes:

$$*)\quad \sum_{i\in I} \alpha_i = 0$$

$$**)\quad \forall\, M \in E \quad \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \vec{0}$$

Pour tout point O fixé , on a ,d'après la relation de Chasles :

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{MA_i} = \sum_{i\in I} \alpha_i \ \overrightarrow{MO} + \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i}$$

THEOREME : Dans la définition les conditions *) et **) sont donc équivalentes à :

$$*)\quad \sum_{i\in I} \alpha_i = 0$$

$$***)\quad \exists\, O \in E \quad \sum_{i\in I} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} = \vec{0}$$

Cet équilibre sera noté :

A_1	A_2		A_n
α_1	α_2		α_n

Cas particuliers:

n=1

Un équilibre d'un point est de la forme:

A
0

n=2

Un équilibre de deux points est de la forme:

A	B
α	$-\alpha$

avec $\alpha=0$ ou $A=B$

Remarque: Plusieurs systèmes de points pondérés peuvent définir le même équilibre,par exemple :

A	B	C	D
-2	1	1	0

et

A	B	C	A
-1	1	1	-1

On peut donc , dans tout équilibre:

.changer l'ordre des couples de points pondérés

.ajouter ou retrancher des éléments du type

A
0

.condenser ou développer les éléments correspondant à un même point A

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c} A & & A & & \\ \hline \alpha & & \beta & & \end{array} \longleftrightarrow \begin{array}{|c|c|c|} A & & \\ \hline \alpha+\beta & & \end{array}$$

* * *

COMBINAISON LINEAIRE D'EQUILIBRES

THEOREME 1:

si σ : $\begin{array}{|c|c|c|} A_1 & & A_n \\ \hline \alpha_1 & & \alpha_n \end{array}$ et τ : $\begin{array}{|c|c|c|} B_1 & & B_n \\ \hline \beta_1 & & \beta_n \end{array}$

sont deux équilibres, alors pour tout couple de réels (λ,μ)

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} A_1 & & A_n & B_1 & & B_n \\ \hline \lambda\alpha_1 & & \lambda\alpha_n & \mu\beta_1 & & \mu\beta_n \end{array}$$

est un équilibre noté $\lambda\sigma+\mu\tau$.

THEOREME 2:

Dans tout système en équilibre ,si on remplace plusieurs couples de points pondérés, dont la somme des coefficients est non nulle , par leur barycentre affecté de la somme des coefficients , on obtient un nouveau système en équilibre.

Remarque: Les démonstrations des théorèmes 1 et 2 découlent des propriétés des fonctions vectorielles de Leibniz .
A titre d'exercice , vous pourrez démontrer le théorème 2 à partir du théorème 1.

Applications , exemples :

1°) Soit σ : $\begin{array}{|c|c|c|c|} A_1 & A_2 & & A_n \\ \hline \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}$ un système en équilibre avec $\alpha_1 \neq 0$

Le barycentre G du système $(A_i, \alpha_i)_{2 \leq i \leq n}$ existe puisque $\sum_{i=2}^{n} \alpha_i$ vaut $-\alpha_1$ qui est différent de zéro .

D'après le théorème 2

$$\tau : \begin{array}{|c|c|} A_1 & G \\ \hline \alpha_1 & -\alpha_1 \end{array}$$ est un système en équilibre donc

$$A_1 = G$$

Dans un système de points en équilibre ,on peut donc interpréter tout point affecté d'un coefficient non nul comme barycentre de tous les autres .

Réciproquement soit G barycentre du système $(A_i, \alpha_i)_{2 \leq i \leq n}$ alors

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} G & A_2 & & A_n \\ \hline -\sum_{i \geq 2} \alpha_i & \alpha_2 & & \alpha_n \end{array}$$ est un système en équilibre .

La donnée d'un barycentre conduit donc à un équilibre qui l'interprète complètement sans privilégier un point plutôt qu'un autre .

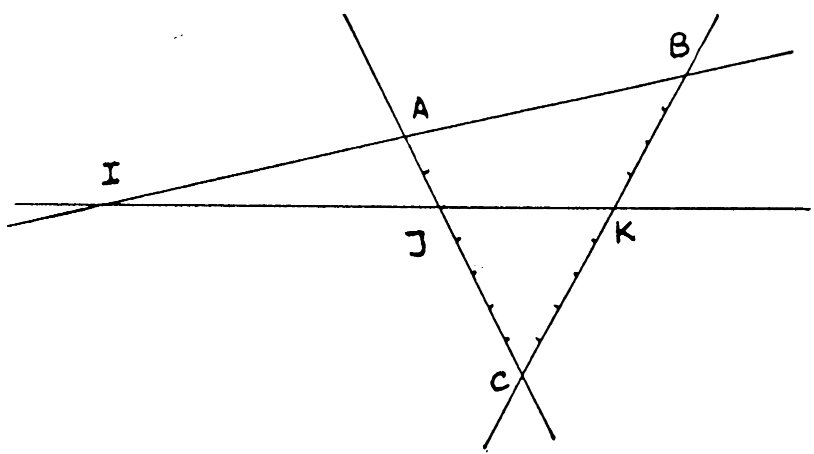
2°) Soit G le barycentre du système (A,2) (B,-5).

On en tire l'équilibre:

A	B	G
2	-5	3

qui permet de lire directement A comme barycentre de (B,-5) (G,3) et B de (A,2) (G,3).

3°) Soit A B C un triangle , I : (A,2) (B,-1)
J : (A,5) (C,2)
K : (B,5) (C,4)



Pour montrer l'alignement des points I,J,K, traduisons les données en termes d'équilibres :

σ_1 :

I	A	B
-1	2	-1

σ_2 :

J	A	C
-7	5	2

σ_3 :

K	B	C
-9	5	4

La combinaison:

$5\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3$:

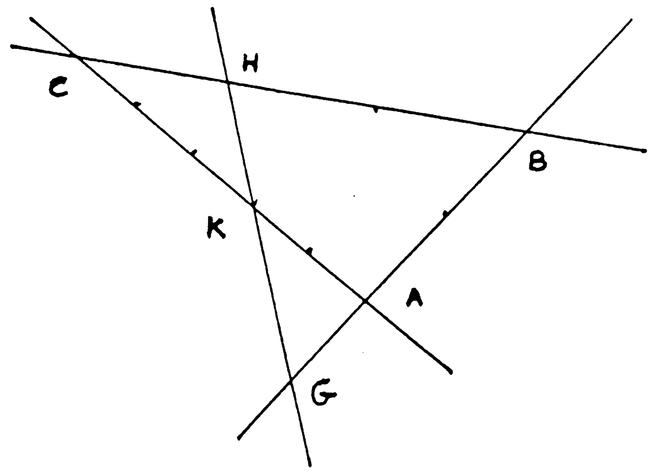
A	B	C	I	J	K
0	0	0	-5	14	-9

permet d'éliminer A,B,C et traduit donc l'alignement des points I,J et K.

4°) Soit A B C un triangle tel que AB = 3, BC = 6 et AC = 5 .

On considère G :(A,3) (B,-1) et H :(B,1) (C,2).

Les droites (GH) et (AC) se coupent en K . Cherchons à calculer AK



Les équilibres :

σ_1 :

G	A	B
-2	3	-1

et

σ_2 :

H	B	C
-3	1	2

traduisent les hypothèses ;on peut alors lire directement :

B : (G,-2) (A,3) et B : (C,2) (H,-3) soit B : (C,-2) (H,3)

Puisque

$$\frac{\overline{BA}}{\overline{BG}} = \frac{2}{3} = \frac{\overline{BH}}{\overline{BC}}$$

les droites (AH) et (CG) sont parallèles, donc :

$$\frac{\overline{KA}}{\overline{KC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{CG}} = -\frac{2}{3}$$

d'où K : (A,3) (C,2) , qui conduit à l'équilibre :

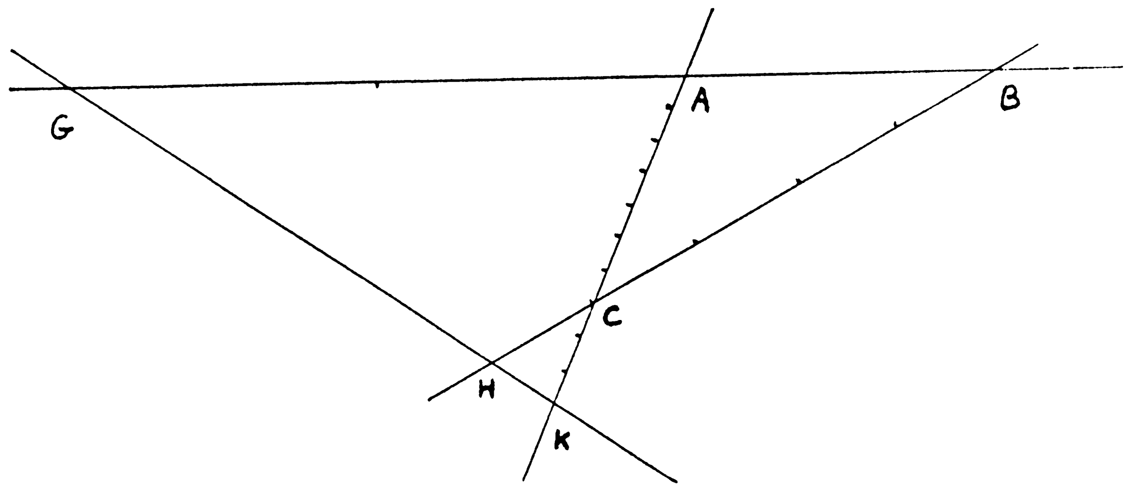
K	A	C
-5	3	2

Par suite A est barycentre de (K,-5) (C,2) ,ce qui s'écrit :

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AC}} = \frac{2}{5} \qquad \text{d'où} \quad AK = \frac{2}{5}\,AC \qquad \text{et} \qquad AK = 2$$

5°) Généralisation :

Soit un triangle ABC ; G :(A,3) (B,-2) et H :(B,1) (C,-5)
(GH) coupe (AC) en K ; cherchons à exprimer K comme barycentre de A et C .



Les données se traduisent en termes d'équilibres :

σ_1 :

G	A	B
-1	3	-2

et

σ_2 :

H	B	C
4	1	-5

Puisque K est à l'intersection de (GH) et (AC) nous cherchons à éliminer le point B:

$\sigma_1+2\sigma_2$:

A	B	C	G	H
3	0	-10	-1	8

en remplaçant (A,3) (C,-10) par son barycentre $(K_1,-7)$ et (G,-1) (H,8) par son barycentre $(K_2,7)$ on obtient l'équilibre :

K_1	K_2
-7	7

Puisque $7 \neq 0$, $K_1 = K_2 = K$ car $K_1 \in (AC)$ et $K_2 \in (GH)$.

Donc K : (A,3) (C,-10)

*

C) L'EQUILIBRE DE QUATRE POINTS .

Soit

A	B	C	D
α	β	γ	δ

un équilibre de quatre points avec $\alpha\beta\gamma\delta \neq 0$

* Si la somme des coefficients des deux points A et B est nulle alors la somme sur C et D l'est également ; on trouve, en appliquant la définition première des équilibres, pour tout point M de E :

$$\alpha \overrightarrow{MA} - \alpha \overrightarrow{MB} + \gamma \overrightarrow{MC} - \gamma \overrightarrow{MD} = \vec{0}$$

donc $\alpha \overrightarrow{BA} + \gamma \overrightarrow{DC} = \vec{0}$ avec $\alpha\gamma \neq 0$

Les droites (AB) et (CD) sont donc parallèles .

*

Exercice 1:

Caractériser la configuration ABCD parallélogramme par un équilibre sur les quatre points .

*

* Si la somme des coefficients des deux points A et B est non nulle (comme celle sur C et D),remplaçons le système (A,α) (B,β) par son barycentre partiel E_1 et le système (C,γ) (D,δ) par E_2. nous obtenons l'équilibre

E_1	E_2
$\alpha+\beta$	$\gamma+\delta$

Comme $\alpha + \beta \neq 0$ les deux points E_1 et E_2 sont confondus.Si nous appelons désormais E ce point, E se trouve à l'intersection de (AB) et (CD),et est exprimé en fonction de A et B ou de C et D.

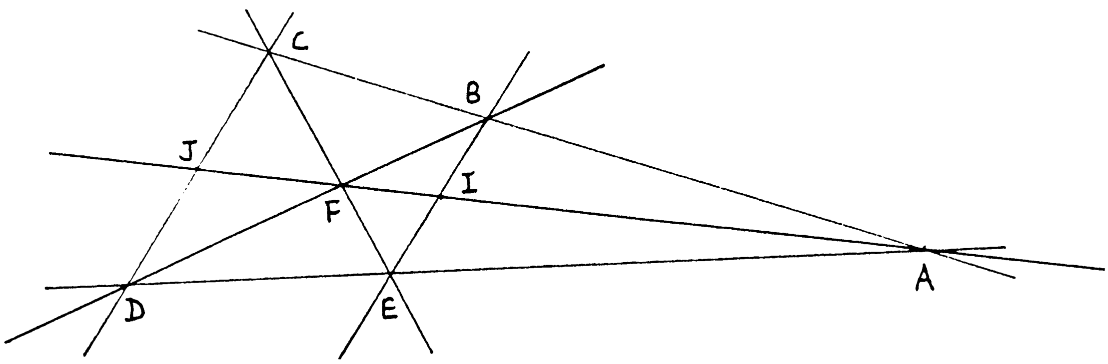
* *

*

D) LE QUADRILATERE COMPLET.

Considérons A,B,C alignés et A,E,D alignés ;(BD) et (CE) se coupent en F.La droite (AF) coupe (BE) en I et (CD) en J.Cherchons à déterminer I et J comme barycentre de A et F pour démontrer la propriété classique :

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IF}} : \frac{\overline{JA}}{\overline{JF}} = -1$$



Traduisons en termes d'équilibres les alignements de A, B, C et de A,E,D:

Il existe des réels β et δ non nuls tels que

σ_1 :

A	B	C
1	β	$-\beta-1$

et

σ_2 :

A	D	E
-1	δ	$-\delta+1$

L'équilibre de quatre points

(F) (F)

$\sigma_1 + \sigma_2$:

B	D	C	E
β	δ	$-\beta-1$	$-\delta+1$

permet d'obtenir

σ_3 :

B	D	F
β	δ	$-\beta-\delta$

En éliminant D dans σ_2 et σ_3, par la combinaison ($\sigma_2 - \sigma_3$) ,on obtient :

F	A	B	E
$\beta+\delta$	-1	$-\beta$	$-\delta+1$

d'où I : $(A,-1)$ $(F,\beta+\delta)$

c'est-à-dire : $\dfrac{\overline{IA}}{\overline{IF}} = \beta+\delta$

De même en éliminant B dans σ_1 et σ_3, par la combinaison ($\sigma_1 - \sigma_3$
on obtient

F	A	C	D
$\beta+\delta$	1	$-\beta-1$	$-\delta$

d'où J : $(A, 1)$ $(F,\beta+\delta)$

c'est-à-dire : $\dfrac{\overline{JA}}{\overline{JF}} =- (\beta+\delta)$

On en déduit:

$$\frac{\overline{IA}}{\overline{IF}} : \frac{\overline{JA}}{\overline{JF}} = \frac{\beta+\delta}{-(\beta+\delta)} = -1$$

*

Remarque:

L'équilibre σ_3:

B	D	F
β	δ	$-\beta-\delta$

suppose $\beta+\delta \neq 0$,

en effet si $\beta =-\delta$

σ_1 devient

A	B	C
1	β	$-\beta-1$

et σ_2

A	D	E
1	β	$-\beta-1$

Donc (BD) est parallèle à (EC) et F n'existe pas .

I : $(A,-1)$ $(F,\beta+\delta)$ suppose $\beta+\delta \neq 1$; si $\beta+\delta = 1$ l'équilibre

$\sigma_2 - \sigma_3$ devient

F	A	B	E
1	-1	$-\beta$	β

Donc (AF) est parallèle à (BE) et I n'existe pas .

J : $(A, 1)$ $(F,\beta+\delta)$ suppose $\beta+\delta \neq -1$; si $\beta+\delta =-1$ l'équilibre

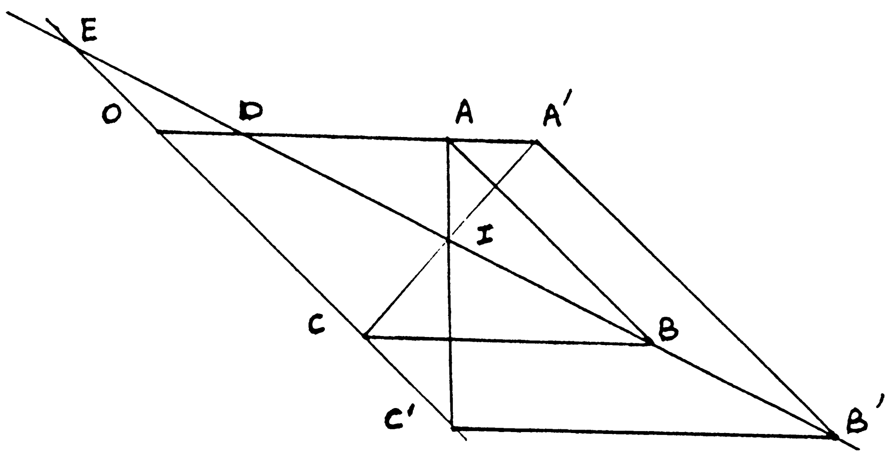
$\sigma_1 - \sigma_3$ devient

F	A	C	D
-1	1	δ	$-\delta$

Donc (AF) est parallèle à (CD) et J n'existe pas .

E) DEUX EXERCICES CLASSIQUES .

1°) OABC et OA'B'C' sont deux parallélogrammes tels que O,A,A' sont alignés ainsi que O, C et C' ;démontrer que les droites (AC'), (A'C) et (BB') concourent ou sont parallèles .



La droite (BB') coupe (OC) en E et (OA) en D .
Par hypothèse il existe deux réels k et l tels que les systèmes suivants sont en équilibre.

(1)

O	A	A'
1	k	-k-1

(2)

O	C	C'
1	l	-l-1

En projetant (1) parallèlement à (OC) et (2) parallèlement à (OA) on obtient:

(3)

E	B	B'
1	k	-k-1

(4)

D	B	B'
1	l	-l-1

Par (1) - (2) on obtient l'équilibre de quatre points :

A'	A	C'	C
-k-1	k	l+1	-l

Cet équilibre de quatre points (cf p.10) permet de considérer le point I intersection de (A'C) et de (AC') si l+k+1 ≠ 0 comme le barycentre de (A,k) et (C',l+1) ou de (A',-k-1) (C,-l):

Si l+k+1 = 0 (A'C) et (AC') sont parallèles.

En projetant

$-(l+1)(3) + (k+1)(4)$

E	D	B
-l-1	k+1	l-k

(5)

parallèlement à (OA)

on obtient :

E	O	C
-l-1	k+1	l-k

(6)

parallèlement à (OC)

on obtient :

O	D	A
-l-1	k+1	l-k

(7)

En éliminant C entre (2) et (6)

on a :

E	O	C'
-l(l+1)	k(l+1)	(l-k)(l+1)

(8)

En éliminant O entre (7) et (8)

on a :

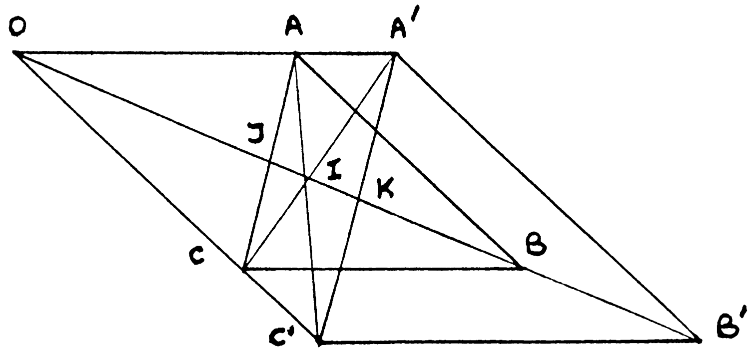
E	A	C'	D
-l(l+1)	k(l-k)	(l-k)(l+1)	k(k+1)

(9)

*Si $l \neq k$ et $l+k+1 \neq 0$, d'après (9) le barycentre de (A,(l-k)k) (C',(l-k)(l+1)), c'est-à-dire I, est aussi barycentre de (E,-l(l+1)) (D,k(k+1))
Les droites (A'C) (AC') et (BB') concourent en I.

*Si $l \neq k$ et $l+k+1=0$ (A'C) et (AC') sont parallèles d'après (1) + (2) et (AC') et (ED) le sont par (9) .
(A'C) (AC') et (BB') sont parallèles .

*Si $l=k \neq -0,5$ O = E = D :dans le trapèze complet OCC'A'AI (OI) passe par le milieu J de [AC] et le milieu K de [A'C'], donc par B symétrique de O par rapport à J et B' symétrique de O par rapport à K.



Les droites (A'C) (AC') et (BB') concourent en I.

*Si l=k=-0,5 O est le milieu de [AA'] , de [CC'] et de [BB'] donc:

(A'C) (AC') et (BB') sont parallèles .

*

Remarque: On reconnaîtra le théorème de Pappus dans une forme dégénérée, en considérant les points à l'infini sur les droites (OA) et (OC) .

* *
*

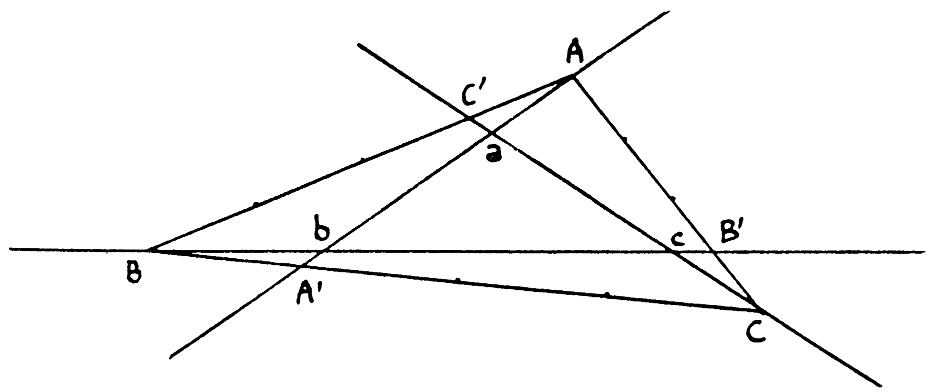
2°) Généralisation d'un exercice posé aux championnats de France de mathématiques et logique.

Soit ABC un triangle; on définit les barycentres :

A' : (C,x) (B,1-x) B' : (A,x) (C,1-x) C' : (B,x) (A,1-x)

On suppose que les droites (AA') et (CC') sont sécantes en a , (BB') et (AA') sécantes en b et (CC') et (BB') en c.

Le but du problème est de calculer le rapport des aires des triangles ABC et abc, notées S et s.



Remarque: On utilisera systématiquement les permutations :

$$A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow A$$

$$A' \longrightarrow B' \longrightarrow C' \longrightarrow A'$$

$$a \longrightarrow b \longrightarrow c \longrightarrow a$$

Par hypothèse, on peut écrire les trois équilibres

B'	A	C
-1	x	1-x

C'	B	A
-1	x	1-x

A'	C	B
-1	x	1-x

que, pour simplifier on présentera dans un seul tableau :

B'	A	C	(1)
C'	B	A	
A'	C	B	(2)
-1	x	1-x	

En éliminant C entre (1) et (2) on obtient:

B'	A	A'	B
x	$-x^2$	$x-1$	$(1-x)^2$

b

Puisque (AA') et (BB') sont sécantes $x^2 - x + 1$ est différent de 0 (cf l'équilibre de quatre points) et on peut écrire l'équilibre (3) que l'on complète par permutations :

b	A	A'
c	B	B'
a	C	C'
$-(x^2-x+1)$	x^2	$1-x$

(3)

b	B	B'
c	C	C'
a	A	A'
$-(x^2-x+1)$	$(1-x)^2$	$1-x$

(4)

En éliminant A' entre (3) et (4) on obtient:

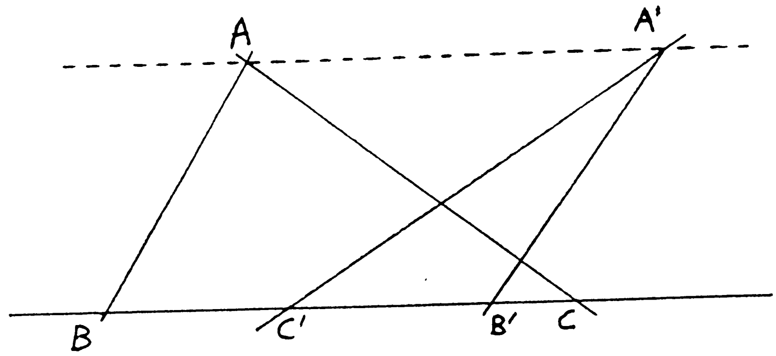
A	b	a
B	c	b
C	a	c
$(1-x)^3-x^3$	$x(x^2-x+1)$	$(x-1)(x^2-x+1)$
$1-2x$	x	$x - 1$

(après simplification par (x^2-x+1)).

En éliminant A entre (3) et (4) on obtient:

A'	b	a
B'	c	b
C'	a	c
$2x-1$	$(1-x)^2$	$-x^2$

LEMME: Quand deux triangles sont dans la situation suivante :



le rapport de leurs aires $\frac{a(ABC)}{a(A'B'C')}$ est le rapport des bases $\frac{BC}{B'C'}$.

*

En utilisant ce lemme successivement et en supposant x non nul on trouve :

$$\frac{a(abc)}{a(abB)} = \frac{bc}{bB} = \left| \frac{1-2x}{x} \right|$$

$$\frac{a(abB)}{a(A'bB)} = \frac{ab}{A'B} = \frac{|2x-1|}{x^2}$$

$$\frac{a(A'bB)}{a(A'AB)} = \frac{A'b}{A'A} = \frac{x^2}{x^2-x+1}$$

$$\frac{a(A'AB)}{a(ABC)} = \frac{A'B}{BC} = |x|$$

On en déduit $\frac{S}{s} = \left| \frac{1-2x}{x} \right| \times \frac{|2x-1|}{x^2} \times \frac{x^2}{x^2-x+1} \times |x|$

C'est-à-dire que le rapport des aires vaut :

$$\frac{S}{s} = \frac{(2x-1)^2}{x^2-x+1} = f(x)$$

Remarques: Pour x=0, les médianes sont confondues donc $\frac{S}{s} = 1 = f(0)$

$f(1-x) = f(x)$

$f(0,5) = 0$ (les médianes sont concourantes).

* * *

BARYCENTRES ASSOCIES

* * *

A) UN PEU DE THEORIE ...

DEFINITION : Deux points M,N sont dits "barycentres associés par rapport au couple de points (A,B)" si et seulement s'il existe deux réels α , β vérifiant :

* $|\alpha| \neq |\beta|$
* M : $(A;\alpha)$ $(B;\beta)$ et N : $(A;\alpha)$ $(B;-\beta)$

Remarques :(1) Dans le cas où $\alpha\beta\neq 0$, il revient au même de dire

que la division (A,B,M,N) est harmonique . En effet ,on peut écrire :

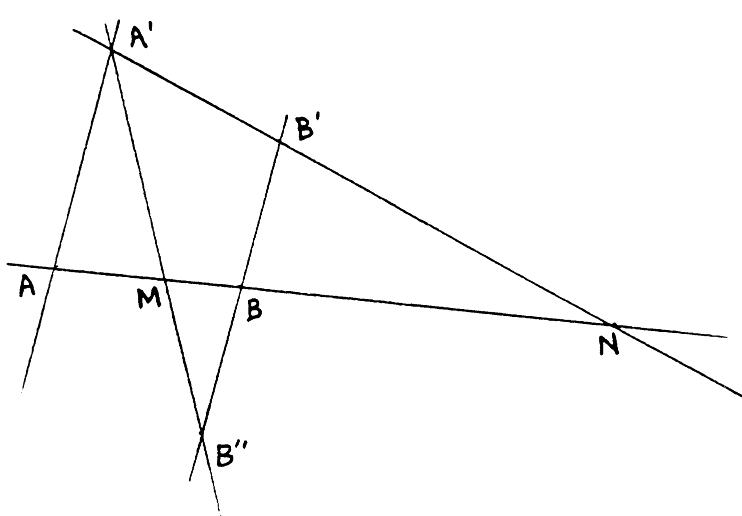
$$\frac{\dfrac{\overline{AM}}{\overline{BM}}}{\dfrac{\overline{AN}}{\overline{BN}}} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ (a,b)\in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = -\frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = \frac{b}{a}$$

$$\left.\begin{array}{l} M : (A,a)\ (B,b) \\ N : (A,a)\ (B,-b) \end{array}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} = \frac{b}{a} \quad \text{et} \quad \frac{\overline{AN}}{\overline{BN}} = -\frac{b}{a}$$

(2) La notion de barycentres associés est caractérisée par la configuration suivante :

BB'=BB"

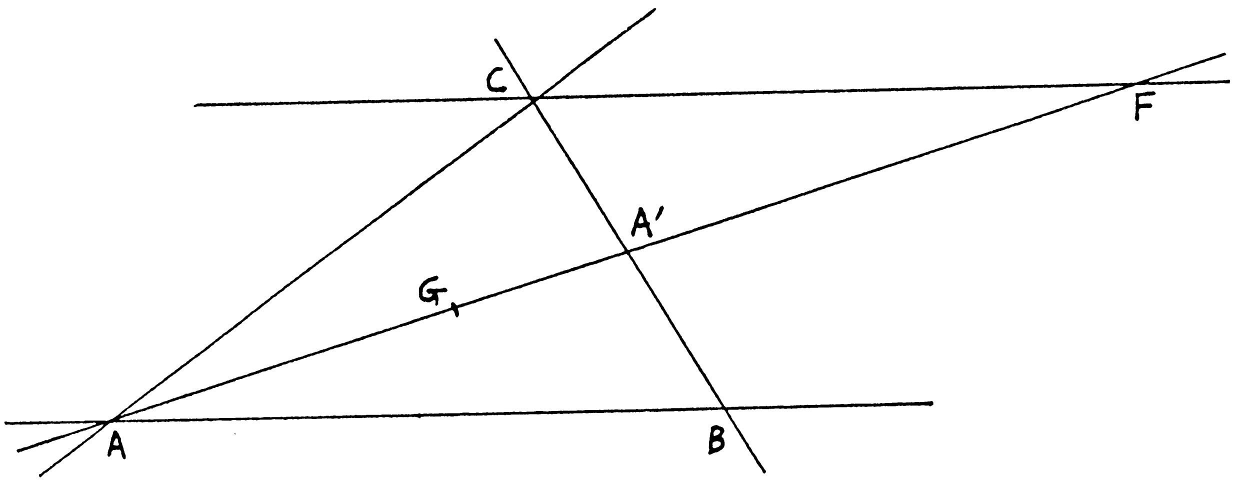
$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = \frac{\overline{AA'}}{\overline{BB''}} = -\frac{\overline{AA'}}{\overline{BB'}} = -\frac{\overline{NA}}{\overline{NB}}$$



(3) On retrouve cette configuration dans les deux exercices suivants :

1) Soit un triangle ABC de centre de gravité G. La médiane issue de A coupe la parallèle à (AB) passant par C en F; On appelle A' le milieu de [BC] .

Démontrer que les points F et G sont barycentres associés par rapport aux points A et A' .

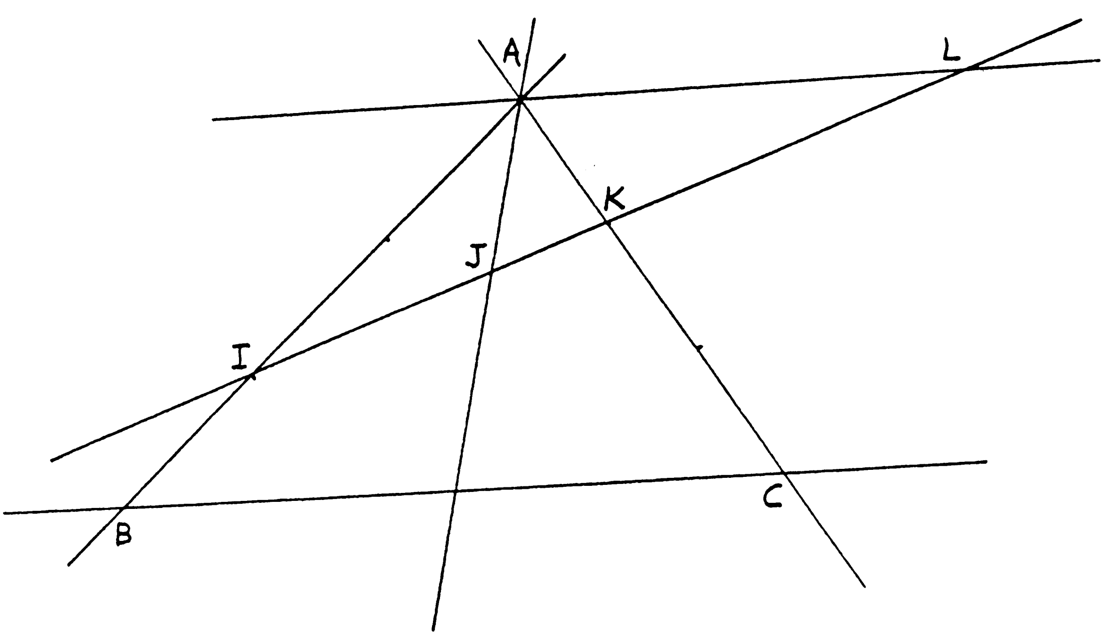


2) Soit ABC un triangle, notons :

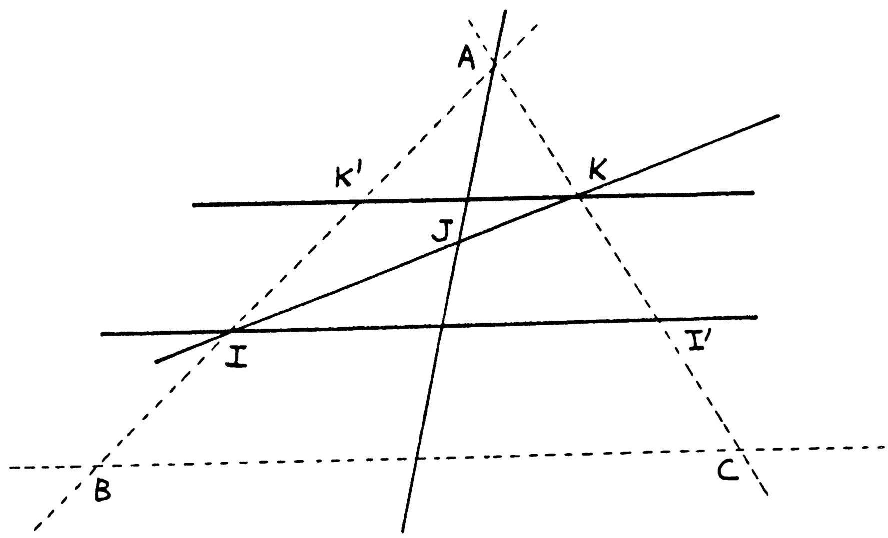
I : (A,1) (B,2)   K : (A,2) (C,1)

La droite (IK) coupe la médiane issue de A en J et la parallèle à [BC] passant par A en L.

Nous voulons démontrer que I et K sont associés par rapport aux points J et L.



Correction: Extrayons la figure suivante complétée des deux parallèles à (BC) passant par I et K.

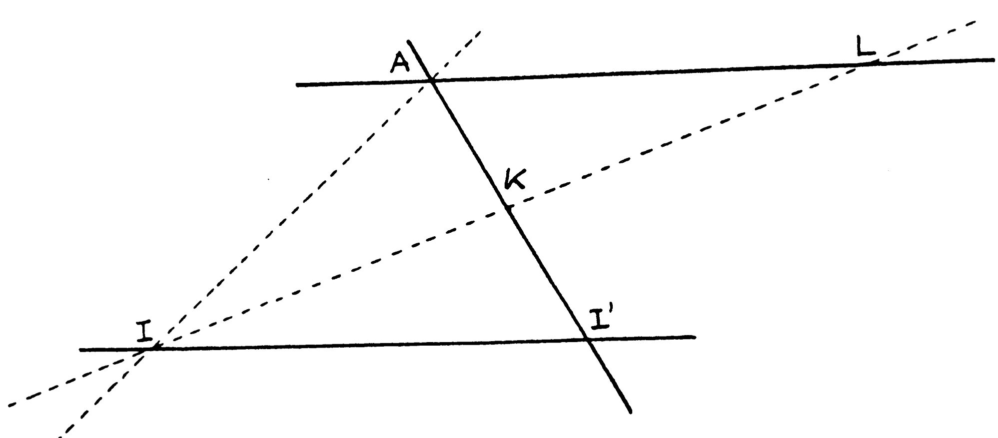


D'après le théorème de Thalès: $K'K = \frac{1}{3}\,BC$ et $I'I = \frac{2}{3}\,BC$

donc $I'I = 2\,K'K$

On peut lire J comme barycentre de (I,1) (K,2).

Considérons cette autre figure extraite :



Nous savons que K est le milieu de [AI'] par construction du barycentre et que (AL) et (II') sont des droites parallèles.

La symétrie par rapport au point K transforme A en I' ,(AL) en (II') et donc L en I.

On peut donc écrire l'équilibre :

K	I	L
-2	1	1

L est alors barycentre de (I,1) (K,-2).

Conclusion : (I,K) et (J,L) sont des couples de points asociés.

*

3) Soit un triangle ABC, notons :

I : (A,3) (B,2) et K : (A,4) (C,1)

La droite (IK) coupe la médiane issue de A en J et la parallèle à (BC) passant par en L .

Démontrer que les points I et K sont barycentres associés par rapport aux points L et J .

* *

*

PROPRIETE: (symétrie) (M,N) sont barycentres associés par rapport à (A,B) si et seulement si (A,B) le sont par rapport à (M,N).

a) La démonstration la plus simple consiste à remarquer que :

$$\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}}$$

Nous donnerons à titre d'exercice deux autres démonstrations qui a priori sont un peu plus longues mais qui recèlent des configurations importantes.

*

b) démonstration utilisant les équilibres :

L'hypothèse M : (A,α) (B,β) et N : (A,α) $(B,-\beta)$ se traduit par les équilibres suivants :

$$\sigma \quad \begin{array}{|c|c|c|} M & A & B \\ \hline -\alpha-\beta & \alpha & \beta \end{array} \qquad \text{et} \quad \tau \quad \begin{array}{|c|c|c|} N & A & B \\ \hline \beta-\alpha & \alpha & -\beta \end{array}$$

On en déduit les équilibres :

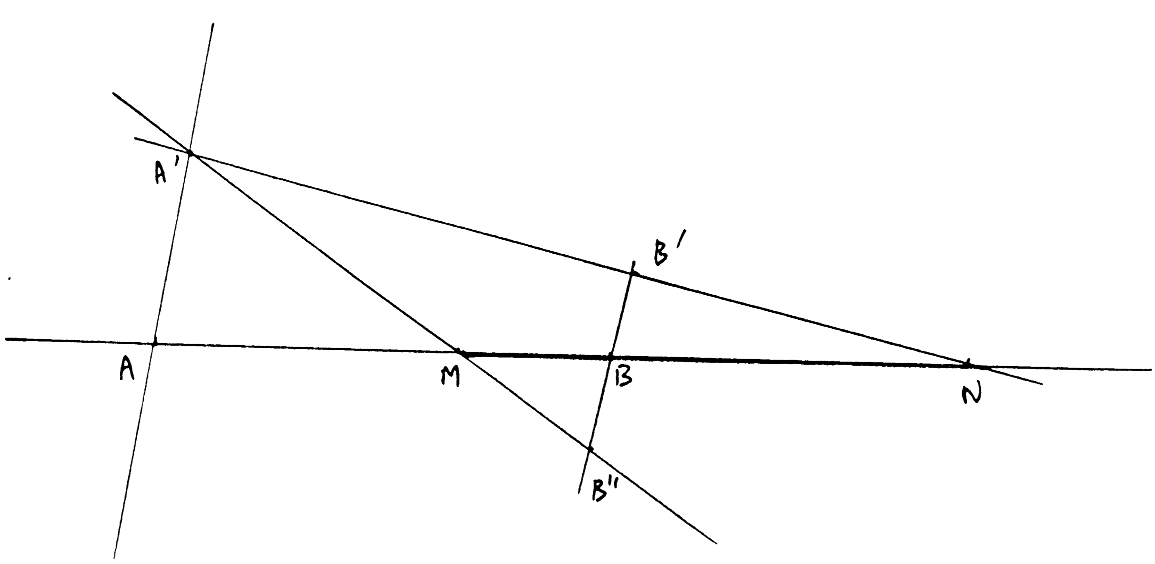
$$\sigma+\tau \quad \begin{array}{|c|c|c|} M & N & A \\ \hline -\beta-\alpha & \beta-\alpha & 2\alpha \end{array} \qquad \text{et} \quad \sigma-\tau \quad \begin{array}{|c|c|c|} M & N & B \\ \hline -\beta-\alpha & \alpha-\beta & 2\beta \end{array}$$

c'est-à-dire A : (M,m) (N,n) et B : (M,m) $(N,-n)$ avec $m = \alpha+\beta$ et $n = \alpha-\beta$.

Puisque $m^2-n^2= 4\alpha\beta$,alors : $|m| \neq |n| \iff \alpha\beta \neq 0$

$$|m| \neq |n| \iff \left\{ \begin{array}{l} \text{M,N non confondus} \\ \text{avec A,B} \end{array} \right.$$

c) démonstration utilisant les homothéties :



Supposons les points (M,N) associés par rapport à (A,B).

$$M : (A,\alpha)\ (B,\beta) \text{ et } N : (A,\alpha)\ (B,-\beta)$$

Traduisons cette hypothèse par la configuration de base ABNB'A'MB" avec (AA') parallèle à (BB') et B milieu de [B'B"] (cf figure).

Traçons la parallèle, Δ, à (A'B") passant par N. Elle coupe (BB') en N'. (AN') et (AB") sont sécantes en M'.

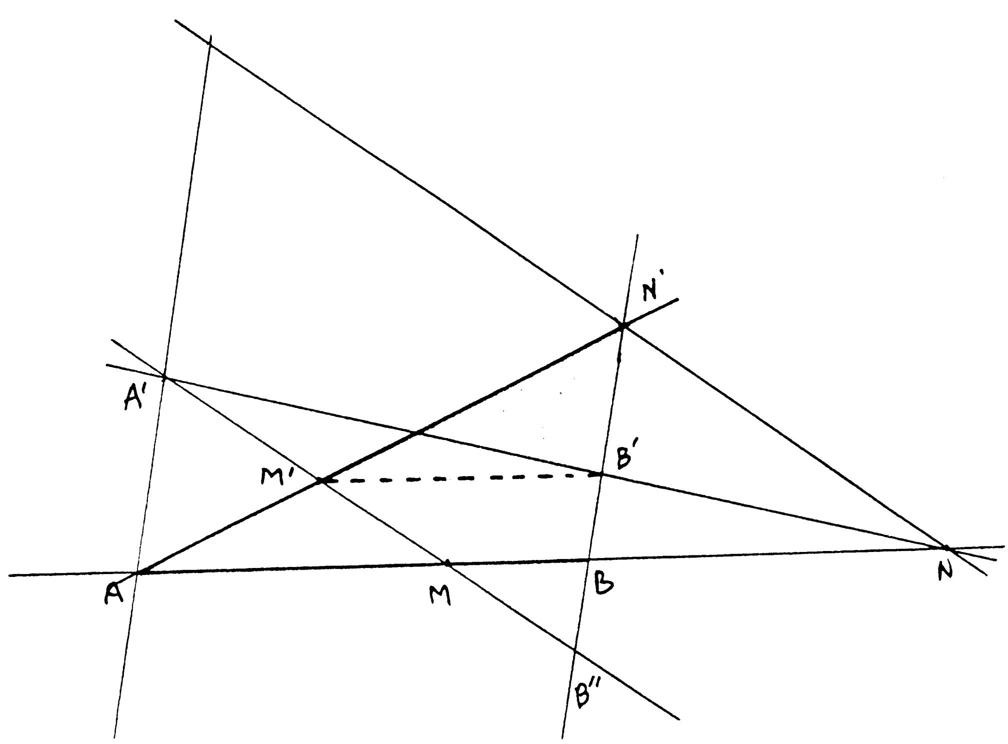
En composant les deux homothéties de centre B et A qui échangent M et N on obtient le schéma :

$$\begin{array}{ccccc} B'' & \xrightarrow{H_B} & N' & \xrightarrow{H_A} & M' \\ M & \longrightarrow & N & \longrightarrow & M \end{array}$$

$H_A o H_B$ est donc l'homothétie de centre M et de rapport :

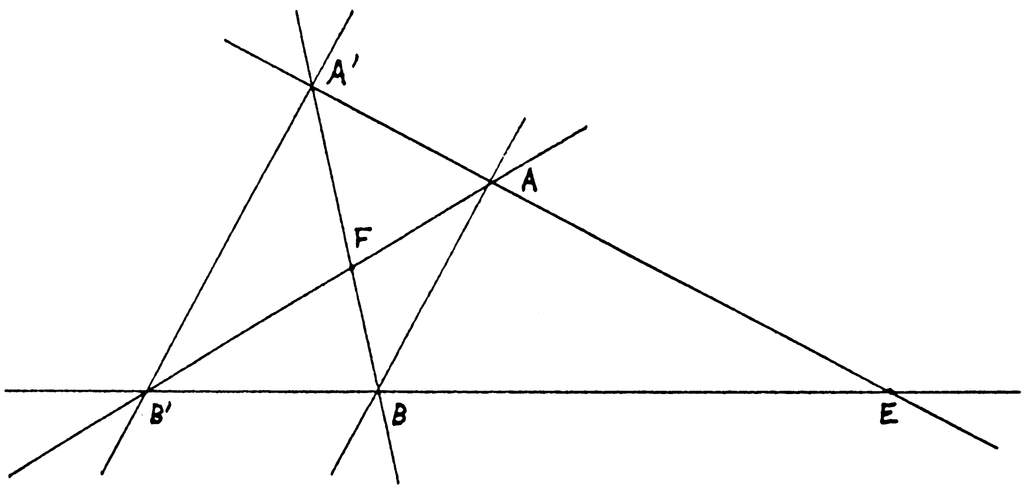
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} \times \frac{\overline{BN}}{\overline{BM}} = \frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} \times \frac{\overline{NB}}{\overline{NA}} = \left(-\frac{\beta}{\alpha}\right) \times \left(-\frac{\alpha}{-\beta}\right) = -1$$

M est le milieu de [M'B"] ,nous avons retrouvé la configuration fondamentale dans NMAM'N'BB". (A,B) sont associés par rapport à (M,N).



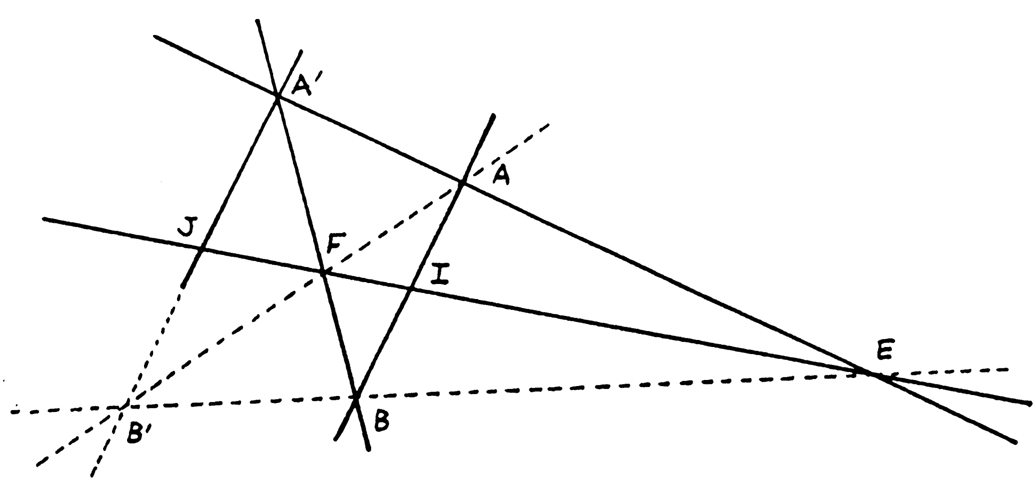
B) UNE APPLICATION IMPORTANTE: LE TRAPEZE COMPLET

Suivant l'exemple de nos collègues de Bordeaux, nous appelons trapèze complet la donnée d'un vrai trapèze ABB'A' de bases [AB] et [A'B'] complétée par les points E et F intersections respectives de (AA')et (BB'), (AB') et(A'B). Nous le noterons ABB'A'EF.



Nous avons déjà montré que les milieux I et J de [AB] et [A'B'] sont alignés avec E et F.

La configuration suivante:



caractérise le fait que E et F sont associés par rapport à I et J .

Cette propriété permet d'interpréter et de compléter un théorème classique sur les homothéties:

THEOREME: Soit ABA'B' un vrai trapèze.(nous conservons les notations des figures 1) et 2).

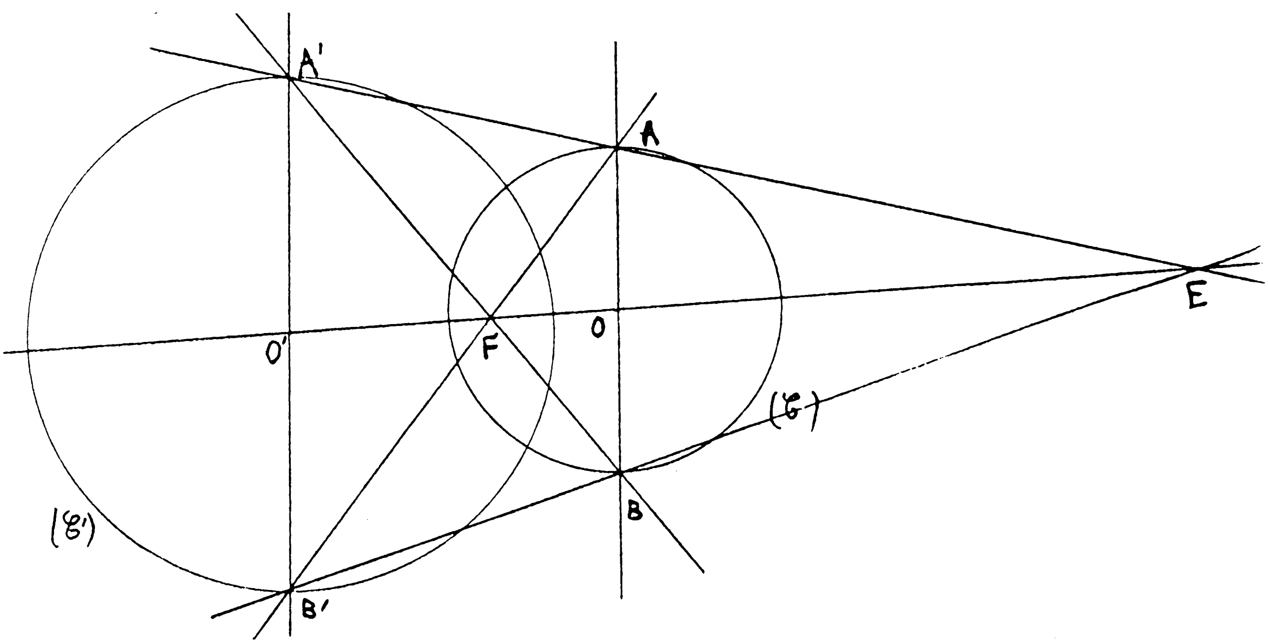
Il existe deux homothéties et deux seulement qui transforment [AB] en [A'B'].

Leurs centres E et F sont associés par rapport à I et J, ce qui signifie que leurs rapports sont opposés.

Applications:

1) Soit $\mathscr{C}(O,R)$ et $\mathscr{C}(O',R')$ deux cercles avec $O \neq O'$ et $R \neq R'$.

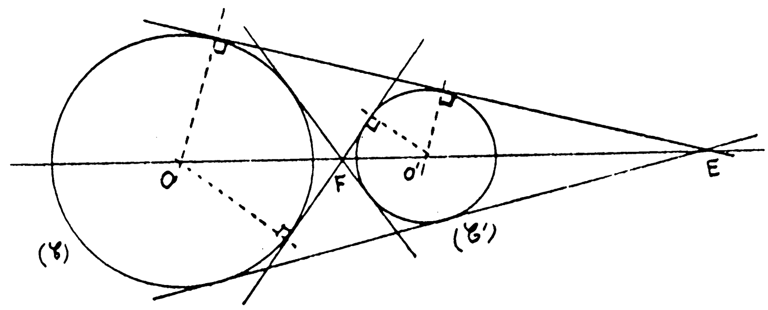
Construisons un vrai trapèze ABA'B'avec deux diamètres pour bases:



En appliquant le théorème précédent on démontre aisément qu'il existe deux homothéties et deux seulement, de centres E et F, qui transforment $\mathscr{C}$ en $\mathscr{C}'$. Leurs rapports sont opposés $\frac{R'}{R}$ et $-\frac{R'}{R}$.

Remarques: α) Quand elles existent les tangentes communes à $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ passent par E et F.

On construit classiquement les points de tangence à l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le cercle de diamètre [OE].



β) Un trapèze complet est entièrement déterminé par la donnée: *) soit de 4 points non alignés

**) soit de 3 points non alignés et de l'un des deux rapports.

Le lecteur pourra le vérifier facilement.

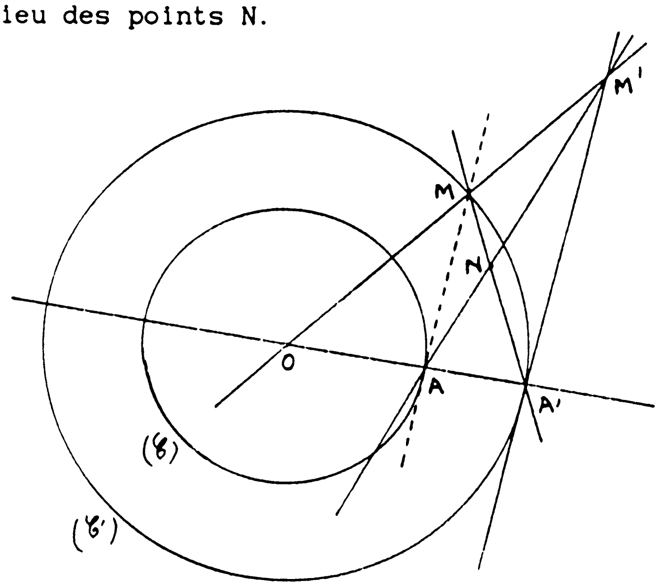
La conception ou la résolution de nombreux execices découlent de cette remarque. En particulier, si l'on fait varier l'un des points dans *) ou **) sur une figure connue, on est sûr de trouver le lieu de n'importe quel autre par homothétie.

En voici trois exemples:

1) Soit 𝒞 et 𝒞' deux cercles distincts de même centre O.

Une demi droite d'origine O coupe 𝒞 en A et 𝒞' en A'. Pour tout point M de 𝒞', n'appartenant pas à (OA), on associe M' intersection de (OM) et de la parallèle à (AM) passant par A', puis N l'intersection de (AM') et (A'M).

Cherchons le lieu des points N.



Par construction AMM'A'ON, est un trapèze complet, le rapport de l'homothétie de centre O qui transforme A en A' vaut $\frac{R'}{R}$, il est donc fixé.

Nous avons $\mathcal{H}(N,-\frac{R'}{R}) : M \longrightarrow A'$

ce qui se traduit par l'équilibre:

M	N	A'
R	-R-R'	R'

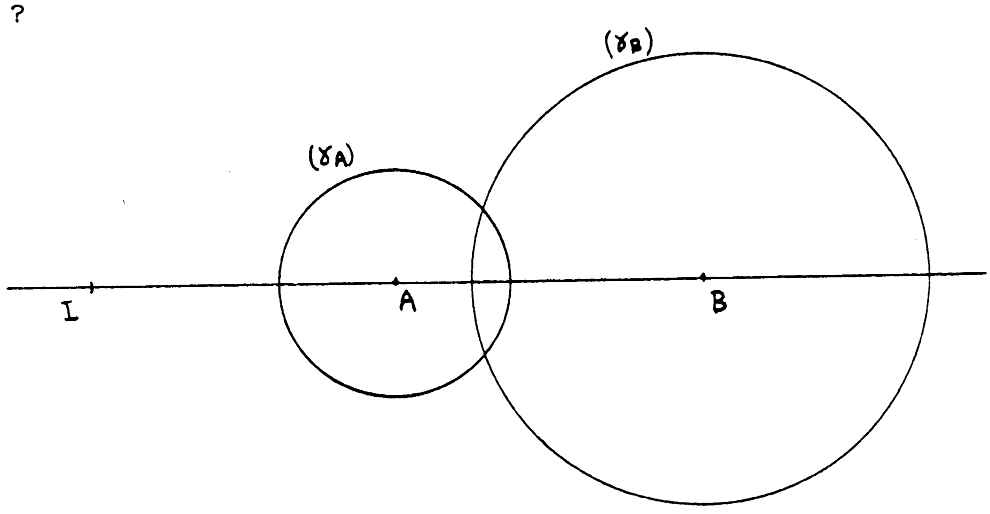
Nous lisons donc A' : (M,R) (N,-R-R')
d'où

$$\mathcal{H}(A',-\frac{R}{R+R'}) : M \longrightarrow N$$

Le lieu des points N est donc l'homothétique du cercle $\mathscr{C}$ par $\mathcal{H}(A',-\frac{R}{R+R'})$ privé de deux points.

*

2) On donne trois points distincts alignés I,A,B. I n'est pas sur le segment [AB]. Deux cercles de centre A et B varient de manière que I reste leur centre d'homothétie. Quel est le lieu des points communs à ces deux cercles ?



Remarquons d'abord que le rapport de l'homothétie qui échange les deux cercles, $k = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}}$,est un réel positif fixe différent de 1 et -1.

Appelons J le deuxième centre d'homothétie.

Comme les points I et J sont associés par rapport à A et B, le point J est fixe.

Pour construire J on trace la parallèle à (AM) passant par B. Elle coupe le cercle de centre B en N et N': J est l'intersection de (AB) avec (MN').

Comme l'angle $\widehat{N'MN}$ est droit $\widehat{IMJ}$ l'est aussi: le point M appartient au cercle de diamètre [IJ].

Réciproquement prenons M_0 un point de ce cercle non situé sur (AB). Construisons d'abord le cercle de centre A et de rayon AM_0 puis son homothétique par h_I , homothétie de centre I et de rapport k. Soit h_J l'homothétie de centre J et de rapport -k.

$$h_I : \begin{array}{l} M_0 \longrightarrow N_0 \\ A \longrightarrow B \end{array}$$

$$h_J : \begin{array}{l} M_0 \longrightarrow N'_0 \\ A \longrightarrow B \end{array}$$

Le cercle image est donc de centre B et de diamètre $[N_0N'_0]$. Comme l'angle $\widehat{N'_0M_0N_0}$ est droit , le point M_0 appartient aussi à ce cercle.
Tout point M_0 du cercle de diamètre [IJ] non situé sur (AB) convient.
Or I convient puisque les deux cercles de centre A et B et de rayon IA et IB sont homothétiques. De même J convient puisque les deux cercles de centre A et B et tangents extérieurement en J admettent I comme deuxième centre d'homothétie.

Le lieu des points M est le cercle de diamètre [IJ].

3) Une application : Etude d'une ligne de niveau classique sans utiliser le produit scalaire.

$$M \in \ell \quad \Leftrightarrow \quad \frac{MB}{MA} = k \qquad (k \in \mathbb{R}_+^* - \{1\})$$

A tout point M du plan on associe deux cercles:

γ_A le cercle de centre A et de rayon AM

γ_B le cercle de centre B et de rayon BM .

Démontrons que les cercles γ_A et γ_B sont homothétiques par une homothétie de centre I et de rapport k si et seulement si M appartient à ℓ.

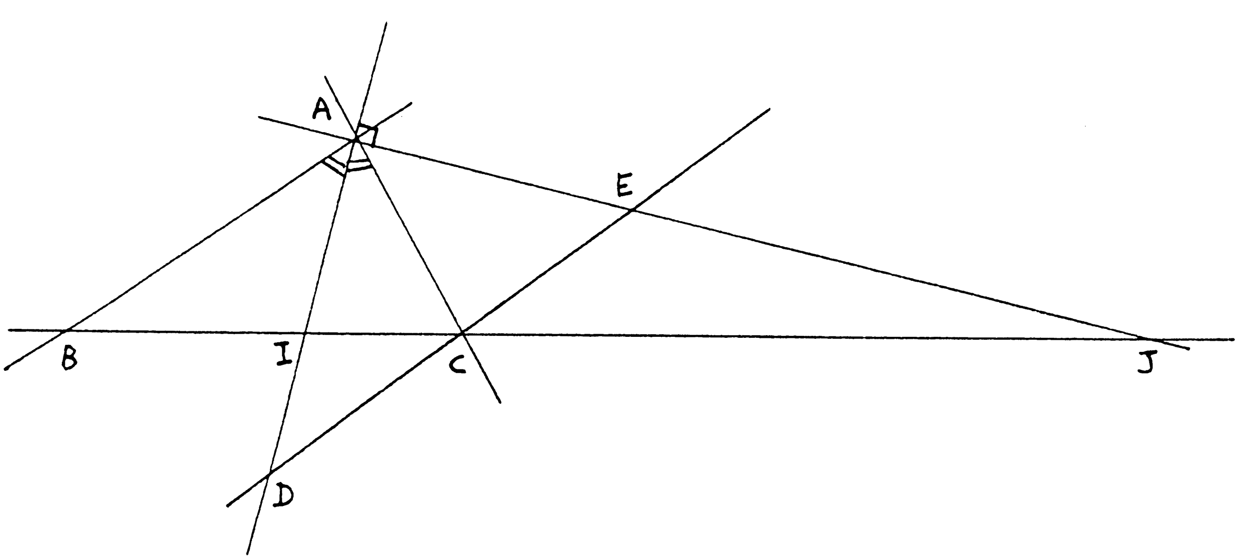
En effet pour tout point M de ℓ le rayon de γ_B est k AM .
L'homothétie de centre I:(A,-k) (B,1) et de rapport k transforme γ_A en γ_B.
Inversement si γ_B est homothétique de γ_A par $\mathcal{H}(I,k)$ son rayon est multiplié par $|k|$ donc MB = k MA.

En appliquant le résultat de l'exercice précédent on démontre alors que le lieu des points M est le cercle de diamètre [IJ] avec I:(A,-k) (B,1) et J:(A,k) (B,1).

* * *

C) EXERCICES :

1 . Recherche des coefficients qui permettent d'exprimer les pieds des bissectrices intérieure et extérieure comme barycentre des sommets :
Soit ABC un triangle non isocèle en A ,on pose classiquement a=BC, b=AC, c=AB; appelons I et J les pieds des bissectrices intérieure et extérieure .La parallèle à (AB) passant par C coupe (AI) en D et (AJ) en E.

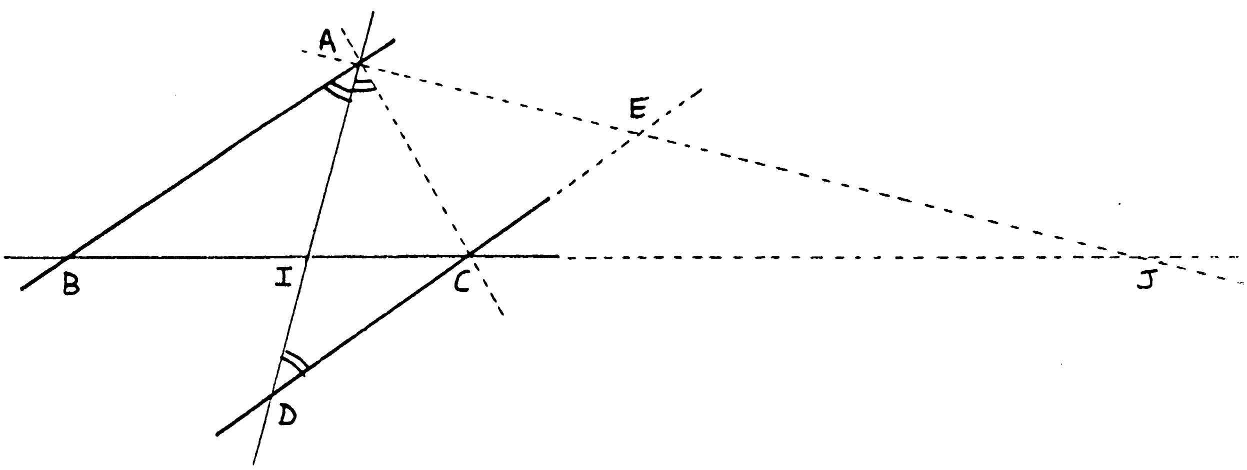


$\widehat{IAC} = \widehat{IAB}$ puisque (AI) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$,

$\widehat{IAB} = \widehat{IDC}$ puisque (AB) est parallèle à (CD).

Le triangle ADC est donc isocèle en C ,c'est-à-dire CD = b .

Sur la figure extraite suivante ,on peut lire I comme barycentre de (B,b) (C,c):

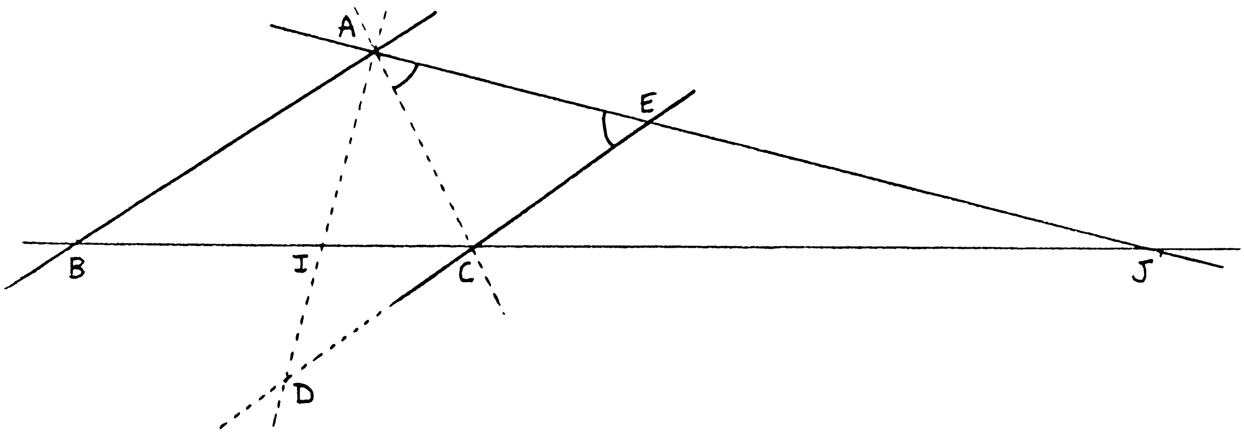


Les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{DAC}$ sont complémentaires puisque les bissectrices (AD) et (AE) sont perpendiculaires .

Dans le triangle rectangle DAE ,les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{AED}$ sont complémentaires puisque $\widehat{DAC} = \widehat{ADE}$ et $\widehat{CAE} = \widehat{AED} = \widehat{AEC}$.

Le triangle ACE est donc isocèle ,d'où CE = b .

Sur la figure extraite suivante ,on peut lire J comme barycentre de (B,b) (C,-c) .



Remarque : b-c ≠ 0 car le triangle ABC est supposé non isocèle en A.

Conclusion : Les points I et J sont associés par rapport à B et C .

*

2 . Applications de l'exercice précédent :

On réutilise les mêmes hypothèses et notations .
On appelle O le milieu de [IJ]; transcrivons sous forme d'équilibres les résultats obtenus au **1**.:

σ_1

I	B	C
-c-b	b	c

σ_2

J	B	C
b-c	-b	c

La combinaison $(b-c)\sigma_1-(b+c)\sigma_2$ s'écrit :

I	J	B	C
c^2-b^2	c^2-b^2	$2b^2$	$-2c^2$

Puisque O est le milieu de [IJ] ,cet équilibre équivaut à :

O	B	C
$2c^2-2b^2$	$2b^2$	$-2c^2$

soit

O	B	C
c^2-b^2	b^2	$-c^2$

ce qui permet d'écrire O : (B,b^2) $(C,-c^2)$.

Notons O_A, O_B, O_C les centres des cercles qui ont pour diamètre les segments dont les extrêmités sont les pieds des bissectrices (cercles d'Apollonius). D'après l'application précédente nous pouvons écrire les équilibres suivants :

O_A	B	C
c^2-b^2	b^2	$-c^2$

O_B	C	A
a^2-c^2	c^2	$-a^2$

O_C	A	B
b^2-a^2	a^2	$-b^2$

Leur somme est

O_A	O_B	O_C
c^2-b^2	a^2-c^2	b^2-a^2

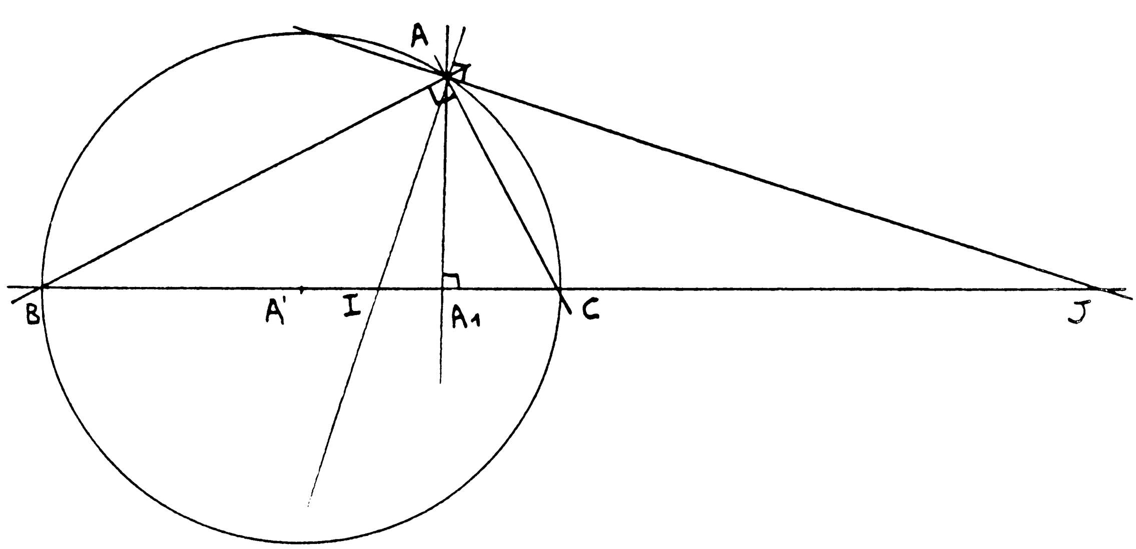
Ce qui prouve l'alignement de ces trois centres .

Remarque : On peut retrouver ce résultat en définissant les trois cercles d'Apollonius par les lignes de niveau :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a} \quad , \quad \frac{MB}{MC} = \frac{c}{b} \quad , \quad \frac{MC}{MA} = \frac{a}{c} \quad .$$

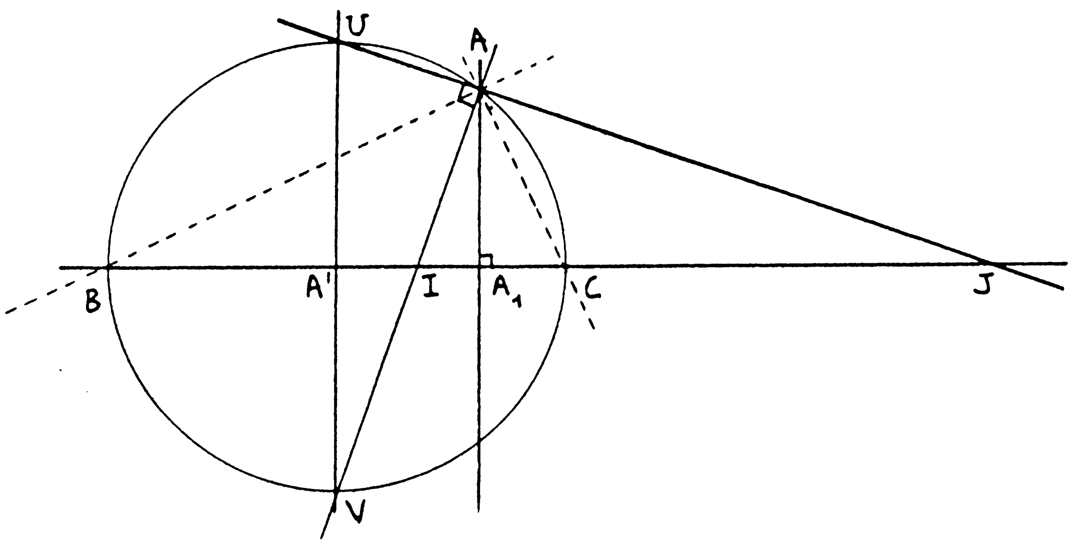
*

3. ABC désigne un triangle rectangle en A, A' le milieu de l'hypothénuse, I et J les pieds des bissectrices intérieure et extérieure menées de A, A_1 le pied de la hauteur issue de A.
Montrer que (I,J) sont associés par rapport à (A', A_1).



Les droites (AJ) et (AI) recoupent le cercle Γ circonscrit à ABC en U et V.

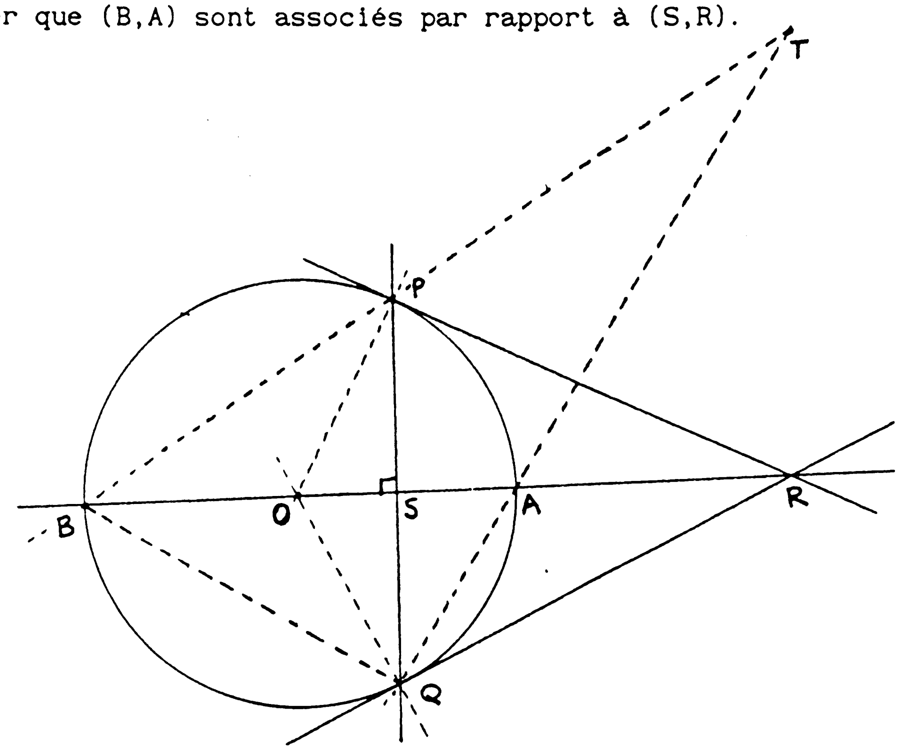
Comme les bissectrices sont perpendiculaires ,[UV] est un diamètre de Γ. On obtient donc la configuration suivante:



(I,J) sont associés par rapport à (A',A_1)

*

4. Par un point R extérieur au cercle C de centre O on mène deux tangentes.P et Q, les points de contact,se projettent orthogonalement sur (OR) en S. La droite (OR) coupe le cercle en A et B (A ∈ [OR]).
Montrer que (B,A) sont associés par rapport à (S,R).



Les droites (BP) et (QA) sont sécantes en T.

Les angles $\widehat{BTQ}$ et $\widehat{TBQ}$ sont complémentaires.

Donc $\widehat{TBQ}$, qui est égal à $\widehat{POR}$, est complémentaire de $\widehat{PRO}$.

Ainsi $\widehat{PTA} = \widehat{PRA}$ et PRTA sont cocycliques.

Comme $\widehat{TPA}$ et donc $\widehat{TRA}$ sont droits (TR) est parallèle à (PS).

(B,A) sont associés par rapport à (S,R).

* *

*

L'ISOGONALITE

* * * * * * *

Dans cette partie ABC désigne un triangle fixé de côtés a,b,c.

Δ_A, Δ_B, Δ_C sont les bissectrices intérieures du triangle ABC.

Nous allons appliquer les techniques d'équilibres et de barycentres associés pour étudier la transformation isogonale.

A) UN PEU DE THEORIE ...

Etant donnés ABC un triangle non isocèle en A, soit Δ une droite passant par A, Δ' la symétrique de Δ par rapport à Δ_A; appelons, quand ils existent, U et V les points d'intersection de Δ et Δ' avec (BC).

THEOREME 1: Soit M : (A,x) (B,y) (C,z) ($x+y+z\neq 0$) un point fixé distinct de A, de Δ.

*) Si Δ n'est pas parallèle à (BC) on a:

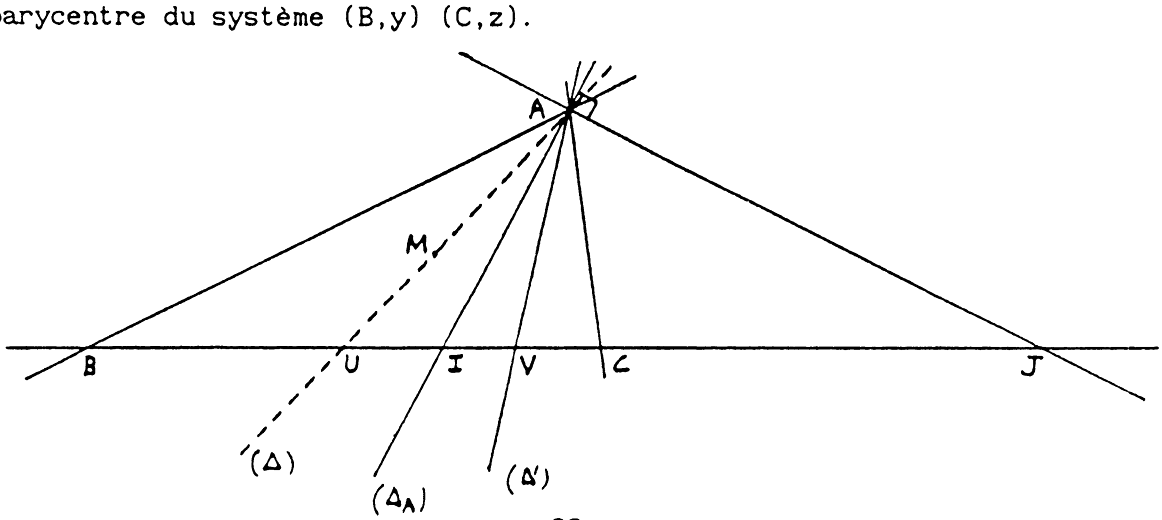
a) U : (B,y) (C,z)

b) Δ' non parallèle à (BC) si et seulement si $c^2y + b^2z \neq 0$ et dans ce cas V : (B,b^2z) (C,c^2y)

**) Si Δ est parallèle à (BC) U n'existe pas. Δ' et (BC) sont sécantes en V: (B,b^2z) (C,c^2y).

Notons I et J les pieds des bissectrices intérieures et extérieures menées de A.

* Supposons d'abord que Δ n'est pas parallèle à (BC). Nous savons alors (cf équilibre de quatre points exercice 2) que $y + z \neq 0$ et que U est barycentre du système (B,y) (C,z).



Ecrivons les équilibres :

σ_1 :

I	B	C
$-c-b$	b	c

σ_2 :

J	B	C
$b-c$	$-b$	c

d'où:

$\sigma_1+\sigma_2$:

I	J	B
$-c-b$	$c-b$	$2b$

$\sigma_1-\sigma_2$:

I	J	C
$-b-c$	$b-c$	$2c$

U:(B,y) (C,z) à (BC) se traduit par:

σ_3 :

U	B	C
$-y-z$	y	z

La combinaison $2bc\,\sigma_3 - bz(\sigma_1+\sigma_2) - cy(\sigma_1-\sigma_2)$ donne

σ_4 :

U	I	J
$2bc(-y-z)$	$(b+c)(bz+cy)$	$(b-c)(-bz+cy)$

⊢ Si Δ' n'est pas parallèle à (BC), V existe et (U,V) sont associés par rapport à (I,J). U n'est pas le milieu de [IJ] donc

$$(b+c)(bz+cy) \neq (b-c)(-bz+cy)$$

c'est-à-dire $b^2z + c^2y \neq 0$

⊢ Si réciproquement $b^2z + c^2y \neq 0$, U n'est pas le milieu de [IJ] et donc V existe.

On peut alors écrire

σ_5 :

V	I	J
$-2(b^2z+c^2y)$	$(b+c)(bz+cy)$	$(b-c)(bz-cy)$

La combinaison $\sigma_5 + (bz+cy)\,\sigma_1 + (cy-bz)\,\sigma_2$ donne:

σ_6 :

V	B	C
$-2(b^2z+c^2y)$	$b(bz+cy)-b(cy-bz)$	$c(bz+cy)+c(-bz+cy)$

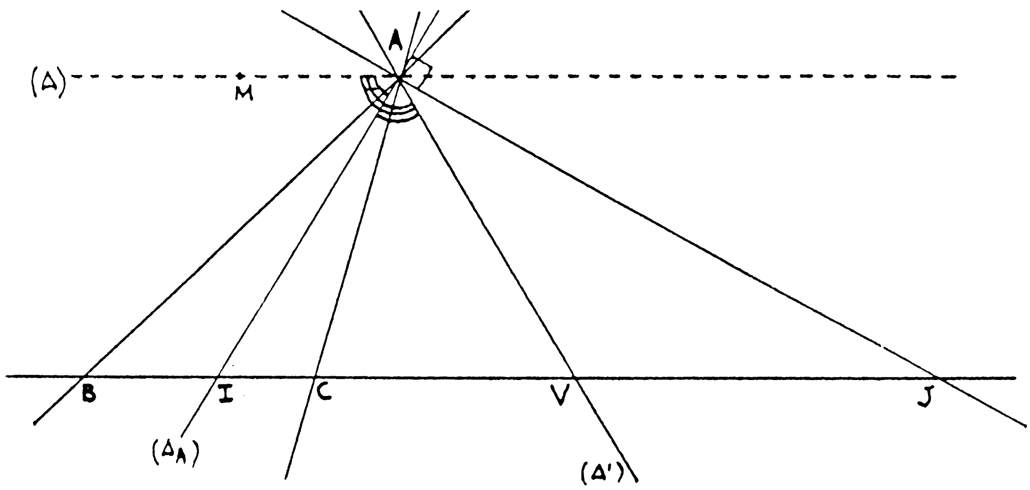
σ_6 :

V	B	C
$-2b^2z-2c^2y$	$2b^2z$	$2c^2y$

Conclusion V est barycentre de (B,b^2z) (C,c^2y).

(*) est demontré.

** Supposons Δ parallèle à (BC) c'est-à-dire y+z=0.



La droite Δ' coupe (BC) au milieu de [IJ] (sinon V possèderait un point "associé " U_0 par rapport à U et V et Δ et (BC) seraient sécantes en U_0). V est donc le centre d'un cercle d'Apollonnius et

Donc

I	J	V
1	1	- 2

B	C	V
b^2	$-c^2$	c^2-b^2

(cf exercice précédent)

Ainsi V est barycentre de (B,b^2z) (C,c^2y) puisque $y = -z$.

THEOREME 2: Soit N : (A,α) (B,β) (C,γ) $(\alpha+\beta+\gamma\neq 0)$ un point fixé distinct de A, de Δ'.

*) Si Δ' n'est pas parallèle à (BC) on a:

a) V : (B,β) (C,γ)

b) En posant $y = b^2\gamma$ et $z = c^2\beta$

Δ est non parallèle à (BC) si et seulement si $y + z \neq 0$ et dans ce cas U : (B, y) (C, z)

**) Si Δ'est parallèle à (BC) V n'existe pas. Δ' et (BC) sont sécantes en U: (B, y) (C, z).

La démonstration du théorème 2 n'est pas à faire puisqu'on a "réécrit" le théorème 1. Ce théorème offre pourtant un énoncé réciproque du premier qui sera utile pour les corollaires.

Nous laissons au lecteur le soin d' étudier ce qui arrive si ABC est isocèle.

Nous lui conseillons également de goûter aux délices simplificatrices de la géométrie....projective.

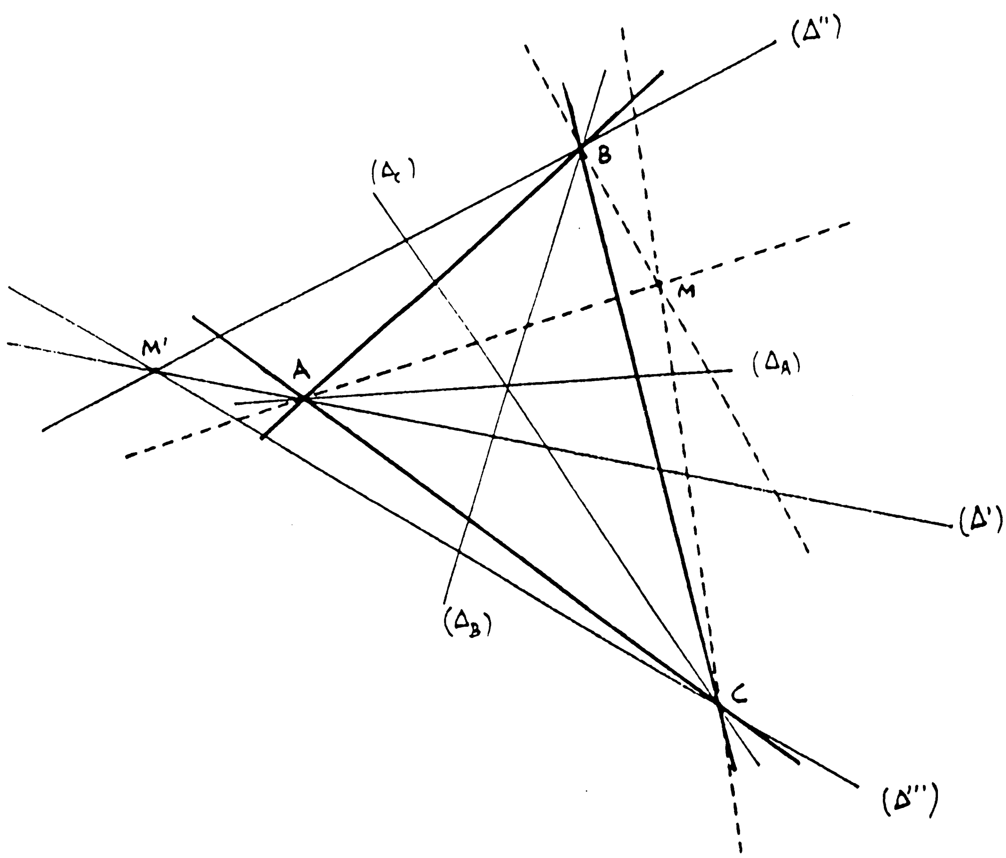
COROLLAIRE: Etant donné un point M :(A,x) (B,y) (C,z) ($x+y+z\neq0$),on construit Δ',Δ''et Δ''',les symétriques de (AM),(BM) et (CM) par rapport aux bissectrices Δ_A,Δ_B et Δ_C.

Δ',Δ''et Δ'''sont concourantes si et seulement si $a^2yz + b^2zx + c^2xy \neq 0$

Δ',Δ''et Δ'''sont parallèles si et seulement si $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$

En effet Δ',Δ''et Δ'''sont concourantes en M' si et seulement si (AM'),(BM') et (CM') coupent les côtés opposés aux points α, β, γ barycentres de (B,b^2z) (C,c^2y), (C,c^2x) (A,a^2z), (A,a^2y) (B,b^2x) ce qui est équivalent à dire que M':(A,a^2yz) (B,b^2zx) (C,c^2xy), c'est-à-dire que $a^2yz + b^2zx + c^2xy \neq 0$.

THEOREME: Les droites Δ',Δ''et Δ'''sont concourantes si et seulement si le point M n'appartient pas au cercle Γ circonscrit au triangle ABC.



En effet $(\Delta', (AB)) \equiv ((AC), (AM)) \quad [\pi]$ et

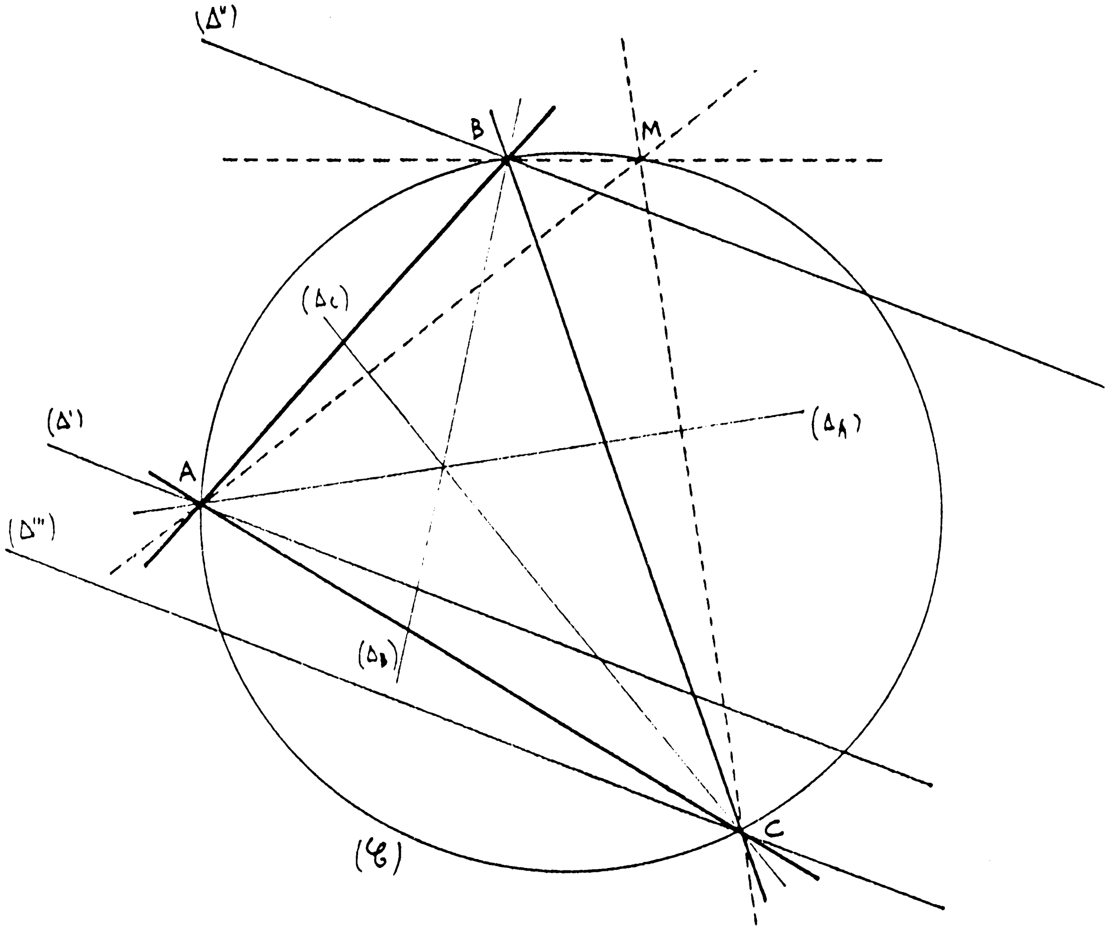
$(\Delta'', (AB)) \equiv ((BC), (BM)) \quad [\pi]$

Donc

$$(\Delta', (AB)) \equiv (\Delta'', (AB)) \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad ((AC), (AM)) \equiv ((BC), (BM)) \quad [\pi]$$

$$\Leftrightarrow \quad M \in \Gamma$$



* *

*

Appelons P' le plan privé du cercle Γ.

L'application qui à tout point M associe le point M' défini précédemment s'appelle "transformation isogonale".

C'est une involution de P' dans P'.

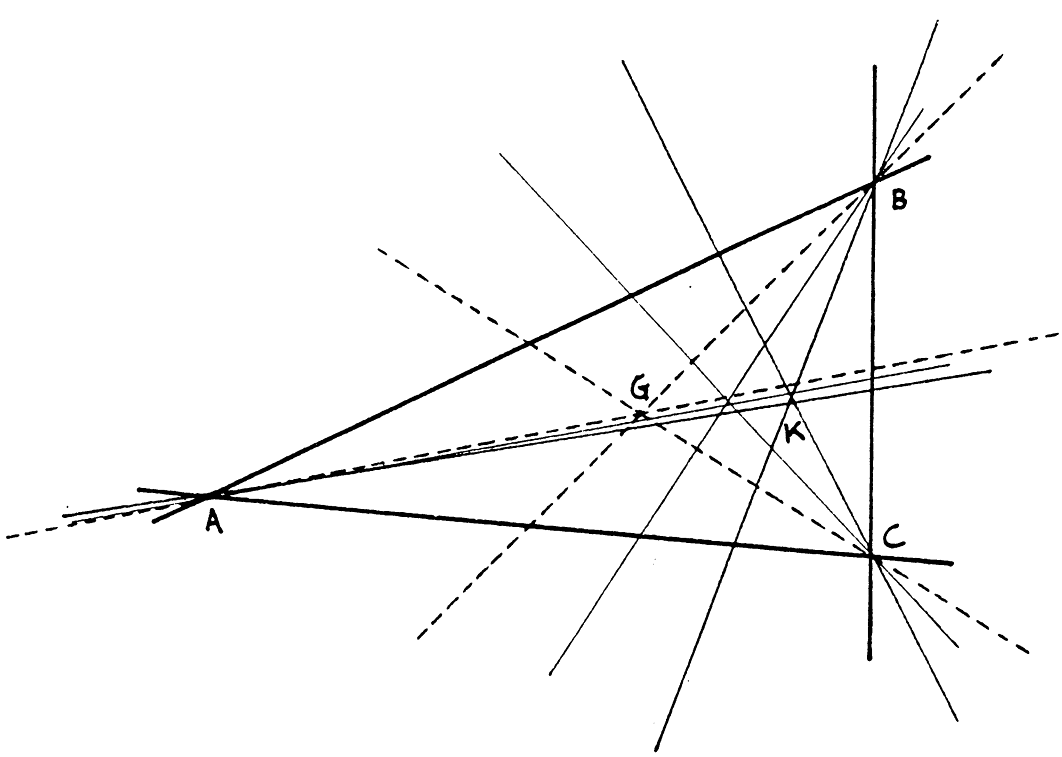
$$\mathfrak{I} : \quad P' \longrightarrow P'$$
$$M:(A,x)\ (B,y)\ (C,z) \longrightarrow M':(A,a^2yz)\ (B,b^2zx)\ (C,c^2xy)$$

Remarque: $\mathfrak{I}$ fixe les centres des cercles inscrit et exinscrit et laisse globalement invariantes les bissectrices intérieures et extérieures.

*

B) APPLICATIONS :

1. $\mathfrak{I}$ transforme le centre de gravité du triangle G en K barycentre de (A,a^2) (B,b^2) (C,c^2). K est l'intersection des symédianes du triangle (symétriques des médianes par rapport aux bissectrices).

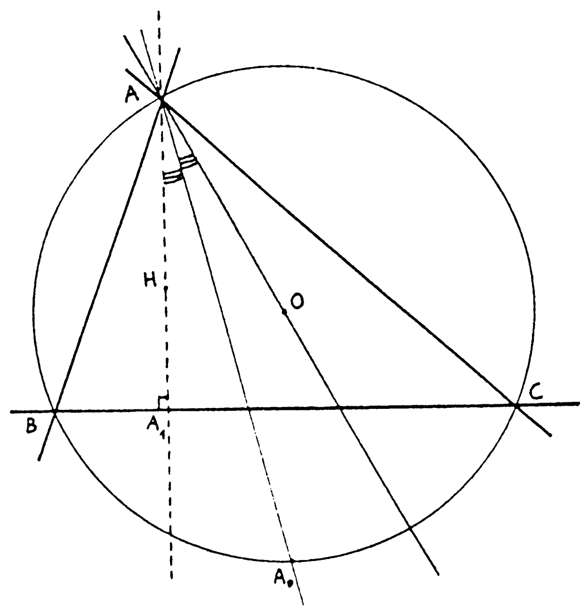


2. Une équation barycentrique du cercle Γ circonscrit à ABC est donc

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$$

*

3. Dans le triangle ABC on note O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre. La bissectrice issue de A, Δ_A recoupe le cercle Γ en A_0, A se projette orthogonalement sur (BC) en A_1.



Le triangle OAA_0 est isocèle en O donc $\widehat{OAA_0} = \widehat{AA_0O}$

Comme (OA_0) est bissectrice de $\widehat{BOC}$ dans le triangle isocèle BOC, elle est perpendiculaire à (BC) et donc parallèle à (AH).

$$\text{Donc} \quad \widehat{OA_0A} = \widehat{A_0AH}$$

$$\text{Finalement} \quad \widehat{OAA_0} = \widehat{A_0AH}$$

La droite (OA) est donc symétrique de la hauteur (AH) par rapport à la bissectrice. De même (OB) est symétrique de la hauteur (BH) .

<u>O est donc le point isogonal de H</u>.

On a $\overline{BA_1} = c \cos \widehat{ABC}$ et $\overline{CA_1} = -b \cos \widehat{ACB}$

D'après les relations métriques dans le triangle qui donnent $\cos \widehat{ABC}$ et $\cos \widehat{ACB}$ en fonction de a,b,c, on aboutit (après simplification par 2a) à :

$$A_1 : \ (B;\ a^2 + b^2 - c^2) \quad (C;\ a^2 - b^2 + c^2)$$

donc en posant $q=-a^2+b^2+c^2$ $q'=a^2-b^2+c^2$ $q''=a^2+b^2-c^2$

$$H : \quad (A;\ q'q'') \quad (B;\ q''q) \quad (C;\ qq').$$

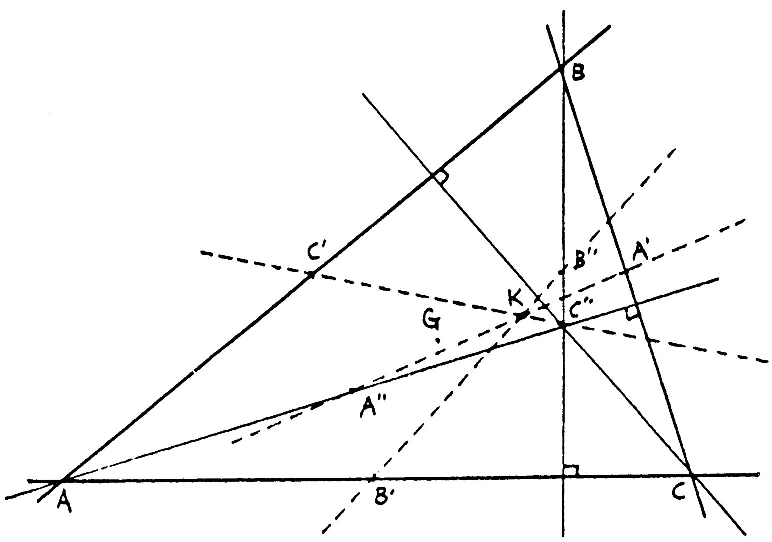
Puisque $O = \mathfrak{I}(H)$ on pourrait également obtenir O.

*

EXERCICE: En conservant les notations précédentes, on appelle A'',B'',C'' les milieux des hauteurs et A',B',C' les milieux des côtés.

1°) Exprimer A'' comme barycentre de A,B,C.

2°) En déduire que les points A'',A' et $K=\mathfrak{I}(G)$ sont alignés.



Correction: 1°) La somme des équilibres

A_1	B	C
$-2a^2$	$a^2+b^2-c^2$	$a^2-b^2+c^2$

et

A_1	A	A''
$2a^2$	$2a^2$	$-4a^2$

correspond à l'équilibre

σ:

A''	A	B	C
$-4b^2$	$2a^2$	$a^2+b^2-c^2$	$a^2-b^2+c^2$

2°) σ' :

A'	B	C
- 2	1	1

La combinaison linéaire $\sigma + (-a^2 + b^2 + c^2)\,\sigma'$ donne:

A"	A	B	C	A'
$-4a^2$	$2a^2$	$2a^2$	$2c^2$	$2(a^2-b^2-c^2)$

qui peut aussi s'écrire

A"	K	A'
$-2a^2$	$a^2+b^2+c^2$	$a^2-b^2-c^2$

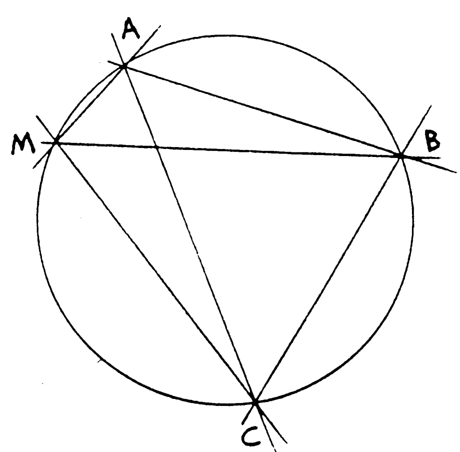
Ce qui prouve que K est sur (A'A"). De la même façon on montrerait que K est sur (B'B") puis sur (C'C") :leur construction détermine ainsi le point K.

Que se passerait-il si ABC était rectangle en A ?

*

COROLLAIRE (théorème de Ptolémée):

Dans un quadrilatère convexe inscriptible, le produit des diagonales est égal à la somme des produits des côtés opposés.



Reprenons les mêmes notations;

M barycentre de (A,x) (B,y) (C,z) $(x+y+z \neq 0)$ équivaut à

$$x\,\overrightarrow{MA} + y\,\overrightarrow{MB} + z\,\overrightarrow{MC} = \vec{0} \qquad \text{donc}$$

$$x\,\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MC} + y\,\overrightarrow{MB} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad \text{et} \quad x\,\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} + z\,\overrightarrow{MC} \wedge \overrightarrow{MB} = \vec{0}$$

Donc (x,y,z) sont proportionnels à

$(MC\ MB \sin(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}),\ MA\ MC \sin(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}),\ MB\ MA \sin(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}))$

Si M appartient à Γ $(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) \equiv (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})\ [2\pi]$ (en utilisant la convexité) de même $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MC}) \equiv (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \pi\ [2\pi]$

$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})\ [2\pi]$

Donc (x,y,z) sont proportionnels à

$(MC\ MB \sin(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}), -MA\ MC \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}),\ MB\ MA \sin(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}))$

Donc (x,y,z) sont proportionnels à

$(MC\ MB\ a\ ,\ -MA\ MC\ b\ ,\ MB\ MA\ c\ )$ soit $\left(\frac{a}{MA}, -\frac{b}{MB}, \frac{c}{MC}\right)$

Comme $a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0$ on trouve

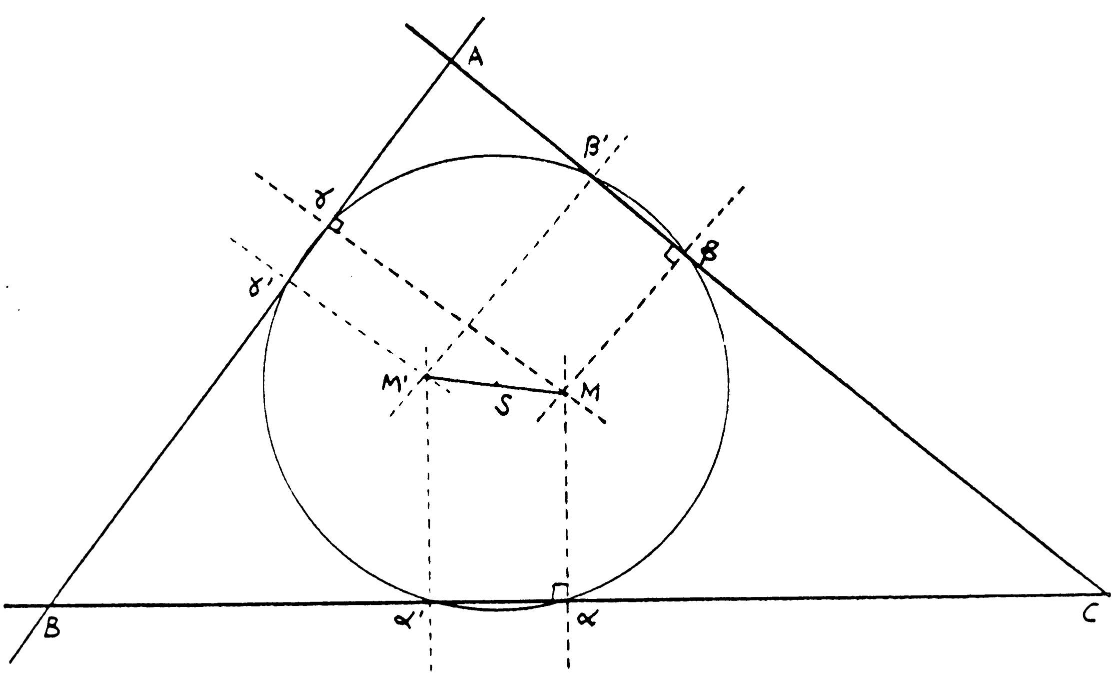
$$a\ MA - b\ MB + c\ MC = 0$$

$$AC\ MB = BC\ MA + AB\ MC$$

Exercice: Que trouve-t-on lorsque [AC] est un diamètre ?

*

3. Soit M un point quelconque du plan. On note α, β, γ les projections orthogonales de M sur les côtés du triangle ABC. Si α, β, γ ne sont pas alignés on associe à M le point M' symétrique de M par rapport au centre du cercle $\mathfrak{C}$ circonscrit à α, β, γ, S.



On pose α'' le symértique de α par rapport à S.
$(\alpha''M')$ est parallèle à (αM) donc perpendiculaire à (BC) au point α'.Or $[\alpha\alpha'']$ est un diamètre de $\mathfrak{C}$ .Le point α' appartient au cercle $\mathfrak{C}$.
Ainsi le cercle $\mathfrak{C}$ contient les six projections de M et de M' sur les côtés du triangle α, β, γ, α', β', γ'.
$B\alpha M\gamma$ sont cocycliques donc,en appelant γ'' le symétrique de γ' par rapport à S :

$$((B\alpha),(BM)) \equiv ((\gamma\alpha),(\gamma M)) \equiv ((\gamma\alpha),(\gamma\gamma'')) \equiv \frac{1}{2}(\ \overrightarrow{S\alpha},\ \overrightarrow{S\gamma''})\quad [\pi]$$

De même $B\alpha' M\gamma'$ sont cocycliques :

$$((BM'),\ (B\gamma')) \equiv ((\alpha' M'),(\alpha'\gamma')) \equiv ((\alpha'\alpha''),(\alpha'\gamma'))\equiv \frac{1}{2}(\ \overrightarrow{S\alpha''},\overrightarrow{S\gamma'})\quad [\pi]$$

comme

$$\begin{array}{l} \alpha \xrightarrow{S_S} \alpha \\ S \longrightarrow S \\ \gamma'' \longrightarrow \gamma' \end{array} \qquad \frac{1}{2}(\ \overrightarrow{S\alpha},\ \overrightarrow{S\gamma''}) \equiv \frac{1}{2}(\ \overrightarrow{S\alpha''},\overrightarrow{S\gamma'})\quad [\pi]$$

$$((B\alpha),(BM)) \equiv ((BM'),(B\gamma'))\quad [\pi]$$
$$((BC),(BM)) \equiv ((BM'),(BA))\quad [\pi]$$

Les droites (BM) et (BM') sont donc symétriques par rapport à la bissectrice Δ_B.

Conclusion : le point M' est l'isogonal de M dans le triangle ABC.

Réciproquement étant donné un point M et son isogonal M'. Appelons α ,β, γ et α',β', γ' leurs projections sur les côtés de ABC. Si les points α ,β, γ ou α',β', γ'ne sont pas alignés on peut recommencer le raisonnement de la partie directe .

Supposons donc α ,β, γ alignés sur δ et α',β', γ'alignés sur δ'.
$B\alpha M\gamma$ sont cocycliques donc :

$$((B\alpha),(BM)) \equiv ((\gamma\alpha),(\gamma M)) \equiv (\delta,(AB)) + \frac{\pi}{2}\quad [\pi]$$

De même $B\alpha' M\gamma'$ sont cocycliques :

$$((BM'),\ (B\gamma')) \equiv ((\alpha' M'),(\alpha'\gamma')) \equiv ((BC),\delta')+ \frac{\pi}{2}\quad [\pi]$$

Comme $((B\alpha),(BM)) \equiv ((BM'),(B\gamma'))\quad [\pi]$

On trouve $((BC),\delta') \equiv (\delta,(AB))\quad [\pi]$

De même $((CA),\delta') \equiv (\delta,(BC))\quad [\pi]$

En soustrayant on obtient:

$$((BC),(CA)) \equiv ((BC),(AB))\quad [\pi]$$

ce qui est impossible.

THEOREME : Deux points M et M' sont réciproques par la transformation isogonale si et seulement si leurs six projections sur les côtés du triangle sont cocycliques sur un cercle centré au milieu de [MM'].(cercle des six points)

*

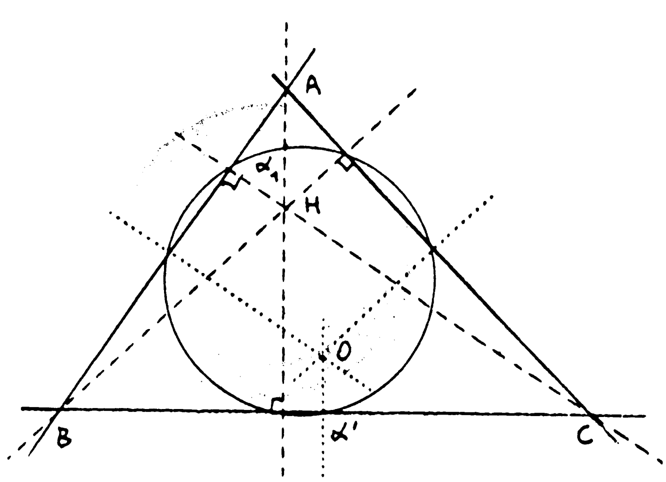
COROLLAIRE : Un point M appartient au cercle Γ circonscrit au triangle ABC si et seulement si ses trois projections orthogonales α,β,γ sur les côtés sont alignées (théorème de Simson).

Cas particuliers.

1°) Si le point M est choisi au centre I du cercle inscrit ou au centre d'un cercle exinscrit , il est double pour la transformation isogonale et donc $\alpha' = \alpha$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$. Le cercle des six points est le cercle inscrit ou exinscrit d'où on était parti.

2°) Si on prend M en H et donc M' en O, le cercle des six points contient les pieds des hauteurs et celui des médiatrices.
Il recoupe la hauteur (AH) au point α_1 tel que:

$$\overrightarrow{\alpha_1 H} = \overrightarrow{O\alpha'}$$



On a classiquement $\quad \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

Donc $\quad \overrightarrow{\alpha_1 H} = \overrightarrow{O\alpha'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \overrightarrow{AH}$

α_1 est le milieu de [AH]

Le cercle contient aussi les milieux des segments joignant chaque sommet à l'orthocentre : c'est le cercle "des neuf points" ou cercle d'Euler du triangle.

*

3°) On prend M en G et donc M' en K. Montrer que K est alors le centre de gravité du triangle α' β' γ'. Que représente G dans le triangle α, β, γ ?

* *

*

Titre : **Equilibres et barycentres**

Auteurs : HAMEL, LACHAUX, SINEGRE

Public concerné : Professeurs de lycées - Etudiants - Stagiaires CPR

Résumé :

On présente un outil nouveau et attrayant pour résoudre des problèmes : la superposition des équilibres. On donne de nombreuses applications et exercices corrigés. On interprète la configuration du trapèze complet (à côtés parallèles) en termes de barycentre et d'homothétie. On détaille, enfin, une application importante : l'isogonalité.

Mots clefs :

Barycentre
Homothétie
Equilibre
Trapèze complet
Fonction de Leibniz
Bissectrice
Isogonalité
Conjugaison
Droite de Simpson
Théorème de Ptolémée
Cercle de six points
Point de Lemoine

Date : 1989
Nombre de pages : 51
Prix : 35 frs

Publication : ISBN : 2-86239-018-6
Dépôt légal : Octobre 1989

I.R.E.M. Université de Haute Normandie
Rue Thomas Becket
76130 Mt St Aignan

****