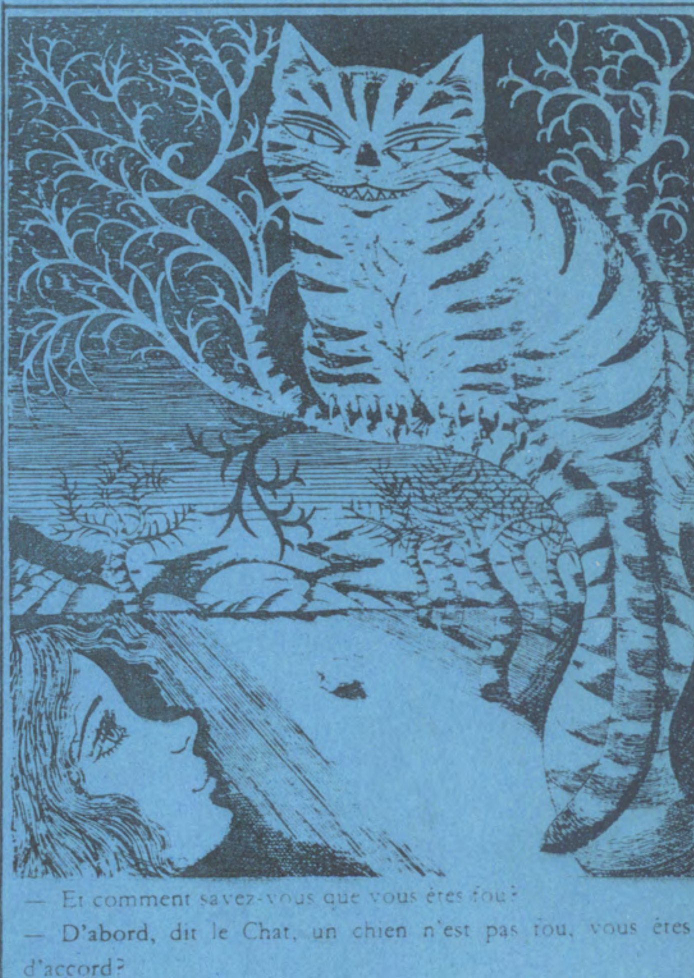
I.R.E.M DE ROUEN

UNIVERSITE DE ROUEN-HAUTE NORMANDIE
4e étage des Services Centraux
1 rue Thomas Becket
76130 MONT SAINT AIGNAN
Tél : 35 70 42 73

au carrefour des mathématiques et du français: la logique



— Et comment savez-vous que vous êtes fou?

— D'abord, dit le Chat, un chien n'est pas fou, vous êtes d'accord?

— A priori.

— Continuons, poursuivit le Chat. Un chien gronde lorsqu'il est en colère, et quand il est content, il remue la queue. Or *moi*, je gronde quand je suis content et je remue la queue quand je suis en colère, par conséquent je suis fou.

GROUPE SECOND CYCLE
Septembre 1987

Eliane ANDRIEU
Elisabeth HEBERT
Monique LELOUARD
Carmelle MIRA

Illustration de la couverture :

Giovani Giannini pour l'Edition
d'Alice au pays des merveilles
de **Lewis Carroll**
par Michel de l'Ormeraie

I.S.B.N. : 2-86239-005-4

TABLE DES MATIERES

BIBLIOGRAPHIE

H. BONNARD — Code du français courant
Magnard 1982

W.V.O. QUINE — Logique élémentaire
coll. U2 Colin 1972

BLANCHE — Introduction à la Logique contemporaine
coll. U2 Colin,1968

S. KLEENE — Logique mathématique
coll U, Colin, 1971

LAROUSSE — La grande Encyclopédie
t IV (1972), t XII (1974)

OSWALD DUCROT — la preuve et le dire
Mame 1973 (épuisé), ainsi que quelques articles
publiés dans le cadre d'un groupe de travail
de I N R D P

LEWIS CARROLL — Logique sans peine
Hermann, 1972.

1ER PREAMBULE :Quelques remarques

* Le travail que nous présentons est le produit d'une double expérience. Nous avons, à plusieurs reprises mené conjointement (maths et français) des travaux sur le raisonnement logique en 2nde. Ces exercices nous avaient semblé utiles mais ils nous avaient aussi donné envie de sortir de l'empirisme, d'essayer de construire un cours un peu cohérent sur ces questions.

  Ce désir serait sans doute resté platonique sans une autre expérience, celle des conseils de classe et de ses leitmotive... Combien de fois, au cours d'un conseil, entend-on dire à des élèves qu'ils "manquent de rigueur"? Et les malheureux s'en vont, repentants ou résignés, sans trop savoir, le plus souvent, de quelle carence ils souffrent.

  Quoique la définiton de la rigueur ne soit pas exactement la même pour tout le monde, il semble quand même qu'une réflexion sur des raisonnements simples et sur le sens des tournures linguistiques permettrait peut-être à un certain nombre d'élèves de comprendre ce qu'on leur reproche, de cesser de croire qu'il s'agit d'une fatalité, et d'essayer de progresser dans ce domaine.

  Il faut ajouter qu'un test -qui sera commenté plus loin-, proposé à nos élèves pendant notre travail, a renforcé notre conviction qu'il y avait non seulement nécessité, mais urgence à agir dans ce domaine.

  Ce travail voudrait donc aider les collègues qui pensent, comme nous, que la rigueur aussi s'enseigne, à fournir à leurs élèves des moyens de l'acquérir ou d'en acquérir un peu.

  Il est surtout orienté vers les classes de 2nde et de 1ère -celles que nous connaissons- mais rien n'exclut que les premières leçons puissent être introduites, allégées, en 1er cycle, ou en terminale, si la nécessité s'en fait sentir. Ces premières parties sont de l'intiation, et on peut s'initier à tout âge.

  En ce qui concerne les enseignants, le travail est conçu pour être mené conjointement par les professeurs de maths et de français, ou par l'un des deux intervenant aussi bien sur la logique que sur la grammaire, ce qui serait encore la meilleure manière de lutter contre le cloisonnement des disciplines. Cependant, compte tenu des difficultés pratiques auxquelles on se heurte lorsqu'on veut être à deux en même temps dans une classe, nous avons essayé d'organiser chaque leçon de telle sorte que les deux professeurs puissent se relayer et se compléter si cette méthode leur convient mieux.

Il convient d'ailleurs de remarquer que, dans les premiers chapitres, il ne s'agit, à proprement parler, ni de maths ni de français tels qu'on les enseigne dans le 2nd cycle, même si nous avons essayé dans les exercices, de réintégrer nos disciplines. IL s'agit d'expliciter certaines des structures élémentaires de la langue, de faire comprendre que n'importe quoi ne signifie pas n'importe quoi, sous la seule justification qu'"on se comprend". Il s'agit donc d'un préalable à l'analyse des textes et au raisonnement mathématique, dont il nous semble de plus en plus difficile de faire l'économie, compte-tenu de l'état de méconnaissance complète de l'outil linguistique dans lequel beaucoup d'élèves arrivent aujourd'hui en 2nde.

* La nomenclature grammaticale à laquelle il a bien fallu, de temps en temps -le moins possible- avoir recours, est la nomenclature officielle de 1975, celle que reprend, par exemple, le Code du français courant , de H. Bonnard, chez Magnard.

Ce n'est pas, à proprement parler, une adhésion de principe mais le produit, là aussi, d'une expérience. Nos élèves ont des connaissances grammaticales plutôt floues et quand il arrive en 2nde des élèves venant de plusieurs troisièmes différentes, la seule terminologie grammaticale sur laquelle on puisse espérer faire l'uninanimité est la terminologie traditionnelle à laquelle les professeurs de langues recourent et dont chacun a donc "déjà entendu parler"

* Les exemples que nous avons choisis pour servir de support à chaque leçon ne relèvent pas d'une haute intellectualité ! Nous avons fait en sorte qu'ils ne posent pas de problèmes idéologiques -au sens le plus large du terme- pouvant susciter des blocages qui occultent le raisonnement - (nous ne sommes d'ailleurs pas sûres d'y être parvenues). Les premiers exemples auxquels nous avions eu recours ont été expérimentés dans le test évoqué plus haut. Il faut voir par exemple, quelles polémiques a soulevées la phrase "il faut que je caresse ma chatte pour qu'elle ronronne" ! La psychologie du chat, et de ses maîtres, l'a emporté sur la logique ! Nous avonc donc résolu de laisser ladite chatte dormir tranquille, en espérant que le quatre-quart qui l'a remplacée touchera un point moins sensible, et que personne ne verra d'objection majeure à tenir pour vrai qu'il faut des oeufs pour le fabriquer!...

Nous avons donc essayé, dans toute la première partie du cours, de choisir des exemples qui soient recevables comme, sinon vrais, du moins possibles. Ce souci nous a conduites à éliminer provisoirement le "conflit" entre vérité de l'énoncé et validité du raisonnement, que la 8è leçon consacrée à des exercices de synthèse, permettra d'aborder.

* **Nous utilisons successivement** la logique des propositions (dans les 6 premières leçons de la première partie), celle des prédicats (dans la 7è leçon), les exercices de synthèse qui constituent la 8è leçon faisant appel à l'une comme à l'autre.

Pour plus de clarté, il nous semble devoir préciser, dès cette préface, les notions de proposition et de prédicat, dont les définitions à usage pédagogique seront données dans la 1ère et la 7è leçons. (Pour plus de détails, Cf Blanché, introduction à la logique contemporaine , coll. U2. Colin).

La proposition est un énoncé comprenant un thème le sujet dont on parle), et un prédicat (ce qu'on en dit , énoncé auquel on peut attribuer une valeur de vérité.

La différence essentielle entre proposition et prédicat vient de ce que la première est un énoncé complet, le second une partie d'énoncé. "manger des huîtres" est un prédicat qui ne deviendra proposition que si je détermine son sujet :

- *soit en le quantifiant :*

  * *existentiellement ("il existe un homme qui mange des huîtres" , ce que nous ferons à partir de la 7e leçon.*
  * *universellement ("tous les hommes mangent des huîtres" ce qui revient à dire que j'envisage globalement un ensemble, c'est-à-dire que je détermine globalement le sujet.*

- *soit en l'individualisant "je mange des huîtres".*

Dans les six premières leçons, nous utiliserons les deux derniers types de propositions mentionnés, puisque les quantificateurs ne seront introduits qu'en 7e leçon. Il n'est en effet pas nécessaire de quantifier ces énoncés pour raisonner sur eux avec l'outil du calcul des propositions, qui s'attache aux relations que les propositions entretiennent entre elles en prenant chacune "en bloc". Par contre l'analyse des énoncés comprenant une -ou des- variable(s), nécessite le recours au calcul des prédicats.

Revenons un peu sur le problème de la détermination du sujet des propositions, en l'absence de quantificateurs. Si l'on veut pouvoir affecter à la proposition une valeur de vérité et une seule, la seule détermination légitime du sujet est générale : "tous les hommes sont mortels" est une proposition vraie, "tous les hommes mangent des huîtres" est une proposition fausse. Mais on atteint vite les limites de la logique des propositions si l'on s'en tient à cette exigence. Que peut-on dire de "tous les hommes" qui soit vrai ?

Ce problème, qui a donné lieu à de longs débats historico-philosophiques dans lesquels nous n'entrons pas ici, a été résolu, chez la plupart des logiciens modernes, par l'élargissement de la notion de proposition à un énoncé dont le sujet est particulier, à condition qu'il soit déterminé. C'est pourquoi nous considérons comme propositions aussi bien des énoncés dont le sujet est défini en général ("tous les hommes...", "tous les élèves...", "ceux qui sont abonnés...") que des énoncés dont le sujet est défini en particulier ("je...", "il...", "cet élève...", "le réel a ...") et nous appliquerons aux unes comme aux autres les règles du calcul des propositions. Les seuls énoncés du français courant sur lesquels nons ne pourrons pas travailler avant la 7e leçon sont ceux dont le sujet indéterminé fait appel au quantificateur existentiel ("quelques...", "certains..." " a quel qu'il soit...").

Si nous n'avions pas pris cette décision de traiter de la même façon des phrases du type "cet élève est gentil" et "le réel a vérifie $a^2 = 4$" nous nous interdisions pratiquement tout recours à des exemples et à des exercices mathématiques, puisque ceux-ci, "par nature" pourrait-on dire, comportent une (ou des) variable(s), la définition de l'univers (" a est un réel"), dans des énoncés où le quantificateur n'est pas nécessaire, sera provisoirement tenue comme une détermination suffisante pour qu'on puisse raisonner comme sur des propositions, d'autant plus que nous nous intéressons moins aux propositions/prédicats en tant que tel(le)s, qu'à la proposition p=>q ou p<=>q qui s'établit entre elles/eux.

D'autre part, il nous arrive de formuler les propositions sous une forme de prédicat ; nous écrivons par exemple : "p : manger des huîtres" au lieu de "p : je mange des huîtres". Nous le faisons parfois pour des raisons de commodité de présentation (quand le sujet est long), mais aussi pour préparer à l'introduction de certaines tournures du langage courant (cf 1ère leçon, II; 2, remarque sur "manger des huîtres me rend malade").

Quelle que soit la formulation, et les raisons qui nous poussent à y recourir, le sujet n'est pas pour autant une variable. Dans l'exemple choisi, il est , et reste, je dans tout le raisonnement, "mis en mémoire", pourrait-on dire.

Peut-être est-il possible de nous reprocher cette "négligence" dans la formalisation ; il nous a semblé que ce détail formel ne nuisait pas à l'utilisation de l'outil, s'il est clair pour tout le monde -et rappelé à l'occasion- qu'on garde en tête le sujet dont on parle. Nous avons surtout voulu éviter une formalisation trop lourde, qui pourrait rebuter certains de nos destinataires, élèves comme professeurs.

On pourrait surtout nous objecter que, si dès le départ, nous avions besoin de prédicats, nous pouvions introduire simultanément les notions de proposition et de prédicat. Certes... mais cela ne nous paraissait pas très pédagogique. Historiquement, le calcul des prédicats -au sens moderne- est intervenu pour repousser les limites du calcul des propositions, et il nous a semblé qu'il valait mieux respecter cet ordre et ne pas alourdir les premiers chapitres de subtilités qui risqueraient d'embrouiller ce que nous voulons clarifier. Une fois familiarisés avec les propositions, nos élèves absorberont mieux les prédicats, d'autant mieux peut-être qu'ils en auront eu, au détour de certains exercices, une approche intuitive. Rien n'exclut d'ailleurs -au contraire- qu'en fin de processus certains de ces exercices, qui ont été traités en calcul des propositions, soient repris en calcul des prédicats. Avec une bonne classe, cela permettrait même un fort intéressant commentaire épistémologique, mettant en lumière le progrès que représente l'élargissement par les prédicats du champ d'application de la logique des propositions (et leurs limites, franchies par la logique modale).

D'une façon générale, ce travail collectif se veut un outil commodément utilisable par tous ; c'est pourquoi nous avons évité d'entrer dans une technicité (mathématique ou linguistique) qui exclurait des gens de bonne volonté non initiés, aussi bien que dans les polémiques d'écoles (logiques ou linguistiques), passionnantes certes, mais assez inadaptées au niveau d'élèves actuels de 2nde ou de 1ère.

* Nous n'ignorons pas les limites auxquelles se heurte un travail de ce type. Nous savons que si la logique et le langage courant se recoupent parfois, ils ne le font vraiment que de façon ponctuelle. Nous ne voulons pas faire entrer de force des formes d'expression qu'autorise la langue dans les limites rigides d'une logique formelle et formalisée, car nous savons que tout ce qui est dit est riche de présupposés, de sous-entendus, d'affectivité, riche de tout un contexte que la logique évacue.

Mais enfin, nous pensons aussi que toutes ces résonnances du non-dit ne doivent pas occulter l'essentiel de ce qui est dit, et que là est la source de bien des malentendus. Nous aimerions que nos élèves comprennent exactement ce qui est dit car cela ne nuit en rien à la richesse de ce qui est sous-entendu, et qu'eux-mêmes mesurent la portée de ce qu'ils disent.

C'est pourquoi nous nous autorisons à utiliser aussi souvent que c'est possible, les outils de la logique formelle pour décripter le langage; nous avons tous besoin, en classe comme ailleurs, de langage et de logique.

Peut-être cette confrontation, qui essaie toujours de montrer les écarts, pourra-t-elle contribuer à enrichir l'un et l'autre.

ANNEXE

Les "matheux" voudront bien aussi pardonner un petit complément destiné à éclairer les littéraires sur ces univers étranges de N, $\mathbb{N}^*$ et autres $\mathbb{R}$ dans lesquels ils vont être amenés à nous suivre, et qui représentent le monde infini des nombres .

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres entiers naturels : 0, 1, 2, 3,...
$\mathbb{N}^*$ est l'ensemble des nombres entiers naturels sans 0
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs : positifs, négatifs ou nuls.
$\mathbb{D}$ comprend les entiers et les décimaux dont la partie décimale est finie :

$1,27 \in \mathbb{D}$ $\quad -2,31 \in \mathbb{D}$ $\quad$ mais $\frac{1}{3} \notin \mathbb{D}$

Q est l'ensemble des nombres pouvant se mettre sous la forme d'un rapport de deux éléments de $\mathbb{Z}$; $-\frac{2}{11} \in Q$ $\quad 0,5 \in \mathbb{Q}$. La partie décimale peut-être infinie mais elle est périodique

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} \text{ car } 1 \in \mathbb{Z} \text{ et } 3 \in \mathbb{Z}^* \qquad \frac{1}{3} = 0,333....$$

plus joliment périodique $\frac{5}{11} = 0,454545...$

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ car il n'existe pas x , y de Z tels que

$$\frac{x}{y} = \sqrt{2} \quad , \sqrt{2} = 1,4142136377....$$

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, il comprend $\mathbb{Q}$ et l'ensemble des nombres dont le développement est illimité et non périodique :

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad , \quad \pi \in \mathbb{R}$$

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes ; vu son nom "effrayant" nous ne le définirons pas davantage !

Nous évoluerons surtout dans $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}$. ($\mathbb{R}+$ est la partie des nombres positifs ou nuls de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}-$ celle des négatifs ou nuls et enfin $\mathbb{R}^*$ est celle des nombres de $\mathbb{R}$ non nuls).

Résumons-nous : $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

2e PREAMBULE : RESULTATS D'UN TEST SUR IMPLICATION OU EQUIVALENCE

Le test ci-joint a été proposé, courant décembre 84, à 389 élèves de notre lycée (134 élèves de 2nde, 184 élèves de 1ère dont 127 1ère S et 61 élèves de Terminale).

Il avait pour fonction d'essayer de voir dans quels cas l'implication était majoritairement comprise comme équivalence. Les résultats relatifs à cette question sont analysés dans le 3e cours.

Mais ce test a aussi donné des résultats que nous n'attendions pas.

Pour chaque phrase, on pouvait trouver 4 combinaisons de réponses. L'une signifiait la compréhension comme implication, une autre la compréhension comme équivalence, les deux autres étaient ce que nous appelons des réponses absurdes puisqu'elles signifiaient soit que la phrase n'avait aucun sens, soit qu'elle était comprise à l'envers.

Le nombre de réponses absurdes, pour chaque question, a quelque chose d'affligeant. Il atteint 60 % pour certaines questions dans certaines classes. Nous nous contenterons ici de donner les résultats d'ensemble, les résultats classe par classe -révélateurs de manière criante de la hiérarchie des séries, et des classes dans chaque série- n'intéressant guère que les collègues qui ont fait faire le test dans leur classe.

TEXTE DU TEST

* * * * * * *

SENS DE L'IMPLICATION EN LANGAGE COURANT

Voici 10 phrases que vous pourriez entendre dans la vie courante. Pour chacune, deux questions vous sont posées, auxquelles vous essayez de répondre spontanément, en entourant nettement la réponse choisie. Ne faites aucun commentaire, s'il vous plaît ; indiquez seulement votre classe en haut à gauche. Merci.

1) "Si je gagne à la loterie, je vous ferai un cadeau."
Trouveriez-vous normal :
a. que je gagne et que je ne vous fasse pas de cadeau ? OUI NON
b. que je ne gagne pas et que je vous fasse un cadeau ? OUI NON

2) "Quand je mange du fromage, je bois du vin."
Etes-vous surpris si :
a. je mange du fromage sans boire de vin ? OUI NON
b. je bois du vin sans manger de fromage ? OUI NON

3)"Il faut que je caresse ma chatte pour qu'elle ronronne"
a. ronronne-t-elle à chaque fois que je la caresse ? OUI NON
b. elle ronronne. Est-ce que je la caresse ? OUI NON

4) "Si je bois, je suis malade"
a. Je suis malade. Concluez-vous que j'ai bu ? OUI NON
b. Je bois. Concluez-vous que je vais être malade ? OUI NON

5) "Taisez-vous, ou j'arrête mon cours."
Serez-vous étonné si :
a. vous vous taisez et que j'arrête mon cours ? OUI NON
b. vous ne vous taisez pas et que je continue mon cours ? OUI NON

6) "Vous ne réussirez pas sans travailler"
a. Réussirez-vous si vous ne travaillez pas ? OUI NON
b. Si vous travaillez êtes-vous sûr de réussir ? OUI NON

7) Enlève tes mains de tes poches, ou tu n'auras pas de bonbon"
Est-ce injuste (ou anormal) :
a. que l'enfant enlève ses mains de ses poches et ne reçoive pas de bonbon ?
OUI NON
b. qu'il reçoive un bonbon sans avoir enlevé ses mains de ses poches ?
OUI NON

8) "Si Pierre va au cinéma, Anne ira avec lui"
Est-il possible :
a. que Pierre aille seul au cinéma ? OUI NON
b. qu'Anne aille seule au cinéma ? OUI NON

9) "Quand il pleut, je prends mon parapluie"
Etes-vous étonné si :

a. je n'ai pas mon parapluie alors qu'il pleut ?	OUI	NON
b. j'ai mon parapluie alors qu'il ne pleut pas ?	OUI	NON

10) "Si tu y mets la patte, (y = dans le lait !)
Tu auras du bâton" a dit la bergère à son chat
Celui-ci doit-il s'étonner ou s'indigner si :

a. il reçoit du bâton sans y avoir mis la patte ?	OUI	NON
b. Il y met la patte et ne reçoit pas de bâton ?	OUI	NON

	Signification des réponses						Résultats en %		
	absurde		⇗		⇏		absurde	⇗	⇏
	a	b	a	b	a	b			
1re question	0 0	0 N	N	0	N	N	28,5	27,2	43,4
2e -	N N	0 N	0	N	0	0	42,4	44	13,1
3e -	0 N	N N	N	0	0	0	41,6	26,5	31,1
4e -	0 N	N N	N	0	0	0	20,1	67,1	12,9
5e -	0 N	N N	N	0	0	0	27,8	7,5	64,3
6e -	0 0	0 N	N	N	N	0	4,9	75,8	18,5
7e -	N N	0 N	0	N	0	0	19,8	20,8	58,9
8e -	0 0	0 N	N	0	N	N	29,1	40,6	30,3
9e -	N N	0 N	0	N	0	0	34,7	33,4	31,1
10e -	0 N	N N	N	0	0	0	17,8	9,3	72,5

moy.
26,67

Sans doute une partie des réponses absurdes s'explique-t-elle par des problèmes d'attention. Pour éviter un effet de mécanisme, les questions n'étaient pas toujours posées de la même façon et certains élèves n'ont peut-être pas remarqué l'alternance êtes-vous surpris / trouvez-vous normal , mais quand même...

On peut "pinailler" aussi sur la 8è question et l'écart entre la phrase (avec lui) et la question posée en b (seule) mais il ne semble pas que cette phrase-là ait été l'une des plus problématiques.

La formulation des phrases ne semble pas tellement influer sur les résultats ; il est vrai que la condition nécessaire mais non suffisante, très mal comprise en 3 (les réponses absurdes sont majoritaires) est bien comprise en 6. Ordre des propositions ou produit d'une longue expérience ? le test ne permet pas de trancher.

Ce qui reste le "fait frappant", c'est finalement la difficulté d'être compris, et quand on parle à un groupe, d'être compris par tout le monde de la même façon, et exactement puisque, pour chaque question, et dans chaque classe, on trouve les quatre combinaisons de réponses possibles. Même si on ne peut espérer qu'elle résolve tous les problèmes, il faut faire de la logique !

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

INITIATION AU RAISONNEMENT LOGIQUE

* * * * * * * * * * * * * * * * * *

PREMIER COURS : L'IMPLICATION

Exemple : **"Quand je mange des huîtres, je suis malade"**

I - OBSERVATION DE LA PHRASE

1) De quoi est-elle faite ?

* de deux "idées"
- manger des huîtres
- être malade

} mises au compte du sujet je

* reliées par quand + présent
ce qui donne une valeur générale à la relation entre les deux "idées".

En logique

-> *ces "idées" sont appelées propositions* .

On appelle proposition un énoncé comprenant ce dont on parle (un sujet), et ce qu'on en dit ; on peut attribuer à cet énoncé une valeur de vérité, et une seule (c'est vrai ou faux).

Le sujet est toujours déterminé, il peut-être général (tous , on , quiconque ...), ou particulier (je ... Pierre ...).

Par convention, on désigne, en logique, les propositions, par les lettres p, q, r etc...

Dans l'exemple choisi, on a deux propositions logiques comprenant :

* pour la proposition que nous appelerons p : le sujet de qui "on" parle : je
ce qui en est dit : mange(r) des huîtres .

* pour la proposition q
le sujet je
ce qui en est dit : (être) malade .

Quand établit entre elles une relation que nous étudierons, mais remarquons d'abord que ... grammaticalement , il s'agit ici de deux propositions également puisque "on peut définir la proposition comme le groupe formé par un sujet et un verbe, et tous les mots s'y rapportant -directement ou non-" Code du français courant

L'une est dite principale je suis malade , l'autre est sa subordonnée quand je mange des huîtres .(1)

Chaque proposition peut-être vraie ou fausse.

Dans le cas où je mange des huîtres : la proposition p est vraie/si je n'en mange pas : la proposition p est fausse.

Dans le cas où je suis malade : la proposition q est vraie/si je ne suis pas malade : la proposition q est fausse.
On désigne une proposition vraie par le signe V.
On désigne une proposition fausse par le signe F.

Remarque : la négation d'une proposition p.

La négation de la proposition p, notée $\neg p$, se lit "non p". Elle est vraie si p est fausse et fausse si p est vraie

ex : p : je mange des huîtres
$\neg p$: je ne mange pas d'huîtres

p et $\neg p$ ne peuvent être vraies en même temps ; elles sont contradictoires. L'une exactement des propositions p, $\neg p$ est vraie : soit je mange des huîtres, soit je n'en mange pas. C'est l'axiome du tiers exclu.

On peut établir la table de vérité suivante :

p	$\neg p$
V	F
F	V

1. Sur l'emploi, la définition et les limites de cette nomenclature officielle de 1975, voir l'ouvrage cité p 292-293.

2) <u>Que signifie la phrase ?</u>

ou quel est le rapport entre les 2 propositions p et q ?

a - On peut poser la question en demandant quand mon auditeur peut affirmer que je "mens", ou dis quelque chose de faux. C'est le cas si l'on peut me prouver que parfois : je mange des huîtres et je ne suis pas malade.

b - On peut demander ce qui se passera si je mange des huîtres ?
Réponse : je serai malade.

c - Et si je n'en mange pas ? on obtiendra facilement je ne serai pas malade mais il se trouvera toujours quelqu'un pour faire remarquer que l'allergie aux huîtres ne vaccine pas contre la grippe et qu'il est donc possible,

d - de ne pas manger d'huîtres et d'être malade. C'est évidemment là le cas problématique qu'il faudrait, à ce niveau du cours, faire sentir sans trop le développer. Il en sera reparlé plus tard.

A partir de là on peut passer à l'établissement de

3) <u>la table de vérité</u>

Il est facile de faire trouver qu'avec 2 propositions et deux valeurs de vérité pour chacune, le tableau comportera 4 combinaisons.

	p	q	"phrase prononcée" p ==> q
1	V	V	V (cf b)
2	V	F	F (cf a)
3	F	V	V (cd d)
4	F	F	V (cf c)

D'après le travail de réflexion qui précède on peut remplir la colonne dont le titre provisoire serait :"phrase prononcée".

On remarque donc que la phrase n'est fausse que si p étant V, q est F.

Si p est V, q est obligatoirement vraie.

Dans le cas où p est F, q peut-être vraie ou F ; en fait je ne dis rien de ce qui se passe si p est F, tout est donc possible.

Un petit exemple mathématique peut illustrer cette table de vérité. Considérons la phrase suivante, où a est un réel :

"Si $a = 2$ alors $a^2 = 4$"

Cette phrase est tenue pour vraie en mathématiques. Analysons pourquoi.

Soient p: $a = 2$
q: $a^2 = 4$

Tout nombre a correspond à l'un des 3 cas suivants :

<u>1er cas</u> : a prend la valeur 2
Dans ce cas p est vraie
q est vraie

Nous avons la situation de la 1ère ligne de la table de vérité. C'est ce qui correspond de la manière la plus évidente à notre affirmation initiale.

<u>2e cas</u> : a prend la valeur -2
Dans ce cas p est fausse
q est vraie

Nous avons la situation de la 3è ligne de la table de vérité.

<u>3e cas</u> : a est différent de 2 et de -2
Remarquons qu'alors a^2 est différent de 4
Dans ce cas p est fausse
q est fausse

Nous avons la situation de la 4è ligne de la table de vérité.

Ces 2 derniers cas n'affectent pas la vérité de l'affirmation :
"si $a = 2$ alors $a^2 = 4$".

Remarque : il est impossible de trouver une valeur de a qui permette d'avoir p vraie et q fausse c'est-à-dire simultanément a égal à 2 et a^2 différent de 4;

Cette situation correspondrait à la 2è ligne de la table de vérité.

Une "phrase" qui correspond à cette table de vérité s'appelle <u>une implication</u>

et se note $\boxed{p \Rightarrow q}$

(on garde la T.V au tableau en remplaçant "phrase prononcée" par p=>q

On dit <u>si</u> p, <u>alors</u> q.

II - AUTRES FORMULATIONS DE L'IMPLICATION EN FRANCAIS

Certaines viendront facilement aux élèves, d'autres moins, qu'il faudrait alors proposer.

Elles viendront dans n'importe quel ordre mais si l'on veut :

* mener une réfléxion grammaticale
* affiner la notion d'implication (en la distinguant du rapport habituel de causalité) il serait bon de les écrire en les classant au fur et à mesure qu'elles sont proposées.

1) <u>Formulations contenant 2 propositions grammaticales</u>

a - Une principale et une subordonnée

On a déjà :

Quand je mange des huîtres, je suis malade
Si je mange des huîtres, je suis malade (de préférence sans <u>alors</u>).

On peut y adjoindre la tournure avec subordonnée relative

Les jours où je mange des huîtres, je suis malade

Si on demande de chercher des structures de phrases approchantes, il serait bien étonnant qu'on n'obtienne pas

Puisque je mange des huîtres, je suis/serai malade
Comme je mange des huîtres, je suis/serai malade
Parce que je mange des huîtres, je suis/serai malade

REMARQUE **Implication et relation cause-conséquence**

Ces 3 formulations - là sont intéressantes ; il est facile de remarquer que l'emploi du présent dans les deux propositions gêne et qu'on dira :

Puisque je mange ... je serai
Puisque j'ai mangé ... je suis

C'est-à-dire qu' on a détruit la valeur générale, atemporelle de la phrase , qui prend là une valeur "datée" et un rapport chronologique. Je ne peux pas situer p=>q, en l'occurrence "Si je mange des huîtres je suis malade" sur un axe représentant le cours du temps puisque c'est vrai, hier, aujourd'hui, demain et pour l'éternité (!).

Je peux très bien par contre illustrer

Puisque j'ai mangé ... je suis ...

o

J'ai mangé (hier soir) le moment où je parle
je suis malade

Puisque je mange ... je serai

o

je mange aujourd'hui à 20 h je serai malade
(cette nuit)

On voit ainsi clairement que toutes les lignes de la table de Vérité ne sont pas englobées par ce type de formulations qui excluent la possibilité que p soit faux puisqu'il est soit réalisé, soit en cours de réalisation. Elles n'ont de sens qu'"en situation". D'autre part, on décrit plutôt dans le rapport de cause à effet, un fait "accidentel", qui a eu lieu mais aurait pu éventuellement ne pas se produire. Le lien indissoluble "pas p sans q" n'est pas très marqué ; il disparaît presque avec parce que ; si je dis "je suis malade parce que j'ai mangé des huitres" je ne dis pas qu'à chaque fois j'ai le même problème. Les phrases au futur sont plus proches de la valeur générale de l'implication sans toutefois la recouvrir parfaitement.

Ce sont des déductions (ou inférences), qui sont des cas particuliers de l'implication qui, elle, est générale et potentielle ; c'est ce qu'on appelle le rapport de cause à effet ou de cause à conséquence, mais il est bon de montrer la différence entre implication et conséquence, ce qui permettra éventuellement d'approfondir plus tard sur la nécessité de se doter d'un outil qui ne soit pas l'outil linguistique usuel quand on veut cerner des notions proches des notions usuelles mais qui ne les recouvrent pas exactement. C'est pourquoi les logiciens parlent d'implication et non de conséquence.

Il convient d'ajouter que nous sommes pourtant là en train de parler du type d'implication le plus proche du rapport de cause à conséquence ; quand nous aurons vu l'implication-postulation (3e leçon), nous sentirons encore plus nettement la nécessité de distinguer les notions.

Ce point étant réglé, et toujours dans cette rubrique "Une principale et une subordonnée" il serait bon d'ajouter une tournure qui ne pourra pas être trouvée à partir de l'exemple choisi, dont le sujet je est individualisé.

Mais quand le sujet est général, "impersonnel" (on) il est toujours possible de transformer si on , ou si l'on en Qui , et la, proposition logique p devient subordonnée relative sujet

Ex : **Si l'on se nourrit mal, on est malade**

devient

Qui se nourrit mal est malade

C'est très fréquent dans les proverbes et les maximes dont la portée, par définition, se veut générale :

Qui veut voyager loin ménage sa monture
Qui aime bien châtie bien

Ces proverbes sont des survivances d'un tour de langue qui n'est plus couramment usité mais qui a eu ses heures de gloire

cf Qui m'aime me suive.

Dans la langue littéraire, cette relative peut prendre d'autres fonctions que sujet ; par ex : complément "indirect"

"A qui venge son père, il n'est rien d'impossible" dit Rodrigue et un proverbe lui fait écho "La vie appartient à qui se lève tôt".

b - Formulations avec deux indépendantes

("Indépendantes" du point de vue grammatical)

Sur la lancée du rapport de cause à effet, on obtiendra sans doute assez facilement des tournures du type

je suis malade ; en effet, j'ai mangé des huîtres
je suis malade car j'ai mangé des huîtres
j'ai mangé des huîtres, alors je suis malade
j'ai mangé des huîtres, c'est pourquoi je suis malade

Sur le plan logique, le commentaire est le même que pour les tournures précédentes (déductions et non implications) mais on peut s'amuser à commenter là un ler décalage entre structure logique et structure linguistique puisque nous avons maintenant des phrases constituées de deux propositions que la grammaire déclare "indépendantes" malgré leur lien logique évident, alors que nous avions jusqu'à maintenant une principale et une subordonnée.

On peut faire remarquer aussi que si le langage écrit a intérêt à expliciter les liens logiques, le langage oral trouve une compensation facile dans l'intonation. Si je dis d'un air abattu par l'indigestion et les regrets

"Je suis malade ; j'ai mangé des huîtres"

quiconque pourra sentir le lien de cause à effet entre mes propositions grammaticalement indépendantes.

L'écrit est parfois aussi élliptique et remplace l'intonation par une ponctuation "éloquente"

Je suis malade : j'ai mangé des huîtres...

Il s'agit là de déduction mais on pourrait aussi grâce à l'intonation faire une implication. Un ton fataliste s'impose :

"Je mange des huîtres... je suis malade".

Sans trop insister il est bon de signaler ces possibilités pour que les élèves s'habituent à saisir les liens logiques (quels qu'ils soient) même à peine formulés.

Toujours avec deux indépendantes, on trouve l'implication dans la formulation assez courante avec et

Je mange des huîtres, et je suis malade

ou, formule plus littéraire

Que je mange des huîtres, et je suis malade

ce subjonctif gardant là un souvenir de l'intersection entre ce mode et le mode voisin, conditionnel.

Il serait bon de faire trouver la formulation qui rend compte de ce qui définit l'implication (c'est-à-dire la 2è ligne de la table de vérité ci-dessus), à savoir la nécessité d'avoir q Vraie si p est Vraie.
"Je ne peux pas avoir p(v) sans avoir q(v) :

Je ne mange pas d'huîtres sans être malade(1)

Même si c'est à l'état intuitif puisque ce 1er cours n'introduit pas le travail sur les connecteurs logiques et/ou (lois de Morgan), on peut essayer de glisser à partir de cette formulation :

Je ne mange pas d'huîtres, ou je suis malade
sinon

Ce point sera justifié par un exercice de la 5è leçon II.

2) formulations ne comprenant qu'une proposition grammaticale

(et toujours deux propositions logiques)

manger des huîtres me rend malade

Avec l'exemple choisi pour cette leçon, il est difficile de trouver beaucoup d'autres formulations sans confiner au ridicule ; c'est le cas avec :

l'absorption d'huîtres me rend malade!

1. Cette tournure ne comporte qu'une proposition grammaticale quand le sujet des 2 verbes est le même, et contient une principale et une subordonnée quand ils sont différents ; sa place dans 2b ne se justifie que par le rôle de tremplin qu'elle joue pour trouver 7p ou q

On pourrait oser quand même

la consommation d'huîtres me rend malade

pour montrer qu'un nom (et ses éventuels compléments) peut constituer une proposition logique, car c'est assez fréquent dans les textes.

Remarque (incompréhensible pour les élèves à ce stade de leur progression):

Dans toutes ces tournures qui comportent l'une des propositions logiques formulée à l'infinitif, ou sous forme nominale, on pourrait croire qu'il n'y a pas de sujet et qu'il s'agit donc de prédicats. Il n'en est rien -la phrase ainsi construite n'est correcte, avec un infinitif que si le sujet sous-entendu de cet infinitif est le même que la personne concernée, sujet ou objet, de l'action principale. C'est une loi grammaticale mais aussi une évidence de bon sens. Il serait bien curieux quand même que je puisse être malade sous prétexte que Machin mange des huîtres ; manger des huîtres a donc bien pour sujet implicite la personne dont il est quesion dans le reste de la phrase, en l'occurrence moi .

Il en va de même avec la tournure nominale : il va de soi que c'est l'absortion d'huîtres par moi-même et non par Tartampion qui peut me rendre malade (dans le cas où l'on voudrait distinguer les deux sujets, on préciserait) faute de précision, avec une tournure sans personne marquée (participe passé, participe présent, groupe nominal), la personne est définie : c'est la même que celle dont il est question dans la suite de la phrase.

TABLEAU RECAPITULATIF

(la liste n'est pas exhaustive)

		IMPLICATION	DEDUCTION(rapport cause-conséquence)
2 propositions grammaticales	1 principale 1 subordonnée	Quand je mange des huîtres, je suis malade Si .... , (alors)... Les jours où ...., ... Qui se nourrit mal, se porte mal	Puisque j'ai mangé des huîtres, je suis malade Comme ....,.......... Parce que ...., ... (1)
	2 indépendantes	Je mange des huîtres, et je suis malade (2) Je mange des huîtres.... je suis malade (2) Que je mange des huîtres, et je suis malade Je ne mange pas d'huîtres, ou je suis malade	Je suis malade car j'ai mangé des huîtres Je suis malade ; en effet .... J'ai mangé des huîtres, alors je suis malade ....; c'est pourquoi........ Je suis malade ; j'ai mangé des huîtres.... (2)
1 Proposition grammaticale		Je ne mange pas d'huîtres sans être malade Manger des huîtres me rend malade La consommation d'huîtres me rend malade	

(1) on peut aussi trouver q en subordonnée et p en principale (cf alternance avec 2 indépendantes) :
J'ai mangé des huîtres, si bien que je suis malade ; mais il est sans doute inutile d'aloudir davantage.

(2) langage oral surtout, l'intonation compensant l'absence de bien logique explicite.

<u>**Conclusion**</u> : même si l'on élimine les formulations qui ne sont pas des implications, il reste une grande variété de tournures qu'il faut savoir "démasquer". Souplesse et ambigüité du langage.....

III - EXERCICES

1) de vérification

A - répondre par écrit, après réflexion rapide aux questions suivantes à propos de phrases que l'on peut entendre, et qu'on suppose vraies.

1. "quand je mange du fromage, je bois du vin"
   Etes vous surpris si

   a - je mange du fromage sans boire de vin ? O/N
   b - je bois du vin sans manger de fromage ? O/N

2. "Si je bois, je suis malade"

   a - Je suis malade. Concluez-vous que j'ai bu ? O/N
   b - Je bois. Concluez-vous que je vais être malade ? O/N

3. "Vous ne réussirez pas sans travailler"

   a - réussirez-vous si vous ne travaillez pas ? O/N
   b - si vous travaillez, êtes-vous sûr de réussir ? O/N

4. "Quand il pleut, je prends mon parapluie"
   Etes-vous étonné si

   a - je n'ai pas mon parapluie alors qu'il pleut ? O/N
   b - j'ai mon parapluie alors qu'il ne pleut pas ? O/N

B - Etablir pour chaque phrase la table de vérité et vérifier avec elle les réponses "spontanées".

C - Commentaire (collectif) sur les erreurs et/ou les écarts éventuels entre réponses spontanées et réponses raisonnées.

Conclusion : les 4 phrases sont des implications.

2) Expression française

avec

si p : aimer la liberté — sujet particulier (par ex. je)
q : pratiquer la voile — ou général (quinconque, celui qui)

comment exprimer

$p \Rightarrow q$
$q \Rightarrow p$ (éventuellement ; plutôt en commun en correction)

Remarque : q n'est pas impératif tel quel. On peut remplacer la voile par ce qu'on veut, à condition d'éviter les incompatibilités manifestes avec p!

3) Exercices mathématiques

A - Ecrire chaque phrase sous la forme "$p \Rightarrow q$" et dire si elle est vraie ou fausse

a) Si un point est équidistant de deux points A et B, il appartient à la médiatrice de [AB]. (V)

b) Pour que la somme de deux nombres entiers soit paire, il suffit que ces deux entiers soient impairs. (V)

c) Si deux angles sont à côtés respectivement parallèles, ils sont égaux.(F)

d) Un quadrilatère convexe qui a un angle droit et deux côtés parallèles est un rectangle. (F)

e) Soient a et b deux réels.
si $0 < a < b$ alors $a^2 < b^2$. (V)

f) Soient a et bdeux réels.
si $a < b$ alors $a^2 < b^2$. (F)

g) Soient a et b des réels de R^*
pour que $1/a < 1/b$ il faut que $a > b$. (F)

B - Ecrire toutes les implication vraies en utilisant les propositions suivantes :

p : la somme des chiffres du nombre entier N est divisible par 18

q : la somme des chiffres du nombre entier N est divisible par 9

r : le nombre entier N est divisible par 18

s : le nombre entier N est divisible par 9 t : le nombre entier N est divisible par 9 et 2

u : le nombre entier N est divisible par 3 et 6

v : le nombre entier N est pair

Réponse : p => q, q => s, r => q, r => t, r => u, s => q, t => q,
t => r, t => s, t => u, t => v, u => v, r => v.

C - Ecrire toutes les implications vraies en utilisant les propositions suivantes .

p : le nombre entier n se termine par 0

q : le nombre entier n est le triple d'un nombre pair

r : le nombre entier n est pair

s : le nombre entier n est divisible par 30

t : le nombre entier n est divisible par 10

Réponse : p => r, q => r, s => p, s => r, s => t, t => p, t => r,
p => t, s => q .

DEUXIEME COURS : L'EQUIVALENCE

Exemple : "**Seuls les abonnés ont une réduction**"

I - OBSERVATION DE LA PHRASE

1) de quoi est-elle faite ?

d'une seule proposition grammaticale mais de 2 propositions logiques

être abonné : p
avoir une réduction : q — avec un sujet général collectif pluriel

qui peuvent être chacune vraie ou fausse.

2) Que signifie la phrase ?

On peut s'interroger -et interroger les élèves aussi- sur ce qui est possible et ce qui ne l'est pas

* Qu'est-ce qui est possible ?

a) être abonné, et avoir une réduction
b) ne pas être abonné, et ne pas avoir de réduction

* Qu'est-ce qui est impossible ?

c) ne pas être abonné, et avoir une réduction
d) être abonné, et ne pas avoir de réduction

On peut maintenant établir

3) la table de vérité

	p	q	"phrase prononcée" p<=>q
1	V	V	V cf a
2	V	F	F cf d
3	F	V	F cf c
4	F	F	V cf b

On remarque que la phrase n'est vraie que dans deux cas :

p et q vraies en même temps

p et q fausses en même temps

Elle est fausse dans les 2 autres cas, où l'on a l'une vraie et l'autre fausse.

-> *Une "phrase" qui correspond à cette table de vérité s'appelle une équivalence*

et se note p <=> q

On dit si, et seulement si p, (alors) q

Un triangle est isocèle si, et seulement si l'une de ses hauteurs est en même temps médiane.

A ce stade du travail il serait bon de

* commenter la différence avec la table de Vérité de l'implication , en 3me ligne sur la présentation adoptée

p	q	p =>q	p	q	p<=>q
F	V	V	F	V	F

* faire remarquer le caractère quelque peu barbare de la formulation des mathématiciens " si, et seulement si " qui révèle l'absence, en langage courant, d'une formule claire, sans ambiguïté, pour exprimer cette notion, et invite à être vigilant pour la suite du cours.

II - AUTRES FORMULATIONS DE L'EQUIVALENCE EN FRANCAIS

Il en existe relativement peu et encore certaines ne vont-elles pas sans un rien d'ambiguïté. C'est pourquoi il n'est pas très intéressant de recourir à la classification grammaticale qui a été utilisée dans le ler cours, d'autant que les constatations qui en ressortent sur la souplesse du langage restent d'actualité.

On a donc la formulation avec seul + pluriel global

Seuls les abonnés ont une réduction

On obtiendra sans doute sa paraphrase lourde.

Il n'y a que les abonnés qui aient une réduction

Il ne semble pas qu'il soit très utile de commenter là l'emploi du subjonctif qui se justifie par la présence d'une négation (même simplement restrictive) dans la principale.

Un point sera fait ultérieurement (3me cours) sur les ambiguïtés de l'emploi de ne...que qu'on retrouvera sans doute dans :

On n'a de réduction que si l'on est abonné

ce qui pourrait se dire aussi :

On a une réduction seulement si on est abonné

Seulement si contient implicitement si, et seulement si que les mathématiciens explicitent pour plus de sûreté.

On peut trouver aussi les variantes de l'implication :

On n'a de réduction que quand on est abonné
On n'a de réduction que lorsqu'on est abonné

(tout cela manque quelque peu d'élégance...)

Il faudrait peut-être dire un mot également du très ambigu <u>c'est parce que</u>

Si l'on a une réduction, c'est parce que l'on est abonné.

Cette tournure signifie bien, en effet, que
parce que $\underbrace{\text{l'on est abonné}}_{p}$, on a $\underbrace{\text{une réduction}}_{q}$

donc $p \Rightarrow q$

mais aussi que :

si $\underbrace{\text{l'on a une réduction}}_{q}$, on $\underbrace{\text{est abonné}}_{p}$

donc $q \Rightarrow p$

d'où il ressort que $p \Leftrightarrow q$

Mais à cause de sa lourdeur, <u>c'est parce que</u> se trouve assez fréquemment réduit à <u>c'est que</u> qui n'a pas la valeur d'équivalence mais celle d'implication (ici $q \Rightarrow p$). Il vaut donc mieux, lorsqu'on fait de la logique, éviter aussi bien l'une que l'autre de ces expressions, et les réserver -car il n'est pas question de les condamner à mort- à des textes où l'"ambiguïté" n'entraînera pas de polémiques inépuisables et le douloureux trou noir intellectuel qui les accompagne inévitablement.

Quoi qu'il en soit, la lourdeur de toutes ces expressions est sans doute la raison pour laquelle, finalement, le langage courant exprime peu l'équivalence et recourt aux tournures de l'implication, qui elle -cause ou conséquence- est fréquemment comprise comme équivalence. Il y a là au moins deux sources de malentendus dans la vie de tous les jours, ce qui sera précisé dans le 3me cours.

III - LE PROBLEME DE LA DOUBLE NEGATION

Si on prend une proposition p, et qu'on la nie, on obtient $\neg p$.

On peut aussi nier $\neg p$; on obtient alors $\neg(\neg p)$.

Il est clair que $\neg(\neg p)$ est vraie quand $\neg p$ est fausse, fausse quand $\neg p$ est vraie.

Récapitulons donc :

p	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
V	F	V
F	V	F

On constate que p et $\neg(\neg p)$ ont les mêmes valeurs de vérité, qu'elles sont simultanément vraies et simultanément fausses.

Elles sont donc logiquement équivalentes.

C'est ce qu'on trouve dans <u>la double négation en français</u>

soit p : il est intelligent
$\neg p$: il est inintelligent ou il n'est pas intelligent
$\neg(\neg p)$: il n'est pas inintelligent
$\Leftrightarrow p$: il est intelligent

Cependant, il faut reconnaître que l'usage de la double négation n'est pas absolument équivalent, en langage courant, à l'usage de l'affirmation logiquement équivalente.

Elle introduit toujours une nuance, qui peut aller dans deux directions opposées que seul le contexte, l'intonation, permet de cerner.

- <u>la réserve</u> :

  si je dis "il n'est pas inintelligent" avec une moue expressive et sur un ton traînant, si je fais précéder cela d'un "Ouais" révélateur, on pourra comprendre que, si je ne le trouve pas complètement idiot, je ne le crois pas très intelligent non plus disons qu'il est au point 0 qui sépare la bêtise de l'intelligence (pour autant qu'on puisse les séparer ainsi...).

- <u>la litote</u> : (pensée plus forte que l'expression)

  si je dis cela, en réponse à un interlocuteur, sur un ton vif, avec un ample mouvement de bras en introduisant par "Ah mais", ou "Voyons", il sera clair que je dis plus que l'expression ne laisse croire et que j'affirme son intelligence : il est tout le contraire de "pas intelligent" donc plutôt très intelligent...

IV - EXERCICES

1) de vérification

(Ces exercices préparent en même temps intuitivement le cours sur les quantificateurs -7è leçon-)

A - Comment écrivez-vous, en logique :

a - les élèves de cette classe font de l'anglais
p => q

b - seuls les élèves de cette classe font de l'anglais
p <=> q

c - seuls des élèves de cette classe font de l'anglais
p <= q

On peut établir les tables de vérité...

B - D'après ce que vous savez, ai-je raison de dire... ? Pourquoi ?

a - seuls les animaux à plumes volent
b - seules les étoiles illuminent le ciel
c - seuls les hommes (*) peuvent devenir députés
d - seuls les titulaires du permis ont le droit de conduire

2) expression française (suite)

si p : aimer la liberté — sujet général
q : pratiquer la voile — ou particulier
comment exprimer
p <=> q ?

Comparaison avec les formulations de p =>q et q =>p (1er cours)
Analyse des "détails" qui changent tout.

* individus du sexe masculin

3) <u>exercices mathématiques</u>

A - Reconnaitre parmi les propositions suivantes
celles qui sont équivalentes

---

a - ce quadrilatère a des diagonales qui se coupent en leur milieu
b - ce quadrilatère est un parallélogramme possédant un angle droit
c - ce quadrilatère est un losange avec un angle droit
d - ce quadrilatère est un trapèze dont tous les angles sont égaux
e - ce quadrilatère est un carré
f - ce quadrilatère a des côtés deux à deux parallèles
g - ce quadrilatère est un rectangle
h - ce quadrilatère est un trapèze dont 3 côtés sont égaux et dont un des angles est droit
i - ce quadrilatère est un trapèze isocèle qui a un angle droit
j - ce quadrilatère est un rectangle qui a deux côtés consécutifs égaux
k - ce quadrilatère est un parallèlogramme
l - ce quadrilatère est un losange dont les diagonales sont égales.

Réponse : a $\Leftrightarrow$ f $\Leftrightarrow$ k ; b $\Leftrightarrow$ d $\Leftrightarrow$ g $\Leftrightarrow$ i ;
c $\Leftrightarrow$ e $\Leftrightarrow$ h $\Leftrightarrow$ j $\Leftrightarrow$ l.

B - Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On définit comme suit plusieurs propositions, déterminer lesquelles sont équivalentes à la proposition : "$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux".

---

p : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
q : $2\,\vec{u} = 2\,\vec{v}$
r : $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$ et $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$
s : il existe un réel k tel que $k\,\vec{u} = k\,\vec{v}$
t : il existe un trapèze (ABCD) dans le plan tel que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{DC} = \vec{v}$
u : il existe un parallèlogramme (ABCD) dans le plan
tel que $\vec{AB} = \vec{u}$ et $\vec{DC} = \vec{v}$
v : $\vec{u}^2 = \vec{v}^2$

(Réponse : q, u).

C - Soit un entier naturel quelconque

---

1) - a) Montrer que si 10^n-1 est un multiple de 9, alors $10^{n+1}-1$ est un multiple de 9

b) Montrer que si 10^n-1 n'est pas un multiple de 9, alors $10^{n+1}-1$ n'est pas un multiple de 9

c) D'après ce que vous venez de démontrer, que pouvez-vous dire des propositions : "$10^{n+1}-1$ multiple de 9" et "10^n-1 multiple de 9"?

Est ce que pour tout entier n, 10^n-1 est multiple de 9 ?

2) - a) Montrer que si 10^n+1 est multiple de 9 alors $10^{n+1}+1$ est multiple de 9

b) Montrer que si $10^{n+1}+1$ est multiple de 9 alors 10^n+1 est multiple de 9

c) D'après ce que vous avez démontré que pouvez-vous dire des propositions :
"$10^{n+1}+1$ est multiple de 9" et 10^n+1 est multiple de 9 ?

Est-ce-que pour tout entier n, 10^n+1 est multiple de 9 ?

TROISIEME COURS : IMPLICATION OU EQUIVALENCE ?

LES ECARTS ENTRE LA LOGIQUE ET LE LANGAGE COURANT

Ces écarts sont nombreux et ont des sources variées qui tiennent parfois à une évidente méconnaissance du langage ou à une structuration cérébrale peu sûre (cf le nombre de réponses absurdes dans le test d'introduction). Cependant, même pour des gens qui connaissent la langue et raisonnent correctement, il demeure deux sources d'écarts sur lesquelles il nous semble intéressant de revenir.

I - L'IMPLICATION COMPRISE COMME EQUIVALENCE

1) Observation

Les phrases 1, 5, 7 et 10 du test sont majoritairement comprises comme des équivalences.
Or ce sont des phrases qui contiennent soit :

* une promesse :
  (1) "**Si je gagne à la loterie, je vous ferai un cadeau**"
* une menace :
  (5) "**Taisez-vous, ou j'arrête mon cours**"
  (à moins qu'il ne s'agisse d'une promesse !...)
  (7) "**Enlève tes mains de tes poches ou tu n'auras pas de bonbon**"
  (10) "**Si tu y mets la patte, tu auras du bâton**"

Si l'on examine les résultats chiffrés, on constate que la compréhension comme équivalence, majoritaire dans les 4 exemples, est beaucoup plus nette pour les 3 menaces (43,4 % contre 64,3%, 58,9%, 72,5%).

2) Interprétation

De telles réponses sont finalement normales. Quelle valeur d'incitation, ou de dissuasion, aurait une promesse, ou une menace, si la récompense, ou le châtiment, pouvait survenir de toute façon ?

Les interlocuteurs comprennent si comme si, et seulement si . Il y a là une logique de langage qui s'écarte de la logique formelle et qu'Oswald Ducrot appelle "la loi d'exhaustivité" du langage. Cette loi "veut que, parlant d'un certain sujet, on donne à son interlocuteur les informations les plus fortes dont on dispose et qui sont censées l'intéresser. Ainsi on aura tendance à m'accuser de mensonge si j'annonce à l'ami qui m'a prêté sa voiture "j'ai cabossé une aile" alors que le moteur aussi a été enfoncé" (O. Ducrot *La preuve et le dire* ch.7).

Au nom de ce principe, si j'ai l'intention de faire, quoi qu'il arrive, un cadeau à un ami, on ne voit pas pourquoi je lui dirais qu'il aura ce cadeau si je gagne à la loterie . Si la bergère de la chanson est assez cruelle pour vouloir, de toute façon, bastonner son chat, pourquoi préciserait-elle si tu (...)mets la patte (dans le lait) . Quitte à avoir du bâton, autant qu'il se régale auparavant !

On peut donc inviter les élèves à comprendre de telles tournures -contenant promesse ou menace- comme des implications lorsqu'ils font de la logique formelle, mais à les interpréter comme des équivalences dans la vie courante.

II - LE PROBLEME DE ne...que : p => q ? q =>p ? p <=> p ?

Dans le 2è cours, sur l'équivalence, on a été amené à retenir des formulations avec ne...que .

Une clarification s'impose car ne...que , selon le membre de phrase sur lequel il porte, peut donner à la phrase le sens p => q, q=>p ou p <=> q.

Le problème est épineux... Procédons avec ordre et méthode et disons d'emblée que ne...que est tout ce qu'on veut sauf un outil logique, ce qui n'empêche pas d'essayer d'y voir un peu plus clair.

1) valeur particulière de la négation ne...que dite "négation restrictive"

elle affirme et nie à la fois

Exemple .

Je ne mange que des légumes.

- affirme que je mange des légumes.
- nie que je mange tout autre produit comestible.

Ne...que restreint donc la portée de l'affirmation à un élément d'un ensemble, celui qui est nommé après, à l'exclusion de tous les autres possibles.

Ici, il n'est question ni d'implication ni d'équivalence parce que l'exemple choisi ne comporte qu'une proposition logique.

2) Qu'en est-il lorsque nous avons deux propositions ?

Ex. : **Je ne mange que si j'ai faim**

p : manger	toutes deux mises au
q : avoir faim	compte de je

En appliquant ce qui est dit plus haut, on constate que :
- j'affirme que je mange si j'ai faim $q \Rightarrow p$
- je nie qu'il m'arrive de manger dans d'autres cas, et en particulier si je n'ai pas faim

Je ne peux avoir p sans q donc $p \Rightarrow q$

Cette phrase a donc bien une valeur d'équivalence ($p \Leftrightarrow q$). Si l'on ne craignait pas les barbarismes, on pourrait la transformer en :

Je mange si, et seulement si j'ai faim

En un français plus courant, on peut aussi mettre les points sur les i en disant :

Je mange si j'ai faim, et seulement dans ce cas.

Mais les choses ne sont pas toujours si simples qu'il y paraît...

3) Autre exemple et conclusion (provisoire)

Soient p : aller aux Baléares
q : louer un bateau

Construisons une phrase sur le modèle précédent :

Je ne vais aux Baléares que si je loue un bateau

Elle n'est guère plus problématique (en principe) que la phrase précédente :
Si je loue un bateau, je vais aux Baléares.

C'est la partie "affirmative" de la tournure, soit $q \Rightarrow p$.

Mais je nie aussi pouvoir y aller dans d'autres circonstances. Si on me voit aux Baléares, c'est nécessairement que j'aurai loué le bateau donc $p \Rightarrow q$.

Nous sommes donc en présence d'une équivalence. Puisqu'il en est ainsi nous pouvons garder ce premier exemple.

Je ne vais aux Baléares que si je loue un bateau

(que nous appellerons : phrase n°1)

Mais nous pouvons dire aussi :

Je ne loue un bateau que si je vais aux Baléares

(ce sera notre phrase N°2).

• Or, tout se passe comme si l'introduction de NE...QUE insistait sur l'exclusion, occultant un peu l'affirmation initiale

Une condition nécessaire (1) est soulignée

- Phrase 1 : il faut que je loue un bateau pour aller aux Baléares ($p \Rightarrow q$)

- Phrase 2 : il faut que j'aille aux Baléares pour louer un bateau ($q \Rightarrow p$).

La condition suffisante (1) correspondante :

- Phrase 1 : si je loue un bateau, je vais aux Baléares ($q \Rightarrow p$)

- Phrase 2 : si je vais aux Baléares, je loue un bateau ($p \Rightarrow q$)

est atténuée au point peut-être de disparaître totalement de la compréhension courante.

Spontanément, en situation de dialogue, -et sauf indication contraire donnée par une intonation et une mimique particulières- on retiendra de la 1re phrase que $p \Rightarrow q$ est vraie et de la seconde que $q \Rightarrow p$ est vraie.

Grammaticalement, on peut dire que la subordonnée joue le rôle de condition nécessaire de la principale et qu'on oublie qu'une proposition introduite par si joue normalement (au moins) aussi le rôle de condition suffisante.

Il y a donc déjà là une source importante d'ambiguïté, mais nous ne sommes pas encore au bout de nos peines.

1. Ces notions n'étant présentées aux élèves qu'au chapître suivant, il faudrait soit commenter le problème autrement soit remettre à plus tard le détail de ce débat complexe.

4) Place de NE...QUE et signification différentes

Nous gardons p : aller aux Baléares
Nous changeons q : prendre le bateau

Comme ne...que peut prendre diverses places dans une proposition, selon qu'il porte sur le verbe (c'est-à-dire sur l'ensemble de la proposition) ou sur le complément (soit une partie de la proposition), je peux construire quatre phrases:

1 - Je ne vais aux Baléares qu'en (prenant le) bateau
2 - Je ne vais qu'aux Baléares en (prenant le) bateau
3 - Je ne prends le bateau que si je vais aux Baléares
4 - Je ne vais aux Baléares que si je prends le bateau.

a - la phrase n°1

Je ne vais aux Baléares qu'en bateau

affirme que je vais aux Baléares en bateau
nie que j'aille aux Baléares avec tout autre moyen de locomotion (avion ou nage...)
ne...que porte sur l'extension (implicite) de q

table de vérité

p	q	phrase n°1
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

La phrase N°1 signifie

p => q est vraie

b - la phrase n°2

Je ne vais qu'aux Baléares en bateau

affirme que je vais aux Baléares en bateau
nie que je prenne le bateau pour une autre destination (Irlande ou Corse)
ne...que porte sur l'extension (implicite) de p

table de vérité

p	q	phrase n°2
V	V	V
F	V	F
V	F	V
F	F	V

La phrase N°2 signifie

q => p est vraie

-> Remarque : La difficulté vient de ce que ces propositions sont complexes, constituées de deux éléments

aller	quelque part	prendre	un moyen de transport
	aux Baléares		le bateau

Quand on les prend "brutes", on les ressent comme des unités, mais l'introduction de ne...que appelle à la mémoire tout ce qu'un choix (les Baléares ou le bateau) comporte d'exclusions (la Corse ou l'avion).

Dans ce cas ne...que ne porte que sur un élément de p ou de q et non sur l'ensemble de la proposition.

c - la phrase n°3

Je ne prends le bateau que si je vais aux Baléares

affirme que je prends le bateau si je vais aux Baléares
(équivalent à : si je vais aux Baléares, je prends le bateau)
donc affirme que p =>q est vraie
nie que je prenne le bateau dans un autre cas
donc affirme que si je prends le bateau, je vais aux Baléares
donc que q =>p est vraie

La phrase n°3 signifie donc p <=> q est vraie car, dans ce cas, ne...que porte sur l'ensemble de p.

d - la phrase n°4

Je ne vais aux Baléares que si je prends le bateau

affirme que je vais aux Baléares si je prends le bateau
(équivalent à : si je prends le bateau, je vais aux Baléares)
donc affirme que q => p est vraie

nie que je puisse aller aux Baléares sans bateau
donc affirme que si je vais aux Baléares, je prends le bateau
donc que p => q est vraie.

La phrase n°4 signifie aussi en "théorie" que p <=> q est vraie.

Cependant, il n'en est pas tout à fait ainsi en réalité. En effet, quelle différence peut-on trouver entre :

Je ne vais aux Baléares qu'en bateau
qu'en prenant le bateau
que si je prends le bateau ?

ce qui revient à dire que la phrase 4 a le même sens que la phrase 1.

Où est le problème ?

Il vient -semble-t-il- de ce que "prendre le bateau" ne peut pas être considéré comme une proposition "sécable" ; elle n'a qu'en apparence deux éléments car prendre est ici à peu près vide de sens. L'expression "en bateau" suffit à elle seule à dire qu'on "y est" donc qu'on "le prend". Du coup, on ne peut affirmer l'un (prendre ou le bateau) et nier l'autre. Que tout ou partie de la proposition soit présent dans la phrase, c'est toujours sur le complément, le bateau , que porte la restriction.

Il n'en allait pas de même avec louer un bateau . Je peux "ne faire que louer un bateau", c'est-à-dire faire porter la restriction sur l'ensemble, ou "ne louer qu'un bateau", c'est-à-dire la faire porter sur le complément.

Pour trouver ce cas de figure, il faudrait dire :

Je vais aux Baléares si je ne loue qu'un bateau

L'étrangeté de la tournure saute aux oreilles. On ne trouvera pas ce type de construction si le premier élément de la proposition (le verbe) a un sens plein, qui ne soit pas une redondance du complément.

Et si le verbe "double" le complément, on ne pourra pas bâtir d'équivalence en faisant suivre cette proposition de ne...que si .

Remarque : on pourrait se demander pourquoi il n'en est pas de même avec "aller aux Baléares" qui suit ne...que si dans la phrase 3, déclarée équivalence. C'est tout simplement que si "prendre un bateau" c'est "être dedans", "aller aux Baléares" n'est pas "y être". Il suffit de naviguer pour mesurer l'écart.... "Aller" est loin d'être vide de sens !

On peut "ne faire qu'aller aux Baléares" et c'est toute autre activité qui est exclue, ce déplacement étant seul affirmé ou "n'aller qu'aux Baléares", et c'est toute autre destination qui est alors exclue.

Comme si tout cela ne suffisait pas, il nous faut encore mentionner, sans garantie qu'il n'y en aurait pas d'autres,

5) Une nouvelle source d'amgiguïté : le sujet ON

Je peux dire (sauf cas très particulier, c'est vrai, ou du moins nous la tiendrons pour vraie) :

On n'étudie trois langues vivantes que si l'on est au lycée

qu'au lycée

p : étudier trois langues vivantes
q : être au lycée.

Il est exclu de ne pas être au lycée (qF) et d'étudier 3 langues vivantes (pV).

Il faut être au lycée pour étudier trois langues vivantes.

On a donc p => q.

Mais tout le monde sait bien que tous les élèves d'un lycée n'étudient pas trois langues vivantes

donc que $q \not\Rightarrow p$

Le problème vient de ce que l'ambiguïté de ne...que si est renforcée par l'ambiguïté -et le mot est faible- de on , qui désigne indifféremment tout le monde , un certain nombre de gens, nous (un groupe donné), et même vous ou je en français classique....

Dès que on s'associe à ne...que si il est impossible, sauf contexte qui léverait les ambiguïtés, d'interpréter la phrase comme une équivalence.

Il faut retenir la condition nécessaire (cf. le problème de seuls les / seuls des dans les exercices du 2e chapitre).

Il en va un peu de même lorsque le sujet est général, trop général pour qu'on ne trouve pas d'exception....

Si je dis :

Les hommes ne sont heureux que s'ils sont libres

c'est l'implication "heureux => libres" qui sera sentie comme dominante, et même sans doute comme unique, la généralité du sujet les hommes rendant suspecte l'implication "libres => heureux".

Il est moins facile de parler globalement des hommes que des triangles rectangles !...

Conclusion :
On comprend que les mathématiciens n'aient pas retenu cette tournure problématique, et qu'ils aient fabriqué "si, et seulement si" aux dépens de l'élégance de la langue !

Cependant, la tournure étant fréquente dans la langue écrite comme dans la langue orale, il est bon d'amener les élèves à l'analyser, et de leur montrer aussi, à propos de ce cas précis, la nécessité d'être attentif à des détails (place de la négation restrictive par exemple) si l'on veut être sûr d'exprimer exactement ce que l'on veut, et de comprendre exactement ce qui est dit.

Pour le travail qui nous concerne, on peut retenir que ne...que donne à la phrase une valeur d'équivalence dans les cas où on a :

- il n'y a que .... qui (cf. 2e chapitre,II)
- ne .... que si à condition que
* chaque proposition soit bien prise "en bloc"
* les constituants de la proposition qui suit aient bien chacun une valeur propre.
* le sujet ne comporte pas d'ambiguïté.

mais que c'est une formulation à manier avec prudence, et à examiner au "coup par coup".

6) Autres exemples possibles

- Je ne prends mon vélo que si je vais en ville.
- Je ne suis à l'aise que si je suis avec mes amis.

On peut aussi jouer sur un exemple faux :

"x^2 n'est égal à 4 que si x est égal à 2"

Les hurlements que déclenche immédiatement cet exemple montrent bien quelle condition est privilégiée par la tournure ne...que si.

QUATRIEME COURS : TENTATIVE DE CLARIFICATION SUR LA CONDITION NECESSAIRE ET/OU SUFFISANTE

I - LA CONDITION NECESSAIRE

exemple : **il me faut des oeufs pour faire un quatre-quart**

1) Examen de la phrase

Elle comporte deux propositions logiques.

p : avoir des oeufs
q : faire un quatre-quart

sujet implicite : je

et p est introduite par il faut

2) Signification de la phrase

a - que se passe-t-il si j'ai des oeufs ?

J'ai 1/4 du quatre-quart disponible.

Avec ces oeufs, je ne peux pas faire un quatre-quart (au mieux une omelette) si je n'ai pas, en plus, de la farine, du beurre et du sucre (les 3 autres quarts).

Autrement dit, mes oeufs ne suffisent pas .

Le quatre-quart pourra être fait
ne pas être fait.

b - que se passe-t-il si je n'ai pas d'oeufs ?

(et si je ne peux pas courir en acheter) je ne ferai pas de quatre-quart.

Autrement dit, les oeufs sont nécessaires (au vrai sens du terme = obligation absolue pour que la suite se réalise).

Ils représentent la *condition necessaire mais non suffisante* de la fabrication du quatre-quart (ce que traduit parfaitement l'expression latine de condition <u>sine qua non</u> = sans laquelle le reste n'a pas lieu).

<u>donc</u> : - que peut conclure celui qui arrive chez moi et voit des oeufs rien.
- que peut conclure celui qui arrive et me voit en train de fabriquer un quatre-quart ? que j'ai des oeufs

<u>Conclusion</u> faire un quatre quart => avoir des oeufs

$$q \Rightarrow p$$

3) <u>Vérification pas la table de vérité</u>

	p (oeufs)	q (quatre quart)
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

1 et 4 ne permettent pas de savoir si $p \Rightarrow q$, si $q \Rightarrow p$ ou si $p \Leftrightarrow q$.

2 : des oeufs et pas de quatre-quart : c'est tout à fait possible et même assez fréquent (cf plus haut a) La phrase est vraie.

3 : pas d'oeufs et un quatre-quart : c'est tout à fait impossible cf plus haut b) La phrase est fausse.

L'examen de ces deux lignes, montre bien qu'il s'agit de $q \Rightarrow p$ (cf table de vérité établie dans la 1ère leçon) puisque dans l'implication il est exclu qu'à la fois que ce qui implique soit vrai et que ce qui est impliqué soit faux.

<u>Remarque</u> :

La démonstration peut sembler un peu lourde pour quelque chose d'aussi évident (surtout avec cet exemple culinaire). Mais l'expérience prouve que ce type de tournure, y compris dans une terminale C en décembre, est interprétée comme $p \Rightarrow q$, sans doute parce que l'ordre le plus fréquent consiste à nommer l'impliquant avant l'impliqué, sans doute aussi parce que l'implication-postulation n'est pas très "naturelle". Il n'est donc peut-être pas superflu d'insister.

4) Autres formulations en français courant

Il n'en existe guère qui soient dépourvues d'ambiguïté :

Si je fais un quatre-quart, c'est que j'ai des oeufs.

dira-t-on assez facilement à quelqu'un qui doute que j'en aie. On lui signifie bien alors que la fabrication du quatre-quart lui prouve à l'évidence mes précautions de ménagère avisée mais :

La proximité de c'est que et de c'est parce que couramment utilisés l'un pour l'autre en français orienterait peut-être vers une autre ambiguïté, la confusion avec l'équivalence. (cf remarque sur c'est que / c'est parce que 2è leçon II).

On met parfois aussi les points sur les i par l'introduction d'un adverbe : c'est nécessairement que , c'est assurément que , mais on ne peut pas dire qu'il s'agisse là de formulations très courantes. La seule qui soit claire (mais pas toujours comprise pour autant) est la tournure de l'exemple.

On peut retenir que
il faut p pour q se traduit par q => p
p est condition nécessaire }
non suffisante } de q

II - LA CONDITION SUFFISANTE

Exemple: **il me suffit de mettre de la levure pour que la pâte lève**

(c'est peut-être un peu optimiste, mais tenons la phrase pour vraie).

1) Examen de la phrase

Elle comporte deux propositions logiques

p : mettre de la levure sujet implicite : je
q : la pâte lève
et p est introduite par il suffit ;

2) Signification de la phrase

a - que se passe-t-il si je mets de la levure ? la pâte lève

b - si je n'en mets pas ?
peut-être ne lève-t-elle pas...
peut-être lève-t-elle quand même (parce que je l'ai bien aérée...).

La levure n'est pas nécessaire, mais elle est suffisante pour que la pâte lève.

3) Table de vérité

	p (levure)	q (la pâte lève)
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

Les lignes 1 et 4 n'apportent toujours rien ;
2 et 3 révèlent qu'il s'agit de

$$p \Rightarrow q$$

puisque si p est V, q ne peut pas être faux. La phrase est fausse (cf a) en ligne 2. Par contre p peut être faux, q V et la phrase vraie (cf b) (ligne 3).

4) Autres formulations en français

Toutes les formulations retenues pour l'implication (1er cours).

> On peut retenir que
> **il suffit de p pour q** se traduit par p => q
> p est condition suffisance de q
> non nécessaire

III - CONDITION NECESSAIRE ET SUFFISANTE

Exemple :

il faut et il suffit que tu viennes pour que je fasse un gâteau

1) Examen de la phrase

Elle comporte 2 propositions

p : tu viens
q : je fais un gâteau
p est introduite par il faut et il suffit qui, reconnaissons-le est peu usité dans la vie de tous les jours.

2) Signification de la phrase

a - si tu viens, je fais un gâteau (puisque cela suffit) : p => q
b - si tu ne viens pas, je n'en fais pas puisqu'il faut que tu viennes pour que j'en fasse un
c - si je fais un gâteau, c'est que tu viens (puisqu'il faut que tu viennes...) : q => p
d - si je ne fais pas de gâteau, c'est que tu ne viens pas (cf a)

si p => q et q => p alors p <=> p

3) Table de vérité

	p (tu viens)	q (je fais un gâteau)
1	V	V
2	V	F
3	F	V
4	F	F

1 et 4 ne révèlent toujours rien
2 est impossible cf a et d
3 est impossible cf b et c.

C'est la table de vérité de l'équivalence : pour que la phrase soit vraie, les deux propositions doivent être vraies ou fausses en même temps.

4) Autres formulations en français

Celles de l'équivalence, avec toutes leurs ambiguïtés (ici $q \Rightarrow p$ "domine" $p \Rightarrow q$) (cf 3è cours II 2 d Remarque)

Je ne fais un gâteau que si tu viens

ou l'horrible :

Il n'y a que si tu viens que je fais un gâteau;

> On peut retenir que
> **il faut et il suffit (de) p pour q** se traduit par
> $p \Leftrightarrow q$
> *p est condition necessaire et suffisante de q.*

Annexe : La négation de il faut , et de il suffit

Elles posent toutes les deux de petits problèmes, d'ordre différent.

1) Négation de il suffit

C'est il suffit qui marquait l'implication $p \Rightarrow q$

Si je la nie, je détruis l'implication.

En logique, c'est tout. En linguistique c'est peut-être un peu plus complexe ; il ne suffit pas étant plus ou moins associé mentalement à il faut (expression de la condition nécessaire mais non suffisante), il n'est pas exclu que :

"il ne suffit pas de p pour q" soit compris comme "$q \Rightarrow p$"

Si je dis : **il ne suffit pas de travailler pour réussir**, je nie effectivement l'implication travailler => réussir mais n'est-ce pas en sous-entendant l'implication inverse réussir => (quand même) travailler ?

Cependant, les sous-entendus sont très variables et dépendent beaucoup du contexte.

Si je dis **Il ne suffit pas d'un vélo pour aller en Amérique** personne ne comprendra que le vélo est condition nécessaire ; on sera même plutôt incité à penser qu'il vaut mieux exclure le vélo, encombrant et inefficace, du projet.

D'autres exemples amèneraient peut-ˆetre d'autres variantes. La seule conclusion qu'on puisse retenir, c'est qu'il n'y a plus d'implication. Et le reste est littérature... (prise au mauvais sens du terme, cela va sans dire).

2) Négation de il faut

La complexité vient de ce qu'on ne sait pas toujours si la négation porte sur la notion qui suit, ou sur la nécessité de cette notion. Il existe bien il faut que...ne pas pour traduire sans ambiguïté il faut que $\neg$ p mais comme il ne faut pas p sert dans les deux cas, cela ne clarifie pas la situation.

* quand il ne faut pas p a la valeur de il faut que $\neg$ p , on garde la même sturcture logique et $q \Rightarrow \neg p$

ex :

il ne faut pas de sucre dans l'essence pour qu'une voiture roule

* quand il ne faut pas p nie la nécessité, c'est toute implication qui est détruite

ex :

il ne faut pas d'allume-cigare pour que ma voiture roule.

Rien n'implique rien. Une telle phrase n'a pas une signification "logique" mais "polémique". C'est ici une réponse aux amateurs de gadgets.

IV - EXERCICES

1) De vérification

A - Etudier le sens de chacune des phrases suivantes :

Ecrire sousforme de propositions
Etablir leur table de vérité

1 il faut manger pour vivre
2 il faut travailler pour réussir.

B - Commentaires

a) Il faut manger pour vivre.

On peut faire remarquer avec cet exemple une ambiguïté qui ferait sans doute déraper vers l'équivalence.

Certes vivre => manger

Mais enfin, malgré la crise cardiaque qui peut survenir pendant mon repas -et y mettra d'ailleurs un terme- on tiendra sans doute pour vrai aussi (et impératif) que manger => vivre à moins d'être passionné par le fantastique (rubrique des vampires et autres morts-vivants).

Cependant, si l'on cite intégralement "il faut manger pour vivre, et non pas vivre pour manger".

On voit que l'ambiguïté est levée par le jeu sur le double sens de <u>vivre</u> ; le 1er sens (manger pour vivre) est strictement physiologique, et <u>manger</u> représente la condition nécessaire de cette vie-là ; le 2è est plus moral et manifeste bien que <u>manger</u> n'est pas la condition suffisante -disons plutôt l'idéal- d'une vie digne de ce nom.

Cependant on pourrait objecter à Harpagon que sa condition suffisante sous-entendue -thésauriser- n'a rien de très suffisant non plus (commentaire réservé aux classes qui étudient/ont étudié l' <u>Avare</u>!

b) Il faut travailler pour réussir.

Cet exemple facile peut fournir une occasion de montrer que bien des implications empruntées à des situations de la vie courante, comportent une valeur de temporalité. C'est le cas de beaucoup de nos exemples. L'homme étant temporel, sa vie échappe difficilement au "temps qui passe"...

2) <u>Expression française</u>

A - soient

p : caresser son chat (ou sa chatte, au choix)

q : l'animal en question ronronne (sujet particulier)

Comment exprimer : (autant de formulations que possible)

$$\left.\begin{array}{l}\text{p : condition nécessaire}\\ \text{p : condition suffisante}\\ \text{p : condition nécessaire et suffisante}\end{array}\right\}\text{ de q}$$

Vérifier l'exactitude avec les tables de vérité (commentez le caractère de l'animal...).

B - Tout le monde connaît le proverbe
"il faut que jeunesse se passe"
Prenons le comme proposition p
Inventez une proposition q
et commentez...

3) Exercices de mathématiques

*1- Soit deux propositions
p : le quadrilatère est un parallèlogramme
q : les diagonales du quadrilatère se coupent en leur milieu .

Pour chaque phrase vous soulignerez d'abord l'hypothèse et ensuite vous indiquerez si cette phrase correspond à p => q ou q => p ou p <=> q.

a - Pour qu'un quadrilatère soit un parallèlogramme, il est nécessaire que ses diagonales se coupent en leur milieu.

b - Une condition nécessaire pour qu'un quadrilatère soit un parallèlogramme est que ses diagonales se coupent en leur milieu.

c - Une condition suffisante pour qu'un quadrilatère soit un parallèlogramme est que ses diagonales se coupent en leur milieu.

d - Un quadrilatère est un parallèlogramme si ses diagonales se coupent en leur milieu.

e - Pour qu'un quadrilatère soit un parallèlogramme, il faut que ses diagonales se coupent en leur milieu.

f - Un quadrilatère est un parallèlogramme si, et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu.

g - Si un quadrilatère est un parallèlogramme, alors ses diagonales se coupent en leur milieu.

h - Le fait qu'un quadrilatère soit un parallèlogramme implique que ses diagonales se coupent en leur milieu.

i - Pour qu'un quadrilatère soit un parallèlogramme, il suffit que ses diagonales se coupent en leur milieu.

Rép : a p => q / b : p => q / c : q => p / d : q => p e : p = q

f : p <=> q / g : p => q / h : p => q / i : q => p.

*2- Soit des propositions

1) dire si elles sont vraies ou fausses.
2) à l'aide des propositions p,q données dire si elle correspondent à $p \Rightarrow q$ ou $q \Rightarrow p$.

(a) Pour qu'un nombre soit divisible par 50 il faut qu'il se termine par un zéro.

p : le nombre est divisible par 50
q : le nombre se termine par un zéro

(b) Pour qu'un triangle soit équilatéral il suffit qu'il ait deux côtés égaux

p : le triangle est équilatéral
q : le triangle a deux côtés égaux

(c) Il faut que le quadrilatère ait trois côtés égaux pour qu'il soit un losange.

p : le quadrilatère a trois côtés égaux
q : le quadrilatère est un losange

(d) Il faut que la somme des chiffres soit divisible par 3 pour qu'un nombre entier soit divisible par 9.

p : la somme des chiffres du nombre est divisible par 3
q : le nombre est divisible par 9

(e) Il suffit qu'un entier se termine par 0 pour qu'il soit divisible par 5.

p : le nombre entier se termine par 0
q : le nombre est divisible par 5

(f) Il suffit qu'un entier soit multiple de 12 pour qu'il soit multiple de 60.

p : le nombre entier est multiple de 12
q : le nombre entier est multiple de 60

Rép :

a : la phrase est vraie, elle veut dire $p \Rightarrow q$.

b : la phrase est fausse, elle veut dire $q \Rightarrow p$.

c : la phrase est vraie, elle veut dire $q \Rightarrow p$.

d : la phrase est vraie, elle veut dire $q \Rightarrow p$.

e : la phrase est vraie, elle veut dire $p \Rightarrow q$.

f : la phrase est fausse, elle veut dire $p \Rightarrow q$.

CINQUIEME COURS

CONJONCTION ET DISJONCTION LOGIQUES
QUELQUES CHARNIERES LOGIQUES PROBLEMATIQUES

I - CONJONCTION ET DISJONCTION LOGIQUE : et ET ou

et ou sont en français nommées conjonctions de coordination, ce qui renseigne uniquement sur leur rôle grammatical. La logique les nomme connecteurs logiques et étudie leur rôle logique précis, qui ne recouvre que partiellement leur emploi en langage courant parce que les ambiguïtés, les nuances sont éliminées.

1) La conjonction logique

Ex : **Cet élève est gentil et intelligent**

a - Examen de la phrase

2 propositions logiques : p : il est gentil
q : il est intelligent

Quand est-ce vrai ?
s'il est les 2 à la fois

Quand est-ce faux ?
s'il est gentil mais pas intelligent
s'il est intelligent mais pas gentil
s'il n'est ni gentil ni intelligent.

b - Table de vérité

p	q	p et q $p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

On appelle **conjonction** de deux propositions p, q la proposition "p et q", notée "p $\wedge$ q", vraie uniquement si les deux propositions p et q sont vraies simultanément.

Remarque : il va de soi que (p et q) <=> (q et p)

Autres exemples : (on peut en faire trouver)

"6 est multiple de 2 et multiple de 3" est une conjonction vraie

"3 < 5 et 3 + 1 = 5" est une conjonction fausse.

2) La disjonction logique

Ex : Tarif réduit : étudiants ou membres du club

a - Examen de la phrase

Considérons les 2 propositions p : on est étudiant
q : on est membre du club

- Quand est-il vrai qu'on a tarif réduit ?

  * si on est étudiant (p vraie), sans être membre du club (q fausse)
  * si on est membre du club (q vraie), sans être étudiant (p fausse)
  * si on est, éventuellement, les deux à la fois (p et q vraies).

- Quand n'a-t-on pas tarif réduit ? (= est-ce faux): si l'on n'est ni étudiant, ni membre du club (c'est-à-dire si p et q sont fausses).

b - Table de vérité

p	q	p ou q p $\vee$ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

On appelle **disjonction** de deux propositions p, q la proposition "p ou q", notée "$p \vee q$" qui est vraie si l'une au moins des deux propositions p, q est vraie ; on peut dire aussi : qui n'est fausse que si p et q sont simultanément fausses.

Remarque : il va de soi que (p ou q)<=>(q ou p)

La valeur particulière du ou en français (voir p 68-69) conduit à fabriquer des phrases artificielles. Limitons-nous à des exemples mathématiques.

"3 < 5 ou 5 < 3" disjonction vraie

"5 < 3 ou 5 multiple de 3" disjonction fausse.

3) La négation de la conjonction et de la disjonction

On peut reprendre la réflexion précédente, et les exemples

a) **"Il est gentil et intelligent"**

je peux nier les deux (ni gentil ni intelligent) mais je nie aussi "p et q" si je nie gentil (p) ou si je nie intelligent (q).

La droite Δ contient les points A et B

C'est faux si elle ne contient pas A
ou si elle ne contient pas B
ou si elle ne contient ni l'un ni l'autre
Ce n'est vrai que si elle contient à la fois A et B.
Si elle ne les contient pas à la fois parce que l'un ou l'autre manque, c'est faux.

Autrement dit

$$\boxed{\neg (p \ \underline{\text{et}} \ q) \iff \neg p \ \underline{\text{ou}} \ \neg q}$$

b) **La droite Δ contient**(cette fois) **A ou B**

Je nie si elle ne contient pas A et ne contient pas B non plus. Il faut l'un des deux, sinon, c'est faux

Autrement dit

$$\boxed{\neg (p \ \underline{\text{ou}} \ q) \iff \neg p \ \underline{\text{et}} \ \neg q}$$

Ce sont les lois de Morgan.

4) Logique et langage courant

On vient de voir qu'en logique la négation de et est ou , et réciproquement.

Est-ce compris de cette manière dans la vie courante ? On peut tester. Si je dis **Il est grand et fort** et que je demande de nier cette proposition j'ai de grandes chances d'obtenir, en réponse spontanée :

il n'est ni grand ni fort
c'est-à-dire la négation simultanée des deux propositions mais en forçant à y réfléchir de plus près, j'obtiendrai sans doute quand même :

- grand mais pas fort (faible)
- fort mais pas grand (petit)

c'est-à-dire : pas à la fois les deux donc l'un ou l'autre.

Le langage courant connaît donc la disjonction comme négation de la conjonction mais on tend à "l'oublier" dans des réactions immédiates pour tout nier en bloc.

On peut cependant s'appuyer sur l'expérience limitée qu'on en a pour faire comprendre les lois logiques et expliquer l'écart avec le langage spontané ; en effet, les lois logiques entrent là en concurrence avec la loi grammaticale qui transforme et en ni après un verbe négatif mis en "facteur commun" (plus exactement et...ne pas se transforme en ni). Ce qu'il manque à la langue, au fond, ce sont les parenthèses de factorisation

il n'est pas (grand et fort)

pourrait-on dire si elles existaient.

Comme elles n'existent pas la correction grammaticale nous pousse à dire il n'est pas grand ni fort ou mieux (grammaticalement)

il n'est ni grand ni fort

ce qui nous induit en erreur sur le plan du raisonnement.

Pour résoudre ce problème, on peut avoir recours à ce "substitut de parenthèses" que nous avons utilisé plus haut

il n'est pas à la fois grand et fort

est une phrase correcte grammaticalement et logiquement.

II - QUELQUES LOIS LOGIQUES

La logique étudie essentiellement les "enchaînements" ou "combinaisons" de propositions qui sont vrais quelle que soit la vérité des propositions initiales. Ce sont ces combinaisons de propositions, toujours vraies, que nous appellerons lois logiques.

1) A propos de l'implication

Nous avons analysé dans le premier cours la phrase :

"Je ne mange pas d'huîtres ou je suis malade"

et mis en évidence qu'elle était équivalente à :

"Sije mange des huîtres, je suis malade"

D'une manière générale ($p \Rightarrow q$) et ($\neg p \vee q$) sont des propositions équivalentes. En effet elles ont même valeur de vérité:

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

On a donc

$$\boxed{(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)}$$

toujours vrai.

Ce qui permet d'établir immédiatement, en utilisant les lois de Morgan, la loi logique concernant la <u>négation de l'implication</u> .

Ainsi $\boxed{[\neg(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)}$ est toujours vraie.

Effectivement la négation de la phrase :

"Si je mange des huîtres, je suis malade"

est la phrase :

"Je mange des huîtres et je ne suis pas malade".

De même la négation de : "$a^2 = 4$ donc $a = 2$"

est "$a^2 = 4$ et $a \neq 2$".

2) Tautologie et Contradiction

Une tautologie est une proposition vraie en toutes circonstances, on la note aussi "v".

Une contradiction est une proposition fausse en toutes circonstances, on la note aussi "f".

La négation d'une tautologie est une contradiction et réciproquement.

Ainsi, on a toujours : $\boxed{\neg f \Leftrightarrow v}$ $\boxed{\neg v \Leftrightarrow f}$

"Un homme est un homme " est une tautologie ; sa négation "il existe un homme qui n'est pas un homme" est une contradiction. Il ne faut pas confondre cela avec une proposition du type "Aujourd'hui, il pleut" qui peut être vraie ou fausse selon le jour, et qui n'est donc pas une tautologie.

Par ailleurs, si p est une proposition quelconque, on met aisément en évidence par les tables de vérité, la vérité des équivalences suivantes :

$\boxed{(p \wedge v) \Leftrightarrow p}$ $\boxed{(p \vee v) \Leftrightarrow v}$ $\boxed{(p \wedge f) \Leftrightarrow f}$ $\boxed{(p \vee f) \Leftrightarrow p}$

p	v	p∧v
V	V	V
F	V	F

p	v	p∨v
V	V	V
F	V	V

p	f	p∧f
V	F	F
F	F	F

p	f	p∨f
V	F	V
F	F	F

Ces lois sont peu usitées dans le langage courant ; et si elles le sont, c'est pour éluder les débats en présentant un raisonnement qui en réalité ne démontre rien.

Cf. "C'est comme cela parce que ce n'est pas autrement....".

Par contre elles interviennent dans de nombreux raisonnements mathématiques .

Prenons l'exemple de la résolution d'un système de 3 équations à 2 inconnues.

On écrira :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ 3 + 2 = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \end{cases}$$

Ici p : a = 3 et b = 2
v : 3 + 2 = 5

On utilise la propriété : $p \wedge v \Rightarrow p$

On écrira aussi :

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ 3 + 2 = 7 \end{cases} \quad \text{impossible}$$

Ici p : a = 3 et b = 2
f : 3 + 2 = 7

On utilise la propriété : $p \wedge f \iff f$

3) A propos de la négation

Considérons les 2 phrases suivantes :

"le nombre p est non nul et égal à zéro"
"le nombre p est non nul ou égal à zéro".

De toute évidence la première est toujours fausse c'est une contradiction ; la deuxième est toujours vraie c'est une tautologie.

Ces 2 lois logiques s'expriment par la vérité de :

$\boxed{(\neg p \wedge p) \iff f}$ $\boxed{(\neg p \vee p) \iff v}$

ce qui se justifie par les tables de vérité :

p	$\neg p$	$\neg p \wedge p$
V	F	F
F	V	F

p	$\neg p$	$\neg p \vee p$
V	F	V
F	V	V

La proposition "il est mort ou vivant" est une tautologie.

4) <u>En employant conjonction et disjonction</u>

Les tables de vérité permettent d'établir les lois logiques de distributivité de la conjonction sur la disjonction, et de distributivité de la disjonction sur la conjonction.

A savoir, que l'on a toujours, pour 3 propositions p, q, r

$$\boxed{[p \wedge (q \vee r)] \iff [(p \wedge q) \vee (p \wedge r)]}$$

$$\boxed{[p \vee (q \wedge r)] \iff [(p \vee q) \wedge (p \vee r)]}$$

Remarquons que la terminologie de distributivité est celle qu'on utilise pour une propriété bien connue sur les nombres réels :

$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$

C'est la distributivité de la multiplication sur l'addition. Attention, dans l'ensemble des réels, la distributivité de l'addition sur la multiplication est fausse : $2+(3 \times 4) \neq (2+3) \times (2+4)$

Prenons la distributivité de la conjonction sur la disjonction.

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$	$p \wedge q$	$p \wedge r$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F	F

Démontrons maintenant, celle de la disjonction sur la conjonction.

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	F	F	F

L'usage de ces lois logiques dans le langage courant pose de délicats problèmes, liés à celui de la disjonction "ou". Nous y reviendrons ultérieurement.

Par contre l'usage de ces propriétés de distributivité joue un rôle essentiel, pas toujours explicité, en mathématiques.

5) Utilisation de ces lois en mathématiques

ler exemple

Soient x et y des réels on écrira :

$$\begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -2 \\ y = x - 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \\ y = x - 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = x - 3 \end{cases}$$

Il s'agit ici de la distributivité de la conjonction sur la disjonction :

$$[(p \vee q) \wedge r] \iff [(p \wedge r) \vee (q \wedge r)]$$

<u>2ème exemple</u>

Soit x un réel quelconque, et m une constante réelle, on peut écrire :

$mx = 5$

$\Leftrightarrow mx = 5$ et $(m = 0$ ou $m \neq 0)$

$\Leftrightarrow (mx = 5$ et $m = 0)$ ou $(mx = 5$ et $m \neq 0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ mx = 5 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} m \neq 0 \\ mx = 5 \end{cases}$$

Ceci s'exprime souvent par une discussion avec plusieurs cas, ici,

1er cas : $m = 0$
2è cas : $m \neq 0$

On désigne par p : $mx = 5$
q : $m = 0$

Le raisonnement logique utilisé est le suivant :

$p \Leftrightarrow p \wedge v$

$p \Leftrightarrow p \wedge (q \vee \neg q)$

$\Rightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q)$

III - QUELQUES CHARNIERES "A PROBLEMES" - APPROFONDISSEMENT

On a été amené à utiliser dans ce cours ces charnières sur esquelles il nous faut revenir pour montrer leur variété d'usage en angage courant.

1) <u>ET</u>

Le <u>et</u> français est un véritable fourre-tout. Nous voudrions ious contenter de mettre en lumière quelques-unes de ses valeurs qui 'ecouvrent -mais très imparfaitement- les emplois qu'il occupe en ogique.

Rappelons, sans plus détailler, le sens consécutif, que nous vons rencontré dans la 1ère leçon sur l'implication, et attardons ous sur son emploi "plus ou moins" conjonctif.

a - Le problème de **et** conjonctif

Il peut avoir cette valeur en français, nous l'avons étudié sans problème sur l'exemple.

"Cet élève est gentil et intelligent".

Cependant, elle est plus faible qu'en logique. Bien sûr, quand je coordonne deux propriétés par et , j'ai bien l'idée qu'elles sont conjointes... mais enfin, elles pourraient, sans trop de problème, ne pas l'être ; l'association n'est pas stable !

Quand je dis "il est gentil et intelligent", tout se passe -peut-être à cause du caractère linéaire de l'énoncé linguistique- comme si j'émettais d'abord un premier jugement, "il est gentil" puis un 2è, que j'ajoute au premier, "il est intelligent", et me permettant d'économiser une répétition. Mais j'aurais pu, éventuellement, m'arrêter en cours d'énoncé. La simultanéité des deux propriétés, leur conjonction absolue, que les mathématiques peuvent symboliser par des parenthèses, n'est pas aussi stricte dans le et français, et je pourrais assez facilement noter l'une et négliger l'autre.

Ce phénomène, que chacun ressent intuitivement, conduit souvent les élèves à la faute en les amenant à dissocier les deux propriétés conjointes et à les examiner successivement. Il n'est pas rare que, dans un exercice où l'on doit avoir $x > -2$ et $x < 3$, les élèves commencent par étudier ce qui se passe si $x > -2$, puis, indépendamment de ce qui précède, s'attaquent à ce qui se passe avec $x < 3$. Ils prennent successivement les deux termes de la conjonction, sans voir qu'ils sont simultanés parce que, finalement, dans la langue courante, et n'est pas loin d'être "disjonctible". Il est même franchement disjonctif parfois.

b - Et disjonctif

L'exemple choisi pour la disjonction "Tarif réduit : étudiants ou membres du club" ne choquerait personne, dans la vie courante, s'il était rédigé sous la forme : "Tarif réduit : étudiants et membres du club".

On comprendrait bien que deux ensembles, celui des étudiants, puis celui des membres du club (sans ordre préférentiel) sont successivement (ou tour à tour) concernés par l'attribution du tarif réduit. Personne n'aurait l'idée de penser qu'il faut être les deux à la fois pour y prétendre.

Et occupe donc aussi à l'occasion, en français courant, la place réservée à ou en logique. Il le fait d'autant plus facilement que ou laisse vacante la place essentielle que la logique lui attribue.

2) OU

Cette question étant amplement traitée dans la plupart des manuels de logique, nous y renvoyons les collègues curieux de cet épineux problème et nous nous contentons ici de quelques remarques simples.

a - Ou inclusif

Dans le cours I,2 , le ou que nous avons utilisé établissait une disjonction, vraie si l'une des deux propositions était vraie, mais vraie aussi si les deux étaient vraies simultanément (cf table de vérité) ; c'était l'un ou l'autre ou les deux c'est ce qu'on appelle ou inclusif et disjonction inclusive parce que sa valeur de vérité inclut la conjonction des 2.

C'est la disjonction ou , c'est-à-dire le ou inclusif que la logique a privilégié ; parce qu'il permet la mise en évidence de plusieurs lois logiques, il joue là un rôle essentiel ; il est d'ailleurs communément utilisé en mathématiques, dans lesquelles nous puisons la plupart de nos exemples sur son emploi.

b - Ou exclusif

Malgré la complexité de la distinction, qu'il vaudrait mieux peut-être étudier plus à fond seulement en lère, on est obligé de signaler quand on parle de ou qu'il existe un ou dit exclusif en ce sens qu'il exclut la conjonction des deux propositions. Il est très connu par ceux qui mangent au restaurant.

Si le menu m'annonce

fromage ou dessert

je ne peux pas exiger les deux : c'est soit l'un, soit l'autre, et le choix de l'un exclut l'autre.

On peut ajouter que ce ou est noté "p w q" mais que la logique l'utilise peu.

Linguistiquement, il peut-être intéressant de dire un mot du débat entre alternative et incompatibilité qui est loin d'ailleurs d'être réglé.

La différence réside dans la possibilité ou non du refus des deux.

Si l'on me demande "fromage ou dessert" je peux si je suis rassasiée refuser l'un et l'autre mon choix est donc entre 1 (des 2) et 0.
On exprime seulement l'incompatibilité.

Si je dis

"Est-il mort ou vivant?"

il sera difficile de me répondre ni l'un ni l'autre c'est au plus et au moins l'un des deux.

On exprime l'alternative.

(en fait c'est le cas lorsque $q \Leftrightarrow \neg p$; mort $\Leftrightarrow \neg$vivant).

On ne peut avoir à la fois p et $\neg p$ (ce serait une contradiction) mais il est impossible aussi, pour des raisons qui tiennent à l'ordre du monde plus qu'à la logique qu'une personne ne soit pas ou morte ou vivante, car ce serait une "non-personne"... Nous avons vu plus haut qu'on parlerait, en mathématiques de tautologie si les problèmes mathématiques s'intéressaient à ce type de questions...

c - La complexité du ou en langage courant

Il suffit sans doute à des élèves de 2e de savoir distinguer ou inclusif et ou exclusif sans entrer davantage dans ces subtilités, qui ne représentent d'ailleurs qu'une faible partie du problème de ou en français ; un coup d'oeil sur le dictionnaire permet d'en mesurer l'étendue. Entre Tartuffe, ou l'Imposteur (identité)

"Boire ou conduire, il faut choisir" (incompatibilité)

"Est-il ici ou là-bas ?" (alternative),

"Ciel ou Enfer, qu'importe" (alternative niée par une métaphysique particulière), etc...

les acceptions de cette conjonction sont difficilement -et vainement- réductibles aux exigences de la logique.

On peut simplement le faire remarquer en insistant sur le fait que, lorsque l'emploi de ou recouvre ceux que la logique lui attribue, ce n'est qu'assez imparfaitement. En particulier, s'il est possible de trouver un ou inclusif -nous y sommes parvenues- il n'en demeure pas moins que cette valeur est très peu répandue dans le français courant, alors qu'on peut multiplier les exemples de ou exclusif.

C'est d'ailleurs pourquoi, lorsqu'on veut utiliser un ou inclusif, on se croit obligé, de peur de n'être pas complètement compris, d'user d'une lourde adjonction qui oblige ou à devenir conjonctif, ce qui révèle qu'il ne l'est pas naturellement.

"Qu'il fasse froid, ou qu'il pleuve -ou les deux- je sortirai".

C'est aussi pourquoi s'est instituée, à l'écrit, la pratique du <u>et/ou</u> qui fait bondir les puristes de la langue.

Quand, en titre de la 4e leçon, nous écrivons "condition nécessaire <u>et/ou</u> suffisante", c'est bien que ni <u>et</u> ni <u>ou</u> ne recouvraient ce que nous voulions étudier. <u>Et</u> dans ce cas, n'aurait pas été compris comme éventuellement disjonctif parce que l'expression est lexicalisée, soudée par un emploi séculaire. Mais le <u>ou</u> logique convenait à ce que nous voulions faire. Si nous ne l'avons pas utilisé, c'est bien parce que le <u>ou</u> français n'a pas la même extension, et que si nous avions annoncé "condition nécessaire <u>ou</u> suffisante", personne n'aurait attendu notre 3e partie qui aurait pris des allures de "hors-sujet". C'est ainsi... si l'on veut, en français, user du <u>ou</u> inclusif, on doit encourir les foudres des puristes, ou utiliser des "expressions à rallonge".

On peut mettre en évidence cette inadéquation du <u>ou</u> logique et des <u>ou</u> du français courant en essayant d'appliquer à ceux-ci les lois logiques étudiées dans la 1ère partie de la leçon.

On dira ainsi de quelqu'un qui est de mauvaise humeur

"Il a mal au foie ou n'a pas assez dormi"

"ou" peut ici être considéré comme la disjonction (les 2 situations sont possibles simultanément).

On dira aussi en maintenant la disjonction :

"Il a mal au foie ou il s'est couché tard et levé tôt".

Appliquons à cette dernière phrase la distributivité de la disjonction sur la conjonction. Une phrase équivalente devrait être:

"Il a mal au foie ou s'est couché tard et il a mal au foie ou s'est levé tôt".

Cette phrase dans la pratique n'est pas considérée comme équivalente à la précédente, en effet "ou" a perdu dans cette deuxième phrase le statut d'inclusif que nous lui imposions dans la première. Il sera possible dans les exercices, de montrer qu'il n'y a pas distributivité de la charnière "ou exclusif" sur "et", ce qui explique la difficulté rencontrée.

Remarquons que cette difficulté n'éxiste pas lorsqu'il s'agit de la distributivité de "et" sur "ou" ; celle-ci étant vraie pour "ou inclusif" et vraie pour "ou exclusif". Par exemple les 2 phrases suivantes sont équivalentes :

"Il a mal au foie et s'est couché très tard ou levé trop tôt"
"Il a mal au foie et s'est couché très tard ou il a mal au foie et s'est levé trop tôt.

3) Tentative de synthèse

sur la répartition différente des emplois de et et de ou en français et en logique.

	INCLUSION		EXCLUSION
logique	et $\wedge$ (Conjonction)	ou $\vee$ (Disjonction)	ou W (Disjonction peu usitée)
langage courant	et $\wedge$ (Conjonction)	et (parfois) (Disjonction)	ou W (Disjonction presque constante)

espace "vide" :
"palliatifs : $\vee$
et/ou"
"... ou les deux"

On ne peut guère que constater les différences et inviter les élèves à avoir clairement ces écarts en tête, sans chercher à aligner de force, et vainement d'ailleurs, une structuration sur l'autre.

4) NI

Nous l'avons vu comme négation de et en phrases négatives, et il est intéressant de voir qu'il peut également nier ou , ce qui n'a rien de très étonnant, compte-tenu la tendance de et à occuper certains emplois de ou . Cependant, ni sert aussi de négation à ou exclusif. On peut dire, au restaurant, par exemple

je ne prendrai ni fromage ni dessert

et l'on retrouve là la logique. Cette tournure est la traduction en bon français d'une des lois de Morgan :

$\neg(p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p)$ et $(\neg q)$

qui se lirait en charabia : "je ne prendrai pas de fromage et pas de dessert".

On applique la loi grammaticale " et + ne pas " devient ni, et l'on retombe sur la phrase spontanément prononcée au restaurant par les "trop-nourris" que nous sommes.

5) MAIS

Nous l'avons rencontré dans la négation de et par ou mais indirectement.

a - **Mais** "conjonctif", "inclusif "

Quand on dit

il est gentil mais pas intelligent

pour nier **il est gentil et intelligent,** on admet tacitement que la phrase est fausse si l'un ou l'autre des qualificatifs est faux.

Pourquoi utiliser mais dont chacun sait qu'il a valeur d'opposition ? Si l'on examine la phrase telle qu'elle est devenue, il est clair qu'il n'y a pas d'opposition entre être gentil et ne pas être intelligent ; c'est même assez répandu...

En fait à la conjonction

"gentil et intelligent"

on en oppose une autre qui nie celle-ci

"gentil et (pas intelligent)"

Tout se passe comme si on avait dissocié la conjonction (p et q) pour en examiner séparément les éléments et établir une nouvelle conjonction (p et $\neg q$).

Il y a opposition -ce qui justifie mais au lieu de et - mais elle n'est pas interne à la phrase, elle est d'ordre polémique et représente la contestation d'une affirmation précédente (celle d'un autre locuteur).

La phrase qui nous sert ici d'exemple peut d'ailleurs également être prononcée d'emblée, sans réponse à un point de vue qui paraît faux. Dans ce cas l'opposition se fait par rapport à d'éventuelles déductions.

Si je dis de quelqu'un" il est gentil" celui qui m'écoute peut en conclure que je l'apprécie... C'est par rapport à ce risque d'interprétation hâtive et erronée que le mais avec lequel j'introduis ma réserve pas intelligent marque une opposition.

Ce mais là est conjonctif en logique. S'il remplace et, c'est que le langage, à la différence de la logique, s'intéresse aussi au non-dit.

b - **Mais** disjonctif et exclusif

Il existe un autre mais en français

ex : **je ne viendrai pas aujourd'hui mais demain**

Celui-là se rapproche du ou exclusif auquel il répond d'ailleurs : cf

Viendrez-vous aujourd'hui ou demain?

Dans les deux cas (ou , mais) c'est l'un ou c'est l'autre, mais pas les deux ; l'un exclut l'autre...

Indépendamment de la réflexion sur la logique, les élèves seront peut-être contents d'apprendre à distinguer ces deux valeurs de Mais , distinction indispensable à leurs études de langues.

	Mais conjonctif "inclusif"	Mais disjonctif "exclusif"
Allemand	aber	sondern
Espagnol	pero	sino
Latin	sed	aut

(mais le système latin ne se réduit pas à ces deux possibilités).

IV - EXERCICES (portant sur le paragraphe II)

A) Nier les propositions suivantes :

1) ABCD est un parallèlogramme donc ses diagonales sont égales.
2) a est impair donc 2a+1 est pair.
3) je suis lycéen donc je serai bachelier.

B) <u>Dans chacun des cas suivants, expliciter sous la forme d'intervalle de $\mathbb{R}$, l'ensemble auquel appartient le réel x</u> :

1) $(x < 3)$ et $(x > -2$ ou $x > 1)$
2) $(x < 3$ et $x > -2)$ ou $(x > 1)$
3) $(x > 5)$ et $(x < 2$ ou $x > 0)$
4) $(X > 5$ et $x < 2)$ ou $(x > 0)$

C) <u>Déterminer, s'il existent, les réels x et y tels que</u> :

1) $\left\{\begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x + y = 3 \\ x - y = 2 \end{array}\right.$

2) $\left\{\begin{array}{l} 2x + y = 3 \\ x - 3y = 4 \\ 3x - 2y = 7 \end{array}\right.$

3) $\left\{\begin{array}{l} x^2 - 4 = 0 \\ y = x - 1 \end{array}\right.$

4) $\left\{\begin{array}{l} x^3 = x \\ y = x^2 \end{array}\right.$

D) <u>m désignant un paramètre réel, résoudre</u> :

1) $mx = 3x - 5$

2) $m^2x - 7 > 0$

3) $m^2x = x + 1$

4) $mx^2 - 4 = 0$

<u>Approndissement sur "ou exclusif"</u>

E) <u>En analysant la phase</u>

"Il reviendra à pied ou en moto"

Proposer une table de vérité de la charnière "ou exclusif", noté "w".

F) <u>Prouver par une table de vérité que</u> :

$(p \mathrm{W} q) \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q)$ ou $(\neg p \wedge q)]$.

G) <u>Prouver en utilisant les tables de vérité</u> :

la distributivité de "et" sur "w"
la non distributivité de "w" sur "et".

H) Pour chacun des exemples suivants on s'interrogera sur le sens de la phrase. On proposera des formulations permettant de mettre en évidence les parenthèses de la logique. Enfin lorsque ceci est possible en appliquera la distributivité.

1) Je mange des légumes ou du potage et des pâtes
2) J'irai à Rome et Barcelone ou Madrid.

SIXIEME COURS - REGLES USUELLES DU RAISONNEMENT LOGIQUE "CALCUL DES PROPOSITIONS"

I - LA TRANSITIVITE DE L'IMPLICATION ET DE L'EQUIVALENCE

1) Approche intuitive à partir de l'exemple :

a - **Quand je me promène, je n'ai pas le teint pâle**

b - **Je n'ai pas l'air poétique si je n'ai pas le teint pâle**

Dès l'exposé de ce problème que la jeunesse romantique aurait résolu par l'absorption de vinaigre, il est probable que spontanément, les élèves concluront que :

Quand je me promène, je n'ai pas l'air poétique.

Pour ceux qui ne le sentiraient pas, et parce que l'intuition ne dispense pas de la rigueur, il faut recourir à la

2) Formulation

Nous avons 3 propositions, définies par :

p : je me promène
q : je n'ai pas le teint pâle
r : je n'ai pas l'air poétique

La phrase a peut se traduire par $p \Rightarrow q$
La phrase b peut se traduire par $q \Rightarrow r$

La règle utilisée spontanément revient à dire que si $p \Rightarrow q$ et $q \Rightarrow r$ sont vraies simultanément, alors $p \Rightarrow r$ est vraie. On a établi mentalement la chaîne logique

$$\underbrace{p \Rightarrow q}_{\text{selon la phrase a}} \quad \underbrace{q \Rightarrow r}_{\text{selon la phrase b}}$$

où q sert de transition pour établir $p \Rightarrow r$

3) Vérification par les tables de vérité

p	q	r	p=>q	q=>r	p=>r
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Il apparaît clairement que, dans les quatre cas (soulignés) où p => q et q => r sont vraies simultanément, p => r est vraie aussi.

4) Conclusion : énoncé de cette 1ère règle, dite "de transitivité " :

> Si les implications p => q et q => r sont vraies simultanément,
> alors l'implication p => r est vraie.

On dit que l'implication est transitive.

Il en résulte que l'équivalence est transitive aussi

si p <=> q et q <=> r, alors p <=> r.

II - LA CONTREPOSEE

1) Encore un appel à la spontanéité des masses

à partir de l'exemple :

Quand la météo annonce une dépression, je prends mon parapluie

Si l'on me suppose quotidiennement fidèle à la météo et à mes principes, que peut-on conclure si l'on me voit sans parapluie ?... que la météo n'annonce pas de dépression.

2) Formalisation

Nous avons deux propositions, définies par :

p : la météo annonce une dépression
p : je prends mon parapluie

et la phrase se traduit par p => q

La règle utilisée spontanément revient à dire que

si p ⇒ q, alors ¬q => ¬p

On peut en profiter pour rappeler que ¬p n'implique pas ¬q puisque si p est fausse et q vraie, p => q est vraie (1ère leçon).

3) Vérification avec les tables de vérité

Pour mieux convaincre les sceptiques, il serait bon de faire établir celles de p => q ; ¬q => ¬p mais aussi ¬p => ¬q (cette faute étant l'une des plus fréquemment commise dans les raisonnements des élèves, imitant les hommes politiques qui en font un usage intensif).

p	q	p=>q	¬p	¬q	¬q=>¬p	¬p=>¬q
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	V

Il en ressort nettement qu'il y a équivalence

entre p => q et ¬q => ¬p(lignes soulignés),

alors que p => q et ¬p => ¬q n'ont pas la même table de vérité (lignes encadrées).

4) Conclusion : énoncé de cette 2è règle, dite de contraposition

> Les implications p => q et ¬q => ¬p , dites contraposées, sont équivalentes.

Il en résulte que p <=> q est équivalente à ¬p <=> ¬q , ce qu'on peut s'amuser à vérifier en établissant la table de vérité.

III - TRANSITIVITE ET CONTRAPOSITION

1) Soyons intuitifs !

Exemple :

a - **Quand un exercice de logique ne me donne pas la migraine, vous pouvez être sûr qu'il est facile.**

b - **Si tu l'as inventé, alors cet exercice de logique n'est pas facile**

Que peut-on en conclure ? Que si tu as inventé cet exercice, alors il me donne (ra) la migraine...

Comme quoi il est des bourreaux qui s'ignorent...

2) L'intuition, c'est bien ; la rigueur, c'est mieux

Formalisons.

Nous avons trois propositions définies par :

p : un exercice de logique ne me donne pas la migraine
q : un exercice de logique est facile
r : tu as inventé cet exercice de logique

La phrase a peut se traduire par $p \Rightarrow q$
La phrase b peut se traduire par $r \Rightarrow \neg q$

mais a peut aussi se traduire par $\neg q \Rightarrow \neg p$ (loi de contraposition).

Or, si $r \Rightarrow \neg q$ et $\neg q \Rightarrow \neg p$ sont vraies simultanément,

alors $r \Rightarrow \neg p$ (loi de transitivité).

On peut donc établir la "chaîne logique"

$$r \Rightarrow \neg q \Rightarrow \neg p$$

qui confirme la conclusion intuitive de 1) :

"Cet exercice me donnera la migraine si c'est toi qui l'as inventé".

IV - EXERCICES

1) Pour connaître ses classiques... quoique le traitement en logique des propositions soit un peu douteux puisqu'il faut poser :

p : le fait d'être un homme
q : le fait d'être mortel

et surtout

r : le fait d'être Socrate.

Tous les hommes sont mortels.
Socrate est un homme.
Conclusion ?

2) Moins célèbre mais peut-être plus intéressant pour notre leçon (on peut mettre les phrases dans le désordre si on trouve cela trop facile).

1 - Quand il fait beau, je ne travaille pas
2 - Si je ne travaille pas, je me promène
3 - Lorsque je me promène, je suis détendue
4 - Je n'ai mal à l'estomac que si je suis tendue
5 - Quand je n'ai pas mal à l'estomac, je vois la vie en rose
6 - Je suis heureux les jours où je vois la vie en rose

Conclusion :

Cet exercice prépare les élèves à bien repérer les propositions (et quelques prédicats dissimulés), en particulier à bien reconnaître p (par exemple), lorsqu'elle est exprimée sous une forme négative. C'est particulièrement vrai lorsqu'entre en jeu un couple d'adjectifs comme détendue / tendue (qu'on pourrait remplacer par crispée si l'on voulait renforcer l'efficacité du " piège ".) Contrairement à une pratique de plus en plus répandue, la négation de "mort" n'est pas "non-mort" mais "vivant" ; le "nowlangue" d'Orwell n'a pas encore triomphé et il faut que les élèves s'en souviennent quand ils formalisent.

De même, plus tard, il faudra tenir divaguer et perdre la raison pour l'expression d'une même proposition -8è leçon- (5ème : "folie").

Corrigé :

p : il fait beau
q : je ne travaille pas
r : je me promène
s : je suis détendue
t : j'ai mal à l'estomac
u : je vois la vie en rose
v : je suis heureuse

1 - $p \Rightarrow q$
2 - $q \Rightarrow r$
3 - $r \Rightarrow s$
4 - $t \Leftrightarrow \neg s \quad s \Leftrightarrow \neg t$ (sur <u>ne...que si</u> cf 3è leçon)
5 - $\neg t \Rightarrow u$
6 - $u \Rightarrow v$

$$p \underset{1}{\Rightarrow} q \underset{2}{\Rightarrow} r \underset{3}{\Rightarrow} s \underset{4}{\Rightarrow} \neg t \underset{5}{\Rightarrow} u \underset{6}{\Rightarrow} v$$

Conclusion : Quand il fait beau, je suis heureuse.

Remarque :

La transitivité de l'implication et de l'équivalence est l'outil essentiel utilisé dans les démonstrations mathématiques. (Tout problème y fait appel). C'est pourquoi nous ne proposons pas d'exercices mathématiques particuliers pour cette leçon.

SEPTIEME COURS
LES QUANTIFICATEURS ; LA LOGIQUE DES PREDICATS

L'essentiel de ce qu'on pouvait faire en logique des propositions ayant été présenté dans les six premières leçons, nous voudrions maintenant introduire la logique un peu plus complète des prédicats, qui met en jeu les quantificateurs. Il convient donc de faire sentir aux élèves les limites de la logique des propositions, et son inadéquation à certains types d'énoncés.

I - PROPOSITIONS ET PREDICATS

1) Mise au point préalable : les composants d'une proposition

a - exemples

1 - "3 est pair"
2 - "Laurel est le partenaire de Hardy"
3 - "Marseille est situé entre Paris et le Havre"

Ce sont des propositions ; on peut, pour chacune d'elles, dire si elle est vraie ou fausse.

b - analysons ces phrases

- **La phrase 1** comprend
  - un sujet, thème, ou objet dont on parle : 3
  - ce qu'on en dit : "est pair"

- **La phrase 2**
  - met en scène deux personnes, ou deux "objets" : dont on parle : Laurel, Hardy
  - ce qu'on en dit définit une relation : "est le partenaire de"

La phrase 3
  - fait de même avec 3 objets : Marseille, Paris, le Havre.

c - définitions

Nous dirons que "être pair", "être le partenaire de", "être situé entre... et..." sont des prédicats ; un prédicat est une propriété (exemple 1) ou une relation (exemple 2 et 3).

"3", "Laurel, "Hardy", "Marseille", "Paris", "Le Havre" sont des objets ; ils sont sujets, ou thèmes de l'énoncé (ce qui ne veut pas dire qu'ils soient sujets au sens grammatical du terme).

Ces objets sont des éléments bien définis, auxquels s'appliquent les prédicats.

d - remarque

L'association d'objets et de prédicats permet de fabriquer des propositions.

Par exemple, avec le prédicat "est le chien de" et les objets "Milou" et "Tintin", nous pouvons construire : "Milou est le chien de Tintin".

2) Comment un prédicat devient-il proposition?

A la grande joie des mathématiciens, les prédicats permettent aussi la fabrication d'expressions qui, en fait, ne sont pas des propositions, telles que, pour un entier x, **"x est pair"**...

a - étude de cet exemple et définitions

"x est pair" est fabriqué à partir du prédicat "est pair", mais le sujet n'est pas parfaitement défini, et nous sommes incapables de dire si cette expression est vraie ou fausse ; ce n'est pas une proposition.

Cependant, si nous remplaçons x par 3, alors nous obtenons la phrase "3 est pair" qui, elle, est fausse. Par contre, si nous remplaçons x par 4, la phrase obtenue "4 est pair" est vraie.

"3 est pair" est une proposition fausse
"4 est pair" est une proposition vraie.

Définitions :

x, qui peut prendre n'importe quelle valeur de la classe d'objets choisie (ici $\mathbb{N}$), s'appelle une ***variable.*** *On peut associer à toute valeur entière naturelle de x une proposition. On devrait normalement distinguer le prédicat "est pair" de l'expression "...est pair", ou "x est pair" (qui comprend la variable). Pour des raisons de commodité pédagogique, et parce que le raisonnement n'en est pas affecté, nous appellerons les deux* ***prédicat.***

b - nous pouvons transformer un prédicat en proposition selon trois méthodes différentes

---

Nous venons d'en voir une, mais répertorions les trois avec l'exemple :

"soit x un entier, x est pair"

a' - Donnons à x une valeur déterminée, par exemple 3 ; nous obtenons la phrase "3 est pair" qui est une proposition, car elle a une valeur de vérité : fausse, évidemment.

b' - Affirmons que la propriété "est pair" s'applique à tous les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ "tous les éléments x de $\mathbb{N}$ sont pairs". Ceci est une proposition, qui est fausse.

c' - Estimons que la propriété "est pair" s'applique à certains éléments de $\mathbb{N}$ et disons : "il y a au moins un élément x de $\mathbb{N}$ qui est pair". Nous sommes en présence d'une proposition vraie.

Les méthodes b', et , c' consistent à quantifier le prédicat en l'appliquant :

- soit à tous les objets de la classe considérée (b')
- soit à certains d'entre eux (au moins un) (c')

CONCLUSION

Nous avons ainsi mis en évidence trois façons de fabriquer des propositions à partir d'un prédicat

A- appliquer le prédicat à un objet particulier et bien défini

B - affirmer que le prédicat s'applique à tous les objets d'un ensemble déclaré

C - affirmer que le prédicat s'applique à au moins un objet d'un ensemble défini .

Jusqu'à maintenant, nous avions travaillé sur des propositions du type A et B ; nous examinerons dans la suite de ce chapitre des propositions du type B et C qui sont très courantes en mathématiques.

II - NECESSITE DE LA QUANTIFICATION

En langage courant , certains énoncés comportent aussi des sortes de variables et ils faut les quantifier pour les analyser.

Exemples :

1 - **Toutes les anémones de ce jardin sont rouges**
2 - **Il y a des arbres en fleurs dans le parc**

a - De quoi ces phrases sont-elles faites ?

La phrase 1 comprend :

* le sujet dont on parle : les anémones de ce jardin
* le prédicat : sont rouges

La phrase 2 comprend de même :

* un thème, ou sujet : des arbres du jardin
* le prédicat : sont en fleurs

REMARQUE : il ne serait peut-être pas inutile de rappeler qu'il faut distinguer ce des , article indéfini partitif, pluriel de un , de l'autre des , article défini (les) contracté avec la préposition de

des arbres sont en fleurs : une partie des arbres
je parle des arbres : de (tous) les arbres
je parle de (une partie) des arbres, tournure qui oblige à recouvrir à : de certains arbres).

b) Que signifient ces phrases ?

(et quelle est la distinction essentielle entre les deux types d'énoncés ?).

* Dans le 1er, on parle de toutes les anémones du jardin. Si on veut étudier cet énoncé sans avoir d'autres armes que le calcul des propositions, on peut, à la rigueur , "s'en tirer" en posant que

"on est anémone de ce jardin" constitue une proposition p et que "on est rouge" est une proposition q. On peut alors établir que p $\Rightarrow$ q, c'est-à-dire que "si "on" est anémone de ce jardin, alors "on" est rouge".
Ce n'est certes pas très satisfaisant (et nous verrons mieux sous peu) mais cet exemple ne pose pas, à l'évidence, pour des élèves, la nécessité de recourir à la quantification.

* il n'en va pas de même dans le 2e exemple. Certes, "il y a des arbres en fleurs" mais pas tous, et rien dans l'énoncé ne dit lesquels. On ne peut pas analyser le contenu de cette phrase en la décomposant en propositions.

c - D'où vient la différence ?

Du fait que, dans le 1er exemple, on a un article défini les englobant tout un ensemble , alors que, dans le 2e, on a un article indéfini des , qui ne désigne qu'une partie du tout sans préciser laquelle. Pour une fois la grammaire est parfaitement conforme à la logique. Elle utilise un article indéfini pour un sujet indéfini, indéterminé. Si on considère un arbre particulier du parc il vérifiera ou ne vérifiera pas ce qu'on dit. "Ça dépend" comme concluront eux-mêmes les élèves qui aiment ces conclusions qui n'engagent à rien.

Or, disant cela, que fait-on d'autre que de considérer arbre comme une variable de l' univers constitué par les arbres du parc ?

Dans le 1er exemple anémone peut être considérée également comme une variable de l'univers constitué par les anémones du jardin.

Ces variables sont quantifiées , la première par toutes les (universellement c'est "notre" méthode b' du I), l'autre par il y a des ou il existe des (existentiellement c'est "notre" méthode c'
Si les propositions quantifiées universellement par tout s'analysent souvent sans problème en logique des propositions, les propositions quantifiées par il y a un (ou des), il existe , certaines , ne peuvent s'analyser qu'en ayant recours à des symboles logiques qui traduisent cette "quantité".

III - LES QUANTIFICATEURS

1) Universalité et existence

a - le quantificateur universel

Reprenons l'exemple 1 :

"toutes les anémones du jardin sont rouges"

et formalisons cet énoncé :

L'univers (les anémones du jardin) est noté par E
Le prédicat (être rouge) est noté par P
Le quantificateur universel (toutes) est noté par $\forall$

On symbolise alors l'énoncé par :

$$\boxed{\forall\ x \in E\ ,\ p(x)}$$

(La virgule sépare le quantificateur -ou les- quantificateur(s) du ou des prédicats ; éventuellement elle sépare les quantificateurs entre eux).

On lit :

"pour tout x élément de E, p (x) est vrai "ou"quel que soit x élément de E, x vérifie p"

"pour tout x" et "quel que soit x" sont interchangeables, de même que "p (x) est vrai" et "x vérifie p"

On peut "traduire" la formule pour revenir à la phrase "Quelle que soit l'anémone du jardin, elle est rouge"
ou "Toute anémone du jardin est rouge"
ou "Toutes les anémones du jardin sont rouges".

C'est ce que disait beaucoup moins bien la formulation par implication "bricolée" en début de leçon : "Si "on" est anémone du jardin, alors "on" est rouge".

b - le quantificateur existentiel

Reprenons l'exemple 2 :

"Il y a des arbres en fleurs dans le parc"

et formalisons l'énoncé :

L'univers (les arbres du parc) est noté par E
Le prédicat (être en fleurs) est noté par P
Le quantificateur existentiel (il y a) est noté par $\exists$

On symbolise ainsi l'énoncé :

$$\boxed{\exists x \in E \ , \ p(x)}$$

qu'on lit :

"il existe <u>au moins un</u> élément x de E qui vérifie p"
"il existe au moins un arbre en fleurs dans le parc"

2) <u>Règles d'emploi des quantificateurs</u>

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ sont des symboles logiques et non des abrévations.Ils précèdent toujours l'expression qu'ils quantifient et peuvent être juxtaposés ; la première variable quantifiée qu'on nomme est prioritaire ; c'est sur elle que se greffe la suite de l'énoncé, qui dépend donc d'elle :
les quantificateurs obéissent à des règles d'emploi très précises auxquelles il faut faire attention.

a - on peut intervertir deux quantificateurs de même nature :

Exemple :
"dans ce lycée, tous les élèves participent à toutes les kermesses sportives"

Soient : E l'ensemble des élèves du lycée
S l'ensemble des kermesses sportives
P le prédicat x participe à s

$\forall x \in E$,	$\forall s \in S$,	$p(x,s)$
tous les élèves	toutes les kermesses	x participe à s

"tous les élèves participent à toutes les kermesses sportives"

Je peux écrire aussi:

$\forall s \in S, \forall x \in E, p(x,s)$

"toutes les kermesses sportives, tous les élèves y participent"

Ce n'est pas du français très élégant, mais le sens est le même que dans la première formulation.

<u>Autres exemples</u>

$\exists a \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, a^n = 32$

équivaut à $\exists n \in \mathbb{N}, \exists a \in \mathbb{R}, a^n = 32$

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*, a^{n+m} = a^n \times a^m$

équivaut à $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*, \forall a \in \mathbb{R}, a^{n+m} = a^n \times a^m$

etc....

b - On ne peut pas intervenir deux quantificateurs de nature différente :

Exemple :

"Tous les élèves du lycée étudient au moins une langue étrangère"

Soient : E l'ensemble des élèves du lycée
L l'ensemble des langues étrangères
p le prédicat x étudie l

La phrase est symbolisée par :

$\forall x \in E, \exists l \in L, p(x,l)$

Si j'écris :

$\exists l \in L, \forall x \in E, p(x,l)$

je dis qu'

"il existe une langue étrangère que tous les élèves du lycée étudient"

ce qui est un énoncé très différent du précédent.

Autres exemples :

* Analysons de même deux phrases ayant pour objet les mathématiques :

"Pour tout entier naturel, il existe un entier naturel plus grand que celui-ci"
"Il existe un entier naturel plus grand que tout autre entier naturel"
Ces deux phrases traduisent des idées fort différentes. La première est vraie et peut s'écrire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists p \in \mathbb{N}$, $p > n$
La deuxième est fausse ; elle s'écrit : $\exists p \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $p > n$

* Effectuons le travail inverse en explicitant la proposition :

$\forall a \in \mathbb{R}^*$, $\exists a' \in \mathbb{R}^*$, $a \times a' = 1$
Soit a = 5, il existe a' = 1/5 tel que a x a'= 1
Soit a = -2/3, il existe a'= -3/2 tel que a x a'= 1
pour tout a, il existe a' = 1/a tel que a x a'= 1
(L'élément a' ainsi défini dépend de a).
Cette proposition est vraie.
Considérons la proposition "voisine" :

$\exists a' \in \mathbb{R}^*$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a \times a' = 1$
C'est une proposition fausse. En effet on ne peut trouver un nombre a' immuable (qui ne dépende pas du choix de a) qui permette d'avoir pour tout nombre a : a x a'= 1
Enfin regardons la proposition :

$\exists a' \in \mathbb{R}^*$, $\forall a \in \mathbb{R}^*$, $a \times a' = 0$
C'est une proposition vraie. En effet, on peut trouver un a' immuable -il suffit de prendre a' = 0- qui permette d'avoir pour tout nombre a : a x a' = 0

3) Négation des propositions quantifiées

a) négation de "Toutes les anémones du jardin sont rouges"

Dans le langage courant on dira spontanément "Toutes les anémones du jardin ne sont pas rouges" mais cette phrase est ambiguë. On ne sait pas vraiment si la négation porte sur le prédicat (être rouge) ou sur le quantificateur (elles ne sont pas toutes rouges, il y en a des violettes, par exemple). Or nier que toutes les anémones du jardin soient rouges c'est affirmer qu'il y en a au moins une qui n'est pas rouge.

Les quantificateurs permettent d'écrire l'équivalence vraie :

$$\boxed{\neg(\forall x \in E , p (x)) \Longleftrightarrow (\exists x \in E , \neg p (x))}$$

Cet énoncé logique n'a pas d'équivalent simple en français courant ; on recourt donc à des périphrases construites autour de "il existe", "il y a" suivi de un ou des , puis du sujet dont on parle et enfin du prédicat mis à la forme négative soit morphologiquement, avec ne...pas (cf a') soit lexicalement par passage de l'adjectif (ou du nom) à son antonyme (cf b').

Exemple :

La négation de "Tous les hommes sont bêtes" est (a'): "Il existe au moins un homme qui n'est pas bête".

La négation de "Tous les poètes sont morts" est (b'):"Il existe au moins un poète vivant".

b) négation de "Il y a des arbres en fleurs dans le parc"

Dans le langage courant on dira sans ambiguïté

"Il n'y a pas d'arbre en fleurs dans le parc"

On pourra dire aussi

"Tous les arbres du parc sont sans fleurs"

Les quantificateurs permettent d'écrire l'équivalence vraie.

$$\boxed{\neg(\exists x \in E , p (x)) \Longleftrightarrow (\forall x \in E , \neg p (x))}$$

En fait on transformera l'adjectif (fort mal nommé indéfini) tous en un autre adjectif indéfini : aucun et on dira :

"Aucun arbre du parc n'est en fleurs"

c) remarques

* Dans le langage courant les négations sont souvent source d'ambiguïté voire d'erreur.

Le glissement de "Tous les arbres du parc sont sans fleurs" (1) à "Tous les arbres du parc ne sont pas en fleurs" (2) sera d'autant plus aisé que la première phrase n'est pas très spontanée.
Quant à la négation de "Certains éléphants sont roses" ce serait en pseudo-logique et en néologisme :

"Tous les éléphants sont (non-roses)" (1').

En français "normal" on aboutirait immanquablement à "Tous les éléphants ne sont pas roses" (2').
Or l'écriture symbolique de (1) et de (1') est

$$\forall x \in E \ , \ \neg p\ (x)$$

Il s'agit de la <u>négation universelle du prédicat</u>
L'écriture symbolique de (2) et de (2') est :

$$\exists x \in E \ , \neg p\ (x) \quad \text{c'est à dire} \quad \neg(\forall x \in E \ , \ p\ (x)\ )$$

Il s'agit de la <u>négation de l'universalité du prédicat</u>

* <u>Dans le discours la négation est souvent polémique</u> . Si, à quelqu'un qui me dit "Tous les hommes sont bêtes", j'objecte "ils sont tous intelligents", je ne fais guère avancer le débat. Deux "vérités" s'opposent et l'on repart dos à dos. Mais si je peux lui prouver qu'"il existe au moins un homme intelligent", je l'oblige à remettre en cause sa "vérité", et je l'emporte... en faisant d'une pierre deux coups puisque je suggère en même temps la vanité des généralisations abusives dans le domaine des jugements.

IV - EXERCICES

1 - Former les négations des propositions suivantes (formulations logiques et linguistiques).

Tous les élèves de la classe sont des garçons.
L'un de ces exercices est difficile.
Tous les perroquets parlent.
Certains chômeurs sont indemnisés.
Aucun chien ne vole.
Tous les hommes mangent à leur faim.
Rien ne va plus.
Nul ne peut rire sous la torture.
Un sot trouve toujours un plus sot qui l'admire.
Quelques voitures sont très rapides.

2 - Reprendre l'exercice 1A de la 2e leçon et le résoudre à l'aide des quantificateurs.

3 - Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$\forall x \in \mathbb{N} \ , \quad x < 5$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^* \ , \quad \frac{1}{x} \neq 0$$

$$\exists x \in \mathbb{R}^* \ , \quad \frac{1}{x} \neq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{R} \ , \ \exists y \in \mathbb{R} \ , \ 0 \times x = y$$

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \exists\, y \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \times y = x$

$\exists\, x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\, y \in \mathbb{R}\ ,\ 0 \times y = x$

$\exists\, x \in \mathbb{R}\ ,\ 3\,x^2 + 1 = 0$

4 - Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ (2x + 3)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall\, x \in \mathbb{Z}\ ,\ (2x + 4)x = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$\forall\, x \in \mathbb{Q}\ ,\ (x\sqrt{4} - \sqrt{9})(x - \sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$\forall\, x \in \mathbb{N}\ ,\ x^2 = 9 \Leftrightarrow x = 3$

$\forall\, a \in \mathbb{R}^+\ ,\ \forall\, b \in \mathbb{R}^+\ ,\ a^2 > b^2 \Leftrightarrow a > b$

$\forall\, a \in \mathbb{R}\ ,\quad a^2 < 1 \Leftrightarrow a < 1$

$\forall\, a \in \mathbb{R}\ ,\quad a^2 > 3 \Leftrightarrow a > \sqrt{3}$

$\forall\, a \in \mathbb{R}^{*-}\ ,\quad \forall\, b \in \mathbb{R}^{*-}\ ,\quad \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \Leftrightarrow a < b$

$\forall\, x \in \mathbb{Z}\ ,\quad x^2 = 16 \Leftrightarrow x = 4$

Rép. : V , F , V , V , V , F , F , V , F.

5 - Les équivalentes suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow x + 3 = 1$ (F)

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (x^2 + 1)(x - 3) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ (V)

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ (-x^2 - 2)(x + 1) > 0 \Leftrightarrow x+1 < 0$ (V)

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ -2x\,(x + 1) < 0 \Leftrightarrow x+1 > 0$ (F)

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ (F)

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\ |x|\,(x + 3) > 0 \Leftrightarrow x + 3 > 0$ (F)

$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ,\quad |x|^2 = 2 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$ (F)

6 - Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses et justifier.

$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}\quad \frac{x}{x-1} + \frac{x+3}{x+1} = 2$

$\Leftrightarrow x(x + 1) + (x + 3)(x - 1) = 2$ (F)

$\forall\, x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}\quad \frac{3x}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} = 4$

$\Leftrightarrow 3x(x + 1) + (x - 1)^2 = 4(x^2 - 1)$ (V)

$$\forall\ x \in \mathbb{R} - \{-1,1\}\ \frac{x}{x-1} - \frac{x}{x+1} > 2$$

$$\Leftrightarrow\ x^2 + x - x(x-1) > 2(x-1)(x+1) \quad (F)$$

7 - Les implications suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ (x > 0 \Rightarrow x^3 > 0)$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}^{\cdot}\ ,\ 0 < x < 1 \Rightarrow x^2 \quad x$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x > 3 \Rightarrow x^3 > 3$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x < 1 \Rightarrow x^3 < 1$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ 0 < x < 1 \Rightarrow \sqrt{x} > x$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ -1 < x < 3 \Rightarrow x^2 < 9$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x(x+1)^2(x-2)^2 \leqslant 0 \Rightarrow x = 0$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ -5 < x < 2 \Rightarrow x^2 < 4$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 < 16 \Rightarrow 0 < x < 4$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 > 9 \Rightarrow x > 3$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \lvert x\rvert < 2 \Rightarrow \lvert x^2 + x\rvert < 6$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \lvert x^2 + x\rvert < 5 \Rightarrow x^2 < 5$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \lvert x + 1\rvert < 8 \Rightarrow \lvert x\rvert < 7$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ -2 < x < 3 \Rightarrow \lvert x\rvert < 3$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ -5 < x < 8 \Rightarrow \lvert x\rvert < 8$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}\ ,\ \forall\ y \in \mathbb{R}\ ,\ x^2 + 9y^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ et } y = 0$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}^*\ ,\ 0 < \lvert x\rvert < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{x} > 2$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}^*\ ,\ x > 3 \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{3}$	V
$\forall\ x \in \mathbb{R}^*\ ,\ x < 3 \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{3}$	F
$\forall\ x \in \mathbb{R}^*\ ,\ \frac{1}{x} > \frac{1}{3} \Rightarrow x < 3$	V

HUITIEME COURS : EXERCICES DE SYNTHESE

Nous avions initialement prévu de placer dans ce chapitre un certain nombre d'exercices, pour contraindre les élèves à s'interroger sur le sens des énoncés et à recourir à la formalisation par le calcul des propositions et/ou le calcul des prédicats.

La Logique sans peine de Lewis Carroll nous a offert, dans notre pratique passée un assez savoureux choix d'exercices cocasses sur lesquels le bon sens a peu de prise et qui répondent donc par là-même, à nos intentions ; nous en avions glané ici et là également, dans diverses publications. Pour des raisons de législation sur "la chose écrite" il ne nous est pas possible de les citer. Nous ne pouvons donc qu'inviter les collègues à se reporter aux textes originaux dont nous donnons les références, ou à s'amuser, comme nous, à inventer des exercices de leur cru en laissant libre cours à leur imagination.

Nous envisagions aussi de constituer une sorte de bêtisier, à l'aide de fautes de raisonnement trouvées dans des copies d'élèves. S'il n'est pas difficile d'en trouver, il est rare, finalement, qu'elles constituent un exercice intéressant lorsqu'elles sont extraites de leur contexte. C'est pourquoi nous ne citerons que quelques exemples, qui illustrent surtout la possibilité de se servir d'un tel travail sur la logique pour améliorer conjointement son expression et la portée convaincante de ce qu'on écrit.

I - VERITE ET VALIDITE D'UN RAISONNEMENT

Compte-tenu du contenu des exercices proposés, il ne serait sans doute pas mauvais de commencer par un emprunt à Rhinocéros de Ionesco (Livre de Poche, 1959). De la page 40 à la page 56, nous assistons à une leçon de logique pour le moins étonnante, dont l'un des syllogismes, déclaré "exemplaire", nous intéresse particulièrement (p.42).

Le logicien pose, comme proposition première, ou prémisse "le chat a quatre pattes" ; le vieux monsieur objecte que son "chien aussi a quatre pattes", ce qui amène le logicien à cette conclusion inattendue : "Alors, c'est un chat".

Cet exemple, qu'il vaudrait mieux étudier dans le texte qu'à travers ces brèves citations autorisées, permet de réfléchir sur la vérité et sur la validité du raisonnement.

* Tel quel, ce raisonnement est invalide .
En effet, si :
p symbolise être chat
q symbolise avoir quatre pattes
r symbolise être le chien du vieux Monsieur
on a :
"le chat a quatre pattes" : $p \Rightarrow q$
(l'article singulier a ici valeur générale : tout chat, tous les chats).

"Mon chien aussi a quatre pattes" $r \Rightarrow q$

ce qui ne permet pas d'établir que $r \Rightarrow p$.

En réalité, et comme souvent dans la vie courante (cf 3è chapitre), l'implication $p \Rightarrow q$ a été prise par le logicien comme une équivalence $p \Leftrightarrow q$, ce qui permet d'établir la transitivité: $r \Rightarrow q \Rightarrow p$

Si les chats, et seulement eux, ont quatre pattes, alors, effectivement, le chien du vieux Monsieur est un chat, mais ce raisonnement comporte une faute de logique que nous retrouverons un peu plus loin avec les lycéens qui veulent vivre vieux.

* Transformons maintenant le texte de Ionesco pour que le logicien prononce explicitement ce qu'au fond il a en tête.

Il pourrait dire :
"tout ce qui a quatre pattes est un chat"
Dans ce cas, son raisonnement serait valide. En effet,
Soient E l'univers des animaux à quatre pattes
p le prédicat être chat

On peut symboliser ainsi la proposition revue et corrigée du logicien :

$$\forall x \in E, p(x)$$

Si x en question -appelons le Médor- appartient à E, alors, il n'y a pas de doute, il vérifie p, il est donc un chat.
Le vieux monsieur pourrait montrer que,

$$\exists x \in E, \neg p(x)$$

donc que la proposition initiale était fausse. Mais s'il l'admet, il est contraint d'admettre la conclusion aberrante.

Ce raisonnement est valide, mais il est faux dans ses conclusions parce qu'il fonctionne juste sur des propositions initiales fausses.

Remarque

On pourrait aussi reprendre à Lewis Carroll son raisonnement sur la folie du chat dans Alice au pays des Merveilles , (ch. VI) dont un extrait est présenté en couverture de ce document.

* Enfin, dans les exercices de L. Carroll, il est difficile de parler de vérité de la conclusion. Dans la plupart des cas, elle est au delà ou en deça de toute vérité, elle joue sur les évidences démontrées (longuement) ; c'est un jeu gratuit, mais bien distrayant, sur la validité.

Permettons-nous quand même de citer un bref exemple, tiré de logique sans peine p.177.

1 - "les bébés sont illogiques
2 - qui peut vaincre un crocodile n'est jamais méprisé
3 - les personnes illogiques sont méprisées"

- En calcul des propositions :

Soit p : on est un bébé
q : on est illogique
r : on peut vaincre un crocodile
s : on est méprisé

1 - $p \Rightarrow q$
2 - $r \Rightarrow \neg s$ qui peut s'écrire aussi $s \Rightarrow \neg r$
3 - $q \Rightarrow s$

$$\underset{1}{p \Rightarrow} \; \underset{2}{q \Rightarrow} \; \underset{3}{s \Rightarrow} \neg r$$

Un bébé ne peut pas vaincre un crocodile. On s'en serait douté ! à moins qu'Hercule n'ait des descendants...

Remarque :

Puisqu'avec la quantification on forme des propositions, il est normal que toutes les règles du calcul des propositions que nous avons utilisées jusqu'à maintenant s'appliquent aussi au calcul des prédicats .

- En calcul des prédicats

Soient E l'univers : les hommes
p le prédicat : être bébé
q le prédicat : être illogique
r le prédicat : pouvoir vaincre un crocodile

s le prédicat : être méprisé

1 $\forall x \in E$; $p(x) \Rightarrow q(x)$
2 $\forall x \in E$; $r(x) \Rightarrow \neg s(x)$
3 $\forall x \in E$; $q(x) \Rightarrow s(x)$

Donc

$$\forall x \in E\ ,\ p(x) \underset{1}{\Rightarrow} q(x) \underset{3}{\Rightarrow} s(x) \underset{2\ \text{contraposée}}{\Rightarrow} \neg r(x)$$

Quel que soit l'individu, s'il est bébé, il ne peut pas vaincre un crocodile.

Remarque :

Dans ce type d'exercices, le sujet de chacune des propositions est déterminé globalement. Nous nous autorisons, pour alléger l'écriture, à sous-entendre pour chacune d'elles la variable quantifiée universellement.

II - ENTRAINEMENT OU RECREATION

1) Exercice facile

1) Tous les poulets volent
2) Aucun gendarme n'accepte de voler
3) Ma basse-cour ne comprend que des poulets

p : être poulet
q : voler
r : être gendarme
s : être de ma basse-cour

1) $p \Rightarrow q$
2) $(r \Rightarrow \neg q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg r)$
3) $s \Rightarrow p$

$$s \underset{1}{\Rightarrow} p \underset{2}{\Rightarrow} q \underset{3}{\Rightarrow} \neg r$$

Il n'y a pas de gendarmes dans ma basse cour.

2) Un peu plus long

1) Tout individu bavard peut être avocat
2) Aucun individu réservé ne peut être député
3) Aucun de vos chevaux n'a de robe noire
4) Nul ne peut être avocat s'il n'a une robe noire

p : être bavard
q : pouvoir être avocat
r : pouvoir être député
s : être de vos chevaux
t : avoir une robe noire

réservé "$\Leftrightarrow$" $\neg$ bavard
sème : s'exprimer (beaucoup/peu)

1) $p \Rightarrow q$
2) $\neg p \Rightarrow \neg r$; $r \Rightarrow p$
3) $s \Rightarrow \neg t$; $t \Rightarrow \neg s$
4) $q \Rightarrow t$

$$r \Rightarrow p \Rightarrow q \Rightarrow t \Rightarrow \neg s$$
2 4 3

$$s \Rightarrow \text{non } r$$

Aucun de vos chevaux ne peut être député.

3) Nettement plus contourné

1) Seuls les poètes connaissent les étoiles
2) Celui qui ne désire pas l'évasion ignore l'ennui
3) Sans amis, on s'ennuie
4) Tous les marins connaissent les étoiles
5) Aucun rêveur ne peut être autre chose qu'épris d'infini
6) Oublier la réalité fait perdre la raison
7) On ne peut être poète sans être rêveur
8) Le désir d'évasion pousse à prendre la mer
9) Qui aime l'infini oublie la réalité
10) Celui qui divague n'a pas d'amis

p : être poète
q : connaître les étoiles
r : désirer l'évasion
s : ignorer l'ennui
t : être sans amis
u : être marin
v : être rêveur
w : être épris d'infini
x : oublier la réalité
y : perdre la raison
z : prendre la mer

1) $p \Leftrightarrow q$
2) $\neg r \Rightarrow s$; $s \Rightarrow r$
3) $t \Rightarrow s$
4) $u \Rightarrow q$
5) $v \Rightarrow w$
6) $x \Rightarrow y$
7) $p \Rightarrow v$
8) $r \Rightarrow z$
9) $w \Rightarrow x$
10) $y \Rightarrow t$

$$u \Rightarrow q \Leftrightarrow p \Rightarrow v \Rightarrow w \Rightarrow x \Rightarrow y \Rightarrow t \Rightarrow \neg s \Rightarrow r \Rightarrow z$$
4 1 7 5 9 6 10 3 2 8

Un marin prend la mer CQFD !

4) Insoluble ... exercice jouant sur la contradiction

1) Quand vous suivez des cours, vous devez être attentifs
2) On n'apprend que si l'on comprend (var : Seuls ceux qui comprennent apprennent)
3) Si l'on n'assimile pas, on ne réussit pas
4) Pour comprendre, il suffit d'être attentif
5) Pour apprendre il faut travailler
6) Quand on se fatigue, on n'assimile plus
7) Pour réussir il faut suivre des cours
8) Pour ne pas se fatiguer, il ne faut pas travailler

p : vous suivez des cours
q : vous devez être attentifs
r : on apprend
s : on comprend
t : on se fatigue
u : on assimile
v : on réussit
w : on doit travailler

1) $p \Rightarrow q$
2) $r \Rightarrow s$
3) $u \Rightarrow v$
4) $q \Rightarrow s$
5) $r \Rightarrow w$
6) $t \Rightarrow u$
7) $v \Rightarrow p$
8) $t \Rightarrow w$

$$v \underset{7}{\Rightarrow} p \underset{1}{\Rightarrow} q \underset{4}{\Rightarrow} s \underset{2}{\Leftrightarrow} r \underset{5}{\Rightarrow} w \underset{8}{\Rightarrow} t \underset{6}{\Rightarrow} \neg u \underset{3}{\Rightarrow} v$$

contraposée

$$v \Rightarrow \neg v$$

Ou les contradictions du Système scolaire !

"Pour remédier à ce problème, il faudrait trouver une Solution" comme l'a si bien dit un élève dans une copie.

5) Exercice sur la contradiction interne

(pour faciliter le corrigé, nous numérotons les propositions)

Supposons que vous lisiez quelque part :

"Les hommes, parce qu'ils sont intelligents (1), cherchent à éviter la guerre(2) ; c'est pourquoi ils évitent les tensions (3) en se montrant solidaires les uns des autres (4). Cet esprit de solidarité les amène à étouffer la peur de la différence (5), qui conduit au racisme (6). D'autre part, leur intelligence leur permet de savoir ce qui est vrai(7), et ils cherchent donc de toutes leurs forces à en convaincre les autres(8), ce qui ne va pas toujours sans créer de tensions(9) qui compromettent la paix du monde(10)."

Acceptez-vous un tel raisonnement ?

Soient :

p : être intelligent
q : chercher à éviter la guerre
r : éviter les tensions
s : se montrer solidaires
t : avoir peur de la différence
u : être raciste
v : savoir ce qui est vrai
w : chercher à convaincre les autres (de la vérité)

Formalisons :

(1)	p
(1) et 2)	$p \Rightarrow q$
(1), 2) et 3)	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
(3) et 4)	$r \Leftrightarrow s$
(5)	$s \Rightarrow \neg t$
(6)	$t \Rightarrow u$
(7)	$p \Rightarrow v$
8	$v \Rightarrow w$
9	$w = \quad r$
(10)	$\neg r \Rightarrow \neg q$

Je peux établir une 1ère chaîne logique, correspondant à la 1ère partie du raisonnement

$p \Rightarrow q \Rightarrow r \Leftrightarrow s \Rightarrow \neg t$

"Les hommes sont intelligents donc n'ont pas peur de la différence" chaîne sur laquelle se greffe, sans faute logique l'hypothèse exclue $t \Rightarrow u$ s'ils avaient peur de la différence, ils seraient racistes.

La deuxième partie du raisonnement se symbolise par la chaîne logique suivante : $p \Rightarrow v \Rightarrow w \Rightarrow \neg r \Rightarrow \neg q$

"les hommes sont intelligents donc ne cherchent pas à éviter la guerre"

En résumé $p \Rightarrow \quad q$ alors que la 1ère partie du raisonnement embrayait sur $p \Rightarrow q$.

Ce raisonnement est invalide car il comporte une contradiction interne, faute assez répandue dans les dissertations pour qu'il vaille la peine de s'y arrêter un peu. Le plus souvent, cela tient au fait que les élèves se laissent emporter par leur "élan lyrique" et oublient "un peu" ce qu'ils voulaient démontrer ou ce qu'ils ont été amenés à dire sans trop mesurer la portée de leur propos. C'est pourquoi il n'est pas mauvais de les amener à bien saisir l'enchaînement de leurs arguments (c'est pourquoi aussi cet exercice adopte une présentation "rédigée et enrobée de quelques fioritures", ce qui nous est peu coutumier).

A titre récréatrif, mais non sans utilité

III - PETITS EXERCICES ISSUS DE COPIES D'ELEVES

et comportant des problèmes de raisonnement divers. Il ne s'agit pas toujours d'implications (cf point sur implication et rapport de causalité dans la 1ère leçon), mais on peut les traiter en logique des propositions pour corriger les raisonnements douteux.

Ces raisonnements sont-ils logiques ? pourquoi ?

1. **"je ne lis jamais de livres car je les trouve ennuyeux"**
p : les livres sont ennuyeux
q : je ne lis pas de livres soit p => q

mais il faut expliciter les sous-entendus : pour émettre un jugement sur un livre (r), il faut le connaître : (s) (r => s) et pour le connaître, il faut le lire (s => $\neg$ q) or, dire "les livres sont ennuyeux", c'est émettre un jugement (p => r)
Donc : p => r => s => $\neg$ q d'où p => $\neg$q
Or l'élève disait que p => q

Ce raisonnement est invalide, en ce sens qu'il se réduit à une formulation apparemment logique qui entre en contradiction avec l'implicite qu'elle présuppose.

2) **"Puisque le français est ta langue natale (sic), tu dois en être fière ; alors, écoute bien en classe".**

p : le français est ta langue maternelle
q : tu dois être fière de ta langue maternelle
r : tu dois écouter attentivement en classe

Ce qui donne p => q et q => r, d'où par transitivité p => r

Puisque le français est ta langue maternelle, écoute bien en classe !

Où le nationalisme ne va-t-il pas se nicher ?
Que nos collègues étrangers sachent qu'ils ont toute notre sympathie, eux qui n'ont pas notre chance...

En fait, ce raisonnement est valide. Il se rapproche (involontairement) des exercices de -ou à la manière de- Lewis Carroll. L'effet comique qu'il produit vient de l'impossibilité, si l'on essaie de raisonner sur le réel, d'établir de semblables implications, vu le peu de rapport que les propositions entretiennent entre elles.

On pourrait s'amuser aussi avec:

3) **"la solitude apprend à connaître son entourage"**

4) **"la souffrance ne doit pas être un obstacle pour renoncer au bonheur"**

S'y retrouve qui pourra dans les négations

Mais chacun a sans doute son stock personnel. Nous n'en proposerons donc plus qu'un dans cette rubrique, en espérant quand même qu'il ne représente pas le mode de pensée typique des lycéens actuels.

5) **"Si on ne peut pas faire de bruit, ce n'est pas la peine d'acheter des Mobylettes"**

p : on peut faire du bruit
q : ça vaut la peine d'acheter des Mob.

$$\neg p \Rightarrow \neg q \iff q \Rightarrow p$$

Ca vaut la peine d'acheter des Mob si on peut faire du bruit.

D'où il ressort nettement que l'intérêt primordial de la Mob réside dans le bruit qu'elle fait

La Mob est un engin qui sert d'abord à faire du bruit.

IV - EXERCICE SUR LES CONNECTEURS LOGIQUES

Un professeur tient à ses élèves le curieux discours suivant :

1) si vous ricanez, alors vous n'êtes pas motivés et vous perdez du temps

2) si vous êtes motivés et si vous ne perdez pas de temps, nous irons en Bretagne

3) les jours où vous ne riez pas bêtement mais où vous perdez du temps , vous n'êtes pas motivés

4) si vous n'êtes pas motivés, ou si vous ricanez bêtement, ou les deux, nous n'irons pas en Bretagne

5) Si vous ne travaillez pas bien ou si vous n'êtes pas motivés, nous n'irons pas en Bretagne.

Quoiqu'ils n'aient pas très bien compris de quoi il retournait (il faut se mettre à leur place !), ils sont motivés.

Que doivent-ils comprendre ?

Soient :

p = vous ricanez
q = vous êtes motivés
r = vous perdez du temps
s = nous irons en Bretagne
t = vous travaillez bien

(1) $p \Rightarrow (\neg q \text{ et } r)$; $(\neg r \text{ ou } q) \Rightarrow \neg p$
(2) $(q \text{ et } \neg r) \Rightarrow s$; $\neg s \Rightarrow (r \text{ ou } \neg q)$
(3) $(\neg p \text{ et } r) \Rightarrow \neg q$; $q \Rightarrow (p \text{ ou } \neg r)$
(4) $(\neg q \text{ ou } p) \Rightarrow \neg s$; $s \Rightarrow (\neg p \text{ et } q)$
(5) $(\neg t \text{ ou } \neg q) \Rightarrow \neg s$ $s \Rightarrow (t \text{ et } q)$

- **q est vraie** d'après l'énoncé : ils sont motivés

- D'après (3) on sait que $q \Rightarrow (p \text{ ou } \neg r)$ donc $(p \text{ ou } \neg r)$ est vraie
  d'après (1) on sait que $p \Rightarrow (\neg q \text{ et } r)$
  donc si p était vraie $(\neg q \text{ et } r)$ serait vraie
  donc $\neg q$ serait vraie
  Or q et $\neg q$ ne peuvent-être vraies simultanément, donc
  p est fausse
  donc ils ne ricanent pas bêtement

- Comme $q \Rightarrow (p \text{ ou } \neg r)$ et que p est fausse
  $\neg r$ est vraie (**r est fausse**)
  ils ne perdent pas de temps

Restent s et t.

- D'après (2) $(q \text{ et } \neg r) \Rightarrow s$
  q est vraie par énoncé et nous avons démontré que $\neg r$ est vraie aussi
  donc s est vraie
  nous irons en Bretagne

- Comme $s \Rightarrow (t \text{ et } q)$ d'après (5)
  que s est vraie (q aussi d'ailleurs)
  t est vraie
  Ils travaillent bien

Ils n'ont plus qu'à continuer sur cette voie s'ils ne reculent pas devant l'idée d'aller en Bretagne avec un prof à l'esprit si tordu...