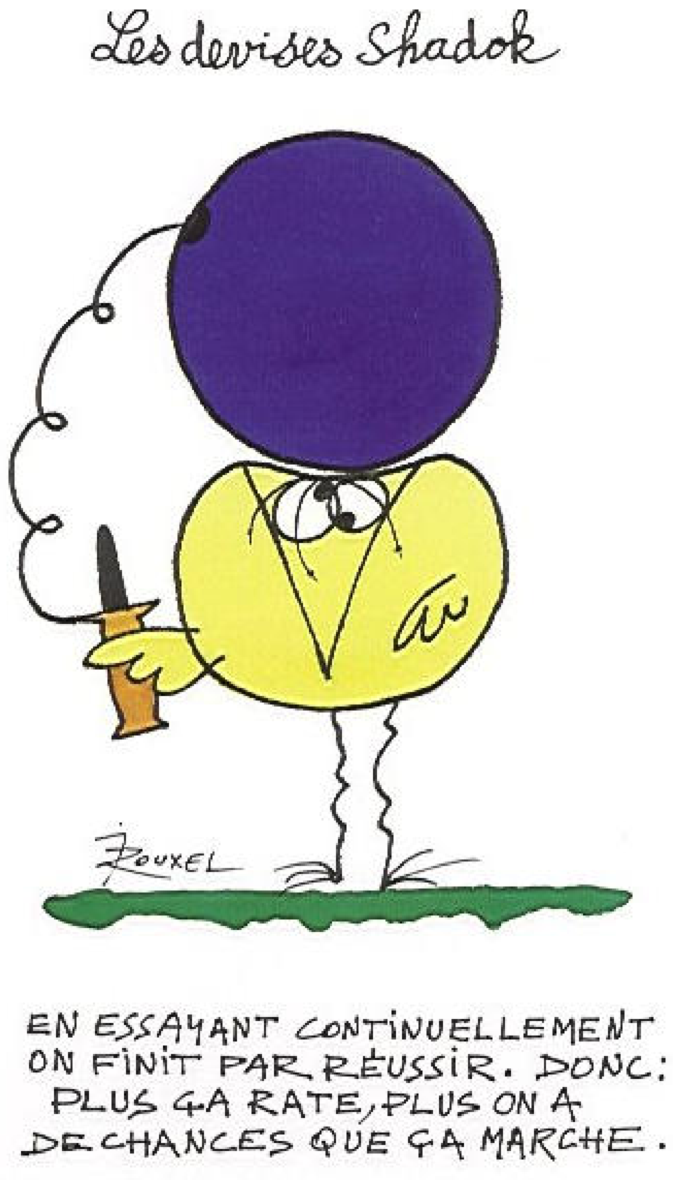
UNIVERSITÉ DE ROUEN
Faculté des Sciences et Techniques

Institut de Recherche
sur
l'Enseignement des Mathématiques



Une initiation aux probabilités par le jeu

Blandine MASSELIN et Frédéric VIVIEN

I.R.E.M. de Rouen, Bâtiment de Mathématiques, Av. de Broglie, B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan   Tel : 02 35 14 61 40/41   Fax : 02 35 14 00 49

Comment faire entrer les probabilités au collège ?

Telle fût pour nous la problématique et l'objet d'un travail commun autour d'un stage I.R.E.M. (dans l'Académie de Rouen) toute cette année à l'occasion de la mise en application des nouveaux programmes de 3^e en 2008.

Cette brochure, c'est d'abord la rencontre entre deux enseignants : un du lycée, fort de son expérience du hasard en classe de seconde, et une de collège motivée par une approche par activités des probabilités. C'est aussi l'occasion de rechercher comment établir une progression spiralée autours de cette notion nouvellement abordée en proposant des activités sur les probabilités dans différents cadres.

Nous avons souhaité présenter cette notion de façon ludique, convaincus qu'une phase expérimentale est nécessaire à l'appropriation et que le jeu apportant du plaisir, il participe à la motivation de l'élève.

L'approche fréquentiste des probabilités a aussi induit une réflexion sur l'intégration incontournable des TICE dans notre progression.

Au fur et à mesure des activités proposées à nos élèves, notre réflexion s'est portée sur la simulation, les différentes conceptions du hasard, les problèmes de modélisation, l'introduction des arbres, ...

En espérant que l'articulation de ces situations d'apprentissage en manipulation, regroupement des élèves, puis production d'un fichier et d'un écrit auront permis de construire au mieux cette notion de probabilité tout au long de l'année ...

Un grand merci à nos élèves du Lycée Corneille et du collège Guy de Maupassant qui sont venus, par leurs diverses productions, éclairer notre recherche, ainsi qu'à tous ceux qui ont contribué à ce que cette lecture vous soit proposée (A. Assrir, E, Elter).

Blandine Masselin et Frédéric Vivien

Sommaire

Chapitre I
Hasard et probabilité : différentes conceptions

TABLES.

TABLE XIII.

Comparaisons des différentes Tables qui ont été faites pour montrer l'ordre de mortalité du Genre humain, ou les probabilités que les personnes de chaque âge ont de vivre jusqu'à un autre âge.

Ages.	Ordre établi par M. Smart sur les Registres mortuaires de Londres, & rectifié par M. Simpson.				Ordre établi par M. Halley sur les Registres mortuaires de Breslau.				Ordre établi par M. Kersseboom sur les Rentiers viagers de quelques Villes de la Hollande ; & autres observations.			
	Morts de chaque âge.	Personnes vivantes à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.	Morts de chaque âge.	Personnes vivantes à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.	Morts de chaque âge.	Personnes vivantes à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.
0	410	[illegible]	19.	4					275	1400	34.	6
1	170	870	27.	3	145	1000	33.	6	50	1125	41.	9
2	65	[illegible]	32.	9	57	855	38.	0	45	1075	42.	8
3	35	[illegible]	35.	0	38	[illegible]	39.	9	37	1030	43.	6
4	[illegible]	[illegible]	36.	0	28	760	40.	9	29	993	44.	2
5	15	[illegible]	36.	3	22	732	41.	1	17	964	44.	5
6	13	564			18	710			17	947	44.	3
7	10	551			12	692			17	930	44.	0
8	9	541			10	680			9	913	43.	9
9	8	532			9	670			9	904	43.	3
10	[illegible]	524	[illegible]	11	8	661	40.	5	9	895	42.	8
11	7	517			7	653			8	886	42.	2
12	6	510			6	646			8	878	41.	7
13	6	[illegible]			6	640			7	870	40.	11
14	6	[illegible]			6	634			7	863	40.	3
15	6	[illegible]	[illegible]	1	6	628	37.	6	7	856	39.	7
16	[illegible]	[illegible]			6	622			7	849	38.	11
17	6	[illegible]			6	616			7	842	38.	3
18	6	474			6	610			9	835	37.	7
19	6	[illegible]			6	604			9	826	36.	11
20	7	[illegible]	[illegible]	11	6	598	34.	2	9	817	36.	1
21	[illegible]	[illegible]			6	592			8	808	35.	7
22	7	448			6	586			8	800	35.	0
23	[illegible]	441			6	580			9	792	34.	5
24	[illegible]	[illegible]			7	574			11	783	33.	10

Ages.	Ordre établi par l'Auteur sur les listes des Tontines de 1689, & 1696.			
	Morts de chaque âge.	Personnes vivantes à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.
0				
1				
2				
3	30	1000	47.	8
4	22	970	48.	1
5	18	948	49.	3
6	15	930	48.	2
7	13	915	48.	0
8	12	902	47.	8
9	10	890	47.	4
10	8	880	46.	10
11	6	872	46.	3
12	6	866	45.	8
13	6	860	44.	11
14	6	854	44.	2
15	6	848	43.	6
16	7	842	42.	10
17	7	835	42.	2
18	7	828	41.	6
19	7	821	40.	10
20	8	814	40.	3
21	8	806	39.	7
22	8	798	39.	0
23	8	790	38.	5
24	8	782	37.	9

Ages.	Ordre établi d'après les Religieux Bénédictins de S. Maur, qui avoient fait profession entre 1607 & 1669.				Ordre établi d'après les Bénédictins qui sont morts depuis 1685 inclusivement, jusqu'au milieu de 1745.				Ordre établi d'après les Religieux de Sainte Géneviève qui sont morts depuis 1685, jusqu'en 1744 inclusivement.				Ordre établi d'après plusieurs autres Religieux, morts depuis 1685, jusqu'au milieu de 1745.				Ordre établi d'après plusieurs Religieuses, mortes depuis 1685, jusqu'au milieu de 1745.			
	Morts de chaque âge.	Religieux vivans à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.	Morts de chaque âge.	Religieux vivans à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.	Morts de chaque âge.	Religieux vivans à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.	Morts de chaque âge.	Religieux vivans à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.	Mortes de chaque âge.	Religieuses vivantes à chaque âge.	Vies moïennes. ans.	mois.
20	6	814	38.	4	6	814	38.	6	6	814	36.	6	6	814	39.	4	6	814	40.	2
21	6	808			6	808			7	808			6	808			6	808		
22	6	802			7	802			7	801			6	802			6	802		
23	6	796			7	795			7	794			6	796			6	796		
24	6	790			7	788			7	787			7	790			7	790		

Essai sur les probabilités de la durée de vie humaine,
d'où l'on déduit la manière de déterminer les Rentes viagères,
tant simples qu'en tontines, par M. Antoine Deparcieux, Paris, 1746.

Le calcul des probabilités, appliqué à la mortalité humaine,
a donné naissance à une science nouvelle : celle des assurances.
Emile de Girardin

1. Interprétations du hasard

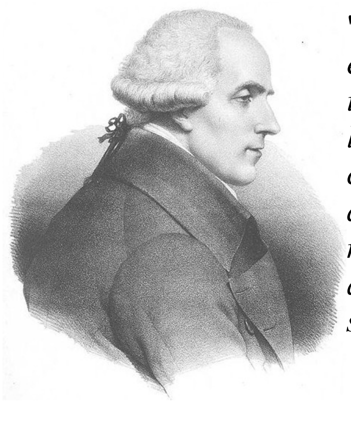
Dans le langage ordinaire, le mot "hasard" est utilisé pour exprimer un manque apparent des causes ou au moins de la connaissance des causes d'un événement ainsi que pour les conséquences.
Le hasard est, depuis la plus haute antiquité, interprété différemment. On parle parfois de providence, de destin, de congruences, de contingence, de fatalité, ... Par contre, les découvertes socio-culturelles, scientifiques, psychologiques peuvent, au cours de l'histoire, expliquer ces événements qui deviennent alors plus "logiques" ou "attendus".
Le mot *hasard* vient de l'arabe *az-zahr*, qui signifie jeu de dé (*zahr*, fleur… car les dés portaient une fleur sur une de leur face), tout comme l'adjectif "aléatoire" vient du latin *alea* qui signifie également dé.
Historiquement, la première fois que l'humanité a eu à se préoccuper des nombres aléatoires, ce fut probablement pour des activités divinatoires. Des dés rituels étaient utilisés déjà à l'âge de bronze. Le plus ancien dé de forme cubique avec des faces numérotées de 1 à 6 remonte à 200 ans avant Jésus-Christ et a été trouvé en Egypte. Des dés datant du VIIe et du VIe siècles avant Jésus-Christ ont été trouvés en Italie centrale et en Chine.

<u>Quelques conceptions du hasard</u> :

Le Hasard-Rencontre :
"*Le hasard n'est point, comme on l'a tant répété, un fantôme créé pour nous déguiser à nous-même notre ignorance, ni une idée relative à l'état variable et toujours imparfait de nos connaissances mais bien au contraire la notion d'un fait vrai en lui-même. [...] Le hasard consiste dans l'indépendance mutuelle de plusieurs séries de causes et d'effets qui concourent accidentellement à produire tel phénomène, à amener telle rencontre, à déterminer tel événement, lequel pour cette raison est qualifié de fortuit.*"

Cournot, *Considérations sur la marche des idées et des événements dans les temps modernes,* 1872.

Le Hasard-Ignorance :



"*Nous devons envisager l'état présent de l'univers comme l'effet de son état antérieur, et comme la cause de celui qui va suivre. Une intelligence qui pour un instant donné connaîtrait toutes les forces dont la nature est animée et la situation respective des êtres qui la composent, si d'ailleurs elle était assez vaste pour soumettre ces données à l'analyse, embrasserait dans la même formule les mouvements des plus grands corps de l'Univers, et ceux du plus léger atome : rien ne serait incertain pour elle, et l'avenir, comme le passé, serait présent à ses yeux*"

Laplace, *Essai philosophique sur les probabilités,* 1825.

Le Hasard-Complexité

"*Une cause très petite qui nous échappe détermine un effet considérable que nous ne pouvons ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissions exactement les lois de la nature et la situation de l'Univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même Univers à un instant ultérieur. Mais lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secrets pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons un phénomène fortuit.*"

Poincaré, *Science et méthode,* 1908.

2. Les conceptions du hasard par nos élèves

Nos élèves ont, de par leur expérience notamment du jeu, des conceptions initiales du hasard. Il paraît important de faire dans un premier temps verbaliser ceux-ci et de provoquer des débats de classe, afin de confronter ces différentes conceptions de l'aléatoire.

Voici quelques uns des principaux écueils sur l'aléatoire rencontrés chez eux :

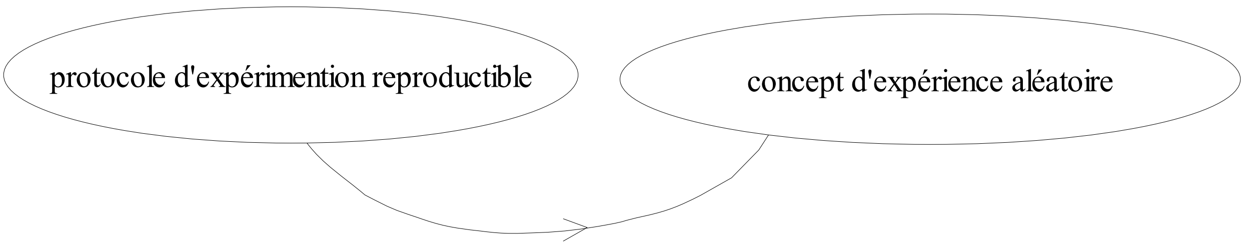
- avec un dé, le 6 paraît pour certains plus difficile à obtenir.
- l'équiprobabilité attribuée d'office à toute situation.
- l'application de la loi des grands nombres aux "petits" nombres.
  (confusion entre la probabilité théorique et la fréquence)

Pour aller contre ces conceptions erronées, la plupart de nos activités ont été conçues en deux temps :

1ère phase : un protocole d'expérimentation reproductible (utilisation de matériel en classe) nécessaire pour l'appropriation de la situation par l'élève.

2e phase : une phase de modélisation par simulation à l'aide d'outils TICE comme le tableur ou la calculatrice ou encore à l'aide de tables aléatoires. Cette modélisation doit permettre d'aboutir au concept théorique d'expérience aléatoire.

première phase : matérielle deuxième phase : modélisation



Le passage de la première phase à la deuxième permettant de construire la notion de hasard, il est nécessaire de laisser un temps suffisant à l'élève pour expérimenter avec du matériel (dés à jouer, ...) puis de lui offrir l'accessibilité aux outils TICE.

Les objectifs fixés étant :

- que l'élève puisse distinguer "le hasard de la contingence" (enchaînement de faits incontrôlables non reproductibles) et "l'aléatoire" (expériences définies par un protocole, reproductibles, quantifiables, dont toutes les issues peuvent se prévoir),
- qu'il puisse mettre en œuvre cette expérience aléatoire, et en faire le traitement statistique des données avec les différents outils TICE à sa portée,
- qu'il s'approprie l'idée que la probabilité d'un événement est la limite des fréquences observées,
- qu'il émette une réflexion en comparant ses résultats observés et ce qui était attendu.

Mais avant d'entrer dans des activités au sens où nous l'entendons, il nous paraît important de faire naître des débats de classe, afin de confronter ces différentes conceptions du hasard à travers des questionnements individuels. Nous proposons d'étaler dans le temps ces "tests" afin de voir l'évolution du concept chez l'élève.

Voici le premier proposé en tout début d'année en classe de 3^{e} avant même toute activité.

Questions de hasard (1)

1) Anne et Pierre décident d'acheter un billet à la loterie. Anne dit :"Donnez-moi un billet qui se termine par 3". Pierre dit : "Ce serait mieux qu'il se termine par 9".
   Lequel des deux a raison ? Pourquoi ?
   Peut-on prévoir à l'avance par quel chiffre se terminera le numéro gagnant du gros lot ?

2) Jean a lancé une pièce de monnaie, et a obtenu 5 fois de suite FACE. Vous voulez la relancer : pouvez-vous prévoir si ce sera PILE ou FACE ? Pourquoi ?

3) Au péage d'une autoroute, un employé note le premier chiffre de la plaque d'immatriculation de toutes les voitures françaises qui passent (par exemple, pour le numéro 758 TB 76, il note 7 et pour les nouvelles plaques comme CE 208 VZ, il note 2). Il a fait cela pendant plus de trois heures, et possède énormément de données.
   Peut-il prévoir quel sera le premier chiffre du numéro de la prochaine voiture qui passera ? Pourquoi ?

4) Céline et Paul jouent aux dés, chacun avec son dé. Mais Paul est un peu tricheur, et a échangé son dé avec un autre qui n'a que des 6 sur toutes ses faces. Quand Céline lance son dé, peut-on prévoir quel numéro sortira ? Et quand Paul lance le sien ? Pourquoi ?

Voici des réponses d'élèves de troisième à ce premier questionnaire proposé :

1. La personne qui à raison et Anne car 9 = 3x3. donc dans tout les cas il y a 3. Non, car c'est du hasart.

---

1) Anne a raison car il a plus de chance de tombé sur le bon numero et $3^2 = 9$ 3 et la racine carrée de 9. Oui car Anne a 1 chance sur 3 de gagner. Que Pierre a 1 chance sur 9

---

1. C'est Pierre qui a raison, car 9 est plus grand que trois et il y a plus de chance de prendre un nombre plus grand.
Le dernier chiffre sera forcément dans la table de 3.

---

1. Les deux ont ~~résond~~ raison car il y aura autant de chiffre qui se termine per 3 que par 9. On ne pas prévoit mais on peut faire des pronostics.

Observons pour la question 1) toute l'influence des notions précédemment abordées (racine carrée, diviseurs) et le rapport de certains élèves aux nombres.

2) Oui on peut prévoir que sa retombe sur Face, mais seulement si il la lance à la même vitesse et ~~dans~~ la même direction que les autres.

---

2. Non on ne peut pas prévoir car ce jeu et un jeu de hasard donc les réponses ne sont pas communiquer d'avance.

En ce qui concerne les réponses au 2), le premier élève parle des conditions de l'expérience (ici est sous-jacente la question de la modélisation). Quant au suivant, il tente de définir le hasard avec "des réponses non communiquées à l'avance".

A travers ces réponses, nous pointons ici toute la difficulté de l'appropriation de la notion de hasard chez nos élèves.

Parce que nous croyons que ce concept s'installe très progressivement, nous proposons deux autres questionnaires étalés dans le temps dans l'année, qui permettront d'observer son évolution.

Questions de hasard (2)

1) En lançant une pièce, qu'est-ce qui est le plus facile à obtenir : PILE ou FACE ? Pourquoi ?
2) En lançant un dé, qu'est-ce qu'il est le plus facile à obtenir : un 2 ou un 6 ? Pourquoi ?
3) On a fabriqué un dé spécial pour faire des paris. Il a trois faces avec un 1, deux faces avec un X, et une face avec un 2.
   Si on le lance, qu'est-ce qui sera le plus facile d'obtenir ? Et qu'est-ce qui sera le moins facile ? Pourquoi ?

Questions de hasard (3)

1) Dans un jeu de société, tu dois faire un total de six pour commencer à jouer. Tu peux au choix lancer un seul dé, ou bien deux dés.
   Que choisis-tu ?
   Et s'il fallait faire un total de cinq ?

2) On lance deux dés. Si le total des deux dés est supérieur à 9, tu marques un point, si cette somme est inférieure à 4, c'est moi qui marque un point.
   Qui a le plus de chances de gagner ?

3) On lance deux dés. Si le total des deux nombres est un nombre impair, tu marques 10 points. Si c'est un double six qui est sorti, je marque 100 points.
   Qui a le plus de chances de gagner ?

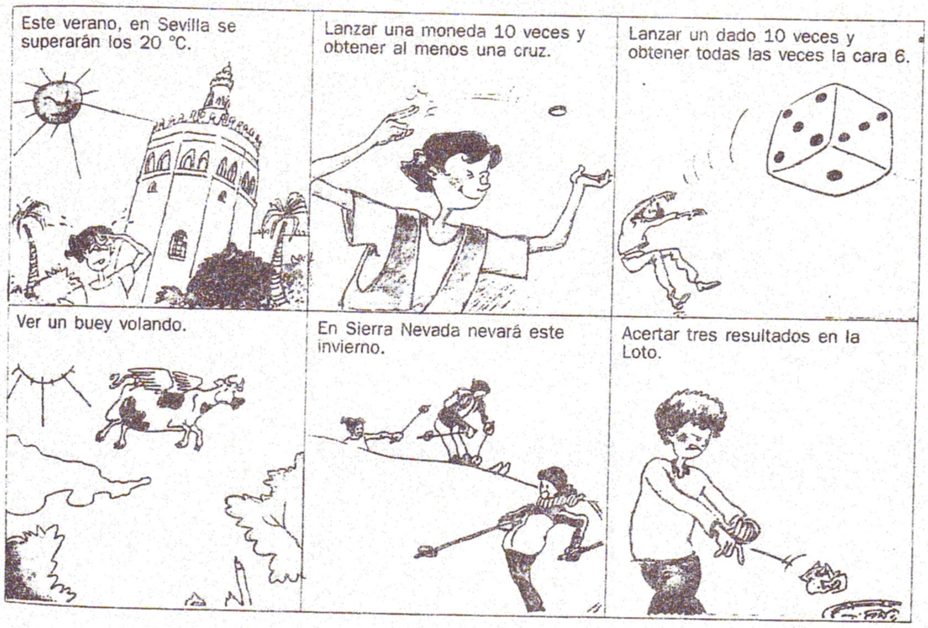
4) On joue avec deux dés, en les lançant chacun notre tour. Je prétends que c'est plus difficile pour moi de faire un double six que pour toi de faire un double trois.
   Ai-je raison ?

Questions tirées de *L'enseignement des probabilités au collège et au lycée. Exemples européens et propositions*, Groupe probabilités et Statistiques, IREM de Lorraine, 2001.

Enfin, ne devons-nous pas aussi juxtaposer des exemples de situations de non-hasard pour mieux définir le hasard ?
Nous verrons dans le chapitre VIII, à l'activité intitulée *Le Jeu du Delta*, la difficulté réelle à réaliser une expérience aléatoire pour un individu, *a fortiori* un élève.

Autre entrée possible, une BD espagnole a aussi permis de mettre en place une échelle de probabilité, instaurant une comparaison intuitive d'événements peu probables, probables, impossibles, etc...

3 Asigna una de estas etiquetas a cada uno de los siguientes sucesos. IMPOSIBLE | POCO PROBABLE | BASTANTE PROBABLE | SEGURO



Traduction :
Attribue une de ces étiquettes « Impossible », « Peu probable », « Fort probable » ou « Certain » à chacun des événements suivants :
- Cet été à Séville, on dépassera les 20°C.
- Lancer une pièce 10 fois et obtenir au moins une fois Pile.
- Lancer un dé 10 fois et obtenir 6 à chaque fois.
- Voir un bœuf voler.
- Il neigera cet hiver dans la Sierra Nevada.
- Obtenir 3 bons numéros au Loto.

3. Différentes conceptions et situations probabilistes

Une entrée par l'aspect fréquentiste des probabilités recommandée par le programme est souvent nouvelle pour nous et semble différente de l'enseignement des probabilités par le dénombrement que nous avons reçu dans notre propre scolarité. Cette différence se retrouve historiquement et plusieurs conceptions des probabilités se complètent.

Depuis l'émergence des probabilités à la fin du XVII^e^ siècle, principalement par Pierre de Fermat et Blaise Pascal, deux aspects des probabilités se côtoient, l'un repose sur l'aspect fréquentiste, c'est-à-dire sur l'observation des fréquences lorsque l'on répète un grand nombre de fois l'expérience, et l'autre, plus théorique, se fonde sur le rapport des cas favorables aux cas possibles dans les situations d'équiprobabilité.

A l'article *Probabilité* de *l'Encyclopédie méthodique*, Condorcet présente ces deux aspects :

> *"Nous les réduisons [les sources de la probabilité] a deux espèces ; l'une renferme les probabilités tirées de la considération de la nature même, & du nombre des causes ou des raisons qui peuvent influer sur la vérité de la proposition dont il s'agit ; l'autre n'est fondée que sur l'expérience du passé, qui peut nous faire tirer avec confiance des conjectures pour l'avenir... "*

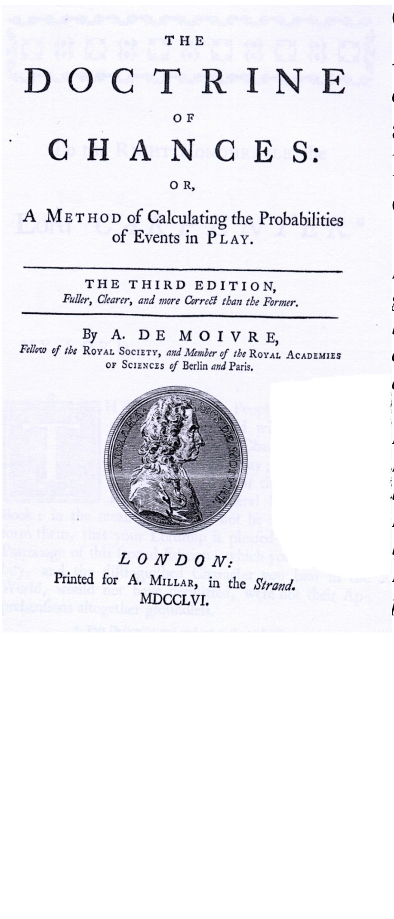
3.1. L'approche fréquentiste des probabilités

Pour des expériences susceptibles de se reproduire sous les mêmes conditions (expérience aléatoire), la fréquence d'apparition d'un événement donné se stabilise progressivement lorsque le nombre de réalisations croît indéfiniment. Dans ce cas, la probabilité est la tendance du système à produire un événement donné.
Cette approche fréquentiste des probabilités est fondée sur la loi des grands nombres dont Jacques Bernoulli est à l'origine. On peut en donner une formulation :

> *La fréquence f d'un événement, dans une suite de n expériences aléatoires identiques et indépendantes, tend à se rapprocher de sa probabilité p quand n augmente indéfiniment.*

3.2. L'approche du "nombre des causes"

Cette approche, plus théorique, repose sur le rapport des cas favorables aux cas possibles selon la formule dite de Laplace et qui correspond aux probabilités que nous avons rencontrées dans notre propre scolarité. Pascal l'appelait la "Géométrie du hasard". La probabilité est conçue comme calculable *a priori* par le dénombrement des issues favorables, avant la réalisation d'une épreuve, en tenant compte des symétries autorisant des hypothèses d'équiprobabilité posées *a priori*.


THE DOCTRINE OF CHANCES: OR, A METHOD of Calculating the Probabilities of Events in PLAY.

THE THIRD EDITION, Fuller, Clearer, and more Correct than the Former.

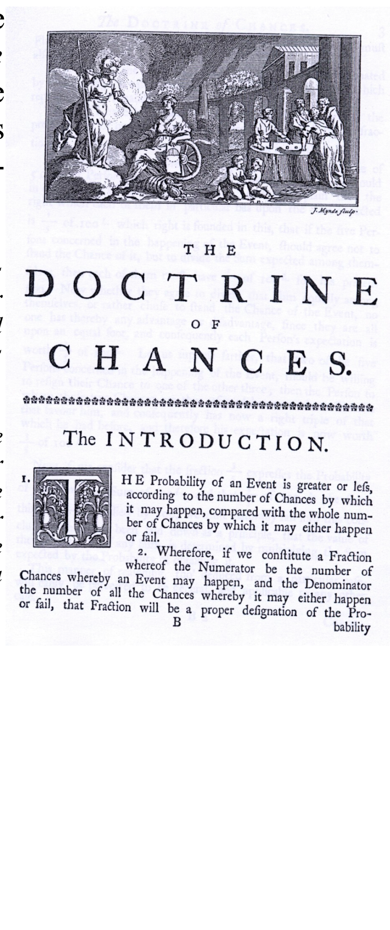
By A. DE MOIVRE, Fellow of the ROYAL SOCIETY, and Member of the ROYAL ACADEMIES OF SCIENCES of Berlin and Paris.

LONDON: Printed for A. MILLAR, in the Strand. MDCCLVI.

On retrouve dans l'ouvrage de Abraham de Moivre (1667-1754), *The doctrine of chances* en 1718. Cette approche apparaît dès les premières lignes de l'introduction donnée ci-contre et que l'on peut traduire ainsi :

I. La Probabilité d'un Événement est plus ou moins grande suivant le nombre de Chances par lesquelles il peut arriver, rapporté au nombre total des Chances par lesquelles il peut ou ne peut pas arriver.

II. Ainsi, si on forme une Fraction dont le Numérateur est le nombre de Chances par lesquelles un Événement peut arriver, et le Dénominateur le nombre de toutes les Chances par lesquelles il peut arriver ou ne pas arriver, cette Fraction sera une véritable définition de la probabilité que se produise cet Événement.


THE DOCTRINE OF CHANCES.

The INTRODUCTION.

1. THE Probability of an Event is greater or less, according to the number of Chances by which it may happen, compared with the whole number of Chances by which it may either happen or fail.

2. Wherefore, if we constitute a Fraction whereof the Numerator be the number of Chances whereby an Event may happen, and the Denominator the number of all the Chances whereby it may either happen or fail, that Fraction will be a proper designation of the Probability

B

4. Vers une définition des probabilités

Henri Poincaré remarquait en 1856 que l'on n'a pas de "définition satisfaisante" de la probabilité. En effet, la plupart des probabilités sont connues par l'intermédiaire de la "loi des grands nombres" laquelle ne se définit qu'en faisant appel à la notion de probabilité elle-même ! Le cercle vicieux de cette définition sera brisé en 1933 par Kolmogorov, avec sa théorie axiomatique des probabilités basée sur la théorie de la mesure. Mais cette théorisation de la probabilité ne permet pas d'associer des modèles, avec sa validation, aux situations réelles rencontrées. Nous le retrouverons dans le chapitre présentant des problèmes de modélisation.

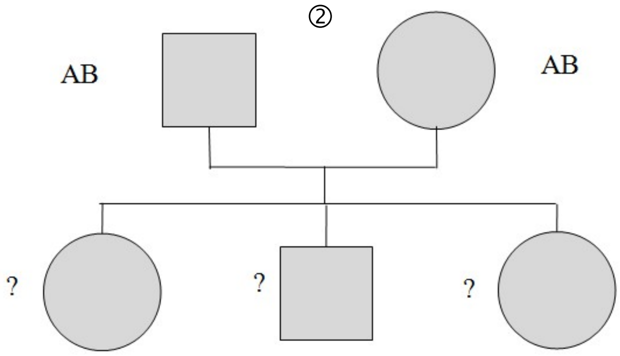
La plupart de nos activités présenteront, conformément aux recommandations du programme de troisième, les probabilités aux travers d'une approche fréquentiste. D'autres activités utiliseront les propriétés reposant sur la formule de Laplace, c'est-à-dire que la probabilité de réalisation d'un événement est le quotient entre le nombre de cas favorables à cet événement et les cas possibles (ou, pour des situations où le nombre de cas possibles est infini, à la proportion entre ces valeurs).

5. Nos activités

Nous pouvons résumer à trois types de situations les activités qui sont proposées dans cette brochure comme le suggère le schéma ci-dessous.

①

②



③

① La première est suggérée par cette vue de plusieurs dés de tailles et de formes différentes. Il s'agit dans cette situation d'une approche fréquentiste des probabilités suivie d'une preuve possible ou accessible. Cette situation s'expose généralement par des simulations par élève puis regroupement dans une classe ou bien simulation sur un tableur pour en augmenter le nombre. Un arbre ou un tableau à double entrée peuvent constituer une démonstration :

- simulation numérique suivie d'une preuve reposant sur un dénombrement ou des calculs par analogie avec la situation symétrique : somme de deux dés, lancé d'une pièce de monnaie, tirage dans une urne, …
- simulation géométrique suivie d'une preuve : principe de Monte-Carlo comme le tirage sur une cible, sur des domaines dont on peut connaître la proportion au tout.

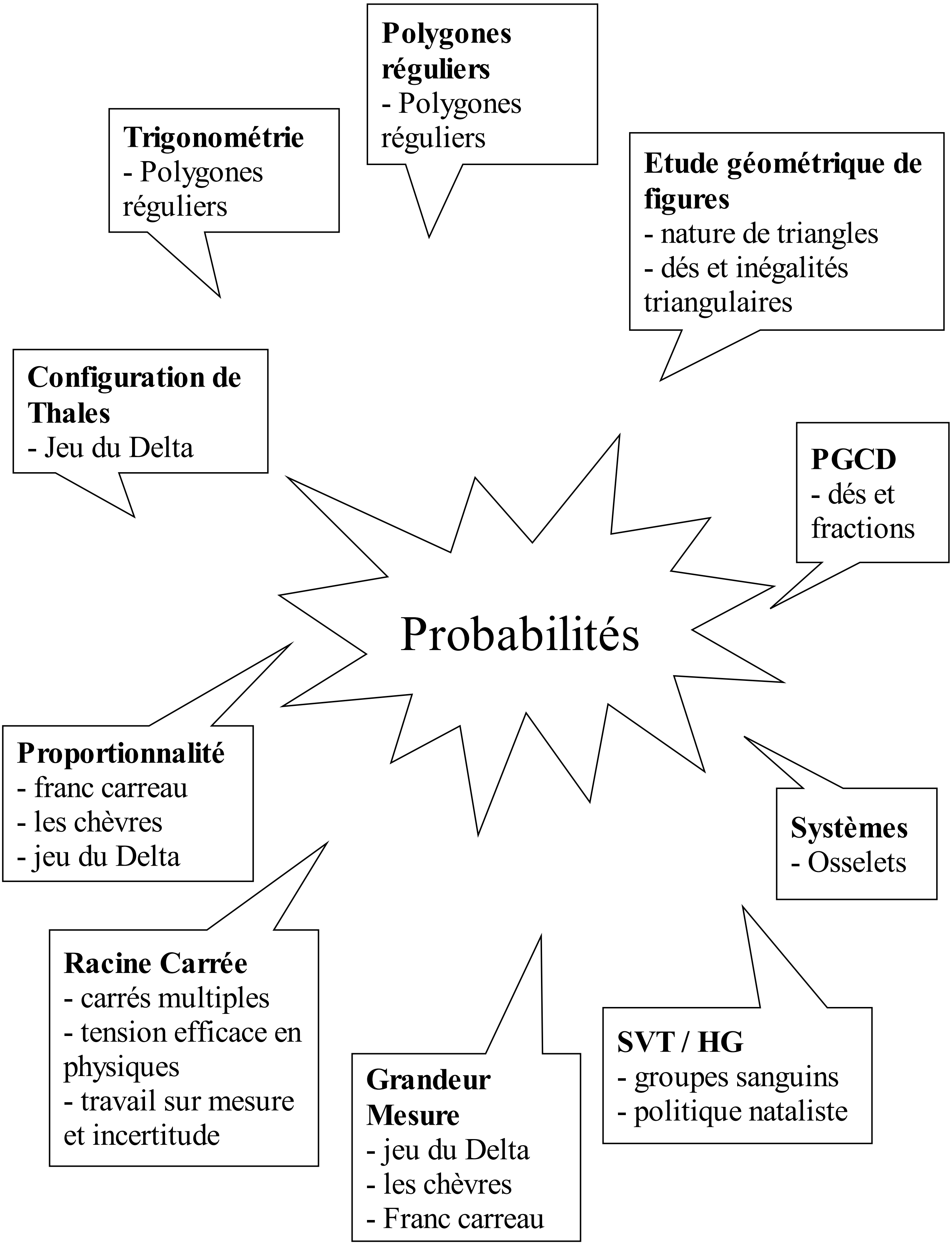
② Le diagramme suggérant la répartition des groupes sanguins de descendants suivant ceux des parents désigne une approche des probabilités sans expérimentation.
Cette situation correspond à une répartition de la population, éventuellement donnée par des pourcentages. Il faut faire attention à ce que la population soit suffisamment grande pour que la proportion dans la population ne change pas si on enlève un individu (dans le cadre d'une expérience à deux épreuves).

③ L'aspect fréquentiste permet seul d'approcher les probabilités. C'est le cas du classique lancer d'une punaise avec la recherche de la probabilité de reposer sur la pointe ou sur le côté plat. On peut aussi envisager le lancer d'un bouchon de bouteille en se posant la question de la probabilité de tomber sur la face convexe, la face concave ou le côté du bouchon.

6. Double progression

La diversité de ces situations probabilistes nous conduit à la nécessité d'une "double" progression spiralée afin de construire la notion de probabilité chez nos élèves : une progression mathématique et une progression TICE.
En effet, étant convaincus que plusieurs activités, espacées dans le temps, sont nécessaires à l'installation et de la notion mathématique et de savoir-faire informatiques, nous proposons tout au long de l'année de rencontrer les probabilités dans des domaines variés tels que l'arithmétique, la proportionnalité, les études géométriques de figures (triangles, polygones réguliers), les systèmes, le domaine des grandeurs et mesures, sans oublier les autres sciences (voir annexe 1).
Parallèlement, les outils TICE étant indispensables dans cet apprentissage, la question d'une progression incluant différentes fonctionnalités du tableur s'est posée. Nous avons souhaité aussi inclure des activités utilisant la calculatrice en s'appuyant sur des tables aléatoires (voir annexe 2).
Une utilisation de ces tables sera expliquée dans le chapitre II sur la simulation.
Notons au passage que l'acquisition de savoir-faire TICE nécessite du temps, et que face à l'hétérogénéité dans nos classes, nous avons volontairement fait le choix de faire travailler les élèves par groupe devant un ordinateur (groupe de 2 ou 3).
Les activités proposées permettent une dynamique de groupe tant au niveau de la réflexion mathématique qu'au niveau d'une stratégie de l'utilisation de logiciel informatique (tableur ou logiciel de géométrie dynamique). La gestion de la classe entière en salle informatique en est ainsi allégée par une auto-prise en charge par les groupes d'élèves des questions techniques, l'idée d'un travail individuel étant exclue.
L'utilisation du tableur (imposée par des contraintes didactiques telles que le nombre de faces du dé) vient après une phase expérimentale qui prend du temps (la première séance). Il est donc nécessaire de prévoir une articulation de 2h minimum avec la première séance en salle de classe puis une deuxième séance en salle informatique. Puis viendra le temps de la synthèse.

Outils pour spiraler autour de la notion de probabilité



annexe 1

VERS UNE PROGRESSION SUR L'UTILISATION DES TICE :

- **Fonctions du tableur utilisées dans nos activités :**

– **ALEA ou ALEA.ENTRE.BORNES**

La fonction ALEA nécessite la touche F9 pour que les simulations soient relancées alors que l'instruction ALEA.ENTRE.BORNES utilise la séquence de touches CTRL + MAJ + F9.[1]

Ex : Elle peut être introduite par un lancer de dé, d'un jeton...
*On simule un dé à 20 faces par l'instruction =ENT(ALEA()*20)+1* ou bien par l'instruction =ALEA_ENTRE_BORNES(1;20).

– **NB.SI( )** qui permet de compter des nombres similaires à un nombre référent.

Ex : permet de compter la fréquence d'apparition du 4 lors de lancers de dés.

– **SOMME( )**

– **SI(; ;)**

c'est le test "Si .... alors .... sinon ...."
Si(; ;)

La difficulté est de renvoyer 1 si la condition de départ est réunie et 0 si elle ne l'est pas afin de comptabiliser le nombre de cas favorables grâce à la somme des 1.

Ex d'introduction du test Si(; ;)

On lance un dé à 6 faces et on cherche la fréquence des lancés qui donnent un résultat supérieur à 4. On utilisera : Si(A1>4;1;0)

- **Fonctions de la calculatrice :**

Utilisation de random

chez TI
rand qui correspond à l'alea()
randn() qui correspond à l'alea.entre.bornes

chez Casio
ran#
ranint

1 L'aléa que nous étudierons dans le chapitre II permet de générer un nombre (pseudo-)aléatoire de [0;1[alors que alea_entre_bornes(1;n) permet d'obtenir un entier parmi les entiers (équiprobables) de $\{1;2;...;n\}$.

annexe 2

Table de chiffres aléatoires

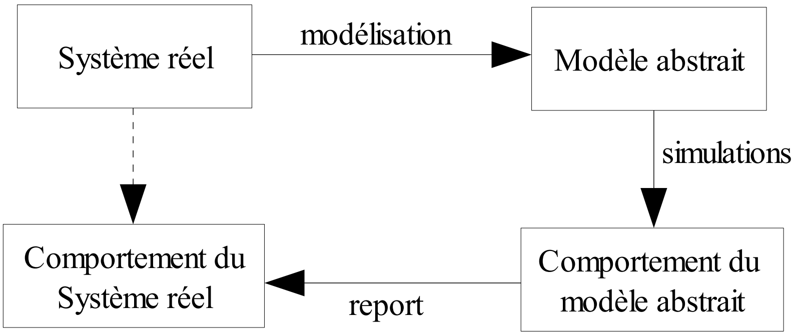
7 0 0 0 8	8 5 5 2 2	7 6 4 7 1	9 3 7 1 7	2 9 2 6 9	5 9 8 2 0	2 5 2 8 1	9 9 7 1	1 5 0 0 3
8 5 6 1 1	9 6 6 0 8	2 0 5 6 2	9 9 3 4 7	6 4 5 9 0	8 5 6 7 2	6 6 3 2 4	4 6 3 7	8 6 5 7 1
8 3 6 0 5	5 4 6 6 8	6 7 6 1 3	3 9 4 9 4	1 3 9 7 1	7 1 3 3 5	8 9 6 0 4	1 7 2 1	7 6 4 0 9
8 4 3 2 1	0 1 7 2 7	7 6 1 1 6	0 7 7 2 0	8 0 6 7 1	4 2 8 4 8	6 5 2 5 9	6 3 7 4	1 2 7 6 4
1 0 9 8 2	9 6 2 0 6	4 3 5 2 3	1 8 4 2 2	0 5 1 6 2	5 1 8 0 0	6 3 3 3 3	9 4 8 8	0 6 1 8 5
4 1 0 0 4	8 1 7 2 9	1 8 1 0 5	4 8 6 8 9	7 4 2 1 0	8 8 8 8 2	1 1 7 6 9	5 9 7 7	5 3 4 8 3
0 7 6 3 1	1 0 8 6 8	0 8 2 2 2	2 4 7 6 8	2 2 1 8 3	6 5 7 5 1	8 0 2 7 7	6 5 9 6	3 0 2 3 5
7 7 8 0 8	8 5 5 2 9	6 4 1 1 0	3 0 8 7 5	1 4 1 2 6	7 0 5 7 6	0 3 3 3 8	1 2 9 0	4 6 7 1 0
3 3 6 9 7	1 9 0 0 6	5 5 0 2 3	8 1 5 4 4	4 6 4 3 9	2 6 0 1 8	7 6 8 1 2	9 1 9 6	9 0 2 0 1
2 0 5 3 0	3 4 9 2 3	8 9 6 2 2	5 4 6 8 5	8 3 2 4 9	9 2 1 4 5	2 4 7 4 0	1 0 5 9	5 7 9 9 6
2 4 2 7 7	7 8 2 7 6	5 8 5 8 1	3 8 9 2 9	7 5 2 6 1	4 9 2 2 5	2 0 3 1 4	4 2 7 9	0 4 5 7 5
9 7 6 0 9	9 7 8 2 1	8 8 1 9 9	4 7 7 0 2	2 6 8 9 7	7 7 8 8 5	9 5 7 5 5	8 5 4 1	8 9 2 3 7
6 9 0 4 7	6 8 6 1 3	8 5 0 3 3	8 5 7 1 0	0 1 3 3 6	2 9 7 0 6	0 2 0 4 5	4 5 6 3	3 5 0 6 2
2 2 2 0 8	2 3 0 1 3	8 9 7 4 2	2 3 5 9 3	3 3 6 5 0	0 2 5 0 0	2 9 2 3 9	4 9 7 2	8 4 9 2 8
0 7 1 2 2	1 0 6 0 4	4 4 7 7 0	6 5 1 4 4	4 1 7 8 3	8 0 0 8 0	9 6 5 3 5	2 1 2 7	8 7 4 9 7
8 8 8 0 6	1 6 9 5 6	9 8 7 0 9	9 6 8 3 2	3 4 8 0 3	8 6 3 0 4	5 3 5 6 0	7 4 2 0	8 3 5 8 6
1 5 5 3 7	0 1 8 5 3	0 3 5 3 7	9 5 6 8 8	0 4 9 8 0	2 1 4 7 2	5 1 2 4 6	3 8 4 1	3 1 7 6 3
9 0 6 4 5	8 2 4 5 4	8 4 3 1 3	9 1 7 2 7	8 3 8 5 2	3 5 9 1 0	6 4 2 0 5	9 7 4 7	9 8 9 0 3
0 8 1 2 1	7 3 8 8 9	2 8 5 6 2	5 8 7 7 2	4 4 2 2 3	4 1 6 4 2	9 6 4 4 0	9 5 0 4	9 9 3 4 0
5 9 6 9 6	8 0 2 2 3	0 6 2 8 2	9 3 4 3 0	3 1 6 5 8	7 4 4 6 2	3 8 2 9 7	7 8 9 5	6 2 5 3 3
4 0 6 7 7	6 8 1 5 1	6 8 0 0 2	7 0 7 3 9	9 5 4 8 2	7 1 3 1 7	8 5 0 9 2	6 2 7 2	1 0 5 9 9
2 9 2 5 3	1 6 6 7 6	0 9 6 8 6	8 6 9 8 8	9 2 1 6 4	6 5 2 7 7	3 4 6 0 5	2 2 9 7	2 1 4 6 7
4 8 6 3 5	3 6 6 5 1	7 4 8 0 0	6 3 8 8 8	4 7 8 0 4	2 3 0 5 4	8 9 1 7 8	4 3 0 5	4 1 1 5 8
0 4 0 6 7	1 7 7 9 3	5 7 7 8 5	2 7 4 7 8	8 4 4 1 8	6 2 5 7 2	2 6 6 6 8	9 1 2 3	4 9 2 9 2
9 1 1 4 1	5 4 4 6 4	4 6 8 7 4	8 1 1 4 4	1 0 4 5 1	0 4 7 8 8	1 7 2 3 9	1 6 8 7	6 1 2 5 0
9 4 0 3 5	1 9 2 6 1	2 7 1 6 7	9 0 9 6 6	9 2 1 8 8	7 2 7 8 3	7 6 0 7 2	0 6 3 0	4 7 9 1 9
2 2 9 7 7	7 4 3 1 5	5 8 9 2 5	9 7 2 0 6	9 0 2 3 9	2 7 2 0 3	9 2 3 6 2	1 7 6 2	6 7 1 9 5
8 4 4 4 1	0 0 6 7 8	4 7 5 3 0	4 6 8 9 9	0 4 3 3 0	3 4 6 3 9	3 4 5 4 9	9 8 1 1	2 6 6 7 8
6 1 1 4 1	5 0 8 1 4	5 3 4 8 2	8 3 7 0 8	4 8 4 9 0	0 0 0 5 6	2 2 8 2 0	0 2 0 9	5 4 8 2 5
6 3 5 8 3	1 3 7 8 6	5 3 4 2 7	9 4 8 4 4	9 5 2 9 1	5 7 5 9 8	6 8 0 6 8	5 2 9 2	9 2 6 7 1
3 2 3 4 1	5 6 3 0 6	9 9 9 5 8	1 7 9 6 4	8 4 6 2 5	0 3 7 3 7	2 2 2 6 1	9 5 0 5	0 3 6 8 3
6 6 7 4 0	4 8 6 1 7	0 3 5 5 4	6 2 8 3 9	4 8 8 6 4	1 7 5 4 3	3 0 3 8 0	7 4 1 2	8 5 2 5 8
9 8 8 2 4	1 8 8 5 2	9 7 4 9 7	1 3 7 4 7	2 5 0 5 0	3 0 6 1 1	0 3 9 7 7	9 8 0 1	5 1 0 4 7
1 3 8 1 3	4 1 7 2 0	8 5 5 2 2	2 6 8 8 6	4 8 5 3 5	7 8 7 1 3	9 6 5 0 3	9 4 0 9	4 5 3 7 7
8 7 7 9 9	8 4 2 1 1	3 0 4 8 4	3 9 2 1 4	0 7 2 1 7	5 5 8 0 2	1 7 2 7 2	9 3 3 5	0 1 9 7 2
5 0 9 4 3	4 0 4 2 0	5 9 1 8 2	8 0 3 6 0	0 1 3 8 8	8 3 1 5 3	8 2 7 6 4	7 5 6 7	6 5 8 7 9
8 5 6 0 1	5 9 2 5 4	7 4 2 7 0	7 7 5 2 4	2 3 9 8 1	4 3 0 2 5	8 0 3 6 8	0 2 4 2	6 6 6 7 7
9 9 9 7 1	6 6 6 0 4	5 6 5 2 8	3 1 8 0 5	1 1 3 7 7	6 9 1 1 8	0 0 7 2 7	1 9 4 2	5 9 6 9 5
1 5 1 1 7	1 8 3 0 3	4 4 3 8 6	4 6 5 3 3	4 6 9 1 7	0 2 7 8 4	7 6 0 0 5	4 7 5 0	4 6 7 2 4
0 0 3 3 5	4 4 5 8 3	1 7 3 9 6	8 3 0 3 2	1 8 1 1 0	7 8 0 4 9	0 7 9 5 1	3 3 6 0	4 2 2 6 5
0 2 7 6 0	9 8 6 9 5	0 4 8 0 4	4 1 5 4 4	2 3 6 2 4	6 3 5 3 1	2 0 5 1 4	8 5 8 7	1 1 3 6 3
4 7 1 9 9	7 3 1 8 3	4 7 5 5 2	2 6 3 4 2	6 0 2 4 4	3 6 1 0 6	4 3 4 5 3	1 3 6 2	8 9 4 7 3
9 5 2 1 0	8 2 4 0 3	9 8 5 8 2	5 9 7 9 8	8 8 3 8 5	0 8 4 4 8	1 1 8 9 2	0 8 8 0	9 6 2 0 2
3 1 2 1 0	5 4 6 4 6	1 1 9 2 3	4 5 1 9 5	3 1 3 5 6	0 9 9 0 8	9 5 0 3 9	6 0 9 0	5 9 1 0 4
5 4 9 6 2	0 9 3 6 3	8 0 0 9 9	4 9 8 4 0	9 1 6 9 8	7 0 4 1 7	2 4 0 2 4	7 1 3 2	7 5 1 6 5

Chapitre II
La simulation

Robin de l'île par Dobritz.

1. Notion de simulation

La simulation est une technique de modélisation du monde réel, le modèle mathématique d'un système étant l'ensemble des relations mathématiques caractérisant les états possibles du système. Elle consiste à évaluer numériquement le modèle pour tenter d'en décrire le comportement. Si la représentation du système réel par le modèle abstrait est suffisamment précise, on peut reporter sur le système réel les résultats obtenus sur le modèle abstrait.



Pour qu'une simulation soit fiable, il faut que les nombres aléatoires utilisés aient toutes les propriétés que l'on attend.

On peut faire remonter l'origine de la simulation au milieu de XVIII^{e} siècle où le comte de Buffon fit lancer à un enfant 2048 séries de pile ou face, jusqu'à obtenir face sur chaque série, de manière à déterminer une valeur empirique du gain moyen dans le problème de Saint-Pétersbourg. On retrouve également à la fin du XIX^{e} siècle, Karl Pearson (inventeur du test du Khi-deux) demandant à des amis et des élèves d'effectuer des lancers de pièces ou de dés.

Les premières *tables* de nombres pris au hasard ont été construites en recueillant le hasard physique, dans les années 1925 à partir des numéros gagnants de la loterie. En 1927, une liste de 41 600 nombres aléatoires pour usage scientifique, produite par Leonard Tippett, a été publiée par Cambridge University Press. La fondation RAND, en 1955, publia *A million Random Digits with 100,000 Normal Deviates.*

La méthode à Monte-Carlo...

En 1951, Neumann remarquait que, par leur propre nature, il ne peut pas exister de méthode algébrique capable de produire des nombres aléatoires. Un algorithme implémenté produira une suite de nombres dont la nature est déterministe, et donc d'une certaine manière prévisible, et la suite aura seulement l'apparence d'être aléatoire.

L'avantage de la simulation est qu'elle peut être bien plus rapide que l'expérience réelle. Elle peut donc être répétée un grand nombre de fois. Ce hasard est aussi utilisé pour résoudre des problèmes parfaitement déterministes qu'on ne sait pas traiter analytiquement, que ce soit par la voie formelle ou par la voie du calcul numérique. La base de la simulation est un "générateur" de nombres aléatoires (méthode de Monte-Carlo qui sera développée dans le chapitre V), c'est-à-dire un algorithme donnant une répétition uniforme des résultats. Il en existe une grande variété. Beaucoup d'entre eux utilisent les restes de divisions d'entiers, mais présentent une certaine périodicité.
Des nombres aléatoires "purs" peuvent être obtenus à partir de phénomènes naturels tels les émissions radioactives ou à partir de dispositifs qui font intervenir le "bruit" électronique. Cependant ces méthodes demandent des équipements spécialisés et coûteux et ne sont pas, en général, utilisées dans le cadre d'une simulation.
Dans la pratique, on fait appel à des générateurs de nombres pseudo-aléatoires dont les nombres obtenus doivent vérifier les caractéristiques suivantes :

- être uniformément distribués ;
- être statistiquement indépendants ;
- être non répétitifs pour toute longueur de suite désirée.

La technique analytique la plus fréquemment utilisée est celle dite des congruences linéaires, inventée par Lehmer en 1948 :
On construit tout d'abord la suite (z_n) définie par son premier terme z_0, appelé germe de la suite, et telle que $z_{i+1} = az_i + b$ modulo M, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

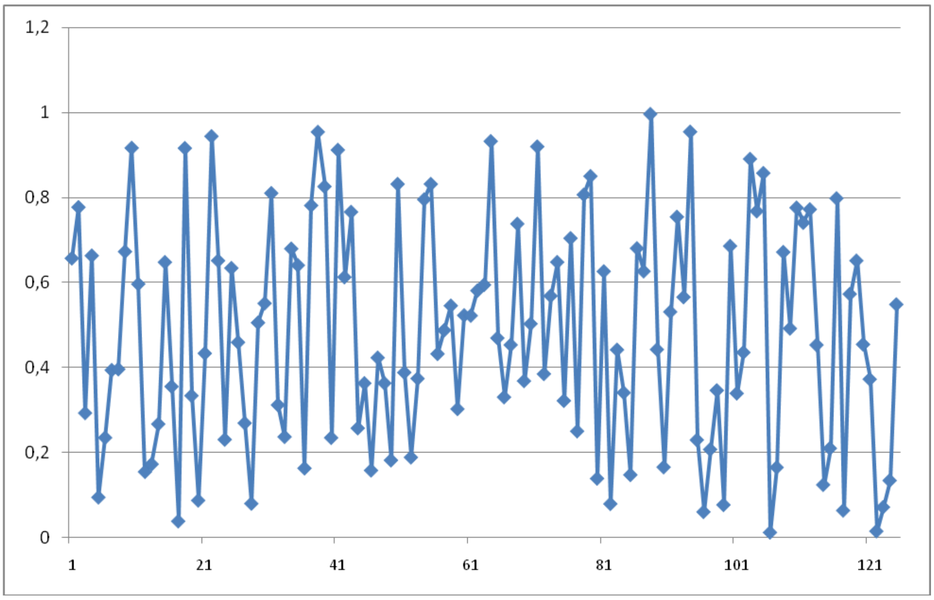
On peut alors définir la suite des nombres aléatoires dans [0;1[par $r_i = \dfrac{z_i}{M}$, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Quelques exemples reposant sur le principe de congruences linéaires :

- Générateur du Turbo Pascal
  $z_{i+1} = 129z_i + 907\ 633\ 385$ modulo 2^{32}
- Générateur d'Excel
  A partir de trois nombres aléatoires de [0;1[obtenus par congruence linéaire, il s'agit de les additionner, la partie fractionnelle de la somme est elle même un nombre aléatoire de [0;1[.
- Générateur TI
  $z_{i+1} = 24\ 298z_i + 99\ 991$ modulo $199\ 017$

Sur un modèle IBM des années 1980, on utilisait la congruence $z_{i+1} = 7^5 \times z_i$ modulo $2^{31} - 1$ avec le germe 5. On a représenté ci-dessous la suite (x_n), définie par $x_n = \dfrac{r_n}{2^{31} - 1}$, fournissant des nombres pseudo-aléatoires de l'intervalle [0;1[. On donne ci-dessous les premières valeurs de (x_n), calculées par le tableur, le graphique montre leur caractère aléatoire qui resterait à contrôler par des tests statistiques.

0,657688941
0,778026611
0,29325066
0,663836187
0,094795932
0,235223081
0,394323584
0,396482029
0,67346448
0,917510387
0,59708186
0,154826731
0,172860553
0,267308175
0,648500967
0,35574692
0,038490931
0,917078254
0,334211188
0,087429872
0,433863562



Pour diminuer la différence d'équipement entre nos élèves ou tout simplement pour qu'ils puissent utiliser des nombres aléatoires pour leurs modélisations ou leurs simulations, on peut leur fournir une table de chiffres aléatoires comme il a été donné dans l'annexe 2 du chapitre I.

Lorsque les élèves sont habitués à l'utilisation de tables de chiffres aléatoires, ils peuvent l'être encore dans une évaluation sur les probabilités utilisant les TICE dont il est proposé ici un exemple. Cette table peut être proposée dans le texte de l'évaluation ou bien en note ou encore en feuille annexe.

2. Un exemple d'évaluation

On dispose d'un sac contenant trois boules blanches et deux boules noires.
On tire au hasard un boule et on note sa couleur.

<u>a) Etude de simulation à la calculatrice :</u>
Grâce à la table aléatoire suivante, Adrien propose de modéliser l'expérience ainsi :
Avec sa calculatrice, il fait afficher un nombre entier entre 1 et 5 puis

Si le nombre est 1, 2 ou 3 alors il considère que la boule est blanche.
Si le nombre est 4 ou 5 il considère qu'elle est noire.

2 4 3 4 5 4 5 1 5 4 4 4 1 3 5 1 4 5 3 2 5 1 5 1 5 3 2 4 1 5

1) Calculez dans ce cas la fréquence d'apparition d'une boule blanche.
2) Cette fréquence est-elle une bonne estimation de la probabilité de tirer une boule blanche ?
3) Faites une simulation à l'aide de votre calculatrice. Décrivez comment vous avez procédé et les 30 résultats obtenus.
4) Calculez la fréquence d'apparition d'une boule blanche. Comparez avec celle d'Adrien.

<u>b) Etude de simulation sur tableur :</u>
Voici une capture d'écran du fichier tableur de Léonie qui avait préféré l'ordinateur pour simuler l'expérience.

	A	B	C	D
1	tirage de boule	Test de couleur de boule	somme	fréquence
2	2	1	366	0,61
3	5	0		
4	2	1		
5	5	0		
6	4	0		
7	4	0		
8	5	0		
9	3	1		
10	1	1		
592	5	0		
593	3	1		
594	4	0		
595	5	0		
596	3	1		
597	5	0		
598	5	0		
599	1	1		
600	4	0		
601	5	0		
602				
603				

1) Léonie a rentré dans la case A2 ceci : ALEA.ENTRE.BORNES(1;5).
   Que demande-t-elle au tableur de faire ?
2) Pour la case B2, voici ce que Léonie a mis : SI(A2< 4 ; 1 ; 0)
   Que demande-t-elle au tableur de faire ?
3) Combien a-telle fait de tirages de boules ?
4) Comment peut-elle recommencer une autre simulation ?
5) Quelle formule a-t-elle écrit dans la case D2 ?
6) Léonie prétend alors avoir trouvé la probabilité d'obtenir une boule blanche.
   Elle dit à Adrien que c'est 0,61. Qu'en penses-tu ?

Cette évaluation est à situer après pratique de plusieurs activités liées à une approche fréquentiste des probabilités. Elle demande à l'élève d'interpréter une simulation donnée, d'en créer une lui-même à l'aide de sa calculatrice, puis d'étudier une capture d'écran faisant appel aux savoir-faire accumulés pendant les activités décrites dans les chapitres qui suivent.

3. Comment peut-on utiliser une table de chiffres aléatoires ?

Considérons l'exercice suivant reposant sur l'étude de la répartition des groupes sanguins d'une population.

Le sang humain est classé en quatre groupes : A, B, AB et O.
Dans une population, les groupes sanguins se répartissent comme l'indique le tableau suivant :

A	B	AB	O
40%	10%	5%	45%

On choisit au hasard un individu dans cette population, on note son groupe sanguin.
1) Définir une probabilité attachée au choix d'un individu dans la population répartie en quatre groupes.
2) Expliquer comment simuler un sondage de taille *n* de cette population à l'aide d'une table de chiffres aléatoires.

Si la loi de probabilité concernée est l'équiprobabilité ("on choisit au hasard un individu") sur l'ensemble des individus concernés, les probabilités peuvent être calculées en utilisant la répartition en pourcentage.
Il reste à simuler un sondage de taille donnée. Plusieurs possibilités sont offertes aux élèves : utiliser la calculatrice et ses possibilités de génération de nombres "pseudo-"aléatoires entre 0 et 1 ainsi que les tables de chiffres aléatoires.

<u>En utilisant la touche rand (ou ran, ran#, ...) de la calculatrice</u> :
Si le nombre aléatoire se trouve entre 0 et 0,4, alors la calculatrice a ainsi permis de choisir un individu du groupe A. La question d'un élève sur l'obtention de la valeur exacte 0,4 ne manquera pas d'intervenir dans la classe. Nous avons deux possibilités d'y répondre, soit le nombre doit être dans l'intervalle [0;0,4[pour qu'il puisse simuler un individu du groupe A (et ainsi de suite pour les autres groupes), soit on essaie d'expliquer que parmi l'infinité de valeurs, il est presque certain (au sens de la probabilité) de ne pas pouvoir obtenir 0,4. Le caractère continu de ces nombres (formellement) provoque de nombreuses difficultés parmi les élèves.
Si le nombre aléatoire se trouve entre 0,4 et 0,5 (avec la même remarque sur les valeurs extrêmes), ce nombre permet de simuler un individu de groupe B.
Si le nombre aléatoire se trouve entre 0,5 et 0,55, il permet de simuler un individu du groupe AB.
Si le nombre aléatoire est entre 0,55 et 1, l'individu sera du groupe O.

<u>En utilisant la table de chiffres aléatoires</u> :
On choisit pour cela une ligne quelconque puis une colonne quelconque de la table, par exemple les chiffres extraits ci-dessous de la table de chiffres aléatoires de l'annexe 2 du chapitre I :

8 5 5 2 2   7 6 4 7 1   9 3 7 1 7   2 9 2 6 9

On considère les chiffres aléatoires par groupes de deux chiffres, ici 85, 52, 27, 64, 71, ...
Si ce nombre est entre 01 et 40, l'individu est du groupe A.
Si ce nombre est entre 41 et 50, l'individu est du groupe B.
Si ce nombre est entre 51 et 55, l'individu est du groupe AB.
Si ce nombre est entre 56 et 99 ainsi que 00 (pour 100), l'individu est du groupe O.

Dans le cas où il s'agit de simuler une population contenant 250 individus, il est possible de continuer d'utiliser une table de chiffres aléatoires. On considère les chiffres par groupes de trois et constituant ainsi un nombre. Si ce nombre dépasse 250, inclus puisque 000 représentera 250, on ne le retient pas et on forme le nombre suivant. Pour des nombres inférieurs à 250, on suit la répartition de la population comme pour l'exercice précédent.

Il est également possible d'utiliser les décimales de π comme moyen de simuler des chiffres aléatoires. Gardner citait en 1996 : "On a soumis jusqu'ici la suite de décimales de π à tous les tests statistiques qui pouvaient en montrer le caractère aléatoire. C'est un peu déconcertant pour ceux qui pensent qu'il devrait exister un rapport un peu moins irrégulier entre le diamètre et le périmètre d'une courbe aussi belle que le cercle mais la plupart des mathématiciens pensent qu'on ne trouvera jamais la moindre régularité ni aucun ordre dans le développement décimal de π" . Le lecteur pourra en juger par lui-même ci-après.

Décimales de π

On ne sait toujours pas démontrer si les décimales de π sont équiréparties ou non !

Π = 3,
1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164
0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172
5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4428810975
6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482
1339360726 0249141273 7245870066 0631558817 4881520920 9628292540 9171536436
7892590360 0113305305 4882046652 1384146951 9415116094 3305727036 5759591953
0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381
8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277
0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 7785771342
7577896091 7363717872 1468440901 2249534301 4654958537 1050792279 6892589235
4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837
2978049951 0597317328 1609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035
2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 5982534904
2875546873 1159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787
6611195909 2164201989 3809525720 1065485863 2788659361 5338182796 8230301952
0353018529 6899577362 2599413891 2497217752 8347913151 5574857242 4541506959
5082953311 6861727855 8890750983 8175463746 4939319255 0604009277 0167113900
9848824012 8583616035 6370766010 4710181942 9555961989 4676783744 9448255379
7747268471 0404753464 6208046684 2590694912 9331367702 8989152104 7521620569
6602405803 8150193511 2533824300 3558764024 7496473263 9141992726 0426992279
6782354781 6360093417 2164121992 4586315030 2861829745 5570674983 8505494588
5869269956 9092721079 7509302955 3211653449 8720275596 0236480665 4991198818
3479775356 6369807426 5425278625 5181841757 4672890977 7727938000 8164706001
6145249192 1732172147 7235014144 1973568548 1613611573 5255213347 5741849468
4385233239 0739414333 4547762416 8625189835 6948556209 9219222184 2725502542
5688767179 0494601653 4668049886 2723279178 6085784383 8279679766 8145410095
3883786360 9506800642 2512520511 7392984896 0841284886 2694560424 1965285022
2106611863 0674427862 2039194945 0471237137 8696095636 4371917287 467764657 ...

Chapitre III
Premières activités avec des dés

Pathologie du jeu, Pâquier Joostens.
Alea, sive de curanda in pecuniam cupiditate libri duo
Amsterdam, L. Elzevier,1642

1. Introduction à la simulation sur tableur, avant toute activité

Le programme officiel stipule que : *“la notion de probabilité est abordée à partir de situations familières* (*pièces de monnaie, dés, roues de loterie, urnes*)*”.*
Nous avons donc fait le choix de démarrer cet apprentissage autour de dés à jouer, tout en proposant dans la phase expérimentale des dés à 6 faces à volonté et un seul dé à 20 faces pour toute la classe, sans présenter de dé à 100 faces.

Avant toute véritable activité au sens où nous l'entendons, voici quelques pré-requis nécessaires :

- savoir lancer un dé à l'ordinateur (première simulation) en utilisant les fonctions ALEA.ENTRE.BORNES, NB.SI, Σ
- connaître la notion de fréquence.

Aussi, nous proposons le travail initial ci-dessous, très guidé, mais nécessaire dans un premier temps. Il se mène en une heure en salle informatique.

SIMULATION D'UN LANCER DE DES
Avec OpenOffice

On veut simuler 600 lancers de dés à l'aide d'un tableur de la manière suivante.

1ère partie : simulation de lancers

1) colonne A : pour entrer un nombre aléatoire entier entre 1 et 6, on utilise la fonction ***ALEA()*** qui renvoie un nombre décimal entre 0 et 1, puis ***ENT*** pour en prendre la partie entière : ***=ENT(6*ALEA())+1***
"Tirer" la formule jusqu'en A600
Taper **F9** pour avoir une nouvelle simulation.

Une autre méthode consiste à utiliser l'instruction ***ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)*** puis de la tirer jusqu'en A600. Il s'agira de taper les touches ***CTRL+MAJ+F9*** pour avoir une nouvelle simulation.

2ème partie : exploitation des données

1) Indiquez dans les cases C1 jusqu'à C6 les résultats possibles d'un lancer de dé.

2) Dans la colonne D, nous allons compter le nombre de fois que chaque résultat est apparu.
Pour cela, on utilise la fonction ***NB.SI*** (nombre similaire)
Dans la case D1, entrer : ***= NB.SI($A$1:$A$600;C1)***
Cela indique le nombre de résultats égaux à la valeur de C1 dans la plage de données $A$1:$A$600

Le symbole **$** permet de figer la plage des données pour la colonne et pour la ligne (mais ici les lignes pourraient suffire) quand on va tirer la formule (référence absolue) pour les cellules D2 à D6.

Tirer jusqu'en D6. Calculer la somme en D7.

3) En colonne E : mettre en E1 la fréquence d'apparition de 1, en E2 celle d'apparition de 2, etc.

Calculer la somme des fréquences en E7.

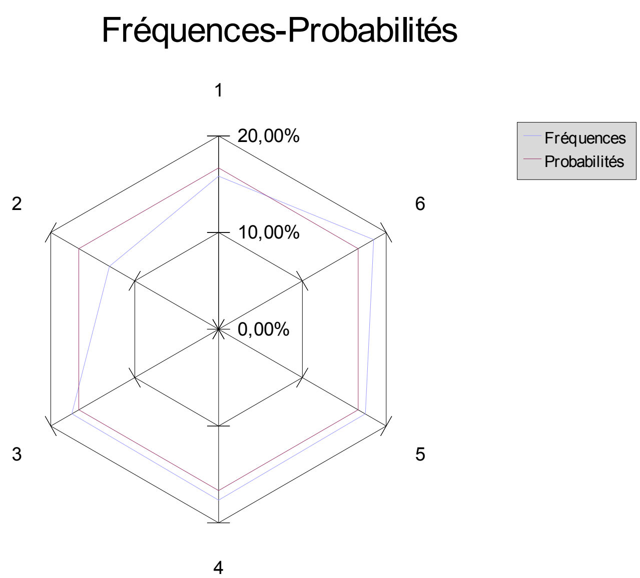
4) Dans la colonne F, nous allons indiquer les valeurs des probabilités d'obtenir 1 en F1, celle d'obtenir 2 en F2, etc...

Calculer la somme des probabilités en F7.

3ème partie : comparaison à l'aide d'une araignée

Sélectionner les plages E1:F6 puis dans Insertion diagramme, sélectionner l'araignée et la tracer.

On peut alors comparer les fréquences et les probabilités.



On peut imaginer comme synthèse de classe la projection d'un fichier élève, son étude avec la classe entière, et les quelques points suivants à débattre :

- quel serait l'effet d'un petit nombre de lancers (10 par exemple) sur la fréquence ?
- comment relancer une simulation rapidement ?
- l'observation du graphique : lorsqu'on relance la simulation, que se passe-t-il ?
- quelle différence entre ALEA.ENTRE.BORNES et ALEA en terme de relance ?

Enfin, ce travail permet aux élèves de découvrir certaines fonctionnalités du tableur (avec l'utilisation de l'assistant de fonction qui évite des problèmes de syntaxe). Cet énoncé sert de point d'ancrage pour les activités qui suivent.

2. Dés et Fractions

Voici une première activité, qui suppose comme pré-requis la notion de fraction irréductible, et un minimum de connaissances en ce qui concerne les fonctions du tableur.
Les élèves avaient auparavant fait le travail décrit au 1.

DES ET FRACTIONS

1) On lance au hasard deux dés à 6 faces en notant a le résultat du premier dé et b celui du deuxième. On s'intéresse à la fraction a/b.
   Quelle est la probabilité que cette fraction soit irréductible ?

2) On utilise cette fois deux dés à 20 faces.
   Même question.

3) Et avec des dés à 100 faces ?

Le matériel proposé est composé de plusieurs dés à 6 faces (il en faut 2 par élève pour permettre la manipulation de tous mais ils ne doivent être distribués qu'à la demande). Nous proposons un dé à 20 faces pour toute la classe, et éventuellement aussi un dé à 100 faces (plus pour montrer son existence aux yeux des élèves que pour sa manipulation).
Le temps imparti est de 2h sans la synthèse.
Le lieu de la séance peut être le CDI (où il y a des ordinateurs et des tables de travail) ou bien une salle de classe pour la première heure et une salle informatique en deuxième séance (le passage à l'utilisation du tableur est alors fortement suggéré par le changement de lieu). L'idéal est de trouver l'environnement qui permette aux élèves de gérer eux mêmes le passage à l'utilisation des TICE quand cela s'avère nécessaire à leurs yeux. Une classe mobile peut tout à fait convenir dans ce cas.

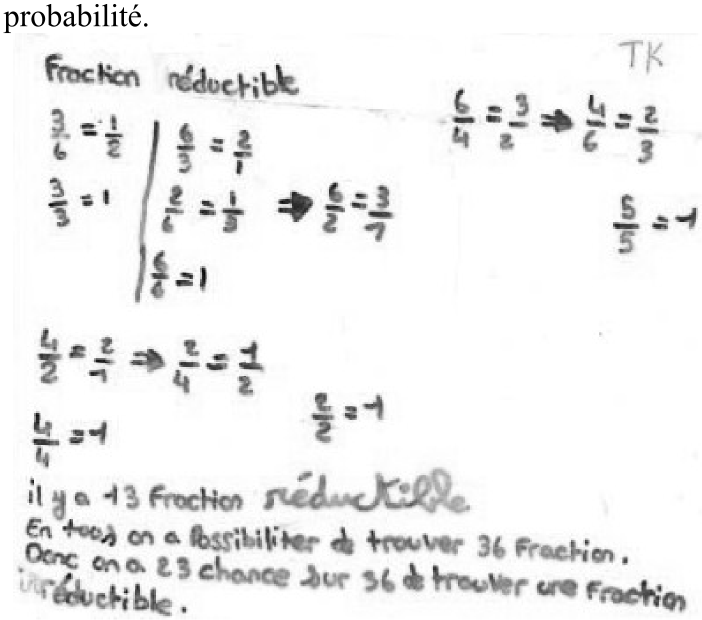
Voici le déroulement de cette activité :

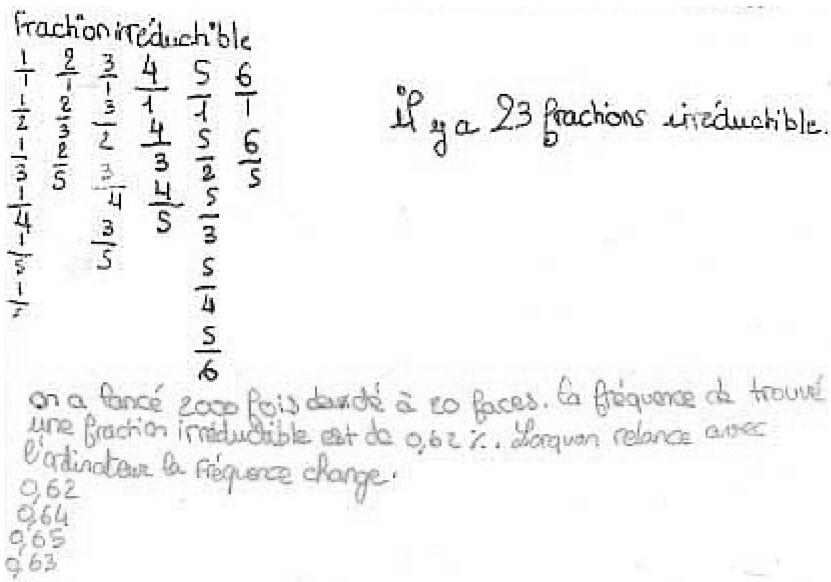
1. une phase individuelle d'appropriation de 5 à 10 minutes environ où plusieurs dés à 6 faces et un seul dé à 20 faces sont volontairement mis à disposition des élèves sur une table à part.
2. une mise en groupe (de quatre élèves) avec production de transparents à rendre au bout des deux heures.
3. un travail sur tableur qui s'impose chez certains groupes pour le dé à 20 faces et pour tous pour le dé à 100 faces, finalisé par un fichier comme trace écrite pour l'enseignant.
4. une synthèse en classe entière au début de la troisième heure.

Cette activité a été expérimentée au CDI avec une classe de 3e de 23 élèves. Après reformulation de la consigne par un élève afin de redonner du sens au mot irréductible, tous sont allés chercher spontanément deux dés à 6 faces sur une table, Ils ont ensuite lancé une fois les dés en notant les valeurs de a, de b, et en précisant si la fraction obtenue au côté irréductible.

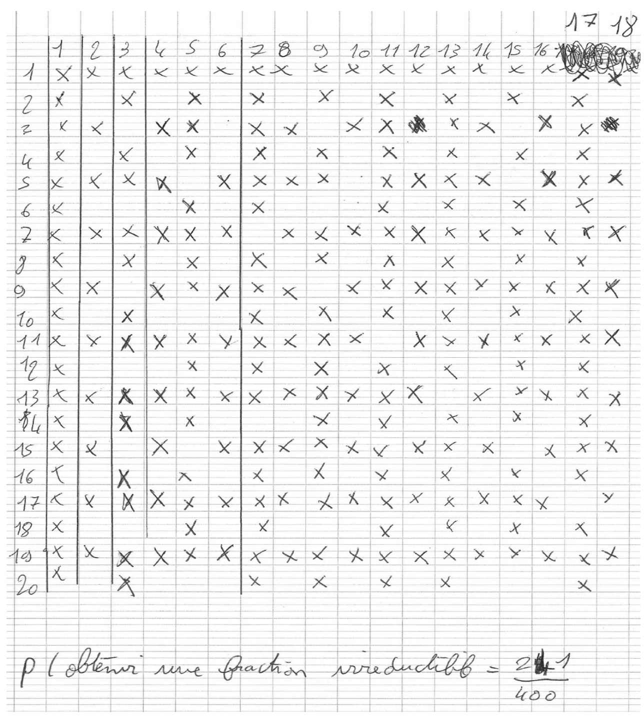
Certains ont eu besoin de relancer les dés pour obtenir d'autres fractions, d'autres élèves ont choisi de donner un terme à leur expérience et de lister méthodiquement tous les cas possibles juste après deux lancers.
Disposés par groupes de quatre dès le départ, ils se sont ensuite partagés le travail : certains cherchaient les fractions réductibles, d'autres les irréductibles dans un même groupe ou bien numériquement certains étudiaient le cas des fractions de dénominateurs de 1 à 3, les autres de 4 à 6 ou encore certains faisaient varier le numérateur de 1 à 6 tandis que d'autres à l'intérieur d'un même groupe s'attachaient à faire évoluer le dénominateur.

Pour des dés à 6 faces, la probabilité d'obtenir une fraction irréductible est ici de $\frac{23}{36}$ ce que les élèves trouvent en grande majorité. En effet, ils passent le plus souvent par le décompte de celles-ci car leur questionnement est de savoir si la fraction obtenue peut se simplifier. Le passage à l'événement contraire nous apparait très intéressant et sera relevé lors de la synthèse. Par contre aucun groupe n'a exprimé le besoin d'utiliser un tableur à ce moment là.
De plus, se pose chez certains élèves une question de symétrie des cas : les fractions $\frac{a}{b}$ et $\frac{b}{a}$ ont-elles le même comportement ?
La réponse a souvent été formulée ainsi : “on a 23 chances sur 36 de tomber sur une fraction irréductible comme l'atteste le transparent suivant. “Le nombre de chances” est utilisé ici comme première réponse à une probabilité.

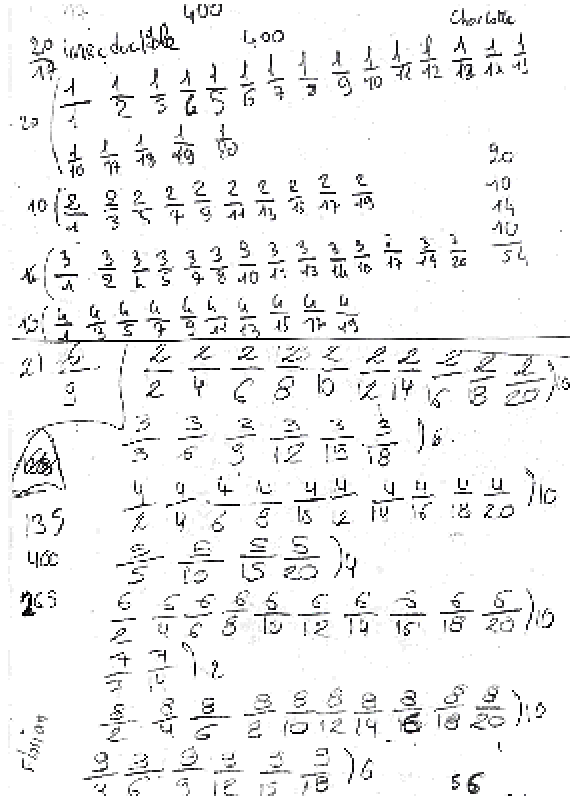


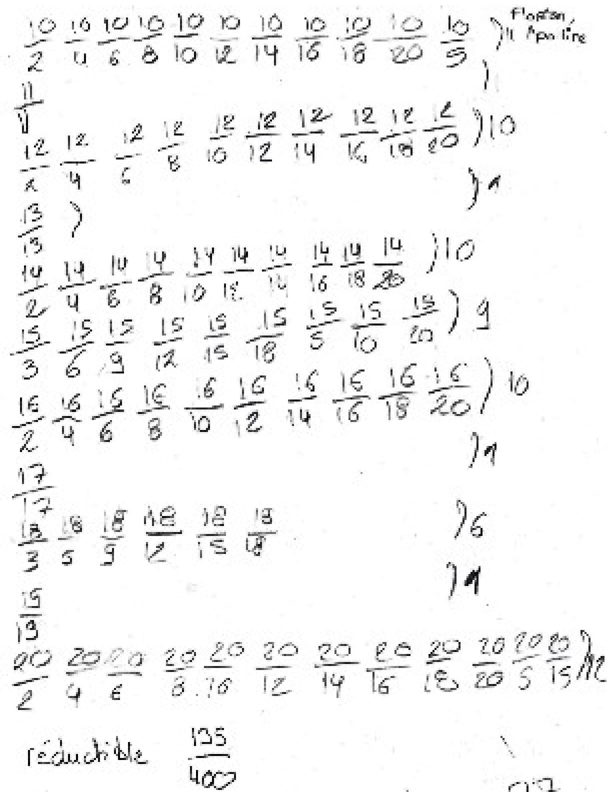


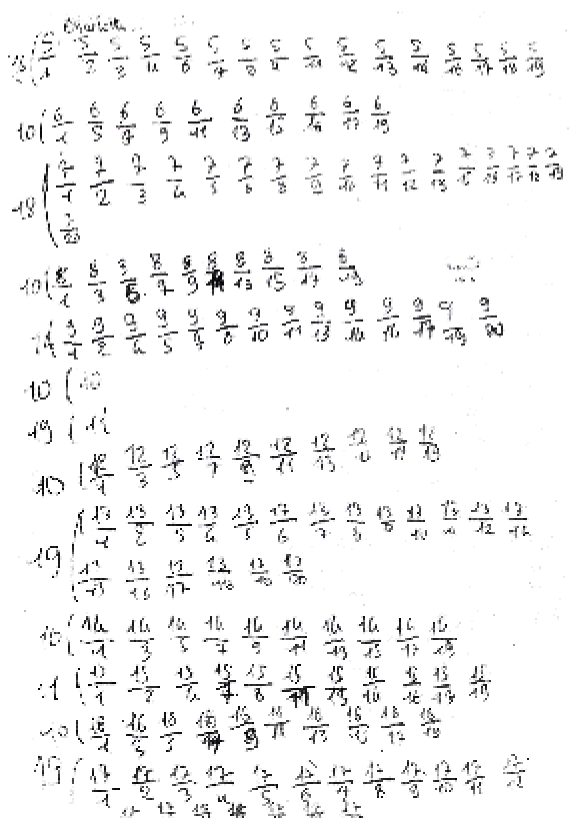
Le dé à 20 faces vient ensuite, comme variable didactique, permettre d'envisager une autre stratégie pour répondre au problème. On observe alors chez certains groupes un refus catégorique de passer à la liste de tous les cas favorables il y en a 400. Ceux-ci proposent alors d'utiliser un tableur pour lancer un dé. Cependant, certains groupes (mais ce n'est pas la majorité des cas) persistent dans le dénombrement malgré le temps passé, tout en divisant les tâches au sein du groupe. Ils ont alors recherché parfois une façon économique de faire une synthèse (voir le tableau ci-dessous) ou ont demandé de photocopier leur brouillons pour les autres élèves.

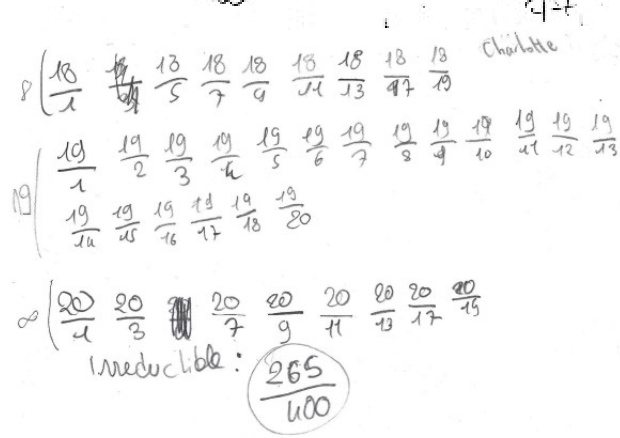


Voici un autre groupe et ses quatre brouillons :









Il est fort intéressant de laisser libre chaque groupe dans sa stratégie. Viendra le temps de la synthèse où seront juxtaposées la valeur théorique de la probabilité et les fréquences observées en lien avec leurs différentes approches de cette activité.
Quant au dé à 100 faces, il vient cette fois bloquer la résolution du problème par le nombre 100² de cas possibles. Il force ainsi tous les groupes à utiliser le tableur.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Nb de 1	Fréquence de 1		Lancé de dé à 100 faces				Nb de 1	Fréquence de 1
2									
3				19	47	92		64	0,01
4	3125	0,62		47	67	64			
5				84	20	23			
6				23	68	37			
7				57	12	23			
8				57	28	31			
9				29	44	99			
10				20	17	12			
11				13	47	8			
12				21	38	10			

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	Nb de 1	Fréquence de 1		Lancé de dé à 100 faces				Nb de 1	Fréquence de 1	
2										
3				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)		=NB.SI(H3:H5003;1)	=L3/5003	
4	=NB.SI(C3:C5003;1)	=E4/5003		=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
5				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
6				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
7				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
8				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
9				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
10				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
11				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				
12				=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;100)				

La troisième séance, avec la présentation des transparents ou fichiers tableurs, peut se terminer par l'introduction de ce qu'est un **événement**, **un événement contraire**. Elle permet aussi d'installer le fait qu'**une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1**, et que **la somme des probabilités d'un événement et de son événement contraire vaut 1 (**résultat qu'ils anticipent notamment s'ils étudient à la main le cas des dés à 20 faces en se partageant les fractions réductibles et irréductibles)

Pour le dé à 20 faces : après étude d'un ou deux fichiers tableurs, il est intéressant de :

- discuter du choix fait par certains groupes de faire pour le dé à 20 faces exactement 400 simulations.
- de faire varier le nombre de simulations (10 , 30, 100, 600, 1000, 6000).
- de confronter le calcul de la probabilité théorique aux estimations obtenues par simulations tableur (la juxtaposition des deux permet de renforcer la vision de la probabilité comme valeur limite).

Pour le dé à 100 faces : traité par peu de groupes en 2h, il peut être prétexte à simulation en classe avec discussion sur le nombre de lancers, puis on peut institutionnaliser ceci :

Lorsqu'on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, la fréquence de réalisation d'un événement devient proche de sa probabilité.

Notons qu'ici, la probabilité théorique peut être atteinte en un temps limité quand le dé à 6 ou 20 faces. L'intérêt du dé à 100 faces est de ne plus avoir accès qu'à une estimation.

Plus généralement, la probabilité d'obtenir deux nombres entiers premiers entre eux est de $\frac{6}{\pi^2}$.

En voici des éléments de démonstration :
Notons p cette probabilité, en supposant qu'elle existe, et considérons deux nombres entiers dans un intervalle de la forme $[1,n!]$, de pgcd n.

La probabilité d'avoir un entier multiple de n est $\frac{1}{n}$ donc la probabilité d'avoir deux entiers de pgcd n *est* $\frac{1}{n^2}\times p$.

En passant en revue tous les pgcd possibles et en considérant tous les entiers, on obtient :

$$p + p\times\frac{1}{2^2} + p\times\frac{1}{3^2} + ... + p\times\frac{1}{n^2} + ... = p\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^2} = p\,\frac{\pi^2}{6} \text{ (Euler)}$$

D'où

$$p = \frac{6}{\pi^2}$$

D'autres activités ne permettent pas aux élèves d'atteindre la probabilité, c'est le cas de l'activité suivante “Dés et triangles”.

3. Dés et triangles

Cette activité menée dans une autre classe de 3e, nécessite comme pré-requis cette fois l'inégalité triangulaire vue en classe de 5e et la connaissance de fonctionnalités du tableur rencontrées dans le travail préparatoire sur le lancer d'un dé.

DES ET TRIANGLES

1) On lance au hasard trois dés à 6 faces. On note *a*, *b* et *c* les trois résultats obtenus. Quelle est la probabilité que le triangle de longueurs *a*, *b* et *c* soit constructible ?

2) On utilise cette fois trois dés à 20 faces. Même question.

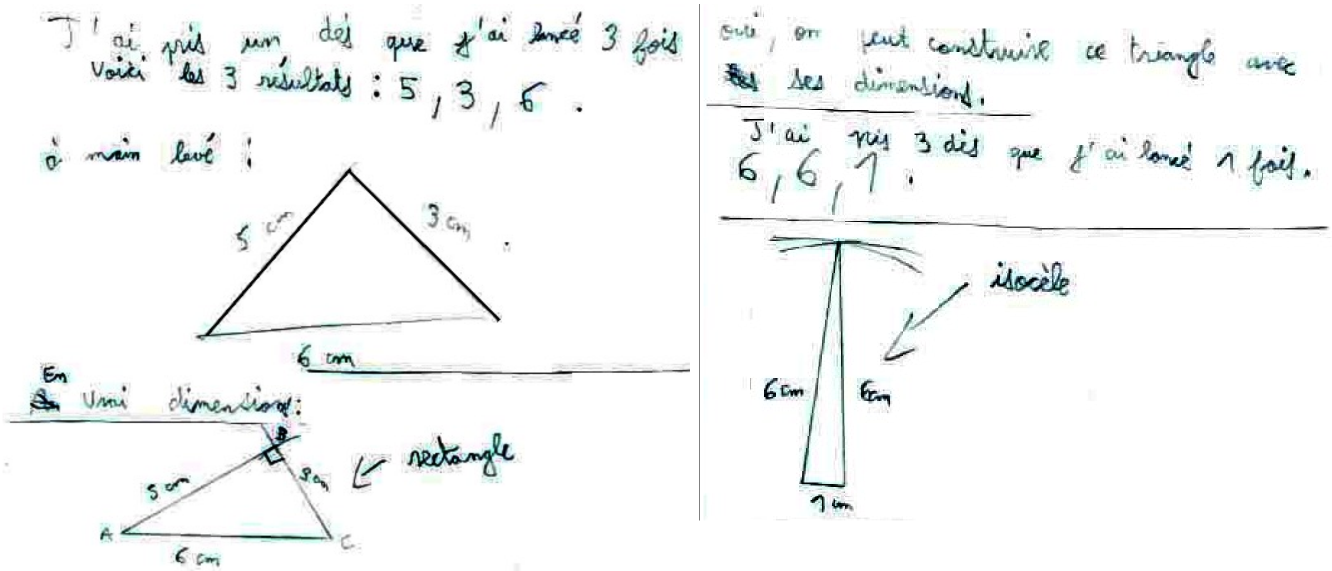
3) Et si les dés ont 100 faces ?

Voici le déroulement de cette activité :

1. En salle de classe, une phase individuelle d'appropriation de 20 à 30 minutes environ où plusieurs dés à 6 faces et un seul dé à 20 faces sont mis à disposition des élèves sur une table à part.
2. Une mise en groupe (de quatre élèves) avec production de transparent à rendre au bout des deux heures.
3. Un travail en salle informatique, par groupe, la deuxième heure.

Lors de la première séance, dans une phase expérimentale, certains élèves se sont munis de trois dés et les ont lancés une fois, tandis que d'autres en ont pris un seul qu'ils ont lancé trois fois. Ce fût avant regroupement des élèves sujet à discussion dans la classe.

Voici le travail individuel de Kévin.



Lui posant la question suivante :

-"Peut-on considérer que tu as fait la même expérience ?"

Il a répondu de façon affirmative en justifiant ainsi :

-"Cela revient au même parce que dans les deux cas, j'ai obtenu un triangle que je peux construire."

Le problème de la modélisation (qui sera évoqué dans le chapitre VI) ainsi que le statut de l'issue de l'expérience sont soulevés ici,

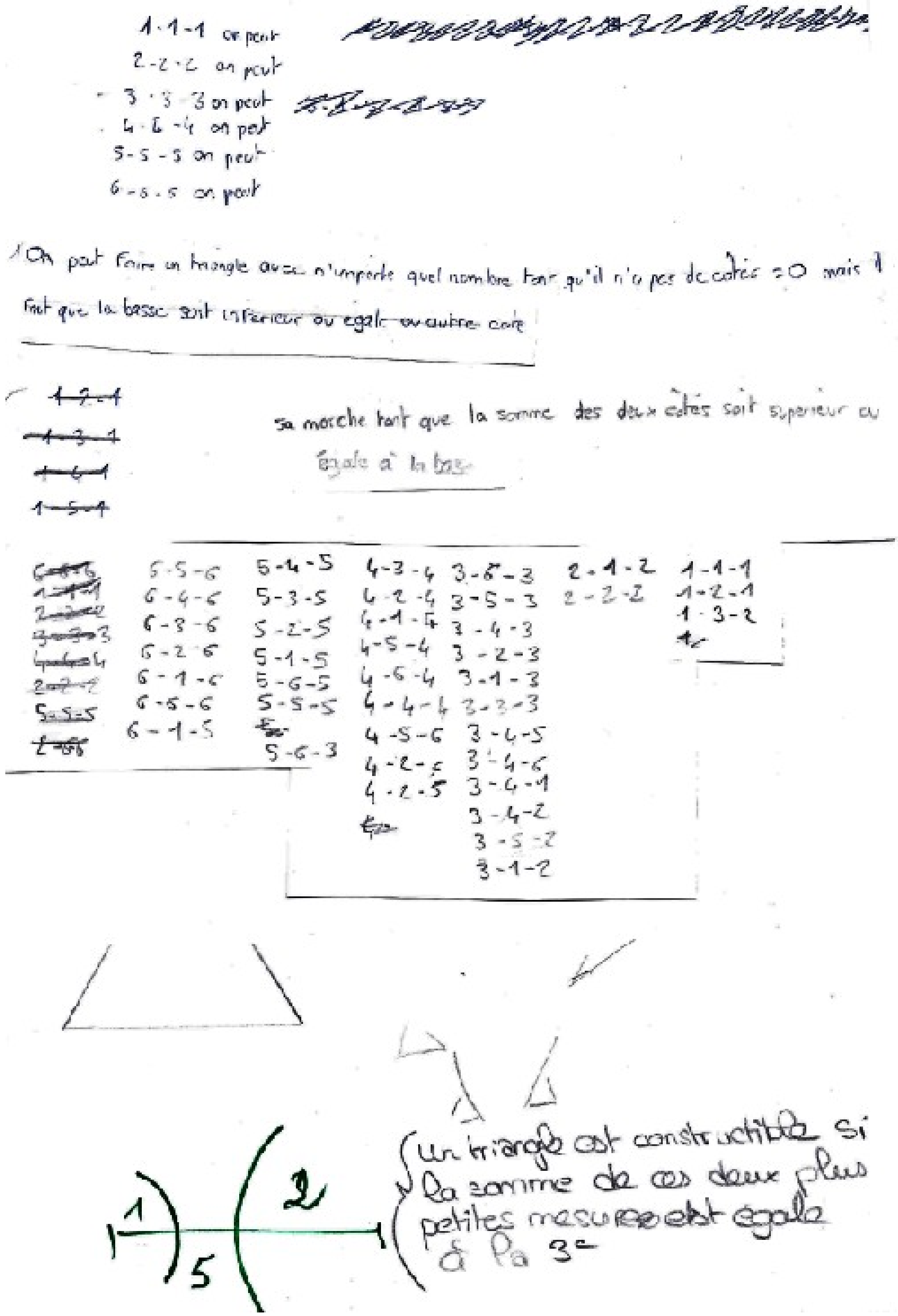
Le temps de l'expérimentation a permis aux élèves de s'approprier l'énoncé ainsi que de réfléchir à la constructibilité d'un triangle et à la limite de la représentation à main levée d'une figure. La représentation avec les instruments de géométrie (règle, compas) ne s'est pas imposée pour tous au départ.

Voici deux entrées différentes dans cette activité:

Le premier élève, Edouard, exprime la nécessité de construire en vraie grandeur le fruit de ses expériences qui sont multiples (il en a fait jusqu'à tomber sur un cas où le triangle n'était pas constructible).

Quant à Stéphane, il commence par lister tous les triangles équilatéraux de côtés de 1 à 6, passe ensuite aux triangles isocèles non équilatéraux, toujours sans faire de construction, tout en faisant évoluer sa réflexion sur le problème posé. Il a fallu la confrontation en groupe à Stéphane pour considérer des triangles de côtés considérés au hasard des expériences effectuées par ses autres camarades.

Nous pouvons aussi observer combien ils sont attachés encore en classe de troisième aux triangles particuliers (isocèles ou équilatéraux) quand ils commencent à lister des triangles constructibles.

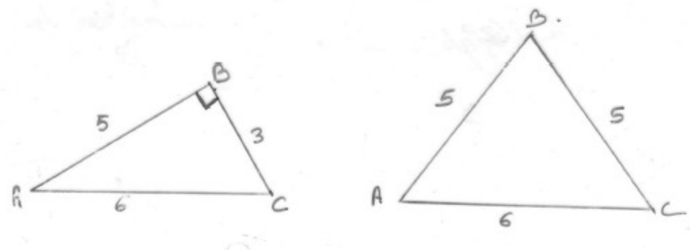


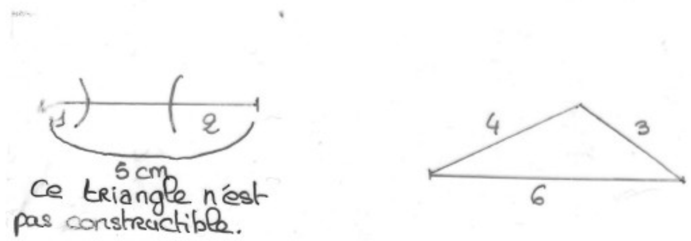
Expérience du groupe.

	a	b	B	Constructible ?	Nature
Kévin	5	3	6	Oui	Rectangle.
Aurélie	5	6	5	Oui	isocèle
Marion	1	2	5	Non	
	6	4	1	Non	
thomas	1	1	3	Non	
Marion	6	3	4	Oui	quelconque.

Un triangle est constructible si la somme de ces deux plus petites mesures est égale à la 3ème.

On a une chance sur 12 d'avoir un triangle isocèle.
On a une chance sur 18 d'avoir un triangle équilatéral.



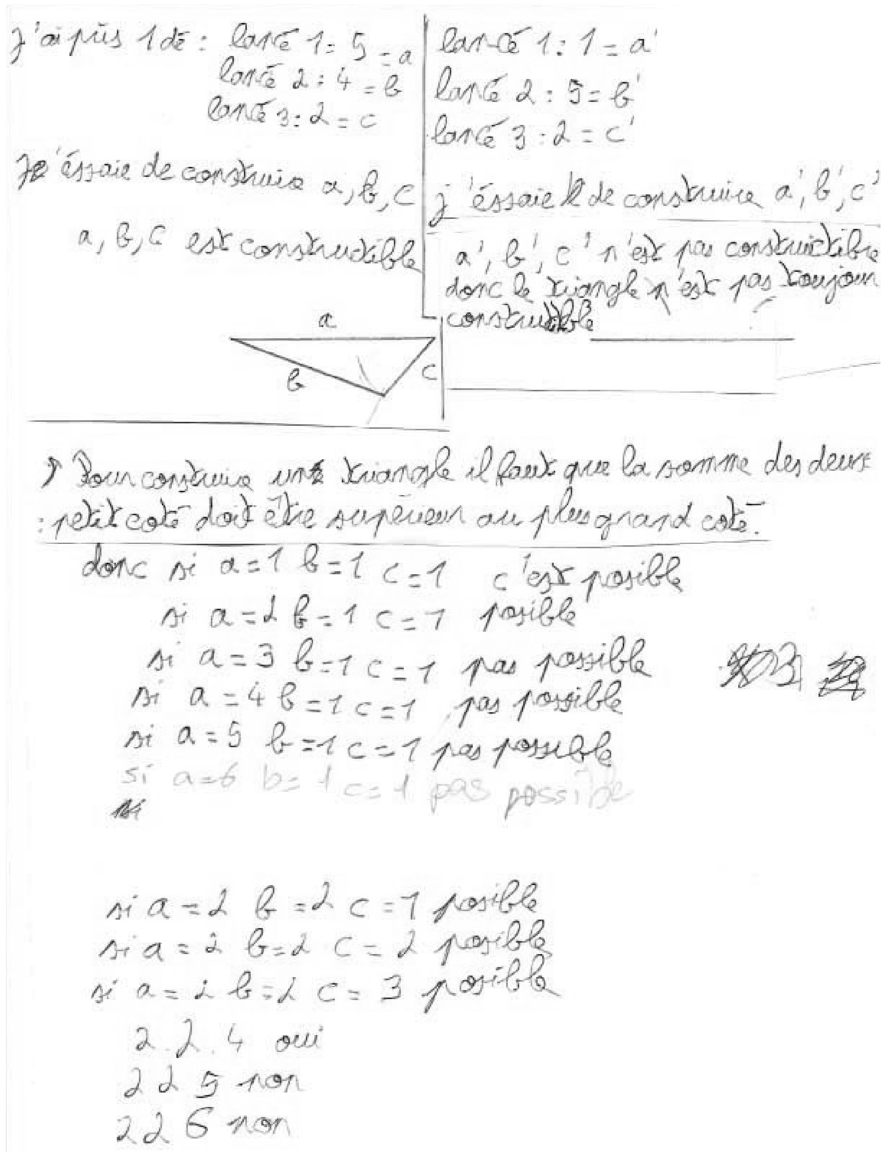


La constitution des groupes est ici à mener en fonction des résultats d'expérimentations : certains élèves n'ayant eu que des triplets constructibles auraient eu tendance à croire que l'événement “obtenir un triangle constructible” était certain. J'ai donc volontairement mis ensemble un élève ayant obtenu un triangle impossible à construire avec ces derniers, provoquant une confrontation.
Au bout d'une heure, tous les groupes ont trouvé à quelle condition un triangle était constructible et ont commencé à lister les triangles possibles. Cependant, ils ont dans cette deuxième phase très vite demandé l'outil informatique, verbalisant “qu'il y avait trop de triangles”.
La séance suivante s'est faite sur tableur en traitant le cas des dés à 6 faces seulement. Elle fût précédée d'une synthèse de 5 minutes, donnant une réponse collective à la question suivante :

A quelle condition peut-on construire un triangle ?

Dans le travail de recherche ci-dessous, l'élève, après deux expériences conduisant à des conclusions différentes, explicite la condition de constructibilité d'un triangle. Puis il quitte progressivement le domaine de l'expérimentation.

Il démarre une liste de triplets méthodiquement en faisant varier uniquement le premier nombre de 1 à 6 et en fixant les deux autres à 1. A la fin de la première séance, il prend alors conscience que la recherche "manuelle" serait longue et le verbalise.



J'ai pris 1 dé : lancé 1 : 5 = a
lancé 2 : 4 = b
lancé 3 : 2 = c
Je éssaie de construire a, b, c
a, b, c est construtible

lancé 1 : 1 = a'
lancé 2 : 5 = b'
lancé 3 : 2 = c'
j'éssaie de construire a', b', c'
a', b', c' n'est pas constructible donc le triangle n'est pas toujours constructible

Pour construire un triangle il faut que la somme des deux petit coté doit être supérieur au plus grand coté.
donc si a = 1 b = 1 c = 1 c'est posible
si a = 2 b = 1 c = 1 posible
si a = 3 b = 1 c = 1 pas possible
si a = 4 b = 1 c = 1 pas posible
si a = 5 b = 1 c = 1 pas possible
si a = 6 b = 1 c = 1 pas possible

si a = 2 b = 2 c = 1 posible
si a = 2 b = 2 c = 2 posible
si a = 2 b = 2 c = 3 posible
2 2 4 oui
2 2 5 non
2 2 6 non

La deuxième séance se poursuit pour son groupe (comme pour les autres) par une simulation avec l'utilisation de la fonction "max" du tableur. Notons qu'ici, la probabilité ne s'atteint que comme valeur limite de fréquence contrairement à l'activité précédente. On peut cependant faire conjecturer sur l'évolution des fréquences en fonction du nombre de faces des dés avant de montrer des simulations.

Intuitivement, des élèves pensent que plus il y a de faces, plus la probabilité de pouvoir construire un triangle est grande car plus de côtés sont possibles.

Or, pour 1000 lancés de dés à 6 faces, voici une capture d'écran d'un fichier d'un groupe :

E2 =SOMME(A2:C2)-D2

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	1er dé	2 eme dé	3 eme dé	Maximum	Somme des 2 plus petit	Test	Total de possible		fréquence
2	5	6	2	6	7	1	525		0,53
3	2	4	5	5	6	1			
4	5	5	6	6	10	1			
5	2	5	2	5	4	0			
6	5	4	4	5	8	1			
7	4	3	4	4	7	1			
8	5	3	6	6	8	1			
9	3	5	5	5	8	1			
10	2	4	4	4	6	1			
11	4	1	5	5	5	0			
988	5	6	2	6	7	1			
989	3	2	5	5	5	0			
990	1	2	3	3	3	0			
991	2	2	2	2	4	1			
992	1	1	4	4	2	0			
993	5	3	6	6	8	1			
994	6	3	2	6	5	0			
995	3	2	6	6	5	0			
996	6	1	4	6	5	0			
997	2	6	2	6	4	0			
998	3	1	5	5	4	0			
999	4	5	4	5	8	1			
1000	6	1	2	6	3	0			
1001									

Notons que lors des simulations sur tableur, les élèves ont des problèmes pour dénombrer le nombre de lancers (beaucoup d'erreurs de type: on a 1000 lancers de A2 à A1000 au lieu de 999).
Pour la somme des deux petits côtés, ils isolent le plus grand côté facilement en utilisant la fonction MAX. Par leurs multiples constructions précédentes, ils trouvent la plupart du temps comment calculer la somme des deux autres côtés en s'appuyant sur les cas travaillés auparavant. Celle-ci est calculée comme différence entre la somme des 3 côtés et le max.
En deux heures, aucun groupe n'est allé plus loin que l'activité pour des dés à 6 faces.

En synthèse en classe entière, après avoir montré des tableurs erronés tels que celui qui suit, nous avons traité très rapidement les autres cas (dés à 20 faces et à 100 faces) en transformant ALEA.ENTRE.-BORNES(1;6) en ALEA.ENTRE.BORNES(1;20) puis ALEA.ENTRE.BORNES(1;100). Il s'agissait alors de répondre à la question suivante par le biais des simulations :

Comment, d'après vous, vont évoluer les fréquences lorsqu'on augmente le nombre de faces du dé ?

Intéressons nous au fichier du groupe de Marion.
Il est très intéressant car il nous montre à quel point chez certains élèves, le tableur n'est pas perçu comme un outil de calcul mais plus comme une simple feuille d'organisation de données.

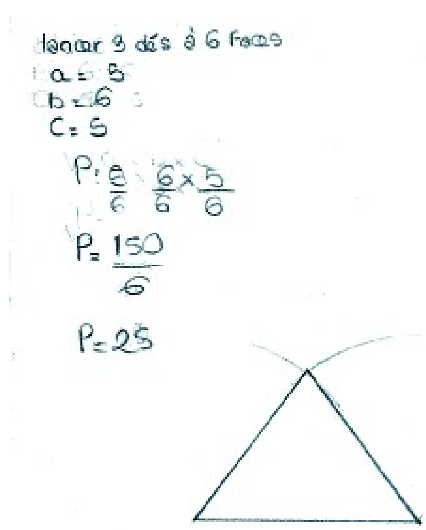
	A	B	C	D	E	F	G
1	Résultats des dés						
2	Dé 1	Dés 2	Dés 3	Mesure du plus grand côté	Somme des 3 côtés	Somme des 2 plus petits côtés	
3	5	6	4	6	15	11	
4	4	4	6	6	14	10	
5	5	4	3	5	12	8	
6	6	6	5	6	17	12	
7	6	1	4	6	11	10	
8	6	5	6	6	17	11	
9	1	4	6	6	11	10	
10	4	1	4	4	9	5	

	A	B	C	D	E	F	G
1	Résultats des dés						
2	Dé 1	Dés 2	Dés 3	Mesure du plus grand côté	Somme des 3 côtés	Somme des 2 plus petits côtés	
3	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A3;B3;C3)	=SOMME(A3;B3;C3)	=SOMME(A3;B3)	
4	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A4;B4;C4)	=SOMME(A4;B4;C4)	=SOMME(B4;C4)	
5	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A5;B5;C5)	=SOMME(A5;B5;C5)	=SOMME(C5;A5)	
6	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A6;B6;C6)	=SOMME(A6;B6;C6)	=SOMME(A6;B6)	
7	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A7;B7;C7)	=SOMME(A7;B7;C7)	=SOMME(C7;A7)	
8	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A8;B8;C8)	=SOMME(A8;B8;C8)	=SOMME(A8;B8)	
9	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A9;B9;C9)	=SOMME(A9;B9;C9)	=SOMME(B9;C9)	
10	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;6)	=MAX(A10;B10;C10)	=SOMME(A10;B10;C10)	=SOMME(A10;B10)	

En effet, pour le plus grand côté, les élèves de ce groupe ont recherché méthodiquement et ont rentré à la main le maximum en observant les trois valeurs à chaque fois. Ces élèves n'auraient sans doute pas usé de cette stratégie en utilisant ALEA plutôt qu'ALEA.ENTRE.BORNES, car ALEA crée une relance automatique dès que l'élève rentre une donnée dans une nouvelle cellule. ALEA.ENTRE.BORNES au contraire, semble figer les données tant que les touches CRT MAJ F9 ne sont pas activées. Le groupe a compris son erreur quand l'enseignant a demandé une relance de simulation en faisant apparaître un maximum qui alors ne correspondait plus aux valeurs des nouveaux dés lancés. C'est ici la dépendance du maximum par rapport aux dés lancés qu'il fallait installer (ce qui n'est pas simple et relève de la notion de fonction).

Voici une autre réponse rencontrée lors de la première séance :

L'élève affecte l'équiprobabilité partout, et ici au résultat de son unique expérience ; il répond ensuite 25 sans se soucier entre autre de la valeur de la probabilité. Ce groupe n'a pris du recul sur sa réponse que par le biais de la deuxième séance en passant à la simulation.



Lors de la synthèse en classe, malgré une sélection de quelques fichiers tableurs vidéoprojetés, il est apparu difficile aux élèves de s'approprier le fichier d'un autre groupe.
En terme de fréquences, nous obtenons, pour 1000 simulations

pour des dés à 6 faces : environ 0,53
pour des dés à 20 faces : environ 0,50
pour des dés à 100 faces : environ 0,50

Si le dénombrement des cas favorables est délicat, nous pouvons utiliser le tableur pour en faire une recherche exhaustive. Il s'agit de placer dans les 3 premières colonnes tous les triplets de nombres entre 1 et le nombre de faces (cette démonstration ne convient pas pour un dé à 100 faces puisqu'un tableur de contient "que" 65536 lignes). Il suffit alors de tester si un triplet de nombres permet de caractériser un triangle constructible.
Les probabilités sont les suivantes ; hors de portée des élèves :

pour des dés à 6 faces : $\frac{156}{216}$

pour des dés à 20 faces : $\frac{4580}{8000}$

pour des dés à 100 faces : $\frac{514900}{1000000}$ (résultat obtenu par la réalisation d'un programme)

4. Dés et triplets Pythagoriciens

Voici une autre activité dont le déroulement est assez proche des deux précédentes (une phase individuelle, puis un regroupement) sur deux séances. Celle-ci s'appuie sur le test d'une égalité de carrés (réciproque du théorème de Pythagore) dont on peut imaginer un travail en amont en classe de 4e (avec les TICE).

DES ET TRIPLETS PYTHAGORICIENS

1) On lance trois fois un dé à 6 faces et on note *a*, *b* et *c* les résultats obtenus.
Quelle est la probabilité que le triangle de mesures *a*, *b* et *c* soit rectangle ?

2) Même question avec un dé à 20 faces.

3) Même question avec un dé à 100 faces.

Cette activité peut se mener en deux séances d'une heure (synthèse non comprise) comme les précédentes. Elle fait découvrir (ou retravailler si cela a été vu en quatrième) les triplets Pythagoriciens au tableur en faisant un test d'égalité sur des carrés de longueurs.
Les élèves, pour le dé à 6 faces, commencent par expérimenter et obtiennent des triplets qui ne conduisent pas au triangle rectangle sauf s'ils obtiennent 3,4,5. La rareté des cas favorables va vite les détourner de l'expérimentation et des lancés. Ils chercheront un nouveau moyen plus efficace en temps et penseront sans doute au tableur.

Les élèves ont tendance à affirmer que plus un dé a de faces, plus la probabilité d'obtenir un triangle rectangle est grande, ce qui est infirmé ici.

Voici la liste exhaustive des cas de triplets :

- avec les dés à 6 faces:
  seuls les nombres 3,4,5 conviennent
  donc $p = \frac{6}{6^3}$, soit $p = \frac{1}{36}$ et on a $p \approx 0{,}028$

- avec les dés à 20 faces:
  3,4,5 ou 6,8,10 ou 9,12,15 ou 12,16,20 conviennent ainsi que 5,12,13.
  donc $p = \frac{5 \times 6}{20^3}$, soit $p = 0{,}00375$.
  Cette fois, il est intéressant d'avoir travaillé en amont de cette activité sur l'effet d'un agrandissement sur les longueurs et les angles. Ainsi, trouver des triplets qui conviennent pour les dés à 20 faces est facilité puisque la majorité peut se déduire par proportionnalité. Seul 5,12,13 ne se déduit pas de cette façon.

- avec les dés à 100 faces : pour ceux qui ont le temps de traiter ce cas (ils sont rares), les élèves éprouvent la nécessité d'utiliser le tableur. La probabilité est quasi-nulle.

Notons qu'ici le test d'égalité s'appuie sur la comparaison entre MAX² et la somme des carrés des deux autres côtés, il est donc nécessaire de calculer la somme des carrés des deux autres côtés comme différence entre somme des carrés des trois côtés et MAX². C'est la même idée que pour l'activité précédente.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	dé1	dé2	dé3	max	max²	somme des 3 carrés	somme des 2 petits au carré	test	somme	fréquence
2	72	68	20	72	5184	10208	5024	0	2	0,00040
3	16	10	20	20	400	756	356	0		
4	61	63	24	63	3969	8266	4297	0		
5	80	49	30	80	6400	9701	3301	0		
6	53	50	100	100	10000	15309	5309	0		
7	17	39	27	39	1521	2539	1018	0		
8	94	52	88	94	8836	19284	10448	0		
9	63	49	83	83	6889	13259	6370	0		
10	91	70	11	91	8281	13302	5021	0		
4986	89	39	89	89	7921	17363	9442	0		
4987	71	75	18	75	5625	10990	5365	0		
4988	1	91	13	91	8281	8451	170	0		
4989	75	13	16	75	5625	6050	425	0		
4990	44	75	84	84	7056	14617	7561	0		
4991	57	28	66	66	4356	8389	4033	0		
4992	30	17	65	65	4225	5414	1189	0		
4993	4	63	67	67	4489	8474	3985	0		
4994	61	76	32	76	5776	10521	4745	0		
4995	35	76	73	76	5776	12330	6554	0		
4996	92	38	39	92	8464	11429	2965	0		
4997	89	77	30	89	7921	14750	6829	0		
4998	10	7	68	68	4624	4773	149	0		
4999	16	61	39	61	3721	5498	1777	0		
5000	37	44	47	47	2209	5514	3305	0		
5001	84	68	91	91	8281	19961	11680	0		
5002										

Un test de type SI(E2=G2;1;0), qui compare le carré du plus grand côté à la somme des carrés des deux autres, permet de conclure quant à la nature rectangle ou non du triangle.
1 est affecté pour une réponse positive, 0 sinon ; ceci permettant de comptabiliser par la somme des 1 tous les triangles rectangles obtenus puis d'en déduire la fréquence.

Enfin, se pose ici le problème de l'utilisation d'un format de cellule approprié. Cette question mérite toute l'attention des élèves car elle peut engendrer des erreurs d'interprétation. C'est aussi l'occasion de travailler sur les valeurs approchées et les précisions d'arrondis.
Ici, il faut amener la discussion sur l'estimation de la probabilité pour les dés à 100 faces. En maintenant un format de cellule par défaut, dans le cas de la capture d'écran précédente, la fréquence affichée serait 0 alors que deux triangles rectangles sont obtenus. Par contre, si nous intervenons pour demander plus de décimales, la fréquence n'est plus nulle (voir capture d'écran précédente sur la cellule J2 du tableur).
Cette activité souligne ce problème de format de cellule, car si nous gardons le format standard, les élèves peuvent conclure à des fréquences nulles alors qu'elles ne le sont pas.

Chapitre IV
Jeux de mains

Les joueurs de cartes -1594 ca, Caravaggio,
Kimbell Art Museum di Fort Worth

Les tricheurs ne connaissent pas la vraie joie de gagner.
Maurice Sachs, écrivain français.

Les jeux sont sources de nombreuses situations reposant sur le hasard et les simulations deviennent possibles. Accompagnés de contextes historiques, ils peuvent être utilisés dans d'autres disciplines. De plus, les jeux de mains permettent une approche immédiate de la situation auprès des élèves qui connaissent le plus souvent les règles exploitées.

Vous trouverez dans cette partie quelques jeux qui ont été adaptés en des activités réalisables en classe ou bien en devoir à la maison.

1. Jeu de Mourre

La *mourre* est un jeu dans lequel deux joueurs se montrent simultanément un certain nombre de doigts, tout en annonçant chacun la somme présumée des doigts dressés par les deux joueurs. Le joueur gagnant est celui qui devine cette somme.
Ce jeu est très ancien, il est notamment évoqué dans *le Satyricon* de Pétrone qui vécut à l'époque de l'empereur Néron pendant le premier siècle de notre ère.
Le nom *mourre* vient de l'italien morra (retard). Il est encore pratiqué en Corse et dans le sud de la France. Les nombres sont accompagnés d'expressions plus ou moins colorées et les participants crient pour intimider l'adversaire.

En Chine et en Mongolie, le même jeu est connu depuis fort longtemps sous le nom "hua quan" signifiant quelque chose comme "faire se disputer les poings" et compte actuellement, selon J. Needham, parmi les divertissements les plus appréciés de la bonne société chinoise.
P. Perny, qui signalait que ce jeu était très en vogue en Chine au siècle dernier, expliquait :
"Si les convives sont liés entre eux par l'amitié, le maître du repas propose de faire une partie du jeu de mourre : qing hua quan (littéralement : "S'il vous plait, faisons se disputer les poings"). Si l'offre est acceptée: "M. Untel sera le régulateur du jeu..." Le maître, par politesse, commence avec l'un des hôtes. Peu après, il cède le tour à l'un de ses convives... Celui qui perd est condamné à boire, chaque fois, une tasse de thé."
Ce jeu est encore le prétexte à l'activité ou au devoir suivant.

Jeu de Mourre

Historique sur ce jeu :
Dans la Rome antique, ce jeu était utilisé pour départager un litige entre deux personnes.
Pendant la Renaissance, il était pratiqué comme divertissement par les personnels de maison.
En Chine, ce jeu servait de distraction à la fin d'un repas entre amis.

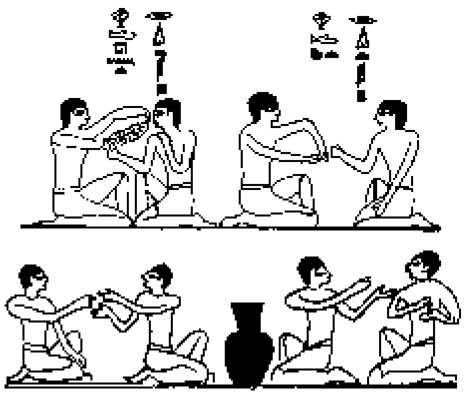
Règle du jeu :
Ce jeu se joue à deux. Chaque joueur cache une main derrière son dos, puis la montre en ouvrant, au choix, de zéro (poing fermé) à cinq doigts.
Dans le même temps, chacun annonce oralement un nombre de son choix.
La partie est gagnée par celui qui devine ainsi le nombre total de doigts montrés par les deux joueurs réunis.

<u>Partie 1 : Pratique du jeu</u>
Faire 10 parties avec votre voisin.

Rendez compte à chaque fois des parties dans un tableau comme ci-dessous :

Main1										
Main2										
Annonce1										
Annonce2										
Somme										
N°1 gagne										
N°2 gagne										
Les 2 gagnent										

Main1 : nombre de doigts montrés par le joueur 1
Main2 : nombre de doigts montrés par le joueur 2
Annonce1 : nombre annoncé par le joueur 1
Annonce2 : nombre annoncé par le joueur 2
Somme : somme réelle de doigts montrés
N°1 gagne : le joueur 1 gagne le coup
N°2 gagne : le joueur 2 gagne le coup
Les 2 gagnent : les joueurs 1 et 2 gagnent simultanément



<u>Partie 2 : Etude du jeu</u>

1) Quelles sont les sommes possibles ?
2) Un joueur ayant montré 2 doigts, quelles sont les sommes possibles ?
3) a) Serait-il judicieux d'annoncer un nombre inférieur au nombre de doigts que l'on montre ? Justifier la réponse.

b) Si un joueur annonce 2, combien de doigts a-t-il pu choisir de montrer ?

4) Un joueur décide de montrer 3 doigts et annonce un total de 7.
Déterminer la probabilité qu'il annonce le bon total.

Partie 3 : Simulation

1) A l'aide d'un tableur, réaliser une simulation de 3 000 parties entre un joueur 1 et un joueur 2. On fera figurer : Main1, Main2, Annonce1, Annonce2, Somme, N°1 gagne, N°2 gagne et Les 2 gagnent.

2) Estimer la probabilité que chaque joueur gagne, puis celle que les deux joueurs gagnent en même temps.

3) Afficher les fréquences en faisant varier le format des cellules (nombres de décimales). Qu'observe-t-on ?

Les élèves ont plusieurs méthodes de construction de la feuille de calcul liée à cette activité.
Dans une classe de seconde, certains élèves ont recopié dans le tableur leur résultat expérimental au lieu de simuler de nouvelles parties. Pour ces élèves, l'aspect aléatoire provenait de l'expérience, pas de l'aléatoire du tableur.
Pour les autres élèves qui ont simulé à l'aide la fonction alea() ou bien alea.entre.bornes(), les conditionnelles (par l'instruction si) pour déterminer celui qui a gagné avaient différents types de résultats pour action :

– soit un test comme ci-dessous :

M1	M2	A1	A2	S	G1	G2	E
5	4	8	6	9	FAUX	FAUX	VRAI

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	M1	M2	A1	A2	S	G1	G2	E
2	=ENT(ALEA()*6)	=ENT(ALEA()*6)	=A2+ENT(ALEA()*6)	=B2+ENT(ALEA()*6)	=A2+B2	=D2=1	=E2=1	=F2=G2

On remarque que le test =D2=1 correspond à un test écrit en =SI(D2=1 ; VRAI ; FAUX)

– soit un test comme ci-dessous :

M1	M2	A1	A2	S	G1	G2	E
2	1	5	1	3	0	0	VRAI

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	M1	M2	A1	A2	S	G1	G2	E
2	=ENT(ALEA()*6)	=ENT(ALEA()*6)	=A2+ENT(ALEA()*6)	=B2+ENT(ALEA()*6)	=A2+B2	=SI(C2=E2;1;0)	=SI(D2=E2;1;0)	=F2=G2

Si le test sur chaque gagnant est entièrement écrit avec l'instruction SI, celui sur l'égalité éventuelle entre les deux joueurs est écrit comme dans le cas ci-dessus.

– enfin, certains élèves n'ont recherché l'égalité qu'entre gagnants. Il faut donc pour cela examiner l'égalité uniquement lorsque les deux joueurs gagnent. Le test pourrait être construit avec la somme des valeurs égale à 2 mais des élèves ont choisi de vérifier, avec l'instruction ET, que les deux joueurs ont un résultat codé 1 :

M1	M2	A1	A2	S	G1	G2	E
4	0	5	1	4	0	0	0

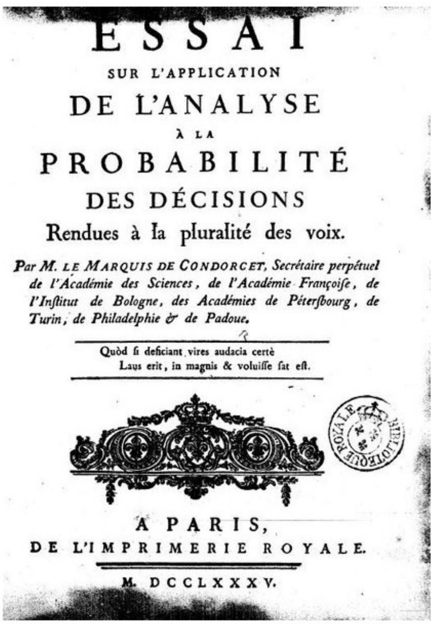
	A	B	C	D	E	F	G	H
1	M1	M2	A1	A2	S	G1	G2	E
2	=ENT(ALEA()*6)	=ENT(ALEA()*6)	=A2+ENT(ALEA()*6)	=B2+ENT(ALEA()*6)	=A2+B2	=SI(C2=E2;1;0)	=SI(D2=E2;1;0)	=SI(ET(F2=1;G2=1);1;0)

Comme dans toute activité en classe, la stratégie employée par les élèves peut différer entre eux. C'est peut-être plus le cas dans le cadre d'une activité informatique où les moyens d'aboutir au résultat sont très différents selon la compréhension de l'énoncé ou la forme du résultat attendu.

Bien que l'énoncé de l'activité cible l'ensemble des valeurs que l'on peut donner à son annonce en fonction du nombre de doigts que l'on va montrer (entre cette valeur et cette valeur plus cinq), certains élèves programmeront cette annonce de la somme entre 0 et 10, sans tenir compte de sa propre valeur ou bien encore entre sa valeur et 10. Les démarches précédentes subsisteront mais la probabilité finale diffèrera selon la modélisation que l'on fait de ce jeu.
La partie 2) de cette activité permet une réflexion pendant le jeu, avant le passage à la simulation, et notamment les question 2) et 3)a) qui permettent un retour sur l'expérience du jeu et d'affiner la simulation (pour préciser les annonces du joueur).

2. Le paradoxe de Condorcet

En 1785, Nicolas de Condorcet publia *l'Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des décisions rendues à la pluralité des voix*. Dans cet ouvrage, il explore un paradoxe qu'il décrit comme l'intransitivité (du point de vue de la comparaison entre le nombre des voies obtenues) possible de la majorité : parmi un même électorat, et lors d'une même élection, il est possible qu'une majorité préfère *A* à *B*, qu'une autre majorité préfère *B* à *C*, et qu'une troisième majorité préfère *C* à *A*.


ESSAI
SUR L'APPLICATION
DE L'ANALYSE
À LA
PROBABILITÉ
DES DÉCISIONS
Rendues à la pluralité des voix.
Par M. LE MARQUIS DE CONDORCET, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, de l'Académie Françoise, de l'Institut de Bologne, des Académies de Pétersbourg, de Turin, de Philadelphie & de Padoue.
Quòd si deficiant vires audacia certè
Laus erit, in magnis & voluisse sat est.
À PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DCCLXXXV.

Nous connaissons plusieurs jeux qui reposent sur ce principe. Le plus connu est celui de pierre / papier / ciseau (le Janken, ou jan ke pon en japonais). Ce jeu se pratique à deux et les joueurs montre simulanément avec leurs mais l'une des trois formes. De façon générale, la pierre bat les ciseaux (en les émoussant), les ciseaux battent la feuille (en la coupant), la feuille bat la pierre (en l'enveloppant). Ainsi chaque coup bat un autre coup, fait match nul contre le deuxième et est battu par le troisième.
Ce jeu est d'origine chinoise et on en retrouve trace au début de notre ère. Il existe des variantes liées à chaque pays et même suivant les régions. Entre autres l'apparition d'un puits (le chi-fou-mi), d'autres pierres de tailles différentes.

Si l'esprit et les règles de ce jeu sont relativement simples, il en est tout autrement lorsqu'il s'agit d'en effectuer des simulations sur un tableur. En effet, le codage nécessaire des trois situations (pour n'en rester qu'à la variante pierre / papier / ciseau) et l'intransitivité de la relation qui fait gagner un objet sur un autre rend la simulation informatique délicate. Il est très difficile pour nos élèves d'affecter un chiffre aux figures : par exemple 1 pour Pierre, 2 pour Feuille et 3 pour Ciseaux. Deuxième difficulté, la traduction de la domination d'une figure sur une autre par un lien fonctionnel entre un couple de chiffre et le chiffre gagnant : Pierre contre Feuille : aux chiffres 1 et 2, 2 est la situation gagnante. Enfin, il reste à retrouver quel joueur a dominé l'autre.

L'activité suivante permet aux élèves de travailler ce jeu en relation avec les probabilités. Un prolongement de ce jeu consiste à considérer des stratégies gagnantes, ce que permet la dernière partie de l'activité.

Pierre/Papier/Ciseaux

Pierre/Papier/Ciseaux est un jeu qui oppose généralement deux joueurs.
Chacun forme derrière son dos, avec sa main, l'une des trois figures suivantes :

- feuille de papier (main étendue, doigts serrés)
- pierre (poing fermé)
- ciseaux (index et majeur écartés et tendus)

Au signal, les joueurs montrent leur main et la plus forte l'emporte suivant les règles suivantes :

- feuille-ciseaux : avantage aux ciseaux
- feuille-pierre : avantage à la feuille
- pierre-ciseaux : avantage à la pierre

Deux figures identiques conduisent à l'égalité entre les deux joueurs.

1ère partie :

1) Jouer 20 parties avec votre voisin et relevez le nombre de parties gagnées grâce à pierre, feuille ou ciseaux dans un tableau.

Main 1																				
Main2																				
N°1 gagne																				
N°2 gagne																				
égalité																				

On suggère de noter F pour feuille, P pour papier et C pour ciseaux.
Peut-on conclure, avec ces 20 parties, sur la préférence à utiliser l'une des trois figures Pierre, Feuille, Ciseaux ?

2) Quelle est la fréquence de parties que vous avez gagnées ?
Peut-on conclure sur la probabilité de gagner si vous ne changez pas de tactique de jeu ?

2ème partie :
Réaliser une simulation de 100 parties avec votre calculatrice ou un tableur :
on suppose que :

- 1 désigne la pierre
- 2 désigne la feuille
- 3 désigne les ciseaux

Traduis les règles du jeu en terme de condition sur les nombres 1, 2 et 3.
Pour t'aider, tu peux revenir au tableau du 1) et le compléter avec des 1, 2 ou 3.
Peut-on conclure sur la probabilité de gagner si les joueurs désignent au hasard l'une des trois figures Pierre, Feuille, Ciseaux ?

3ème partie :
Quelles sont toutes les éventualités de configurations entre les joueurs 1 et 2 ?
En déduire la probabilité de gagner pour un joueur si les joueurs désignent au hasard une figure. En déduire la probabilité d'avoir une partie nulle entre les deux joueurs.

4ème partie : **Recherche de stratégie gagnante :**
Benjamin cherche s'il existe une tactique de jeu efficace pour gagner. Pour cela, il décide de toujours jouer la même chose pendant 100 parties contre son adversaire.

Faire une simulation où Benjamin joue toujours Pierre contre son adversaire.
Faire une simulation où Benjamin joue toujours Feuille.
Enfin, refaire une simulation où il joue toujours Ciseaux.
Comparez les fréquences obtenues. Peut-on en déduire une tactique de jeu ?
Feriez-vous comme Benjamin ?

Dans la capture d'écran de la feuille de calcul ci-dessous, il a été fait le choix de présenter une simulation où les joueurs A et B s'affrontent. Le joueur B effectuant un tirage aléatoire (par le biais du codage 1, 2 et 3 de pierre/papier/ciseau) contre l'ensemble des situations possibles pour le joueur A (trois résultats possibles conduisant au gain de la partie, à une partie nulle ou bien à la défaite).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	partie	joueur B	joueur A1	joueur A2	joueur A3	Gagnant B/A1	Gagnant B/A2	Gagnant B/A3
2	1	1	1	2	3	0	1	2
3	2	1	2	3	4	2	1	2
4	3	3	3	4	5	0	1	2
5	4	3	4	5	6	2	1	2
6	5	1	5	6	7	2	1	2
7	6	2	6	7	8	2	1	2
8	7	1	7	8	9	2	1	2
9	8	2	8	9	10	2	1	2
10	9	3	9	10	11	2	1	2

Dont les instructions de chacune des colonnes étendues sur 100 parties sont :

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	partie	joueur B	joueur A1	joueur A2	joueur A3	Gagnant B/A1	Gagnant B/A2	Gagnant B/A3
2	1	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	1	2	3	=SI(B2=C2;0;SI(B2-C2=2;1;2))	=SI(B2=D2;0;SI(B2-D2=1;2;1))	=SI(B2=E2;0;SI(E2-B2=1;1;2))
3	2	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	2	3	4	=SI(B3=C3;0;SI(B3-C3=2;1;2))	=SI(B3=D3;0;SI(B3-D3=1;2;1))	=SI(B3=E3;0;SI(E3-B3=1;1;2))
4	3	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	3	4	5	=SI(B4=C4;0;SI(B4-C4=2;1;2))	=SI(B4=D4;0;SI(B4-D4=1;2;1))	=SI(B4=E4;0;SI(E4-B4=1;1;2))
5	4	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	4	5	6	=SI(B5=C5;0;SI(B5-C5=2;1;2))	=SI(B5=D5;0;SI(B5-D5=1;2;1))	=SI(B5=E5;0;SI(E5-B5=1;1;2))
6	5	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	5	6	7	=SI(B6=C6;0;SI(B6-C6=2;1;2))	=SI(B6=D6;0;SI(B6-D6=1;2;1))	=SI(B6=E6;0;SI(E6-B6=1;1;2))
7	6	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	6	7	8	=SI(B7=C7;0;SI(B7-C7=2;1;2))	=SI(B7=D7;0;SI(B7-D7=1;2;1))	=SI(B7=E7;0;SI(E7-B7=1;1;2))
8	7	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	7	8	9	=SI(B8=C8;0;SI(B8-C8=2;1;2))	=SI(B8=D8;0;SI(B8-D8=1;2;1))	=SI(B8=E8;0;SI(E8-B8=1;1;2))
9	8	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	8	9	10	=SI(B9=C9;0;SI(B9-C9=2;1;2))	=SI(B9=D9;0;SI(B9-D9=1;2;1))	=SI(B9=E9;0;SI(E9-B9=1;1;2))
10	9	=ALEA.ENTRE.BORNES(1;3)	9	10	11	=SI(B10=C10;0;SI(B10-C10=2;1;2))	=SI(B10=D10;0;SI(B10-D10=1;2;1))	=SI(B10=E10;0;SI(E10-B10=1;1;2))

Il suffit alors de compter (par l'instruction somme le nombre de parties gagnées par le joueur B contre le joueur A dans chacune des situations). On peut alors calculer la fréquence (sur 1000 parties) des parties gagnées, à égalité et perdues qui sont dans chacun de ces trois cas de probabilité $\frac{1}{3}$ comme la symétrie de la situation le laisse présager.

Jouer, c'est expérimenter le hasard.
Novalis[2] (environ 1800)

3. Les osselets ou astragales

Ce jeu se pratique à l'aide d'osselets que l'on retrouve dans les os du pied du mouton. Les osselets que l'on trouve dans le commerce sont un peu plus petits que les os.
Ils sont à l'origine des dés sous le nom d'*astragaloi*, comportant quatre faces planes, deux larges et deux étroites. Ces astragales étaient principalement utilisées dans l'Antiquité dans les jeux populaires réservés aux enfants et aux femmes. Ces objets servaient également d'offrandes à des déesses ou déposés dans des tombes enfantines. L'usage des astragales pour consulter les oracles est également attesté : le lien existe entre destin et hasard.
Dès l'antiquité, le jeu se jouait également comme jeu d'adresse de lancement, le *penthelita*. Comme dans certains jeux de graines (Mancala en Afrique, haricot au Mexique), il s'agit, après les avoir jetés en l'air, d'en recevoir le plus grand nombre possible sur le dos de la main, usage qui a subsisté jusqu'à aujourd'hui.

Le travail suivant peut être pratiqué en activité de classe ou bien en travail à la maison et utilise la notion de système. C'est un travail de réinvestissement de la notion de probabilité autour des systèmes et des équations, qui n'est en aucun cas une activité introductrice de cette notion. Le lecteur remarquera le parallèle entre les combinaisons obtenues par un ensemble d'osselets, liées aux probabilités d'obtenir chacune des faces, et le paradoxe du Duc de Toscane.

C'est en 1620 que Galilée (1554-1642) rédige un mémoire sur un jeu de dés à la suite du problème posé par le Grand Duc de Toscane. Le problème du Grand Duc était fondé sur l'étude d'un jeu en vogue à la Cour de cette époque. Ce jeu de dés consistait à lancer trois dés et voir les numéros qui en résultaient. Or le Duc observa que la somme des dés valant dix avait tendance à sortir plus

2 du Baron Von Hardenberg, dit Novalis Friedrich, tiré de *l'Encyclopédie*, ouvrage représentatif d'un certain romantisme allemand. En liaison avec des passages de Zarathoustra de Nietzsche, que Deleuze (philosophe français 1925-1995) expliquait très bien : "Je fais bouillir dans ma marmite tout ce qui est hasard". Selon Deleuze, un coup de dés affirme en une seule fois tout le hasard, même si une seule combinaison doit en sortir. C'est le tragique de Nietzsche, un côté joueur qui le fait danser au bord des abîmes.

souvent que la somme des dés valant 9 alors qu'il y a autant de possibilités d'écrire la somme 9 que la somme 10 :

$$6 + 3 + 1 = 6 + 2 + 2 = 5 + 4 + 1 = 5 + 3 + 2 = 4 + 4 + 2 = 4 + 3 + 3 = 10$$
$$6 + 2 + 1 = 5 + 3 + 1 = 5 + 2 + 2 = 4 + 4 + 1 = 4 + 3 + 2 = 3 + 3 + 3 = 9$$

donc 6 possibilités pour les deux cas.

Galilée, pour résoudre ce paradoxe, démontre que les probabilités d'obtenir 9 ou 10 ne sont pas identiques : 9 réalisé par la somme 3 + 3 + 3 a deux fois moins de chance d'être obtenue (soit $\frac{1}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{216}$) que par la somme 5 + 2 + 2 (soit $\frac{2}{6} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{108}$) et six fois moins que la somme 4 + 3 + 2 (soit $\frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$).

Ainsi, la probabilité d'obtenir une somme valant 9 qui est égale à est $\frac{23}{216}$ supérieure à celle d'obtenir une somme valant 10 qui est de $\frac{24}{216}$. L'observation du Grand Duc de Toscane s'avère donc exacte.

Les osselets

Le jeu des osselets remonte à l'Antiquité grecque et se pratique à l'aide de plusieurs osselets, à l'origine des petits os (astragales) des pattes avant du mouton ou de la chèvre.

Un osselet présente quatre faces d'un aspect différent :
- des deux plus larges faces, l'une est convexe (bombée), l'autre concave (creuse).
- des deux plus étroites, l'une est plate, l'autre sinueuse.

Suivant le rapport des auteurs de l'Antiquité, ces faces avaient chacune un nom et correspondaient à une valeur numérique :
Le côté plan "planum" égalait un. Le côté concave "supinum" égalait trois. Le côté convexe "pronum" égalait quatre. Le côté sinueux "tortuosum" égalait six.

Au lieu de faire le total des valeurs numériques des faces, les jeunes joueurs romains tentaient de faire des combinaisons de coups, lesquelles étaient repérées par des noms.
En Grèce, quatre osselets étaient utilisés pour jouer ; il était donc possible d'obtenir en les lançant 35 combinaisons différentes. Parmi ces combinaisons certaines étaient bonnes, d'autres mauvaises, d'autres moyennes. Chacune d'elles portaient un nom : Aphrodite, Midas, Chevelure de Bérénice, Stésichore, …

Le plus mauvais coup était appelé "le chien" et comprenait les quatre face numérotées 1, le plus heureux coup avait pour nom le "coup de Vénus" ou "coup royal" : il consistait à amener ensemble le 1, le 3, le 4 et le 6.

1) Etude d'un osselet

Un osselet présente quatre faces dont on associe les valeurs 1, 3, 4 et 6 avec les probabilités respectives p_1, p_3, p_4 et p_6. Des expériences statistiques ont permis d'établir que $p_1 = p_3$, $p_4 = p_6$ et $p_1 = 4p_4$.

a) Les quatre faces des osselets n'ont pas la même probabilité d'apparition. Pourquoi ?

a) Calculer les probabilités élémentaires associées aux quatre faces.

b) Comme sur nos dés actuels, les positions opposées sur les osselets étaient de sommes 7.
La somme 7 = 1 + 6 était-elle plus probable qu'obtenir la somme 7 = 3 + 4 en lançant deux osselets ?

2) Etude de deux osselets

On jette deux osselets.

a) Quelles associations de valeurs peut-on obtenir ? Quel en est le nombre ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux fois le côté numéroté 1 ? deux fois le côté 3 ?

c) Combien de situations avec deux osselets permettent d'obtenir un côté numéroté 3 et un autre numéroté 4 ? Quel est alors la probabilité d'obtenir, à l'issue d'un lancer de deux osselets, les valeurs 3 et 4 ?

3) On jette désormais quatre osselets.
Il est indiqué en introduction que les joueurs grecs pouvaient faire jusqu'à 35 combinaisons de coups possibles ; le chien ayant pour combinaison 1111, le coup royal 1346 sur les quatre osselets, …

a) Retrouver ces 35 combinaisons.

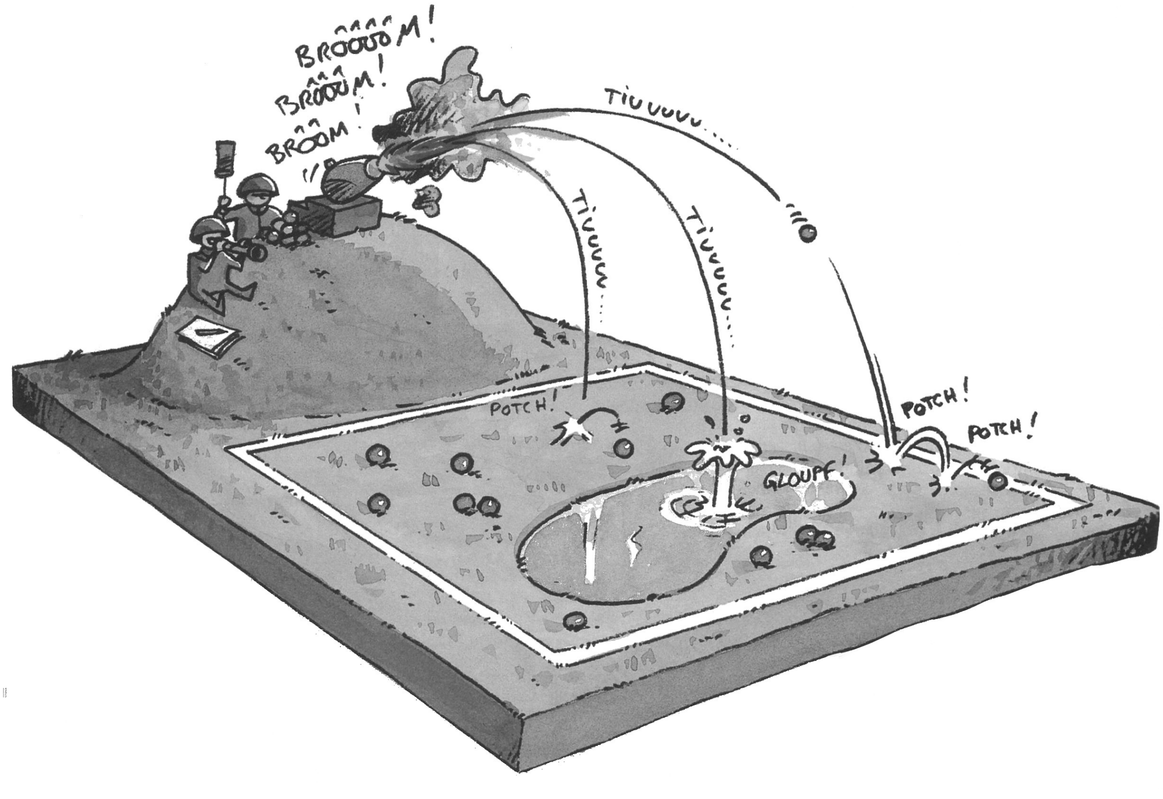
b) Quelle est la probabilité d'obtenir le coup du chien ?

c) Combien de situations différentes entre les quatre osselets permettent d'obtenir le coup constitué de trois 1 et d'un 3 ? Quelle est alors la probabilité d'obtenir ce coup en jetant les quatre osselets ?

Statut d'une romaine jouant à l'astragale 130 - 150 avant J.-C. Berlin, Musée des antiquités

d) Le coup de Stésichore est un coup dont la somme est 8. Quelles sont les combinaisons permettant d'obtenir une telle somme ? Combien de situations différentes entre les quatre osselets permettent d'obtenir ce coup de Stésichore ? Quelle est alors la probabilité d'obtenir ce coup en jetant les quatre osselets ?

Chapitre V
Probabilités dans le cadre géométrique



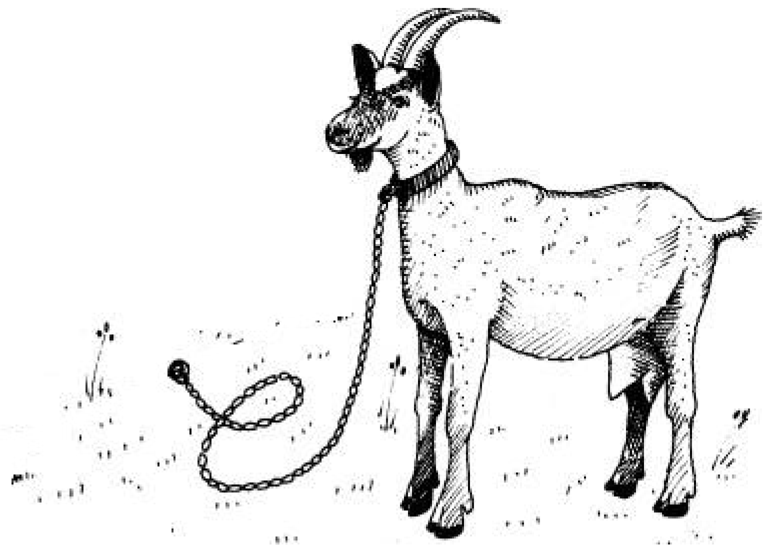
L'artillerie au service des mathématiques :
Quelle est l'aire de la surface de la mare ?
(Science et Vie Junior, HS n°26, 1996)

Nous nous intéressons ici à des problèmes dont on connait la loi de probabilité. Dans les trois activités qui suivent, l'expérimentation vient en appui pour que l'élève s'approprie la situation, elle l'encourage à déduire que la probabilité est proportionnelle aux aires en jeu. Nous proposons le problème de la chèvre, le jeu du franc-carreau, puis, plus généralement, la méthode de Monte Carlo.

1. Le problème des deux chèvres

LES DEUX CHEVRES

Mr Martin a deux chèvres Albertine et Blanchette qu'il souhaite attacher dans un champ rectangulaire de dimensions 15m sur 20m. Il prend pour cela deux piquets et deux cordes identiques de 3m de long.



1ère partie :

Dans un premier temps, il attache Albertine au piquet A situé à 7m du petit côté du champ et à 8m du grand côté.

Dans un deuxième temps, il choisit au hasard l'emplacement du piquet B pour Blanchette.

1) Ont-elles plus d'une chance sur deux de se rencontrer ?
2) Quelle est la probabilité que les deux chèvres puissent se rencontrer ?

2ème partie :

Mr Martin décide de doubler les dimensions de son champ.

Il rattache Albertine au piquet A (toujours à 7m du petit côté du champ et à 8m du grand côté) et il choisit au hasard l'emplacement du piquet B pour Blanchette.

3) Quelle est la probabilité que les deux chèvres puissent se rencontrer?

3ème partie :

Albertine très gourmande étant devenue trop grasse, il décide de la déplacer et de l'attacher à un piquet d'angle de clôture du champ.

Puis il choisit toujours au hasard l'emplacement du piquet de Blanchette.

4) Que devient la probabilité qu'elles puissent se rencontrer ?

Voici le déroulement de cette activité expérimentée en classe de 3e :

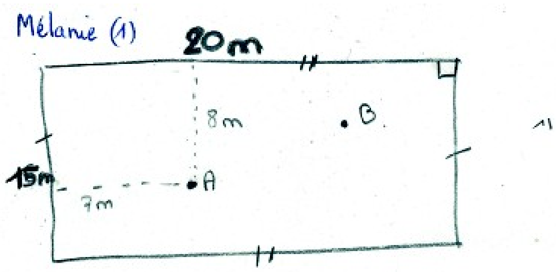
première séance : 1h en classe (dont un temps individuel puis une mise en groupe)
deuxième séance : 1h en salle informatique
troisième séance : 15min synthèse en classe

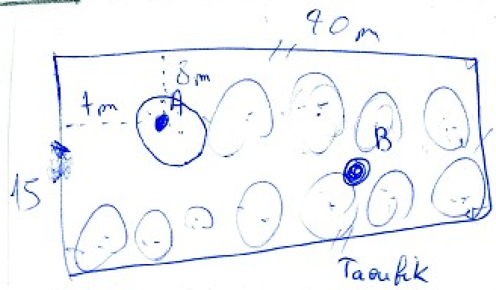
<u>Etude de la première séance</u>

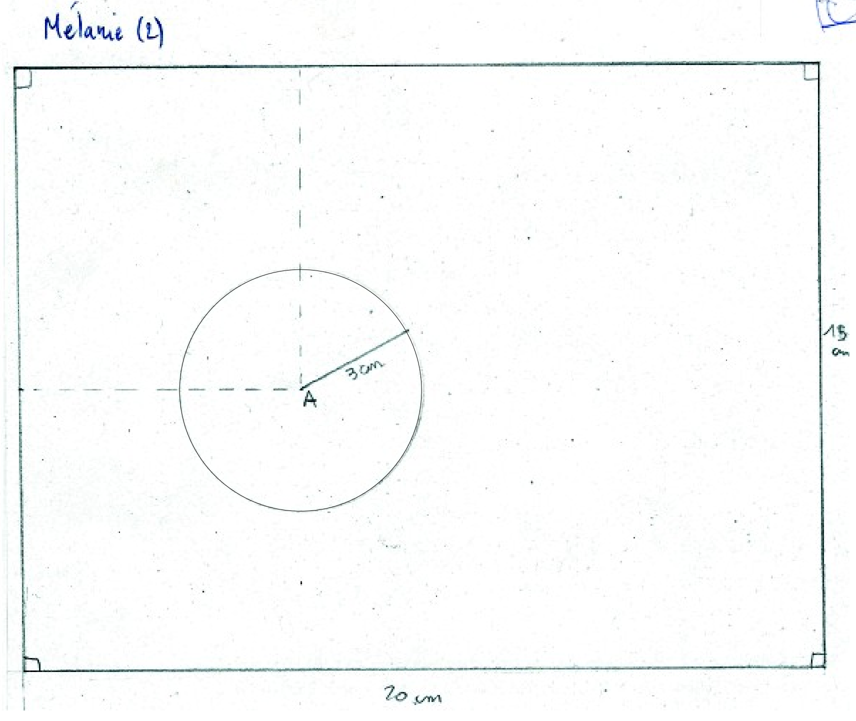
Tout d'abord, un temps individuel d'identification de la situation par les élèves est nécessaire et variable selon les élèves (entre 10 à 20 minutes). Après lecture du problème, ils éprouvent la nécéssité de représenter le champ, puis y placent le point A pour la première chèvre Albertine.

Plus de la moitié des élèves de la troisième en question a commencé par faire une figure à main levée de la situation. Mais ils ont aussi jugé ensuite nécessaire de refaire une figure en se fixant une échelle, ce qui faisait aussi partie des points visés dans cette activité.

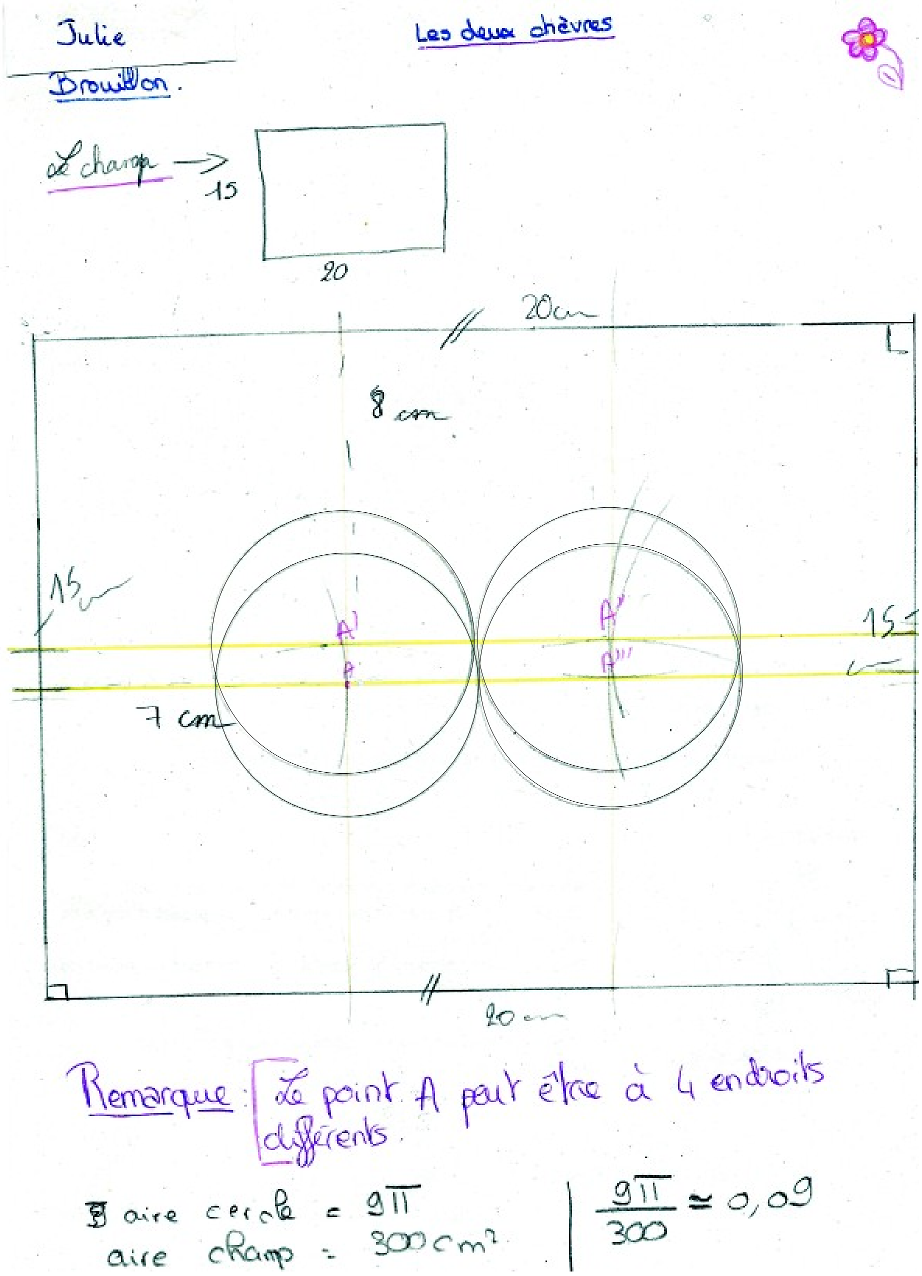
Nous voyons dans les traces écrites de Mélanie l'évolution du croquis de départ et son passage aux instruments, qui lui permet de représenter fidèlement la zone d'herbe brouttée par Albertine. Apparaît aussi la limite des investigations à main levée de Taoufik qui, très vite, trouve un lien entre les aires et la probabilité.



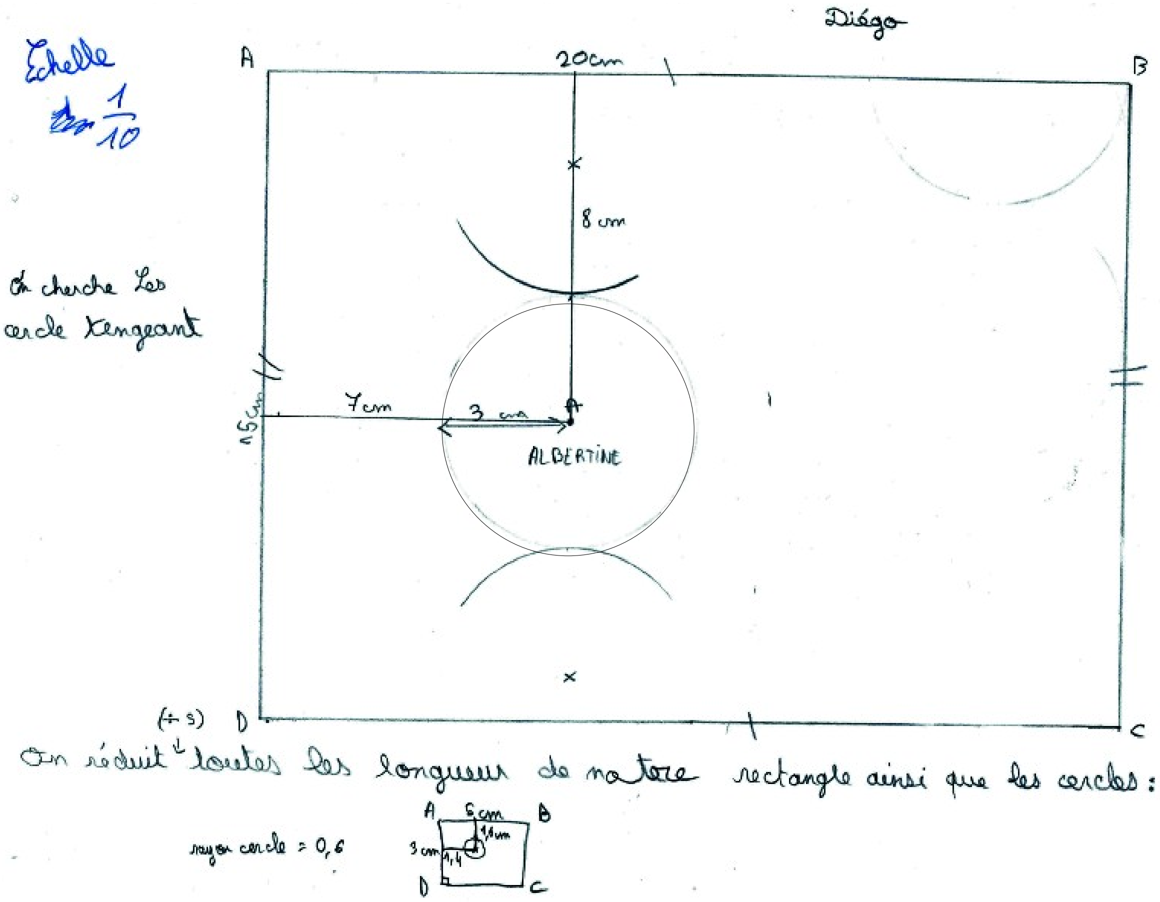




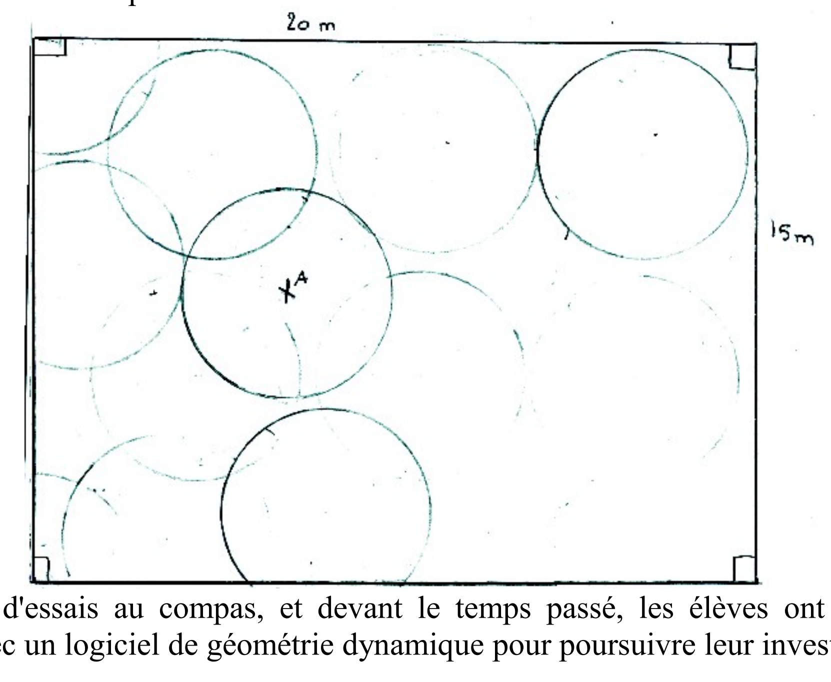
Notons que la position multiple de A a posé problème au départ à quelques groupes quant à l'équivallence de la situation et du caractère symétrique des 4 positions possibles. Un groupe a alors éprouvé des difficultés à discerner les rôles de A et de B, en matière de chèvre fixée ou non, car leur première chèvre connaissait déjà 4 positions possibles pour lui ; Albertine semblait bouger (alors qu'en réalité Blanchette est celle dont la position du piquet varie).



Certains élèves se sont intéressés assez rapidement au cas limite de tangence des cercles qui matérialisent les deux cordes tendues et la rencontre extrême des deux chèvres. C'est le cas du groupe dont voici le travail au bout d'une heure :



Après une figure à main levée, beaucoup d'élèves ont ressenti la nécessité de construire une représentation de la situation. C'est alors l'occasion d'un travail sur la notion d'échelle par le biais d'une réduction.
Ensuite, certains ont tracé des cercles "au hasard", rejetant des cas non favorables dans leur approche expérimentale du problème.

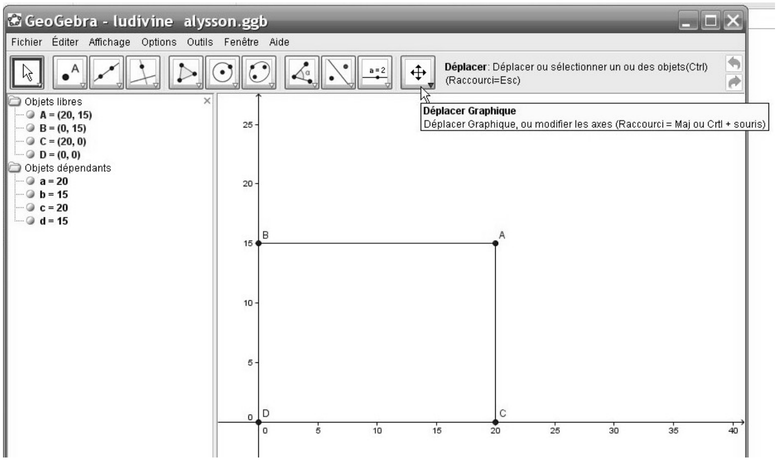


Après beaucoup d'essais au compas, et devant le temps passé, les élèves ont alors exprimé la volonté d'agir avec un logiciel de géométrie dynamique pour poursuivre leur investigation engagée.

Etude de la deuxième séance

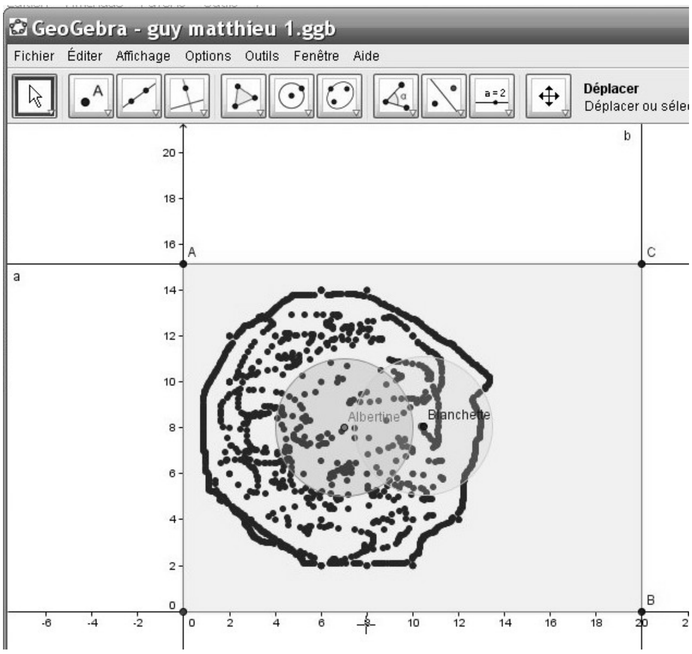
La séance suivante se déroule en salle informatique. Les élèves ont alors utilisé géogébra souvent par deux avec la contrainte de restituer un fichier en fin d'heure par groupe, support de réponse à l'activité. Notons qu'aucune précision n'a été faite entre les deux séances mais que les élèves avaient déjà pratiqué un logiciel de géométrie dynamique auparavant.

Ils ont représenté de nouveau la situation avec, pour appui, un repère en jouant sur la dillatation des axes. La chèvre Albertine a été placée comme un point repéré, et a permis de retravailler la notion d'abscisse et d'ordonnée à ce moment.



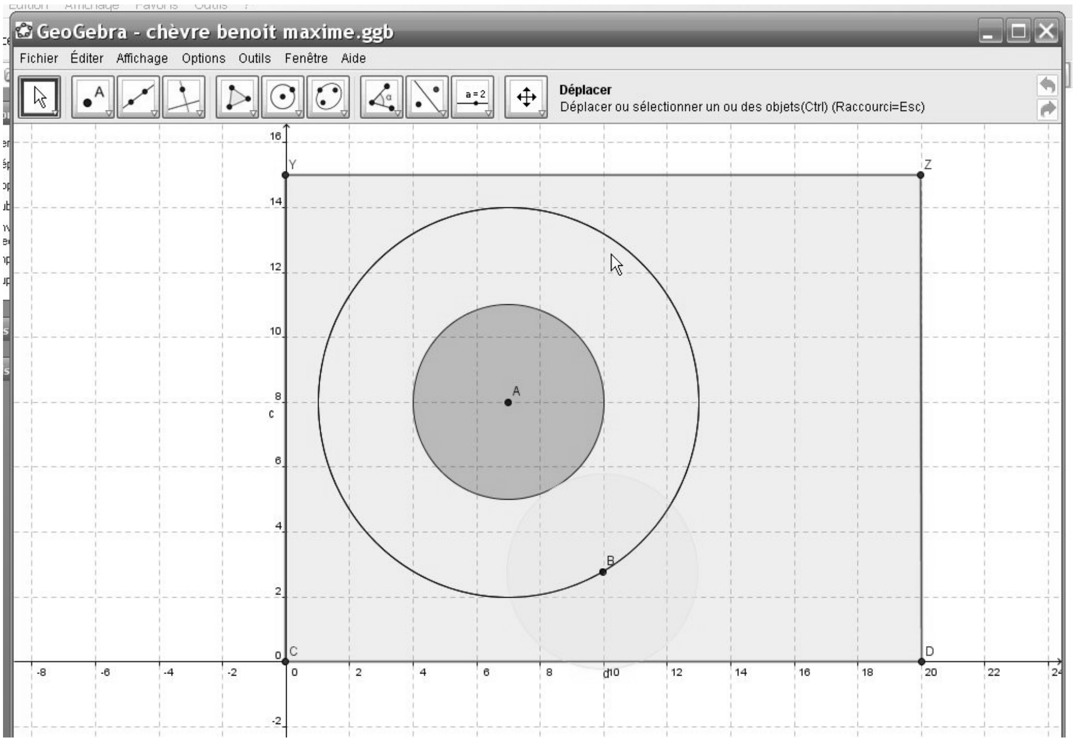
Le rectangle du champ appelé *ABCD* par défaut sera ultérieurement renommé par le groupe afin de ne pas confondre le point *A* lié au piquet de la chèvre Albertine et le sommet *A* affecté par défaut par le logiciel géogébra au premier point créé ici. On peut noter que placer précisemment le point *A* n'a pas été réussi par tous les groupes mais n'a cependant pas pénalisé ceux-ci pour l'avancée dans le problème[3]. A ce stade, l'important est la faculté du logiciel à pouvoir aisemment et rapidement amplifier et étudier des positions du piquet *B* afin d'en tirer une conjecture quant à la probabilité recherchée.

Dans le fichier d'élève suivant, nous observons que le groupe de Matthieu recherche les positions favorables à la rencontre des deux chèvres et l'illustre à l'aide de la trace du point *B*, faisant apparaître ainsi alors un lieu géométrique.

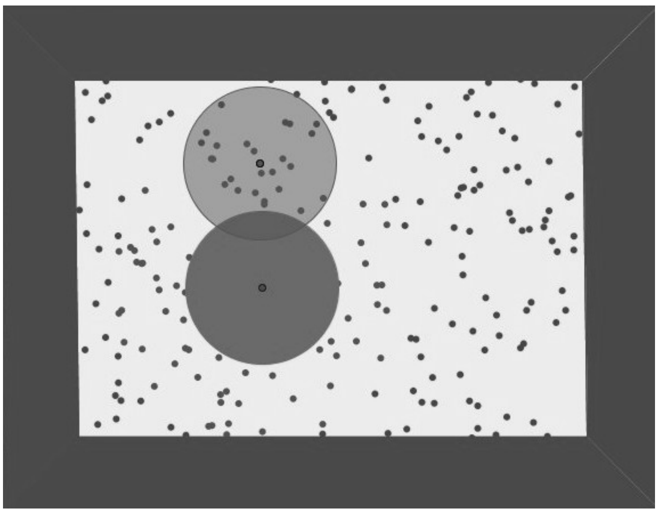


3 Plusieurs méthodes sont possibles pour placer le point *A* de coordonnées connues mais la méthode préférée des élèves reste le placement approximatif. Dans la ligne de saisie en bas de la fenêtre géogébra, il suffit de construire le point *A* en respectant sa notation (discutable) c'est-à-dire en tapant A=(20,15). Une autre méthode consiste à placer approximativement le point puis, en regardant les propriétés de ce point, lui redonner les coordonnées (20,15).

Pour la deuxième chèvre, d'autres, comme Maxime et Benoît, ont construit directement un disque de centre *A* et de rayon 6m, indiquant ainsi les positions favorables à la rencontre des deux chèvres, comme réponse géométrique finalisant leurs divers essais au brouillon.



Enfin, afin d'aider les plus en difficulté par rapport au problème, ceux qui n'appréhendent pas le disque en jeu dans le problème, nous proposons un regroupement de la classe autour d'un fichier vidéoprojeté en milieu de deuxième séance. Ce fichier permet d'engendrer différentes positions de B de façon (pseudo-)aléatoire, et trie systématiquement celles-ci.
La chèvre Albertine broutte dans le disque orange, Blanchette broutte dans le bleu (les couleurs citées sont celles de notre fichier). Par un jeu de couleurs (bleu : les deux chèvres se rencontrent ; rouge elles ne se rencontrent pas), les élèves peuvent distinguer les zones favorables après plusieurs simulations.
Nous voyons en effet une multitude de points bleus former un disque de centre *A* et deux fois plus grand que le disque orange en terme de rayon.



Synthèse lors de la troisième séance

Au bout des deux heures, les élèves ont rendu un fichier (ou deux) par groupe de quatre, leurs brouillons et une réponse à la 1ère partie du problème.

La probabilité recherchée à la question 2) est calculée comme le rapport des aires du disque de rayon 6m sur l'aire du rectangle :

$$p=\frac{\pi\times 6^2}{15\times 20}$$

soit

$$p=\frac{36\pi}{300} \text{ d'où } p\approx 0{,}377$$

Ce calcul effectué permet d'éclairer la réponse à la question 1 (question purement intuitive) où il leur est demandé si elles ont moins d'une chance sur deux de se rencontrer.

Le début de la troisième séance a permis de travailler les parties 2 et 3 qui prolongent sans expérimentation préalable la partie 1. L'aire du disque est réinvestie à ce moment.

Dans la partie 2, la situation est identique mais le champ est deux fois plus grand.

L'étude des effets d'un agrandissement sur les aires est ici recherché, et prolongé aux probabilités.

Ici,

$$p=\frac{\pi\times 6^2}{30\times 40}$$

soit

$$p=\frac{36\pi}{1200} \text{ et } p \text{ est quatre fois plus petite que la précédente.}$$

Dans la partie 3, la chèvre Albertine étant placée à un piquet d'angle du champ, ne peut broutter que dans un quart de disque, et la zone de rencontre s'en trouve réduite.

Dans ce cas,

$$p=\frac{\frac{\pi\times 6^2}{4}}{15\times 20}$$

soit encore

$$p=\frac{9\pi}{300} \text{ et cette probabilité est le quart de celle de la partie 1.}$$

C'est aussi en synthèse l'occasion de confronter les différentes valeurs des groupes et de soulever le problème de la valeur exacte ou arrondie de la probabilité.

2. Le jeu du Franc-Carreau[4]

Voici l'activité donnée aux élèves.

LE JEU DU FRANC CARREAU

Petit historique *: Le jeu du franc carreau date du Moyen Age, où il était pratiqué à la cour du Roi. Il consiste à lancer, à l'époque, une pièce de monnaie sur un carrelage et à parier sur la position finale de la pièce. Si cette dernière ne tombe pas sur une ligne, on parle alors de "franc-carreau "et il est considéré comme réussi.*

Partie 1 : Construction du jeu et manipulation

1) Construire un carré *ABCD* de 17cm de côté, puis joindre les milieux des côtés opposés pour former 4 carrés.
Se munir d'un jeton (de Bingo). On admet que ce jeton a pour rayon 0,85cm.

2) Réaliser 20 lancers du jeton sur ce quadrillage. Si le jeton sort totalement du jeu, le lancer n'est pas pris en compte, et il est recommencé.

3) Compléter le tableau suivant : **E** :franc-carreau perdu et **F** : franc-carreau réussi

lancer	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*	*14*	*15*	*16*	*17*	*18*	*19*	*20*	**total**
E ou F																					

Partie 2 : Approche par fréquences :

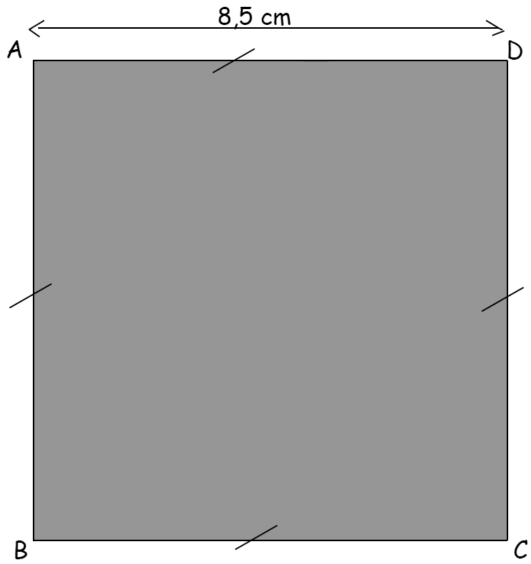
1) Calculer la fréquence de lancers réussis. La comparer avec les fréquences des autres camarades de la classe.

2) Calculer la fréquence de lancers réussis par l'ensemble de la classe.

3) Des simulations sont proposées à l'ordinateur, observez et donnez toutes vos remarques :

Partie 3 : Calcul théorique de la probabilité :

1) Le centre du jeton est toujours à l'intérieur du carré *ABCD*.
Où doit se trouver le centre du jeton pour qu'il y ait franc-carreau réussi ?
Dessine la zone qui convient ci-dessous.

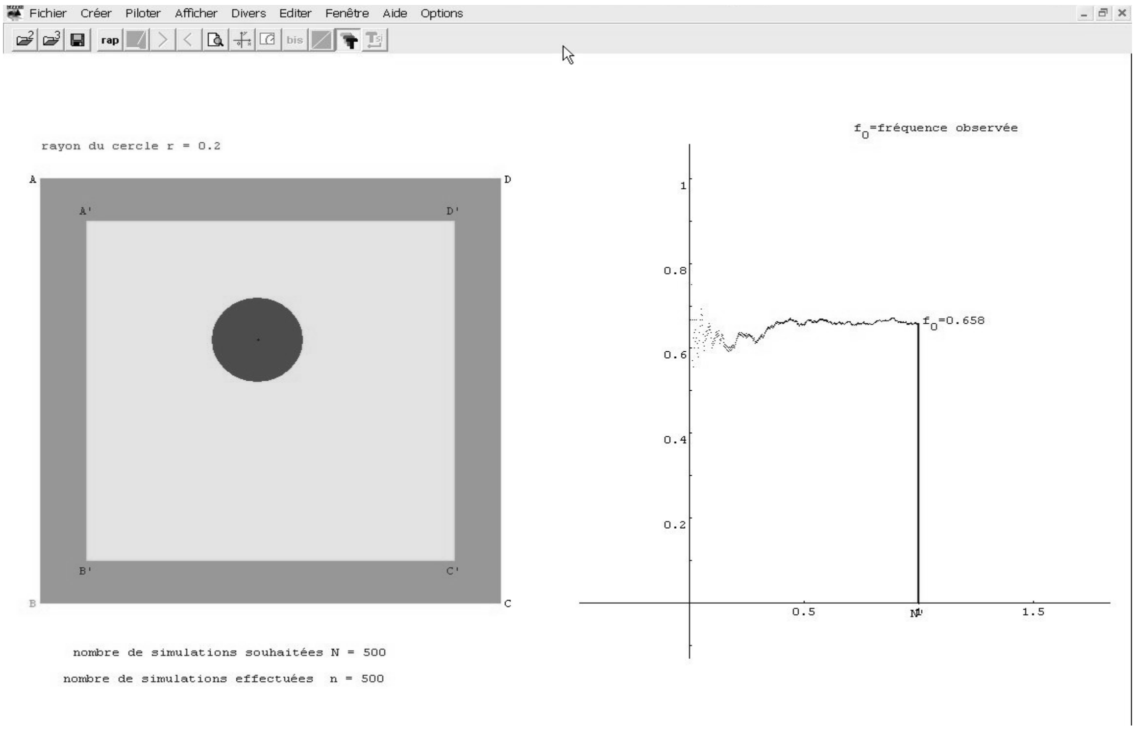


4 Dans son mémoire sur le jeu de Franc-Carreau qu'il présenta à l'Académie des sciences en 1733, Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, utilise un sol pavé de carreau hexagonaux. En réalité, tout pavage régulier convient.

2) On appelle par la suite $A'B'C'D'$ la zone précédente.
Démontrer que le côté de $A'B'C'D'$ a pour côté 6,8 cm, puis en déduire l'aire de cette zone favorable au franc-carreau.

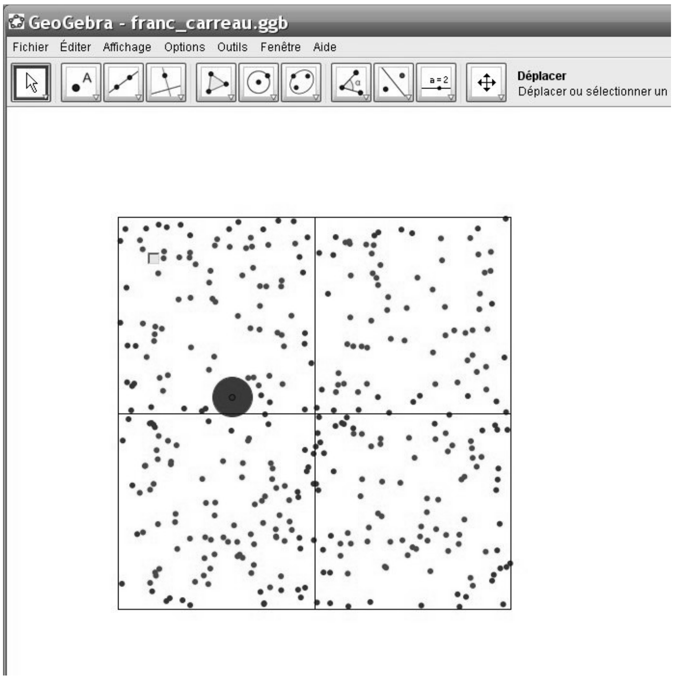
3) On admet que, de manière théorique, la probabilité d'avoir franc-carreau est égale au quotient de l'aire du carré $A'B'C'D'$ par l'aire du carré $ABCD$.
a) Calculer cette probabilité $p(F)$ en valeur exacte.
b) Comparez cette probabilité avec celle conjecturée dans la partie 2.

Cette activité permet tout d'abord, après construction d'un jeu, une expérimentation. Cette phase d'appropriation propose 20 parties.
Le recueil des données de chacun peut se faire au tableau ou être mis sur un fichier tableur commun à la classe.
Dans la partie 2, nous invitons les élèves en classe entière à confronter leurs fréquences observées, puis celles de la classe. Puis, nous proposons d'observer des simulations faites à partir de géoplan et vidéoprojetées (par l'enseignant).



L'idée étant de faire varier le nombre de simulations en choisissant un petit nombre au départ, suffisant pour que les élèves n'observent pas de stabilisation, puis d'augmenter ensuite ce nombre. Ici, 500 simulations permettent une vision de la stabilisation des fréquences.
Les élèves suggèrent aussi d'élever ce nombre de simulations et nous pouvons agir en fonction de la demande.
Remarquons ici que le graphe de la fréquence est en lien avec la notion de fonction qui est introduite en classe de troisième. Aussi, cette activité ne peut sans doute être proposée qu'après l'introduction de la notion de fonction.

La partie 3 propose le calcul théorique de la probabilité que nous ne détaillerons pas ici tant l'exercice est connu. Mais pour chaque groupe, une trace écrite constituée des réponses détaillées est demandée. De même que pour les chèvres, nous proposons (en vidéoprojection) une aide afin d'appréhender les aires qui interviennent dans le calcul de la probabilité.
Le jeton est bleu en cas de franc-carreau et rose sinon dans le fichier géogébra.



Un autre intérêt est aussi de faire varier la taille du jeton et de travailler sur l'influence du rayon dans le calcul de la probabilité. Aussi, nous proposons un prolongement possible qui peut être conduit en devoir à la maison et dont voici le sujet.

DEVOIR MAISON A PROPOS DU JEU DU FRANC-CARREAU

On considère un jeu de franc-carreau à quadrillage de carreaux de taille 2cm.
On fait ici varier la taille du jeton.

1) A partir de simulations faites en classe, remplir le tableau suivant :

rayon du jeton (en cm)	0,2	0,6	0,4	0	0,8	1
fréquence de franc-carreau						

2) Calculez les probabilités de réussir franc-carreau pour les différentes tailles de jetons. Vous noterez :
   $p_{0,2}$ (F) la probabilité de réussir franc-carreau avec un jeton de rayon 0,2 cm
   $p_{0,4}$ (F) celle de réussir franc-carreau avec un jeton de rayon 0,4 cm, etc...

3) Observez vos résultats. Confrontez les au 1).
   Comment varient ces probabilités ?
   Expliquez les cas où le rayon vaut 0 cm et ou il vaut 1 cm.

4) On imagine qu'un jeton a maintenant un rayon de *r* cm.
   Exprimer la probabilité p_r(F) de réussir franc-carreau à l'aide du rayon du jeton.
   La probabilité est-elle proportionnelle au rayon du jeton ?

Précisons tout d'abord que ce devoir maison propose une notation dont le formalisme est à la limite du programme.
En effet, la notation $p(F)$ rencontrée dans l'activité initiale ne doit-elle pas s'installer progressivement. En début d'année, il serait préférable d'utiliser p("obtenir Franc-carreau"), puis quand nous connaissons toutes les difficultés de l'introduction de la notation fonctionnelle en 3^{e}, de tendre progressivement vers l'écriture $p(F)$.

Après cette parenthèse sur les notations, poursuivons sur le devoir maison.
Il propose notamment de s'attarder sur l'événement certain " Obtenir Franc-carreau avec un jeton de rayon nul" et l'événement impossible "Obtenir franc-carreau avec un jeton de rayon 1cm" sachant que le quadrillage a des carreaux de côtés 2cm.
Il permet d'observer l'effet d'une variation du rayon doublé à chaque fois (rayons successifs 0,2; 0,4; 0,6; puis 0,8) sur la probabilité et de se poser la question de la proportionnalité de la probabilité par rapport au rayon.

$$p_r(F)=\frac{(2-2r)^2}{4}$$

Un prolongement possible, avec certains élèves, serait de s'intéresser à la fonction p_r et de tracer son graphe afin de constater cette non-proportionnalité.

3 .Polygones réguliers et probabilités

Les polygones réguliers faisant partie des notions à étudier dans le programme de 3e, ils offrent ici l'occasion d'en rencontrer des propriétés géométriques, tout en couplant ces études avec un travail sur les probabilités.
Un logiciel de géométrie dynamique offre une aide visuelle et permet une construction modifiable d'un hexagone ou d'un pentagone régulier. Nous avons choisi de mener ces deux activités avec Géogébra dans nos classes de 3e.
Elles ont toutes deux un point commun : on choisit au hasard des sommets du polygone régulier et on recherche la probabilité d'obtenir certaines figures géométriques telles que des triangles particuliers. La première activité concerne l'hexagone régulier et la suivante le pentagone régulier.

Probabilité et hexagone régulier

On considère un hexagone régulier ABCDEF dont les points A,B,C,D,E et F sont les sommets consécutifs.

1) A l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire un hexagone régulier *ABCDEF*.
2) On choisit au hasard et simultanément deux sommets de cet hexagone.
a) Dresser la liste des paires de sommets possibles.
b) Quelle est la probabilité pour que ces deux lettres désignent deux sommets consécutifs de l'hexagone ?
c) On s'intéresse maintenant aux paires de sommets séparés par un autre sommet de l'hexagone *ABCDEF* comme, par exemple, les sommets *B* et *F* puisque séparés par le sommet *A*. Quelle est la probabilité pour que deux lettres choisies au hasard désignent de tels sommets ?
A l'aide de votre logiciel de géométrie, construire les segments formés par l'ensemble des paires de sommets trouvés. Ces segments se coupent deux à deux en des points qu'on appellera GHIJKL. Quelle semble être la nature du polygone GHIJKL ? Vérifier cette conjecture à l'aide du logiciel en faisant afficher les mesures nécessaires.

3) On choisit maintenant au hasard et simultanément trois sommets de l'hexagone ABCDEF. (On pourra refaire une figure sur un nouveau fichier.)
a) Combien y a -t-il de triangles possibles ? Les nommer tous.
b) Quelle est la probabilité pour que ces trois points obtenus forment :
- un triangle équilatéral ?
- un triangle isocèle ?
c) Sur la figure commencée dans le logiciel de géométrie, mettre en évidence, par exemple en rouge, tous les triangles équilatéraux que l'on peut construire avec trois des sommets de l'hexagone.

d) Expliquer pourquoi la probabilité d'obtenir un triangle équilatéral est inférieure à celle d'obtenir un triangle isocèle.

4) A quelle condition un triangle formé de trois sommets de cet hexagone sera-t-il rectangle ?

Quelle est la probabilité d'obtenir un triangle rectangle en choisissant trois sommets au hasard et simultanément ?

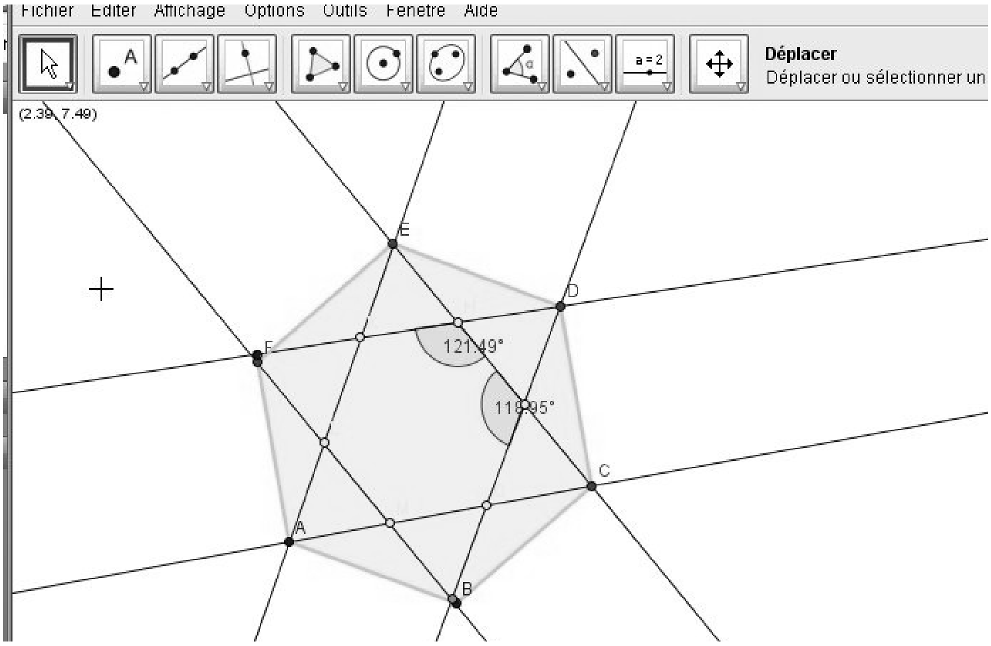
Les alvéoles des abeilles se présentent comme des hexagones réguliers.
Elles sont construites en cire par les abeilles ouvrières afin de stocker le miel et le pollen ou les œufs et les larves.

Cette première activité nécessite comme pré-requis la notion de polygone régulier. Ce travail se déroule en deux temps: une séance d'1h en salle informatique où les élèves sont mis en binôme puis une synthèse en classe entière.

Dans un premier temps, mis par deux , ils construisent rapidement le polygone régulier à l'aide du menu prévu à cet effet. Ensuite, la première question permet un débat sur de la notion de paire et fait émerger la distinction entre celle-ci et un couple de points (dont nous pouvons faire le rapprochement avec le couple de coordonnées). Le vocabulaire tel que "consécutif" peut faire défaut à certains, c'est l'occasion de reparler, si la question est posée, de nombres consécutifs dans le contexte numérique.

Les élèves sont ensuite amenés à conjecturer, puis à démontrer la nature de *GHIJKL* en utilisant des affichages de mesures d'angles et de longueurs de segments (question 2 c)). C'est le moment de réinvestir la définition de polygone régulier pour eux. Beaucoup, à ce stade, oublient la double condition (longueurs égales et angles égaux). Ils se heurtent aussi parfois à la contradiction suivante : leur figure qui semblait bien réalisée à l'œil se révèle imprécise avec les mesures affichées.

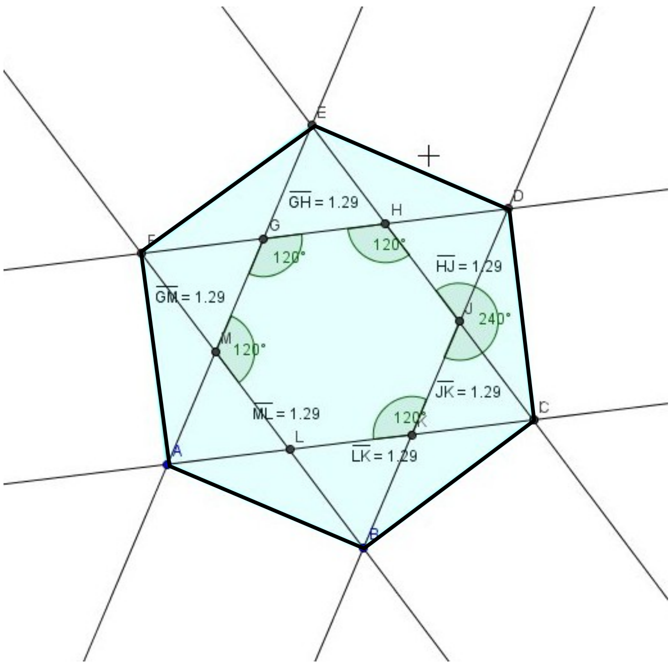
C' est le cas du groupe suivant:



Grâce à l'affichage des étapes de leur construction, et à l'utilisation du zoom, le groupe a pu rectifier facilement leur problème de superposition de points. C'est la donnée des mesures des angles qui a permis un recul et une invalidité de la construction effectuée.

Après conjecture, d'autres groupes ont été confrontés à un souci d'affichage d'angles considérés (ne manipulant que des angles géométriques à leur niveau) alors que le logiciel considère les angles orientés.

Voici leur production :



L'angle de 240° leur a permis cependant de justifier à l'oral que l'angle aigu $\widehat{HJK}$ mesurait 120° mais nous aurions pu aussi demander au logiciel de ne pas faire afficher les mesures des angles rentrants. Le choix a été délibéré ici, il a son importance dans les objectifs fixés.

En ce qui concerne la liste des triangles possibles, la mise en commun au tableau fait émerger une stratégie pour ne rien oublier. Elle a pour support visuel un des fichiers d'élèves lors de la deuxième séance en classe.

La question 3 d), qui compare des probabilités, vient provoquer un débat sur les triangles équilatéraux dont la majorité des élèves pense qu'ils ne sont pas isocèles. Nous retrouvons ici la même résistance que de considérer un carré comme un rectangle ou losange dans les classes antérieures.

La fin de l'activité, question 4), est l'étude de la probabilité d'obtenir un triangle rectangle. C'est l'occasion de réinvestir un théorème de la classe de quatrième sur la nature de triangle inscrit dans un cercle de diamètre un des côtés.

Voici la deuxième activité qui, elle, utilise des notions de trigonométrie de la classe de troisième et concerne cette fois le pentagone régulier. Nous la situons plutôt en fin d'année quant à la progression ou en devoir à la maison (si une restitution d'un fichier à l'enseignant est possible).

Probabilité et pentagone régulier

On considère un pentagone régulier ABCDE.

1) A l'aide d'un logiciel de géométrie plane, construire un polygone régulier *ABCDE*.

2) On s'intéresse maintenant aux paires de sommets du pentagone séparés par un sommet du polygone *ABCDE* comme, par exemple, les sommets *B* et *E* puisque séparés par le sommet *A*.

Quelle est la probabilité pour que deux lettres choisies au hasard désignent de tels sommets ?

A l'aide de votre logiciel de géométrie, construire les segments formés par l'ensemble des paires de sommets trouvés. Ces segments se coupent deux à deux en des points qu'on appellera *F, G, H, I* et *J*. Quelle semble être la nature du polygone *FGHIJ* ? Vérifier cette conjecture à l'aide du logiciel en faisant afficher les mesures nécessaires.

3) Les propriétés demandées dans les questions ci-dessous pourront être étudiées avec le logiciel de géométrie mais vos réponses devront être expliquées et justifiées.

Le but de cette partie est de démontrer que *ACD* est un triangle isocèle en *A*.

a) Déterminer la mesure de l'angle $\widehat{COD}$ (*O* désignant le centre du cercle circonscrit à *ABCDE*.

b) Créer *H* le milieu de [*CD*]. Démontrer que (*OH*) est la médiatrice du segment [*CD*].

c) En déduire la mesure de l'angle $\widehat{COH}$.

d) Calculer la mesure de l'angle $\widehat{COA}$ puis celle de l'angle $\widehat{HOA}$.

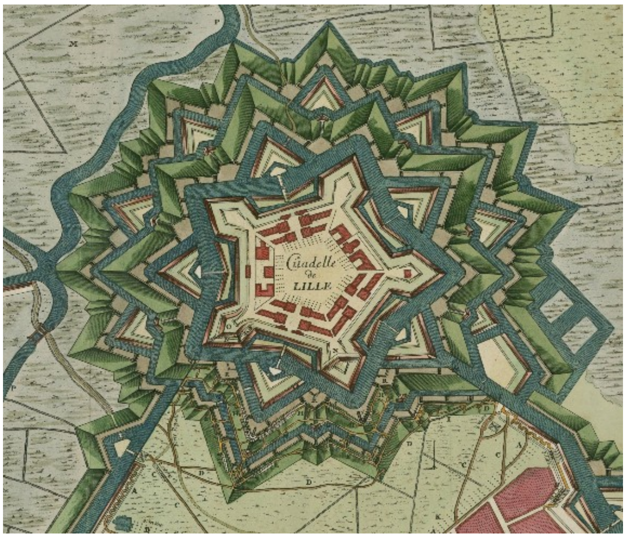
Que peut-on en déduire pour les points *H,O,A* ?

e) Conclure quant à la nature du triangle *CDA*.

4) On choisit au hasard et simultanément trois points parmi les cinq sommets du pentagone *ABCDE*. Quelle est la probabilité pour que ces trois points forment :

- un triangle isocèle ?
- un triangle équilatéral ?
- un triangle rectangle ?

Parce qu'il y voyait le plus accompli de ses ouvrages, même si c'était le premier d'une longue liste,Vauban avait baptisé la Citadelle de Lille ayant la forme d'un pentagone régulier, *la Reine des citadelles*.

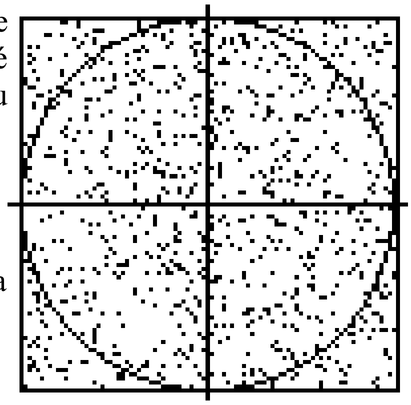


4. La méthode de Monte-Carlo

La méthode de Monte-Carlo permet l'étude et l'évolution de phénomènes quantitatifs en exploitant des séries de nombres aléatoires. Elle contribue à résoudre divers problèmes : en mathématiques (résolution de systèmes d'équations linéaires, calcul d'intégrales définies ou intégration d'équations aux dérivées partielles), en physiques (transmission de particules et, en particulier, l'équation de transport des neutrons), en chimie (étude de la pénétration d'un liquide dans un milieu poreux), en astronomie (calcul de la durée de vie d'une comète), en électronique (résolution en temps de détecteurs GE(Li)), etc ...

L'invention de la méthode de Monte-Carlo est attribuée à Georges-Louis Leclerc, comte de Buffon, qui proposa dans *Essai d'arithmétique morale* en 1777 une méthode probabiliste, appelée *l'aiguille de Buffon*[5], pour obtenir une estimation de la valeur du nombre π.
On peut obtenir une autre estimation de π par une simulation analogue au problème de Buffon. Il s'agit tout d'abord de considérer deux nombres aléatoires x et y entre -1 et 1. En utilisant par exemple l'instruction rand (ou ran ou ran# ou ...) de la calculatrice, $2 \times \text{rand}$ sera un réel entre 0 et 2 et le décalage $2 \times \text{rand} - 1$ permet de simuler un nombre psuedo-aléatoire entre -1 et 1.

5 Considérons une série de parallèles dans le plan équidistantes, séparées par la distance $2a$. Jetons sur ce plan des aiguilles de longueur $2l$ tel que $l < a$. La fréquence du nombre d'aiguilles rencontrant l'une des parallèles tend, lorsque le nombre d'aiguilles augmente, à se rapprocher de $\frac{2\,l}{a\pi}$ et permet d'obtenir une estimation de π. Ce problème s'appelle aussi problème du drapeau américain car durant la guerre de Sécession (1861-1865) un officier américain, lors de sa convalescence après blessure, s'était posé le même problème, la feuille de papier étant remplacée par le drapeau américain qui comporte des bandes équidistantes.



Le point aléatoire $M(x;y)$ obéira à une distribution uniforme sur le carré de sommets $A(-1;-1)$, $B(1;1)$, $C(1;1)$ et $D(-1;1)$, La probabilité de tomber sur un point intérieur au cercle unité sera égale au quotient de l'aire du disque sur celle du carré soit :

$$p = \frac{\pi}{4}.$$

La fréquence du nombre de points ainsi placés dans le cercle tendera à se rapporcher de cette probabilité.

Chapitre VI
Problèmes de modélisation

Les devises Shadok,
par Rouxel

De nombreuses situations conduisent à des réponses différentes. Pour celles-ci, aucune n'est fausse, aucune n'est exacte, c'est la question qui est mal posée. En effet, l'énoncé n'est pas suffisamment précis pour déterminer le modèle probabiliste sous-jacent.
Cette imprécision perdure dans la recherche de la fréquence expérimentale car la réalisation de l'expérience dépend de la modélisation choisie.

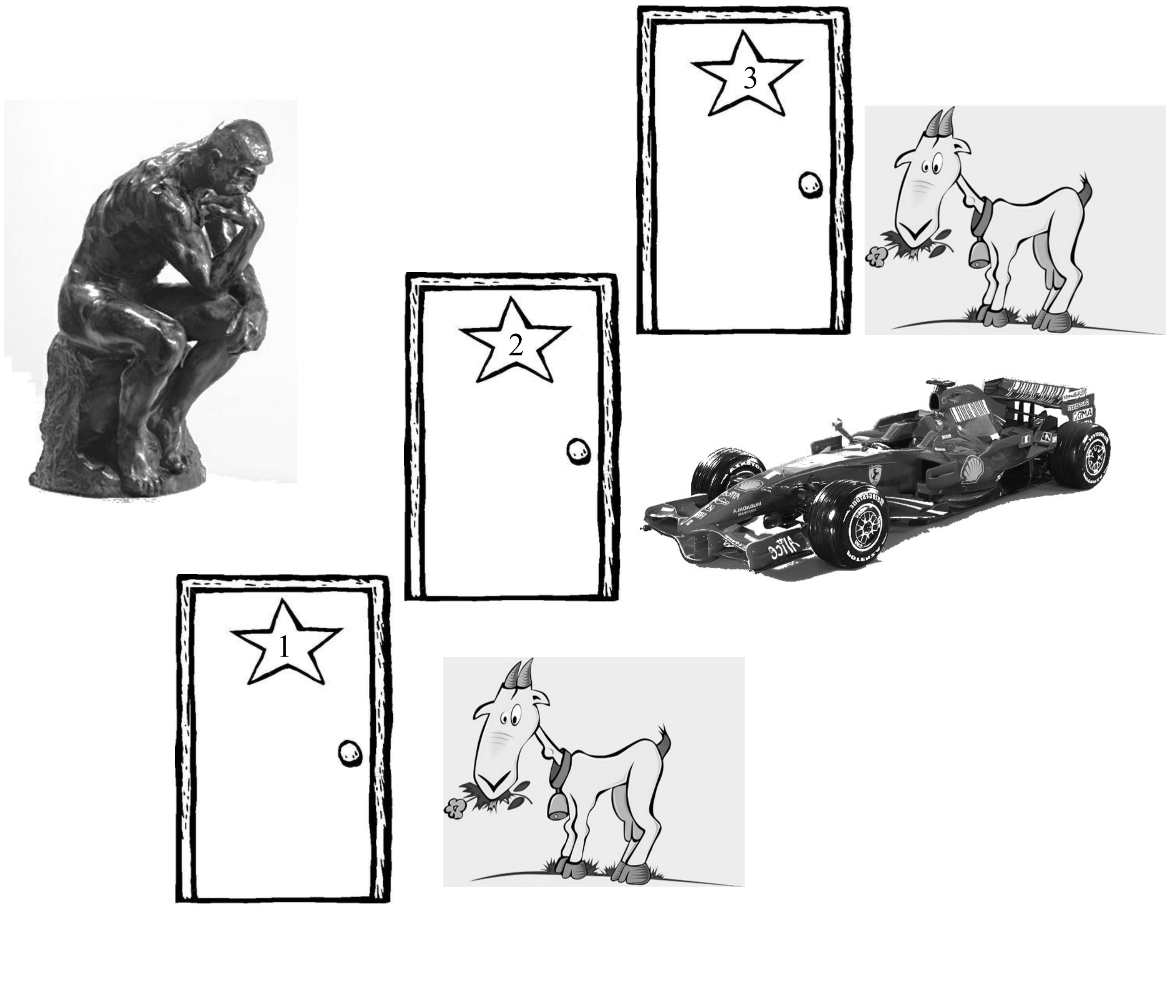
Demander aux élèves de simuler sur un tableur pour répondre à l'une des problématiques suivantes va les amener à se poser la question fondamentale sur le type de situation aléatoire qui est mis en jeu. Il est à parier que les modèles décrits apparaîtront dans une classe.

1. Let's make a deal

" Let’s Make A Deal !" était un jeu très populaire diffusé sur une chaîne américaine dans les années soixante-dix. Ce jeu a été ensuite repris sur une chaîne française (le Bigdil).
À la fin du jeu, Monty Hall offrait la possibilité de gagner ce qui se trouvait derrière une porte. Il y avait trois portes : derrière une se trouvait un prix magnifique (par exemple une Ferrari) et derrière les deux autres un prix moins intéressant (par exemple une chèvre). Le candidat devait choisir une porte. Pour ménager le suspense, Monty Hall, avant de révéler ce qu’il y avait derrière cette porte, ouvrait une des deux autres portes (derrière laquelle se trouvait toujours une chèvre).

Il posait enfin la question au candidat :

"Parmi les deux portes encore fermées, laquelle choisissez-vous ?"



Vaut-il mieux garder la première porte choisie ou au contraire prendre l'autre porte ?

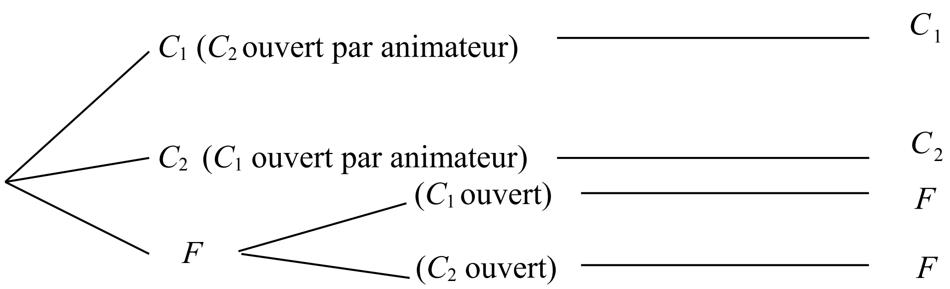
- Faire des groupes de deux. L'un de vous jouera le rôle du candidat et l'autre le rôle de Monty.
- Ecrire chacun et en cachette une liste aléatoire de 20 numéros de portes (1, 2 ou 3). Le numéro écrit par le candidat sera son premier choix et le numéro de Monty sera la porte derrière laquelle est cachée la voiture.
- Comparer ensuite les deux listes et estimez la probabilité du candidat de gagner la voiture si :
  1. Il ne change jamais de porte (il y a donc gain si les deux numéros correspondants sont identiques)
  2. Il change toujours de porte
  3. Il maintient son choix les 10 premiers coups et change de porte les 10 derniers.
- Déterminer la meilleure politique. Vous pourrez utiliser un tableur pour confirmer votre intuition.

  À moins que cela n'ait aucune importance...

Le travail que l'on peut demander aux élèves pourrait prendre cette forme :

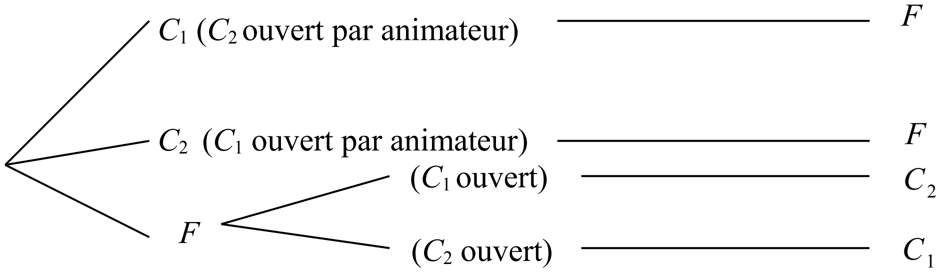
Appelons C_1, C_2 et F chacune des issues. Le jeu se fait en deux étapes et trois versions dont on donne ici des éléments de réponse sous forme d'arbres pondérés.
On suppose qu'au deuxième choix de portes par le candidat, celui ci élimine la porte ouverte par l'animateur…

<u>Première version</u> :
le candidat maintient son choix ; le dernier niveau de l'arbre se réduit à une branche.



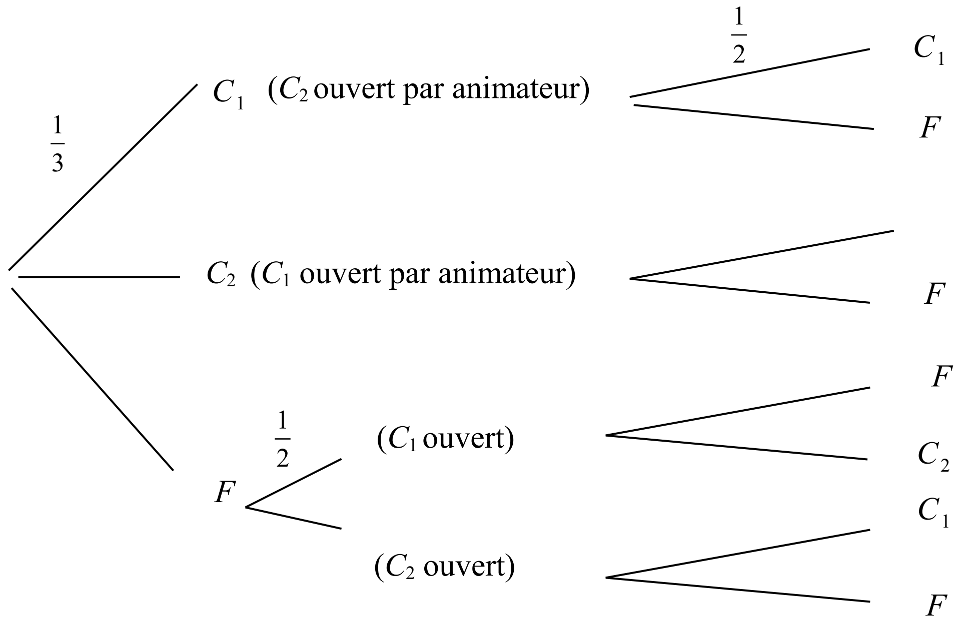
et $P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$

<u>Deuxième version</u> : le candidat change son choix



Ici on a $P(F) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

<u>Troisième version</u> : le deuxième choix du candidat, comme le premier, est fait de façon aléatoire (entre trois portes d'abord puis entre deux portes seulement) .



$$P(F) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

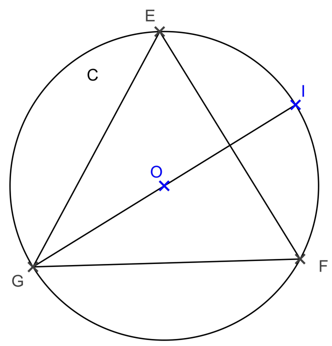
Suivant le choix du candidat et dont de la façon d'interpréter le choix aléatoire pour la deuxième épreuve de l'expérience aléatoire, les probabilités d'obtenir la Ferrari varient entre $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{3}$.

2. Un paradoxe de Bertrand

L'exercice qui suit, d'un niveau difficile pour l'élève s'il n'est pas accompagné par l'enseignant, permet de découvrir la notion de modélisation au travers d'une situation géométrique.

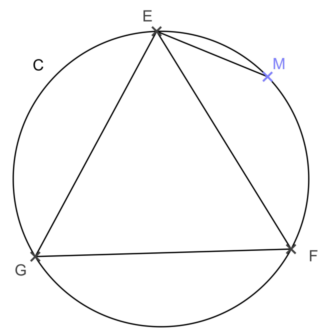
J. Bertrand était un mathématicien français du XIXe siècle, qui a mis en évidence certains paradoxes dans l'étude de problèmes de statistiques ou de probabilités.

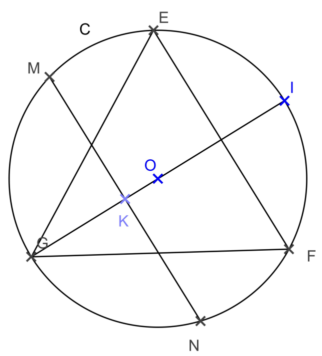
On considère un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon R.
1) Soit un triangle équilatéral EFG inscrit dans C et I l'intersection de (GO) et de $\mathcal{C}$.
Montrer que (GI) est la médiatrice de $[EF]$ et que (EF) est la médiatrice de $[OI]$.



2) On s'intéresse désormais à la question suivante : si on trace "au hasard" une corde du cercle $\mathcal{C}$, quelle est la probabilité que sa longueur soit supérieure à celle du côté du triangle équilatéral inscrit ? On appelle A cet événement.
Pour traiter cette question, on propose trois modèles différents.

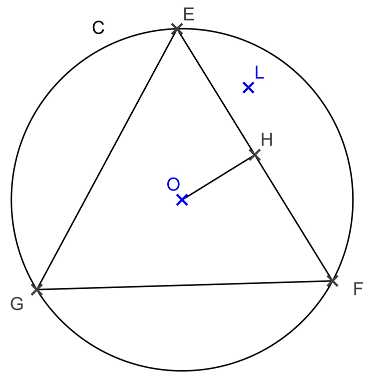
a) Modèle 1
On ne considère que les cordes issues du point E.
Pour tracer une corde "au hasard", il suffit de choisir un point M quelconque sur le cercle.
α) Ne choisir que les cordes issues de E restreint-il le "hasard" ?
β) Pour quelles positions de M l'événement A est-il réalisé ?
γ) Quel nombre est-il donc raisonnable de choisir pour la probabilité de l'événement A ?





b) Modèle 2
On ne considère que les cordes perpendiculaires au diamètre $[GI]$.
Pour tracer une corde "au hasard", il suffit de choisir un point K quelconque sur ce diamètre, puis de tracer la perpendiculaire à $[GI]$ en K.
α) Ne choisir que les cordes perpendiculaires à $[GI]$ restreint-il le "hasard" ?
β) Pour quelles positions de K l'événement A est-il réalisé ?
γ) Quel nombre est-il donc raisonnable de choisir pour la probabilité de l'événement A ?

c) Modèle 3
Pour choisir une corde "au hasard", on choisit simplement son milieu L en un point quelconque intérieur au cercle $\mathcal{C}$.
α) Montrer que, si le milieu L de la corde est choisi, alors la corde est déterminée de façon unique.
β) Montrer que, pour que l'événement A soit réalisé, il faut et il suffit que le point L soit à l'intérieur d'un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.
γ) En déduire la valeur qu'il est raisonnable de prendre pour la probabilité de l'événement A ?



3) Que peut-on conclure des résultats obtenus à la question 2) ?

Les trois réponses peuvent être acceptées puisque l'énoncé n'est pas suffisamment précis pour déterminer le modèle probabiliste sous-jacent. Cette imprécision perdure dans la recherche de la fréquence expérimentale car la réalisation de l'expérience consistant à déterminer une corde dépend de la façon de choisir la corde.
Demander aux élèves de simuler sur un tableur va les amener à se poser la question fondamentale : "Comment choisir une corde *au hasard* ?". Et il est à parier que les modèles décrits précédemment apparaîtront dans la classe.

3. Le problème des bancs

De nouveau, cette activité, très simple dans son énoncé, permet de découvrir le nécessaire passage au modèle probabiliste avant de traiter un exercice concret.

Dans une pièce se trouvent trois bancs de deux places chacun. Deux personnes entrent et s'assoient au hasard. On veut savoir quelle est la probabilité que les deux personnes choisissent le même banc.

1) Premier modèle : choix du banc puis de la place
   Les bancs sont numérotés de 1 à 3. Chaque banc présente deux places numérotées 1 et 2.
   a) En utilisant la touche "random" de votre calculatrice, simuler les choix aléatoires successifs, pour chacune des deux personnes, d'un des trois bancs. Utiliser de nouveau la simulation par la calculatrice pour cette fois choisir la place.
   En réalisant cent expériences, calculer la fréquence de l'événement "les deux personnes ont choisi le même banc".
   b) Montrer que l'expérience précédente est équivalente au modèle d'une urne contenant trois cartons *A*, *B* et *C* : la première personne tire un carton, le remet dans l'urne puis la deuxième personne tire un carton. La lettre tirée détermine le choix du banc.
   c) Sur ce modèle, calculer la probabilité que les deux personnes choisissent le même banc. Comparer avec le résultat de la question a).

2) Second modèle : choix de la place
   a) Les places sont numérotées de 1 à 6. La première personne tire un carton et va s'asseoir. La deuxième personne tire un des cinq cartons restants et va s'asseoir. Simuler ce modèle avec la touche "random" de votre calculatrice. En réalisant 100 expériences, calculer la fréquence de l'événement "les deux personnes ont choisi le même banc".
   b) Sur ce modèle, calculer la probabilité que les deux personnes choisissent le même banc. Comparer avec le résultat de la question a).

3) Comparer et commenter les résultats donnés par les deux modèles.

On pourrait imaginer partager l'effectif de la classe en deux et imposer un module à chaque groupe ; puis suivrait un débat sur les résultats obtenus.

4. Spaghettis et modélisation, d'après Repères-IREM, n°46, janvier 2002

Nous allons illustrer les différents aspects d'une modélisation à travers l'étude du problème suivant :

> "Quelle est la probabilité, en coupant au hasard un spaghetti en trois morceaux, de pouvoir construire un triangle avec les 3 morceaux ?"

Ce problème avait fait l'objet d'un atelier à un stage de l'IREM de Montpellier en juin 2000. Les participants avaient réalisé eux-mêmes l'expérience avec 30 spaghettis chacun. Un écart important avait été observé entre les fréquences obtenues expérimentalement. La diversité des résultats avait alors permis de montrer plusieurs simulations associées à plusieurs modèles. Les outils mis en œuvre ne sont pas tous du collège et seront rencontrés au lycée.

<u>Simulation 1</u>
On considère que couper un spaghetti en trois, c'est découper un segment, que l'on peut supposer de longueur 1, en trois morceaux. Les deux découpes seront choisies aléatoirement par deux réels x et y dans l'intervalle [0,1].

Cherchons alors les longueurs des trois morceaux obtenus a, b et c :

$a = \min(x,y)$
$b = \max(x,y) - \min(x,y)$
$c = 1 - (a + b)$

Les morceaux permettant la construction d'un triangle sont donc les morceaux de longueur a, b et c satisfaisant les trois inégalités triangulaires et $a + b + c = 1$, ce qui conduit à la condition $\max(a,b,c) < \frac{1}{2}$.

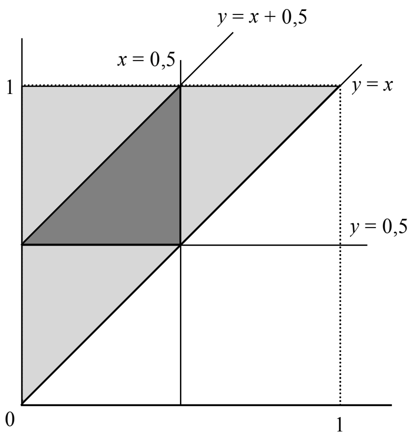
Avec un tableur, on peut procéder comme ci-dessous et obtenir des séries de simulations assez nombreuses :

A	B	C	D	E	F	G
Première Coupure ALEA()	**Deuxième Coupure ALEA()**	**Premier Morceau MIN(A;B)**	**Deuxième Morceau MAX(A;B)-MIN(A;B)**	**Troisième Morceau 1-(C+D)**	**Max des Morceaux MAX(C;D;E)**	**Test SI(F<0,5;1;0)**
0,31	0,85	0,31	0,54	0,15	0,54	0
0,37	0,15	0,15	0,22	0,63	0,63	0
0,96	0,08	0,08	0,88	0,04	0,88	0
0,49	0,05	0,05	0,45	0,51	0,51	0
0,28	0,63	0,28	0,34	0,37	0,37	1

On peut observer pour 10 séries de 500 simulations les fréquences suivantes :

0,236 0,262 0,22 0,236 0,246 0,252 0,266 0,23 0,26 0,248

Approche graphique du modèle : x et y sont deux nombres compris entre 0 et 1. Par symétrie du problème, on peut supposer que $x < y$. On obtient ainsi que l'ensemble des points $M(x,y)$ se trouve dans le triangle supérieur (hachuré) de la figure ci-après :



Le maximum des trois longueurs qui correspondent aux trois nombres x, $y - x$ et $1 - y$ doit être inférieur à $\frac{1}{2}$. Chacun d'eux doit donc l'être. On a ainsi trois inéquations qui permettent de construire la zone grisée dans le triangle. L'extension de la loi uniforme sur les domaines de $\mathbb{R}^2$ nous conduit à la probabilité qui est le rapport entre l'aire de ce triangle et l'aire du triangle hachuré : $\frac{1}{4}$.

Simulation 2

On peut aussi considérer que couper un spaghetti en trois, c'est couper un premier morceau de longueur a, $a \in [0,1]$, puis un second morceau de longueur b, $b \in [0;1 - a]$. La longueur du troisième morceau étant alors données par $c = 1 - (a + b)$.

Pour vérifier que les trois segments obtenus forment un triangle, le test reste le même $\max(a,b,c) < \frac{1}{2}$.

Avec un tableur, on peut procéder comme le tableau ci-après :

A	B	C	D	E
Premier Morceau ALEA()	**Deuxième Morceau (1-A)*ALEA()**	**Troisième Morceau 1-(A+B)**	**Max des Morceaux MAX(A;B;C)**	**Test SI(D<0,5;1;0)**
0,8	0,05	0,16	0,8	0
0,08	0,15	0,76	0,76	0
0,27	0,15	0,58	0,58	0
0,45	0,27	0,28	0,45	1
0,03	0,74	0,23	0,74	0

De même, on peut déterminer 10 séries de 500 simulations :

0,184 0,224 0,218 0,208 0,232 0,194 0,192 0,196 0,192 0,21

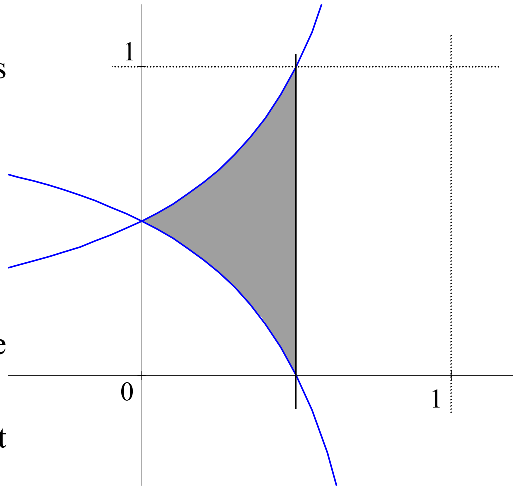
<u>Approche graphique du modèle</u> :

Soient x et y les deux nombres aléatoires considérés dans [0,1]. Les longueurs des segments sont :

$a = x$

$b = (1 - x)y$

$c = 1 - (a + b)$



De même, la construction du triangle est possible lorsque les trois segments ont des longueurs inférieures à $\frac{1}{2}$, soit :

$$x < \frac{1}{2} \quad , \quad (1 - x)y < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x + (1 - x)y > \frac{1}{2}$$

Soit encore

$$x < \frac{1}{2} \quad , \; y < \frac{1}{2(1-x)} \quad \text{et} \quad y > \frac{1-2x}{2(1-x)}$$

C'est à dire que les couples (x;y) sont les coordonnées des points de la zone hachurée ci-dessus. Le rapport des aires de la zone permettant de construire le triangle sur l'aire du carré conduit à une probabilité égale à l'intégrale

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1 - x)} - \frac{1 - 2x}{2(1 - x)} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2(1 - x)} - \frac{2(1 - x) - 1}{2(1 - x)} \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1 - x} - 1 \mathrm{d}x$$

$$= \left[-\ln(1-x) - x\right]_0^{\frac{1}{2}} = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \ln(2) - \frac{1}{2} \approx 0{,}193$$

<u>Simulation 3</u>

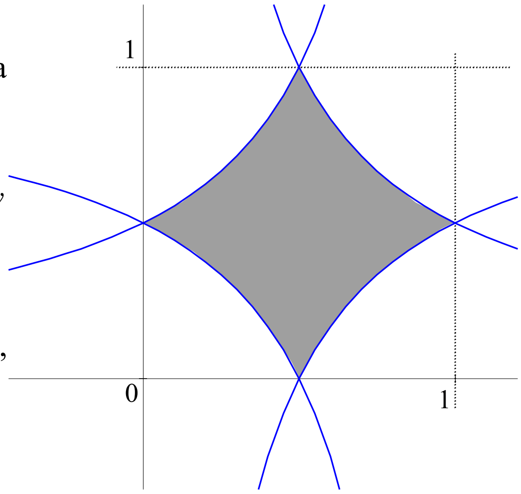
Une autre façon de couper un spaghetti en trois est de couper un morceau puis de recouper le plus grand des deux morceaux. Comme précédemment, nous pouvons simuler à l'aide d'un tableur :

A	B	C	D	E	F
Nombre entre 0 et 1 ALEA()	**Premier Morceau SI(A<0,5;A;1-A)**	**Deuxième Morceau (1-B)*ALEA()**	**Troisième Morceau 1-(B+C)**	**Max des Morceaux MAX(B;C;D)**	**Test SI(E<0,5;1;0)**
0,14	0,14	0,62	0,24	0,62	0
0,21	0,21	0,52	0,28	0,52	0
0,38	0,38	0,07	0,54	0,54	0
0,28	0,28	0,48	0,23	0,48	1
0,38	0,38	0,35	0,27	0,38	1

De même, 10 séries de 500 simulations ont donné comme fréquences :

0,384 0,376 0,36 0,38 0,38 0,376 0,364 0,398 0,376 0,396

Approche graphique



Lorsque le premier nombre aléatoire x est inférieur à , la situation est identique à la simulation 2.

Lorsqu'il est supérieur à $\frac{1}{2}$, on a $a = 1 - x$, $b = xy$

$c = 1 - (a + b)$

Il est alors possible d'obtenir un triangle lorsque $x > \frac{1}{2}$,

$y < \frac{1}{2x}$ et $y > 1 - \frac{1}{2x}$

Les points du domaine hachuré de la figure ci-après ont donc des coordonnées (x;y) qui permettent de construire un triangle.

Par symétrie avec le cas précédent, cette aire est $2(\ln 2 - \frac{1}{2})$, soit environ 0,386.

Chapitre VII
Les arbres de probabilité

Tirage de la loterie à l'hôtel de ville,
Claude-Louis Desrais, 1772, Paris,
musée Carnavalet

C'est Giocono Casanova (1725-1798) qui a inventé la loterie nationale pour rendre service à son ami désargenté Louis XV.

1. Des tableaux aux arbres

Un groupe de touristes s'est inscrit pour une visite guidée de la ville de Paris. Ils ont précisé s'ils souhaitaient la faire de jour ou de nuit et s'ils voulaient être à pied ou en car.

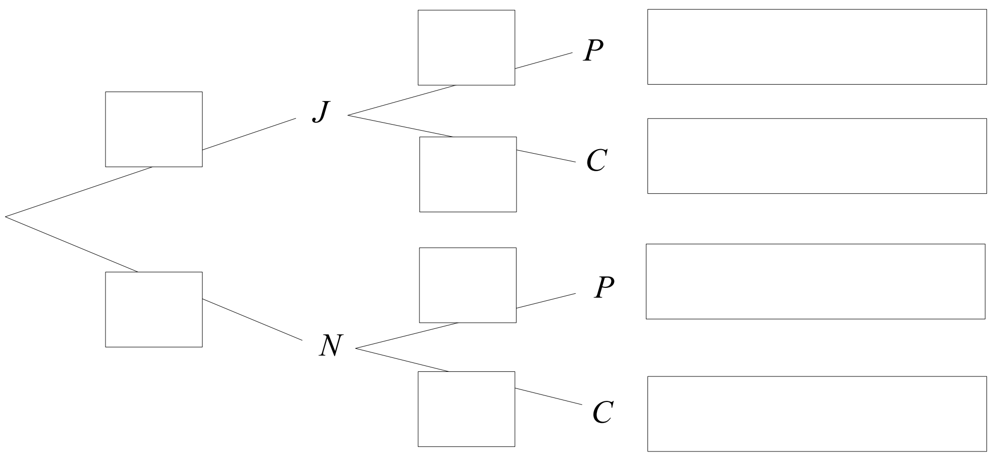
- 30% des touristes inscrits souhaitent visiter de nuit Paris et en car.
- 20% des touristes inscrits souhaitent visiter de jour Paris et en car.
- 10% des touristes inscrits souhaitent visiter Paris de nuit et à pied.

On recherche ici si les touristes ont le même comportement de visite, à pied ou en car, suivant la période de la journée.

1) Compléter le tableau à double entrée permettant de traduire les données fournies.

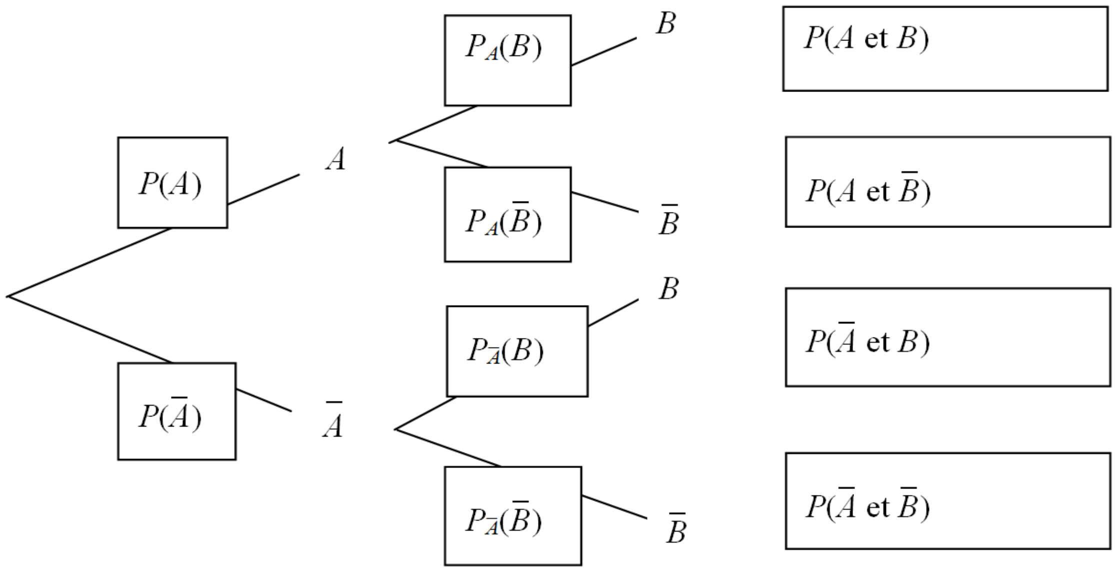
	A Pied	**En Car**	**Total**
De Jour			
De Nuit			
Total			

2) Quels sont les pourcentages respectifs de touristes souhaitant visiter de nuit et de jour la ville de Paris ?
3) Quel est le pourcentage de touristes souhaitant visiter la ville de Paris en car ?
4) Parmi les touristes souhaitant visiter la ville de nuit le pourcentage de ceux désirant le faire à pied est-il identique à ceux souhaitant visiter le jour ?
5) On prélève au hasard un individu de la population étudiée.
Représenter la situation en complétant l'arbre de probabilité ci-dessous. La conclusion du 4) est-elle clairement visible sur l'arbre ?



L'arbre est un outil graphique qui permet de trier et d'organiser les données. Il constituera au lycée une aide à la mémorisation des formules (définition des probabilités conditionnelles et la formule des probabilités totales) et le programme précise que, bien construit, il constitue une preuve acceptable. La forme n'est pas standardisée mais on rencontre souvent, comme ci-dessus, les probabilités de chacune des branches.

L'arbre est un mode de représentation et de traitement que les élèves retrouveront au lycée. Il permet de traiter les questions faisant intervenir des probabilités conditionnelles. Afin de mieux comprendre, la notion d'événements incompatibles devra être traitée au préalable. De manière générale, un chemin (succession de plusieurs branches) tel que celui qui a été utilisé précédemment sera interprété de la manière suivante dans le cadre de la théorie des probabilités :



où A et B sont deux événements.
Au bout du chemin, se trouve une feuille (qui n'est pas toujours indiquée), qui représente l'événement "A et B". Sa probabilité est le produit des probabilités rencontrées sur les branches le long du chemin : $P(A \text{ et } B) = P(A) \times P_A(B)$. Ce qui doit faire l'objet d'une synthèse avec les élèves. On peut faire le parallèle avec des pourcentages de pourcentages permettant de retrouver, dans le cadre des fréquences, ce produit.
On y retrouve plusieurs règles. La somme des probabilités situées sur les branches issues d'un même nœud est 1 et se traduit par : , $P(A) + P(\overline{A}) = 1$, etc …
La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des branches aboutissant à cet événement : $P(B) = P(A \text{ et } B) + P(\overline{A} \text{ et } B)$. Ceci est explicitement visualisé dans le tableau à double entrée lorsque l'on effectue les totaux en ligne ou en colonne.

Un tableau à double entrée nous donne de façon semblable à l'arbre de probabilité :

	A	$\overline{A}$	
B	$P(A \text{ et } B)$	$P(\overline{A} \text{ et } B)$	$P(B)$
$\overline{B}$	$P(A \text{ et } \overline{B})$	$P(\overline{A} \text{ et } \overline{B})$	$P(\overline{B})$
	$P(A)$	$P(\overline{A})$	

La construction de la ligne ou de la colonne en marge (par superposition du tableau à double entrée de l'exercice précédent) permet d'illustrer $P(B) = P(A \text{ et } B) + P(\overline{A} \text{ et } B)$.

2. De la calculatrice aux arbres

Dans l'activité suivante, donnée en devoir maison à la fois dans une classe de seconde et une classe de troisième, il est demandé d'effectuer une simulation. Celle-ci peut être faite avec un tableur mais aussi une calculatrice. Les élèves y découvrent un arbre qui n'est pas symétrique dans sa constitution.

La politique de contrôle des naissances en République populaire de Chine

Afin de limiter les naissances, les autorités chinoises ont décidé de pratiquer la politique de l'enfant unique. Dans les zones rurales, si le premier enfant est une fille, les familles peuvent avoir un second enfant. Par contre, si le premier enfant est un garçon, les couples ne doivent pas tenter d'avoir un autre enfant.

Cette activité permet d'étudier les compositions de telles familles.

On a donc l'une des trois situations suivantes :

Situation A : le premier et seul enfant est un garçon.
Situation B : les deux enfants sont des filles.
Situation C : le premier enfant est une fille et le deuxième est un garçon.

On cherche à simuler ces situations conformément à ce qui se déroule dans les campagnes chinoises. L'expérience aléatoire étudiée consiste donc à choisir au hasard une famille d'au maximum deux enfants et à noter sa situation *A*, *B* ou *C*. Mais ici, on préfère procéder à une simulation de l'expérience aléatoire à l'aide de chiffres au hasard entre 0 et 9.

Simulation de l'expérience aléatoire

Dans une suite de chiffres au hasard, on regroupe les chiffres deux par deux en convenant que le premier chiffre correspond au premier enfant et que le deuxième chiffre correspond au deuxième enfant quand il y a lieu.

On admet que pour chaque naissance, il y a égalité de chances pour que l'enfant soit un garçon ou une fille. On choisit d'associer à chacun des chiffres 0, 1, 2, 3, 4 une fille et à chacun des chiffres 5, 6, 7, 8, 9 un garçon.

Exemple :

$$\underbrace{7 \quad 2}_{A} \qquad \underbrace{4 \quad 3}_{B} \qquad \underbrace{3 \quad 8}_{C} \qquad \underbrace{2 \quad 1}_{B} \qquad \ldots$$

1) Avec la fonction Random de la calculatrice, produire une suite de 200 chiffres au hasard en recopiant ces chiffres au fur et à mesure.

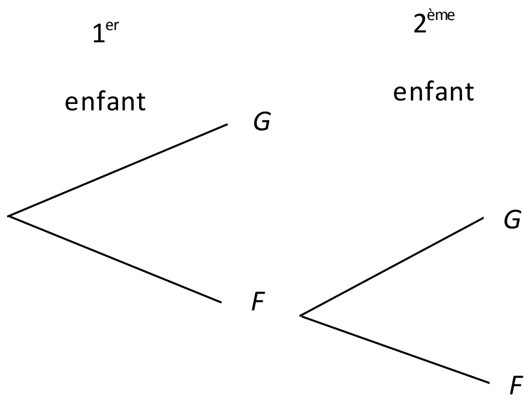
2) Déterminer la situation des 100 familles qui correspondent à la suite des 200 chiffres obtenus.
Calculer la fréquence de chacune des situations *A*, *B* et *C*.

3) Pour disposer d'un plus grand nombre de familles, regrouper les résultats obtenus dans la classe? Calculer, pour cet échantillon, la fréquence de chacune des situations *A*, *B* et *C*.

4) On choisit au hasard une famille dans l'une des trois situations. En observant les fréquences calculées précédemment, peut-on évaluer les chances que cette famille se trouve dans la situation *A*, *B* ou *C* ?

5) Vers une explication

On distingue l'aîné des deux enfants et le deuxième enfant éventuel. On note *F* la présence d'une fille et *G* celle d'un garçon. On représente les différents cas par le diagramme ci-contre. Un tel diagramme est appelé un arbre de probabilité.

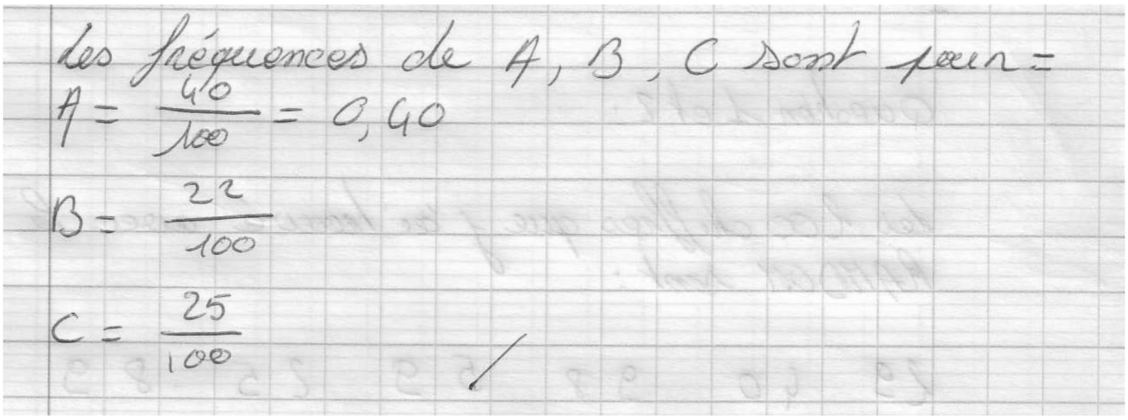


Déterminer les probabilités des branches de l'arbre qui correspondent aux situations *A*, *B* et *C*.

Les résultats trouvés dans la classe semblent-ils en accord avec cette explication ?

Reprendre les calculs de probabilité en prenant les données de naissance pour la France (en réalité, en France, il nait en moyenne environ 105 garçons pour 100 filles).

Dans les réalisations des élèves, on remarque de nombreuses erreurs de notation comme l'attestent les extraits ci-dessous :


les fréquences de A, B, C sont pour :
$A = \frac{40}{100} = 0,40$
$B = \frac{22}{100}$
$C = \frac{25}{100}$

On remarque aussi la confusion persistante entre la fréquence d'un événement sur un nombre donné de réalisations et la probabilité d'obtenir cet événement.

Fréquence de chaque des familles:
fA = 0,44
fB = 0,27
fC = 0,29

3) La famille à 44% de chance d'être dans la situation A, 27% dans la situation B, et 29% dans la situation C.
(Les nombres ne sont pas exacte car je n'ai ~~pas~~ pris que 200 nombres)

La tentation est grande de voir l'équiprobabilité dans toutes les situations. Cet élève commence par considérer trois issues donc une chance sur trois d'obtenir l'une des trois issues !

3) Chaque famille à une chance sur 3 d'être soit dans le cas A soit dans le cas B ou bien dans le C.
59% des familles se trouvent dans le cas A.
21% dans le cas B et 19% dans le cas C. Les familles ont

On peut aussi remarquer la volonté d'un élève de trouver les résultats sous la forme "... chance sur ...".

Fréquence de la situation A : $\frac{50}{100} = 0,50$

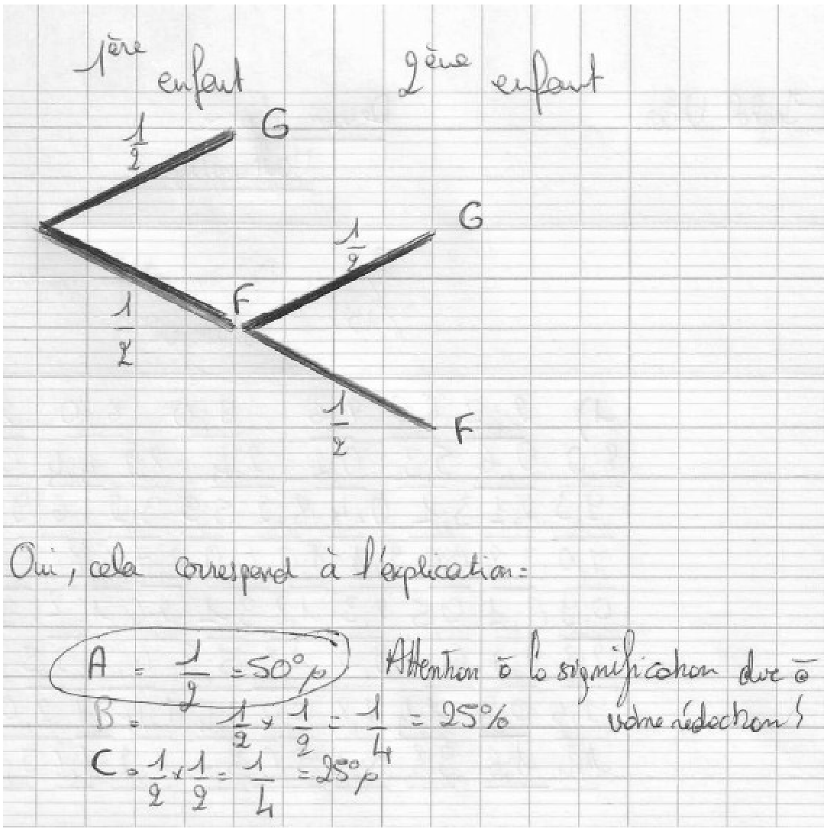
B : $\frac{30}{100} = 0,30$

C : $\frac{20}{100} = 0,20$

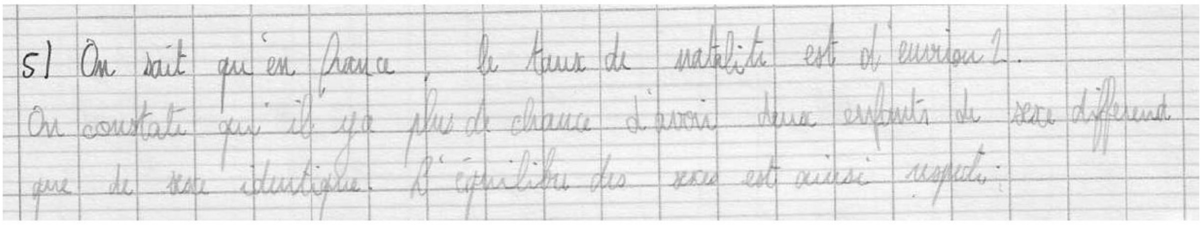
Prenons par exemple la première famille qui est dans la situation A : il y a une chance sur deux pour qu'elle se trouve dans la situation dans laquelle elle se trouve. Une chance sur trois pour qu'elle se trouve dans la situation B et une chance sur cinq pour qu'elle se trouve dans la situation C, à peu près.

Outre la confusion entre nombre et fraction, cet élève exprime les probabilités recherchées sous la forme une chance sur 2 ou 3 ou 5.

Enfin, les erreurs de notations et la confusion entre probabilités et pourcentages sont nombreuses.



Les exercices reposant sur les naissances et sur le sexe des enfants peuvent aider les élèves à se débarrasser d'idées toutes faites et contribuer à les éduquer sur la notion de hasard.



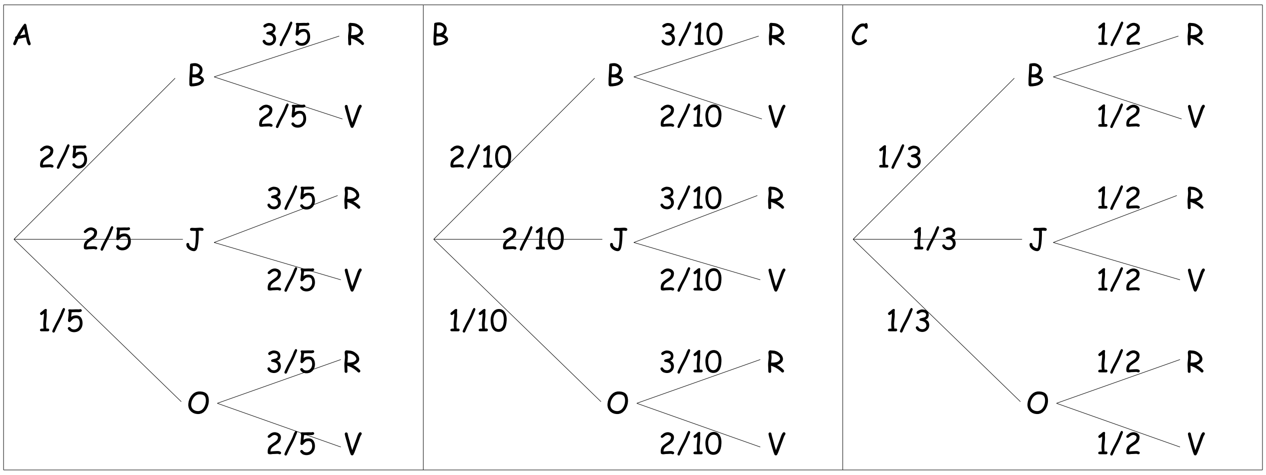
5) On sait qu'en France, le taux de natalité est d'environ 2.
On constate qu'il y a plus de chance d'avoir deux enfants de sexe différent que de sexe identique. L'équilibre des sexes est ainsi respecté.

3. Arbres de probabilités : équiprobables ou pondérés ?

Il est fréquent de rencontrer dans l'esprit d'un élève la mise en place d'une situation d'équiprobabilité sur un exercice. Parce qu'il y a n issues, chacune a une probabilité de réalisation de $\frac{1}{n}$.

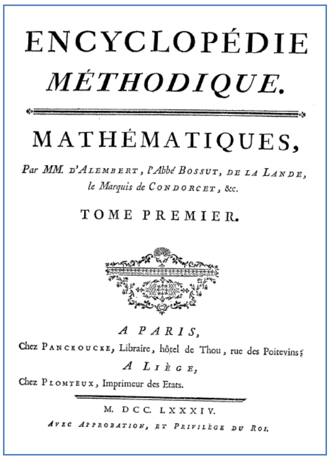
On peut proposer un QCM du type de celui ci-dessous provenant d'un ouvrage de troisième. Certains de nos élèves choisiront l'arbre C en reliant la probabilité au nombre de branches apparentes et en dé-contextualisant l'énoncé.

Une boîte contient des craies : 2 blanches, 2 jaunes et 1 orange. Une trousse contient des marqueurs : 3 rouges et 2 verts. On tire au hasard une craie de la boîte et on repère sa couleur. Ensuite, toujours au hasard, on tire un marqueur de la trousse et on repère sa couleur. L'arbre pondéré qui représente cette expérience à deux épreuves est :



Cette confusion entre dénombrement des cas et probabilité peut être illustrée historiquement comme le propose l'activité suivante où l'on relève l'erreur de Jean Rond d'Alembert dans l'article *Croix et Pile* de son *Encyclopédie*.

Quel Modèle Choisir ?



ENCYCLOPÉDIE
MÉTHODIQUE.

MATHÉMATIQUES,

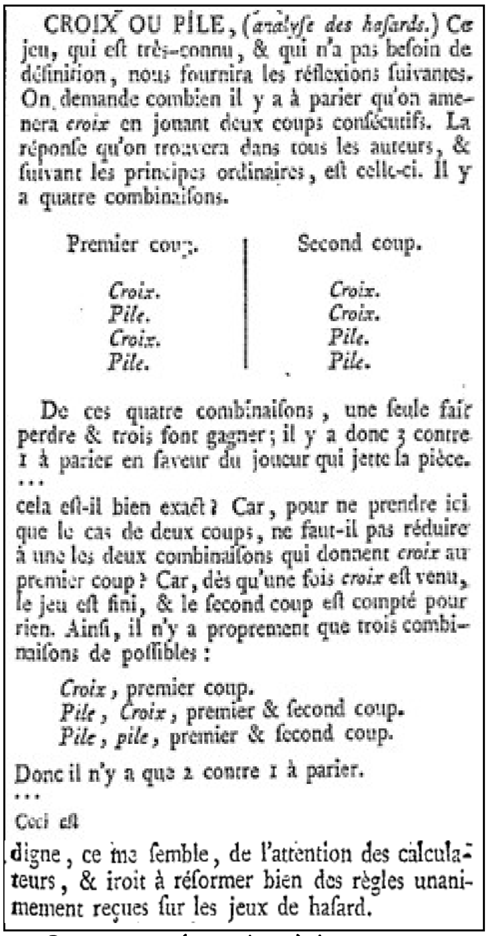
Par MM. D'ALEMBERT, l'Abbé BOSSUT, DE LA LANDE, le Marquis de CONDORCET, &c.

TOME PREMIER.

A PARIS,
Chez PANCKOUCKE, Libraire, hôtel de Thou, rue des Poitevins;
A LIÈGE,
Chez PLOMTEUX, Imprimeur des Etats.

M. DCC. LXXXIV.
AVEC APPROBATION, ET PRIVILÈGE DU ROI.

Dans l'article *Croix et Pile* de l'*Encyclopédie*, Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) présente deux raisonnements différents pour calculer les chances de gagner à ce jeu, c'est-à-dire d'obtenir *Croix* (on dirait aujourd'hui *Face*) en lançant une pièce deux fois.



CROIX OU PILE, (*analyſe des haſards.*) Ce jeu, qui eſt très-connu, & qui n'a pas beſoin de définition, nous fournira les réflexions ſuivantes. On demande combien il y a à parier qu'on amenera *croix* en jouant deux coups conſécutifs. La réponſe qu'on trouvera dans tous les auteurs, & ſuivant les principes ordinaires, eſt celle-ci. Il y a quatre combinaiſons.

Premier coup.	Second coup.
Croix.	*Croix.*
Pile.	*Croix.*
Croix.	*Pile.*
Pile.	*Pile.*

De ces quatre combinaiſons, une ſeule fait perdre & trois font gagner; il y a donc 3 contre 1 à parier en faveur du joueur qui jette la pièce.
...
cela eſt-il bien exact ? Car, pour ne prendre ici que le cas de deux coups, ne faut-il pas réduire à une les deux combinaiſons qui donnent *croix* au premier coup ? Car, dès qu'une fois *croix* eſt venu, le jeu eſt fini, & le ſecond coup eſt compté pour rien. Ainſi, il n'y a proprement que trois combinaiſons de poſſibles :

Croix, premier coup.
Pile, *Croix*, premier & ſecond coup.
Pile, *pile*, premier & ſecond coup.

Donc il n'y a que 2 contre 1 à parier.
...
Ceci eſt
digne, ce me ſemble, de l'attention des calculateurs, & iroit à réformer bien des règles unanimement reçues ſur les jeux de haſard.

1) Lire le texte ci-contre de Jean le Rond d'Alembert expliquant le jeu ayant pour but d'obtenir *Croix* en lançant deux fois une pièce.

2) Expliquer les parties de phrase :
- " 3 contre 1 à parier en faveur du joueur " ;
- " 2 contre 1 à parier" .

3) Simulation de l'expérience
On simule l'expérience à l'aide d'une suite de chiffres au hasard.

a) Proposer une méthode de simulation d'un lancer de pièce (*Croix* et *Pile*) à partir d'une suite de chiffres aléatoires entre 0 et 9.

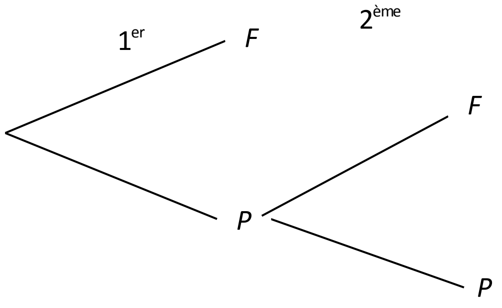
b) Réaliser 5 simulations à l'aide du tableur du jeu ayant pour but d'obtenir *Croix* en lançant deux fois une pièce.

Peut-on répondre à la question sur les chances de gagner à ce jeu, c'est-à-dire d'obtenir *Croix* ?

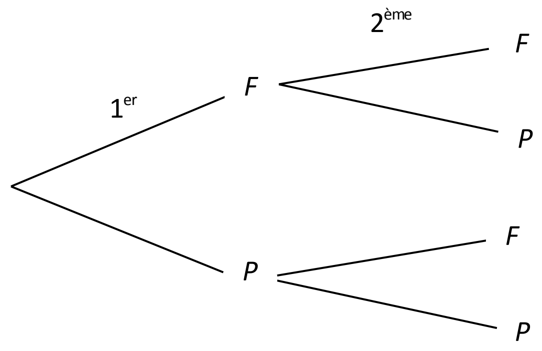
c) Construire un plus grand nombre de simulations et calculer le pourcentage de parties gagnées. Peut-on maintenant répondre à la question sur les chances de gagner à ce jeu ?

4) Modélisation
Lequel des deux modèles énoncés par Jean le Rond d'Alembert semble le plus approprié ?
Proposer une explication à partir des arbres ci-dessous qui envisagent les différents cas possibles.

Modélisation 1



Modélisation 2



5) Une réponse de Laplace (1749-1827)

Laplace commence par démontrer que la probabilité d'amener *Croix* au moins une fois en deux coups est de . Puis il conteste le raisonnement de d'Alembert :

> *On ne peut compter à ce jeu que trois cas différents, savoir :* croix *au premier coup, ce qui dispense d'en jouer au second ;* Pile *au premier coup et* croix *au second ; enfin* Pile *au premier et au second coup. Cela réduirait la probabilité à 2/3 si l'on considérait avec d'Alembert ces trois cas comme également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener* Croix *au premier coup est 1/2, tandis que celle des deux autres cas est 1/4 …*
> *Maintenant, si on ajoute la possibilité 1/2 d'amener* Croix *au premier coup à la possibilité 1/4 de* Pile *arrivant au premier coup et* Croix *au second, on aura 3/4 pour la probabilité cherchée.*
>
> Leçon donnée à l'Ecole Normale en 1795.

Illustrer les remarques concernant les probabilités d'apparition de chacune des faces de la pièce sur les deux arbres de la première page.

Expliquez alors les raisons de l'incertitude de Jean le Rond d'Alembert.

L'arbre que vous avez construit augmenté des probabilités de réalisation est appelé *arbre pondéré.*

Du temps des premiers rois de France, les pièces de monnaie portaient d'un côté une croix, de l'autre des piliers. Les deux faces d'une pièce étaient alors désignées par "croix" et "pile". Par la suite, les rois ont remplacé la croix par leur effigie (leur face) et les piliers par la valeur de la pièce. Un des côtés de la pièce a dès lors été désigné par le mot "face" et l'autre a continué de s'appeler "pile".

Chapitre VIII
Liens entre la démarche statistique, la simulation et les probabilités

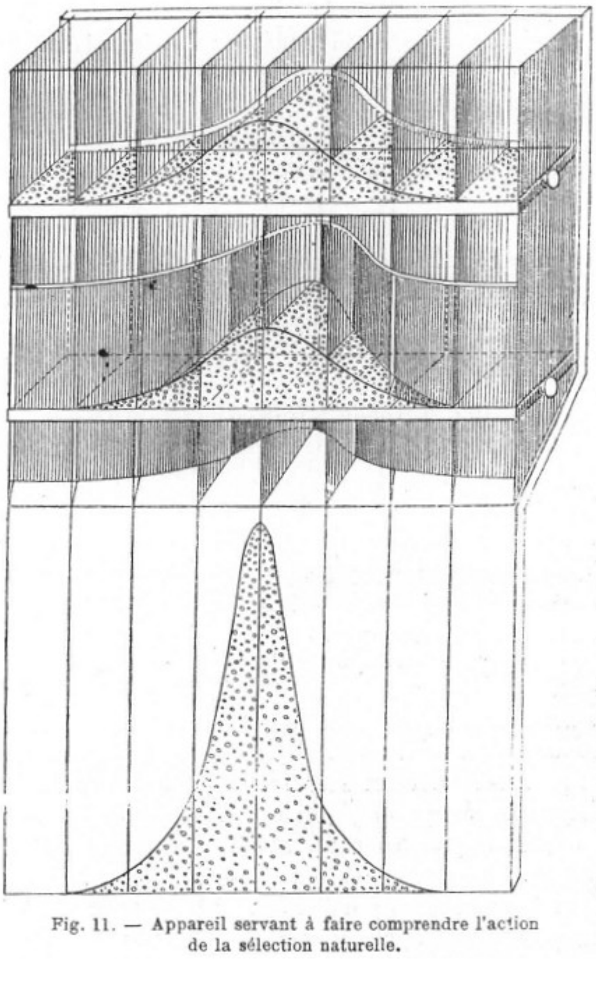


Fig. 11. — Appareil servant à faire comprendre l'action de la sélection naturelle.

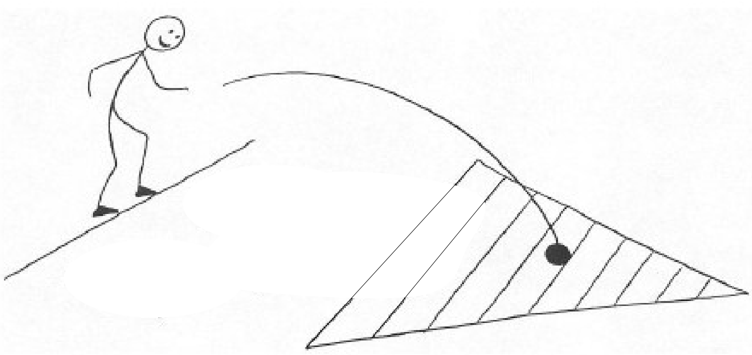
M. Francis Galton de la Société Royale de Londres,
Les lois typiques de l'hérédité.
La Revue Scientifique de la France et de l'étranger,
2ème série, 7ème année, N°17, 27 octobre 1877

Il est tout naturel de rapprocher l'enseignement des statistiques à celui des probabilités en classe de troisième par l'approche fréquentiste décrite auparavant.
Aussi, comme premier lien avec les probabilités, nous proposons le jeu du Delta (qui pose aussi la question de la notion hasard) et qui permet de travailler la notion de fréquence, pré-requis à toute étude statistique.
Ensuite, "les carrés multiples" permet de comparer plusieurs séries statistiques et d'introduire des notions nouvelles en classe de 3e telles que les premier et troisième quartiles et la médiane. Les différentes "médianes" seront explicitées (celle du tableur, de la calculatrice).
Enfin, nous terminerons par le parallèle entre les statistiques et les probabilités.

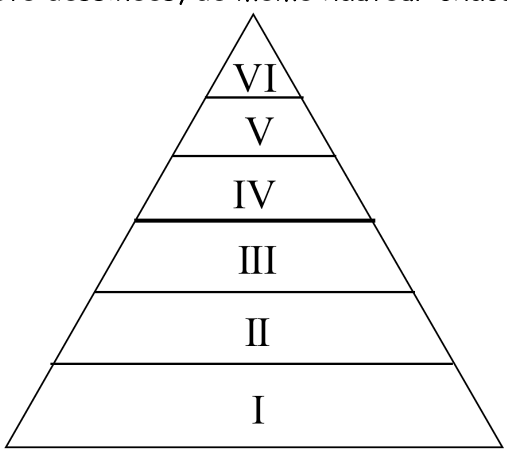
1. Le jeu du Delta

Le jeu du Delta
(de Δ, la quatrième lettre de l'alphabet grec)

Deux joueurs se placent à 2 ou 3 mètres de la base du delta et lancent tour à tour des noix. Le chiffre inscrit dans la case où tombe la noix rapporte autant de points. La noix sortant du delta ne donne aucun point.



Le Delta, représenté ci-dessous sera constitué d'un triangle équilatéral dans lequel six zones valant de I à VI ont été dessinées, de même hauteur chacune.



1) Réaliser un jeu du Delta en utilisant quatre feuilles au format A3.
Réaliser une simulation de 50 lancers et ne considérez que les coups apportant des points.
Parmi vos simulations, quelle fréquence de coups rapporte 1 point, 2 points, … , 6 points ?
Votre simulation peut-elle être considérée comme aléatoire ?

2) a) Montrer que la zone portant la marque V est de surface triple de celle portant la marque VI.
Qu'en déduire sur les probabilités d'obtenir une noix dans la zone V par rapport à celle d'obtenir la zone VI, dans le cas d'un lancer aléatoire ?
b) De même, étudiez les rapports d'aires entre chacune des zones du jeu et la zone marquée VI.
Quelle proportion des coups tombent dans chacune des zones du Delta.
c) En réalité, un joueur atteint la cible dans 90 % de ses lancers. Déterminer alors la probabilité d'obtenir chacune des marques (de I à VI) dans ce cas, en supposant les lancers atteignant le Delta aléatoires.

Prolongements possibles :

1) Quelle valeur peut-on espérer obtenir en moyenne à l'issue de l'un des lancers ?
Les jeunes romains jouaient en lançant 5 noix. Quel score pouvait-on espérer obtenir, en moyenne ?

2) On suppose ici qu'une noix mesure 4 cm de diamètre. Un complément à la règle du jeu du Delta précise que toute noix tombant sur une intersection entre deux zones du Delta ne vaut que les points de la case inférieure.
Cela change-t-il les probabilités d'obtenir chacune des zones à l'issue d'un lancer, en considérant encore que 90% des coups atteignent le Delta ?
Et pour le score moyen avec les 5 noix ?

3) Utilisation en latin
Les noix étaient le symbole de l'enfance, à tel point que l'expression « nuces relinquere » (laisser ses noix), signifiait, en latin, sortir de l'enfance pour aller à l'école. Associées à des évènements joyeux, les noix sont lancées lors des naissances, anniversaires ou mariages. Elles sont également offertes aux enfants par les amis de la famille pendant les fêtes des Saturnales.
Ovide, Le Noyer (une traduction plus complète est disponible sur http://fr.wikisource.org/wiki/Le_Noyer) :

Texte latin :

… poma cadunt mensis non interdicta secundis, et condit lectas parca colona nuces.
has puer aut certo rectas dilaminat ictu aut pronas digito bisue semelue petit.
quattuor in nucibus, non amplius, alea totast, cum sibi suppositis additur una tribus. per tabulae cliuom labi iubet alter et optat, tangat ut e multis quaelibet una suam.
est etiam par sit numerus qui dicat an impar, ut diuinatas auferat augur opes.
fit quoque de creta, qualem caeleste figuram sidus et in Graecis littera quarta gerit.
haec ubi distincta est gradibus, quae constitit intus quot tetigit uirgas, tot capit ipsa nuces. 85 uas quoque saepe cauom spatio distante locatur, in quod missa leui nux cadat una manu. felix secreto quae nata est arbor in aruo
et soli domino ferre tributa potest.

Traduction française :

… Alors tombent mes noix qui, elles aussi, trouvent place au dessert, et que tu recueilles, ô fermière économe, pour les conserver.
Elles servent également aux jeux des enfants, soit que debout, et à l'aide d'une noix lancée sur les autres, ils rompent l'ordre dans lequel elles sont disposées ; soit que, baissés, ils atteignent en un ou deux coups le même but, en la poussant du doigt. Quatre noix suffisent pour ce jeu ; trois au-dessous et la quatrième au-dessus. D'autres fois on fait rouler la noix du haut d'un plan incliné, de manière à ce qu'elle rencontre une de celles qui sont à terre sur son passage. Avec elles aussi on joue à pair ou non, et le gagnant est celui qui a deviné juste.
Ou bien on trace avec de la craie une figure pareille à la constellation du Delta, ou à la quatrième lettre des Grecs ; sur ce triangle, on tire des lignes, puis on y jette une baguette ; celui des joueurs dont la baguette reste dans le triangle gagne autant de noix qu'en indique l'intervalle où elle est restée. Souvent enfin on place à une certaine distance un vase dans lequel doit tomber la noix qu'y lance le joueur. Heureux l'arbre qui croît dans un champ éloigné de la route, et qui n'a de tribut à payer qu'à son maître !

Fragment de bas-relief : enfants jouant aux balles 2e quart du IIe siècle après J.-C. Ovide, dans le noyer, parle d'une variante de ce jeu où les enfants utilisent un plan incliné. Peut être que les enfants de gauche jouent aux noix. Musée du Louvre.

Cette activité a été testée (sans les prolongements) en début d'année en classes de 3[e] après avoir travaillé sur les agrandissements et réductions de figures et le théorème de Thalès et la notion de fréquence avait été réactivée.

Voici son déroulement possible :

premier temps : construction du jeu à la maison.
deuxième temps : manipulation pendant 30 min.
troisième temps : travail de groupe sur les données et sur le 2) (1h).
quatrième temps : synthèse des groupes et 15min d'interprétation des résultats des deux classes.

Dans un premier temps, la construction du jeu se fait par équipe de 4 élèves sur une feuille de format A3, en dehors du temps de classe. Les élèves ont à construire un Delta, dont les hauteurs de bandes sont imposées (10cm), ceci permettant d'utiliser comme projectile un bouchon de bouteille de jus d'orange de diamètre 5cm. En effet, si historiquement les noix (ou des baguettes) servaient aux lancés, elles s'avèrent, par expérience, très difficiles à manier pour les élèves car amènent beaucoup d'échecs (ce qui n'est pas le but recherché ici). Nous les remplacerons donc par des capsules en métal, toutes identiques.
La construction du jeu peut poser problème par la taille du plateau lui-même et les instruments dont disposent les élèves. Nous pouvons leur suggérer l'utilisation d'une ficelle en guise de compas par exemple.

Après vérification des plateaux de jeu, les élèves passent à la pratique dans la cours de récréation pendant une période de 30 minutes. Ils sont toujours en équipe et disposent de 3 ou 4 bouchons par groupe, (suffisamment pour ne pas perdre de temps de rotation des lancés).
Ils effectuent 50 lancés chacun en se plaçant tous à une distance identique d'environ 2,5 m de la cible. Sur un tableau distribué auparavant, ils indiquent, pour chacun de leur lancé, le résultat obtenu.
En 30 min, seul un groupe sur les deux classes de 3[e] n'a pas terminé ses lancés mais nous pouvons constater que l'aspect ludique a été fort apprécié par les élèves et a rejailli sur leur investissement l'heure suivante. Du point de vue statistique, le choix de 50 lancés permet de traiter un échantillon de taille intéressante.

La séance suivante, les élèves ont calculé par groupe, les fréquences des coups rapportant 1 point, 2 points, etc...
Ensuite, ils ont recherché les questions 2a) et 2b) sans aller au delà, tout en produisant un écrit commun projeté en synthèse à la classe. Leur difficulté a alors été de se détacher de leur expérience et d'imaginer un lancer aléatoire pour la suite.
La question, **"Votre simulation peut-elle être considérée comme aléatoire ?"** mérite qu'on s'y attarde en classe entière à un moment car nous attendons ici un recul sur l'expérience faite, ses conditions. Finalement, pour les élèves, ils n'ont pas lancé au hasard, mais explicitent très bien leur technique de lancé, leur façon de tenir le bouchon, leur stratégie de jeu (beaucoup disent viser le centre de la cible). Ils soulèvent eux-même, par débat en classe, la question du hasard. Le hasard doit être juxtaposé au non-hasard pour prendre sens dans leur tête, et ce jeu permet une première confrontation avec cette notion.

Voici la production d'un premier groupe, avec les fréquences toutes exprimées en pourcentages, ce que feront les autres groupes majoritairement. A la question 2, une première réponse est d'abord proposée, montrant combien l'équiprobabilité peut être affectée de façon prégnante.

Florian/Brieuc/Alexis/Marwan/Romain.

groupe 5

fréquence pour 1

$f_1 = \frac{8}{169} \times 100$

$f_1 = 4,73\%$

fréquence pour 2

$f_2 = \frac{25}{169} \times 100 = 14,79\%$

fréquence pour 3

$f_3 = \frac{51}{169} \times 100$

$f_3 = 30,18\%$

fréquence pour 4

$f_4 = \frac{46}{169} \times 100$

$f_4 = 27,22\%$

fréquence pour 5

$f_5 = \frac{31}{169} \times 100$

$f_5 = 18,34\%$

fréquence pour 6

$f_6 = \frac{8}{169} \times 100$

$f_6 = 4,73\%$

Oui, car elle dépend du hasard. On a une chance sur 6 de faire les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 ou 6.

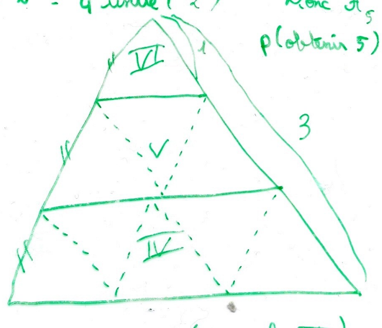
Cette réponse ne les a pas empêché par la suite de trouver les rapports entre les aires en jeu, allant même contredire l'idée précédente.

$\mathcal{A}$ petit t = 1 unité

$\mathcal{A}$ grand t = 4 unité (2^2)

Donc $\mathcal{A}_5 = 3 \times \mathcal{A}_6$

p(obtenir 5) = 3 × p(obtenir 6)



$\mathcal{A}$ petit t = 1 unité (triangle VI)

$\mathcal{A}$ grand t = 9 unité (3^2)

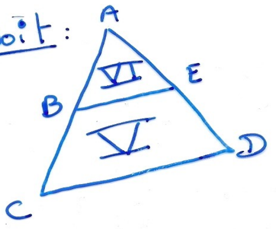
Le groupe suivant discerne difficilement les notions de fréquence et de probabilité, ce qui se traduit par une probabilité calculée comme suit :

la probabilité de tomber dans la zone VI vaut le quotient de l'aire de la zone VI par 90 (90 est l'effectif de lancés qui ont touché la cible lors de l'expérimentation de ce groupe).

Nous devons prouver que la zone portant la marque V est de surface triple de celle portant la marque VI.

- Essaie n°1 : Chercher comment calculer l'aire d'un trapèze.
- Essaie n°2 : Nous avons contourné cette difficulté.

Soit :



aire de ABE = base × h ÷ 2
= 9 × 9 ÷ 2
= 8 × 9 ÷ 2
= 36 cm²

aire de ADC = base × h ÷ 2
= 18 × 16 ÷ 2
= 144 cm²

- Donc : aire du trapèze BECD = A de ADC − A de ABE
= 144 − 36
= 108 cm²

probabilité de tomber sur la zone VI $= \frac{36}{90} \times 100$
= 40 %

probabilité de tomber sur la zone V $= \frac{108}{90} \times 100$
= 120 %

aire de AGF = base × h ÷ 2
= 27 × 24 ÷ 2
= 324

aire de AGF − aire de ADC = 324 − 144
= 180

180 : 36 = 5

Le triangle ABE va 5 fois dans le triangle AGF.

Cependant, lors de la synthèse, peut être valorisé le travail sur le calcul d'une aire par découpage : l'aire de *BECD* obtenue comme différence d'aires de deux triangles.

Enfin, le groupe n°5 propose un découpage en triangles, ce que certains ont aussi exploité à l'aide de la fabrication d'un gabarit du triangle VI manipulé et reporté plusieurs fois dans les autres zones. Au 2) a), la réponse est apportée en terme de "chances de" mais les égalités sur les aires ne sont pas traduites au niveau des probabilités.

Groupe n° 5

n° 1

$f_1 = \frac{14}{66} \times 100$

$f_1 = \frac{700}{33}$

$f_1 = 21,2$ % de lancés de 1.

$f_2 = \frac{9}{66} \times 100$

$f_2 = \frac{150}{11}$

$f_2 = 13,6$ % de lancés de 2.

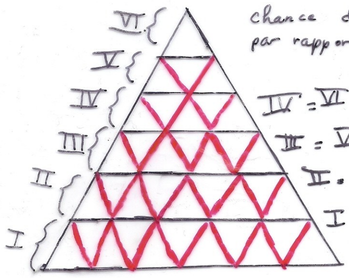
$f_3 = 21,2$ % de lancés de 3.

$f_4 = 21,2$ % de lancés de 4

$f_5 = 15,15$ % de lancés de 5

$f_6 = 7,57$ % de lancés de 6

2.a) Dans la zone V, on peut placer 3 triangles de la taille du VI. Donc la zone V est 3 fois plus grande que la zone VI. Donc on a 3 fois plus de chance de tomber sur le V par rapport à la VI.



IV = VI × 5

III = VI × 7

II = VI × 9

I = VI × 11.

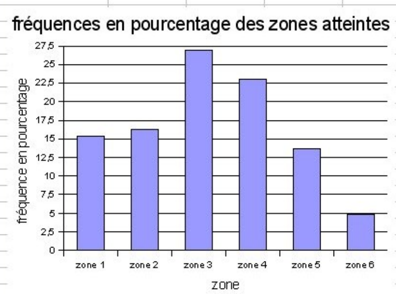
Aires.

La synthèse est à mener sur deux plans, le côté statistique tout d'abord, lié à l'expérience. Un choix de présenter les résultats de deux classes peut permettre d'obtenir un échantillon plus large, quitte à faire faire l'expérience à une classe d'un autre niveau avec les jeux fabriqués par les élèves de troisième.

Voici les résultats statistiques obtenus par deux classes de 3[e], au vu de ceux-ci, les élèves commentent ainsi:

- la zone 3 a été la plus atteinte, leur explication tient au fait que beaucoup déclarent avoir visé le centre de la cible.
- la zone 6 est plus difficile à atteindre (plus petite, plus éloignée).
- ils comparent inévitablement leurs résultats d'une classe à l'autre.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**groupe**	**1/3e6**	**2/3e6**	**3/3e6**	**4/3e6**	**5/3e6**	**1/3e1**	**2/3e1**	**3/3e1**	**4/3e1**	**5/3e1**	**total**	
2	nb de 1	8	16	14	6	13	17	6	28	8	14	**130**	
3	nb de 2	25	10	8	8	22	15	8	14	18	9	**137**	
4	nb de 3	51	19	27	10	31	17	14	27	17	14	**227**	
5	nb de 4	46	18	22	8	26	16	18	16	10	14	**194**	
6	nb de 5	31	4	11	5	13	13	9	9	10	10	**115**	
7	nb de 6	8	2	8	2	2	4	2	5	3	5	**41**	
8	totalcoupsgagnants	169	69	90	39	107	82	57	99	66	66	**844**	
9												**fréquence sur effectif total**	
10	fréquence de 1	4,73	23,19	15,56	15,38	12,15	20,73	10,53	28,28	12,12	21,21	**15,4**	
11	fréquence de 2	14,79	14,49	8,89	20,51	20,56	18,29	14,04	14,14	27,27	13,64	**16,23**	
12	fréquence de 3	30,18	27,54	30	25,64	28,97	20,73	24,56	27,27	25,76	21,21	**26,9**	
13	fréquence de 4	27,22	26,09	24,44	20,51	24,3	19,51	31,58	16,16	15,15	21,21	**22,99**	
14	fréquence de 5	18,34	5,8	12,22	12,82	12,15	15,85	15,79	9,09	15,15	15,15	**13,63**	
15	fréquence de 6	4,73	2,9	8,89	5,13	1,87	4,88	3,51	5,05	4,55	7,58	**4,86**	
16		100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	



zone 1	15,4
zone 2	16,23
zone 3	26,9
zone 4	22,99
zone 5	13,63
zone 6	4,86

Il peut être remarquable d'observer sur le graphique que statistiquement, pour les deux classes réunies, la fréquence d'atteindre la zone 5 est à peu près 3 fois celle d'atteindre la zone 6, et que celle d'atteindre la zone 4 est à peu près 5 fois celle d'atteindre la zone 6.
Ensuite, vient la synthèse liée aux probabilités avec les rapports établis par les élèves entre les aires, puis traduits en terme de probabilités comme suit :

$$p(atteindre V) = 3 \times p(atteindre VI)$$
$$p(atteindre IV) = 5 \times p(atteindre VI)$$
$$p(atteindre III) = 7 \times p(atteindre VI)$$
$$p(atteindre II) = 9 \times p(atteindre VI)$$
$$p(atteindre I) = 11 \times p(atteindre VI)$$

La notation est celle du début d'année, et est amenée à évoluer au fil du temps. Le calcul de chacune des probabilités se heurte à la compréhension de la notion de lancé aléatoire sur la cible qui suppose une cible atteinte systématiquement, ce qui est difficilement concevable par les élèves encore dans la phase ludique.
En effet, ici, ce calcul repose sur le fait que la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1, ce qui peut être institutionnalisé ici. Peut-être cette partie de synthèse est-elle à différer dans le temps à cause de cette rupture à donner, ceci permettant aussi d'utiliser des notations moins "lourdes"?

Les calculs menant aux probabilités d'atteindre chaque zone ont leur intérêt car ils permettent de réinvestir les fractions et la résolution d'équation.

On a $p(atteindre VI) = \frac{1}{36}$; $p(atteindre V) = \frac{1}{12}$; $p(atteindre IV) = \frac{5}{36}$; $p(atteindre III) = \frac{7}{36}$; $p(atteindre II) = \frac{1}{4}$ et $p(atteindre I) = \frac{11}{36}$

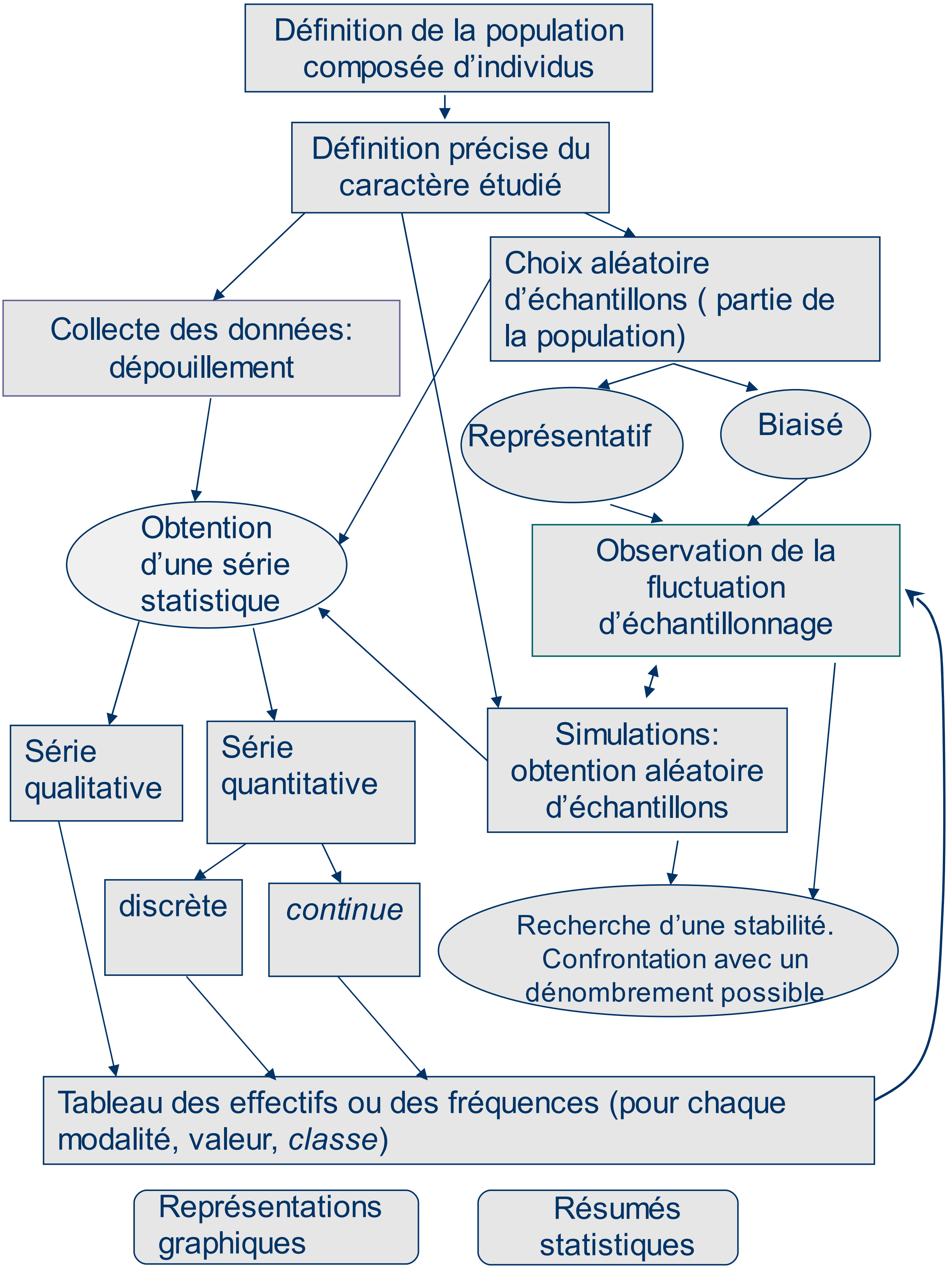
2. Etude statistique

Après avoir précisé la problématique et les inconnues liées à cette recherche, une étude statistique comporte généralement quatre étapes :

- le recueil des données : sondages, recensements, enquêtes, mesures ...
- la présentation des résultats : tableaux, graphiques ...
- le résumé des données (grandeurs caractéristiques de l'échantillon : pramètres de position et de dispersion) ...
- l'exploitation des données : savoir tirer des conclusions des calculs précédents.

La page ci-après provient du site de l'Académie de Lille et le diaporama associé peut y être trouvé. Il présente des aspects de la démarche statistique et les liens avec la simulation d'échantillons.

Après avoir déterminé le caractère que l'on souhaite étudier sur une population donnée, il s'agit dans un premier temps de collecter les données correspondantes sur cette population. Trois possibilités suivant la population où le temps de l'étude. Il est possible de collecter les données sur toute la population ou bien sur un choix aléatoire d'échantillons (qui pourront être représentatifs ou biaisés suivant la confrontation finale avec l'exploitation des données) ou encore de simuler aléatoirement un ou des échantillons (et permettre, avec l'usage des ordinateurs, un gain de temps).


Définition de la population composée d'individus
Définition précise du caractère étudié
Choix aléatoire d'échantillons (partie de la population)
Collecte des données: dépouillement
Représentatif
Biaisé
Obtention d'une série statistique
Observation de la fluctuation d'échantillonnage
Série qualitative
Série quantitative
Simulations: obtention aléatoire d'échantillons
discrète
continue
Recherche d'une stabilité. Confrontation avec un dénombrement possible
Tableau des effectifs ou des fréquences (pour chaque modalité, valeur, *classe*)
Représentations graphiques
Résumés statistiques

Comment choisir ces échantillons pour qu'ils soient de bonnes tailles, représentatifs, non biaisés ? Est-ce que les données d'un échantillon sont suffisantes pour être représentatif ? De deux ? De trois ? ... Ont-ils choisi des textes de même taille ? Est-ce important par ailleurs ?...

Dans tous les cas, le dépouillement permet d'obtenir une série statistique. Le caractère étudié peut alors être qualitatif ou quantitatif. Dans ce dernier cas, les données pourront être discrètes ou continues et la présentation des résultats conduira à des tableaux d'effectifs ou de fréquences. Les caractères quantitatifs continus pourront éventuellement être regroupés en classes dont une représentation graphique privilégiée est l'histogramme alors que les données discrètes pourront être représentées par des diagramme en bâtons. Il existe néanmoins d'autres formes de représentations graphiques.

Avec les outils du programme de troisième, des paramètres statistiques pourront compléter l'étude. Des paramètres de position (médiane, moyenne) associés à des paramètres de dispersion (étendue, quartiles). C'est la statistique descriptive.

Cette étude permettra d'observer la fluctuation d'échantillonnage et de la confronter au choix des échantillons constitués aléatoirement sur la population initiale. En regroupant les résultats de différents échantillons, les élèves constatent que les résultats fluctuent. Mais qu'à partir d'un moment, on tend vers une stabilité. A partir de modèles probabilistes connus, il est possible de décider des valeurs possible des paramètres (estimation).

Il serait alors intéressant de confronter cette stabilité avec un dénombrement possible.

3. Les "carrés multiples"

Nous pouvons donc tenter de faire un parallèle entre les valeurs d'une série statistique qui fluctuent autour d'une valeur théorique à l'instar des fréquences qui varient "autour" d'une valeur théorique, la probabilité liée à cette fréquence.
Nous avons choisi de présenter une activité liée au programme de sciences physiques de troisième. Il s'agit de vérifier dans le programme de cette discipline que le quotient entre la tension maximale et la tension efficace est égal à $\sqrt{2}$. Nous avons demandé à des élèves de sixième et de troisième de construire des carrés et de relever les longueurs de ces côtés et de la diagonale. L'activité suivante tente d'en faire l'étude.
Cette autre activité permet de travailler dans le domaine des statistiques, en lien avec la géométrie. Précisons toutefois qu'elle n'est pas là pour donner du sens à la notion de racine carrée, même si celle-ci est sous-jacente ici.

CARRES MULTIPLES

Partie 1 : constructions de carrés (individuelle)
Construire 5 carrés de tailles différentes sur une feuille blanche.
Sur chaque carré, tracer une des deux diagonales.
Pour chaque carré, relevez :

- la mesure c de son côté.
- la mesure d de la diagonale tracée.

Puis estimez pour chacun le rapport $\frac{d}{c}$.

Partie 2 : organisation des données (en groupes de 4, en classe)
1) Mettre en commun vos résultats. Observez et comparez.
2) Ecrire toutes vos remarques possibles sur un transparent.
3) Vous y ferez figurer les calculs de :

- la valeur moyenne des quotients $\frac{d}{c}$ du groupe.
- l'étendue (plus grande valeur - plus petite valeur) de cette série de valeurs.

4) Compléter la feuille de calcul de tableur des données de la classe.

Partie 3 : traitement des données de la classe entière (en salle informatique) :
Ouvrir le fichier "carrésmultiplesclasse".
A partir des données de toute la classe, nous allons étudier la série statistique des quotients $\frac{d}{c}$ obtenus :

- calculez la moyenne des valeurs obtenues du quotient $\frac{d}{c}$.
- calculez l'étendue de cette série de valeurs.
- Indiquez les valeurs extrêmes de cette série.
  Comment peut-on expliquez ces « écarts » de réponses dans la classe ?
- En enlevant ces valeurs extrêmes, recalculez une valeur moyenne de $\frac{d}{c}$.
- Ranger dans l'ordre croissant les données $\frac{d}{c}$ de la classe.
- Trouvez la médiane de cette série statistique.

Etude des premier et troisième quartiles :

Définition :
Le premier quartile est la plus petite valeur Q1 telle qu'au moins un quart des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q1.
Que vaut le premier quartile Q1 ici ?

Définition :
Le troisième quartile est la plus petite valeur Q3 de la série telle qu'au moins les trois quarts des valeurs de la série sont inférieures ou égales à Q3.
Que vaut le troisième quartile Q3 ?
Comment décrire les valeurs situées entre le premier et le troisième quartile ?
Comment décrire les valeurs qui ne sont pas situées entre le premier et le troisième quartile ?

Prolongements possibles en classe entière :

1) comparaison moyenne par classe (des groupes), moyenne des valeurs de la classe entière.
2) Calculer la moyenne des valeurs situées entre les deux quartiles de la classe. Comparer le résultat aux résultats précédents.
3) Démonstration de $\frac{d}{c} = \sqrt{2}$.

La première étape qui consiste à construire 5 carrés par élève et à faire des mesures, nous suggérons de la faire faire à la maison, mais en précisant en amont la consigne et en distribuant des feuilles blanches de format A3 aux élèves.
En effet, le support papier blanc évitera des cas de carrés portés sur un quadrillage, et donc des redondances de mesures. Il permet d'obliger les élèves à être minutieux en utilisant règle, équerre ou compas. De plus, le format A3 les incite à faire varier fortement les mesures des côtés des carrés.
On peut aussi imaginer mener la première partie dans des classes de niveaux différents : en 6^{e} comme ce fut le cas ici en parallèle des classes de 3^{e}, puis comparer les capacités de traçage et de mesurage des différents niveaux à l'aide de l'outil statistique.

Cette activité basée au départ sur le mesurage s'inscrit dans le programme de la classe de 3^{e} dont voici un extrait dans les commentaires spécifiques pour le socle:

Deux objectifs, figurant dans la partie relative à la culture scientifique, sont ici visés (en statistique):

- *comprendre qu'à une mesure est associée une incertitude.*
- *comprendre la nature et la validité d'un résultat statistique.*

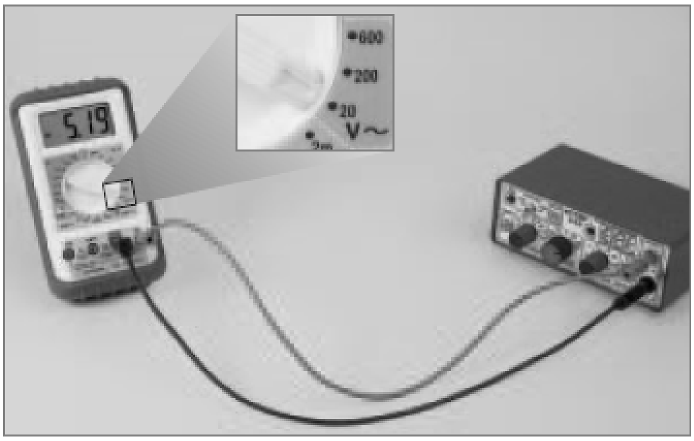
A propos de l'incertitude de la mesure, soulevée par les élèves lors de la mise en commun de cette activité, voici une copie d'écran d'un ouvrage de sciences physiques de troisième, hachette, présentant un travail analogue. Le lecteur remarquera la nette différence de valeurs permettant de remarquer que le quotient tend à être $\sqrt{2}$.

Valeur efficace d'une tension sinusoïdale

Un voltmètre est utilisé en mode alternatif. Que mesure-t-il lorsqu'il est branché à un générateur délivrant une tension sinusoïdale ?

Expérimente

- **Branche** un voltmètre réglé sur le mode alternatif (~) aux bornes d'un générateur de tension sinusoïdale.
- Le voltmètre indique alors la **valeur efficace** U de la tension.
  Mesure cette tension (Doc. 5).
- **Visualise** la tension de ce générateur à l'aide d'un oscilloscope (Doc. 6).
- **Mesure** la valeur maximale U_{max} de la tension.
- **Règle** le générateur pour obtenir différentes tensions de sortie et **mesure** à nouveau U et U_{max}. Pour chaque mesure, **effectue** le rapport : $\frac{U_{max}}{U}$.



Doc 5 Mesure de la valeur efficace de la tension aux bornes d'un générateur de tension sinusoïdale.

❶ Quelle remarque peux-tu faire concernant le rapport $\frac{U_{max}}{U}$?

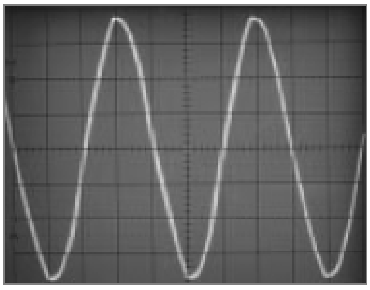
❷ Qu'en déduis-tu concernant les valeurs efficace et maximale d'une tension sinusoïdale ?

Observe

→ Le tableau ci-dessous donne les valeurs efficace U et maximale U_{max} de la tension pour différents réglages du générateur de tension sinusoïdale.

U_{max} (V)	6	8	10	12	14
U (V)	4,2	5,6	7,1	8,6	10
$\frac{U_{max}}{U}$	1,43	1,43	1,41	1,40	1,40

→ Le rapport $\frac{U_{max}}{U}$ est pratiquement constant et égal à 1,4.



Doc 6 Visualisation à l'oscilloscope de la tension aux bornes du générateur.

Interprète

→ Le voltmètre en mode alternatif mesure la **valeur efficace** de la tension (➧).
→ La valeur efficace de la tension est différente de la valeur maximale. Ces deux valeurs sont **proportionnelles** et vérifient la relation : $\frac{U_{max}}{U} \simeq 1,4$.

➧ *Le générateur de tension alternative fournit une tension de valeur efficace 12 V* ***(Doc. C, page 139).***

Conclusion

Le voltmètre en mode alternatif mesure la valeur efficace U d'une tension sinusoïdale. Cette valeur efficace est proportionnelle à la valeur maximale U_{max} de la tension.

Si ce TP utilise seulement 5 données pour en déduire un rapport constant, notre étude propose d'étudier une centaine de rapports $\frac{d}{c}$ liés aux mesures, (voir 200 si nous rapprochons les résultats de deux classes de niveaux différents). Rappelons qu'il n'y aurait aucun sens à étudier un échantillon d'une vingtaine de valeurs.

Les parties 2 et 3 sont menées en salle informatique où les élèves utilisent le tableur pour ordonner la série statistique de la classe entière. Le collage spécial peut être introduit à ce moment là (après avoir copier les données issues d'une formule, il s'agit de ne pas faire un coller classique car alors les formules risquent de ne plus être valides. Il faut donc effectuer l'instruction collage spécial du tableur et demander à coller les nombres et non plus les formules).
La détermination de la médiane, et des quartiles se fera sans utiliser l'assistant de fonction du tableur qui engendrerait une réponse erronée. En effet, différents "calculs" de quartiles existent, et varient selon que l'on utilise la calculatrice ou le tableur.

4. Une nouveauté du programme : les quartiles

Intéressons nous aux différentes façons de déterminer les quartiles (la définition recommandée par le programme, celle des tableurs et celle des calculatrices).

Cette différence sera explicitée à l'aide de la série statistique : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

"A la main" :
L'effectif de la série statistique étant pair, une valeur médiane partagera la série en deux, ici entre la valeur 6 et la valeur 7, et l'on prendra 6,5.
Le premier quartile est la plus petite valeur de la série telle qu'il y ait au moins 25% inférieure à elle, ici la valeur 3.
Le troisième quartile est la plus petite valeur de la série telle qu'il y ait au moins 75% inférieure à elle, ici la valeur 9.

Avec un tableur :
La médiane est la valeur qui partage la série statistique en deux, ici la moyenne entre les rangs 1 et 12 soit 6,5.
Pour partager les valeurs entre 1 et 12, les tableurs effectuent un décalage de 1 pour ramener les valeurs entre 0 et 11. Un partage conduit à la valeur $\frac{11}{4}$ = 2,75 qui ramenée aux valeurs de départ donne le rang 3,75. L'écart entre la troisième valeur (3) et la quatrième (4) étant de 1, 75% de cet écart donne 0,75 et le premier quartile à l'aide d'un tableur est 3,75.
De même, les tableurs donnent un troisième quartile égal à 9,25.

Avec une calculatrice :
La médiane fournie reste ici identique, 6,5.
Les calculatrices considèrent par contre que les quartiles sont les médianes des sous-séries inférieures et supérieures de la série statistique. La sous-série inférieure étant ici les valeurs de 1 à 6, le premier quartile sera la valeur 3,5.
De même, le troisième quartile sera 9,5.

Il faut remarquer que la différence principale entre les outils TICE que sont le tableur et la calculatrice, d'une part, et la définition du programme, d'autre part, réside sur le fait que dans ce dernier cas, les quartiles font partie de la série statistique alors que les outils TICE renvoient des valeurs qui peuvent ne pas y figurer.
Lorsque les données étudiées sont en plus grand nombre, les différences seront d'autant plus minimes.

Si le programme ne fait pas référence à un paramètre de dispersion reliée à la médiane, l'activité suivante permet néanmoins d'utiliser les quartiles. De nombreuses situations conduisent à enlever les valeurs aberrantes (en général le minimum et le maximum), l'activité qui vous est proposée présente les valeurs aberrantes suivant M. Tukey.

Les valeurs aberrantes selon J.W. Tukey[6] d'après Maths Repère 1ère S, Hachette, 2005.

En France les contrôles radar sur les routes se sont intensifiés depuis quelques temps. Mais la gendarmerie a constaté que de plus en plus d'automobilistes utilisent des brouilleurs de radar.
Une société française a mis au point un nouveau radar qui a une portée de 3 km avec faisceau large de 3 cm lorsque le véhicule est à 300 mètres du radar.
Aucun brouilleur ne peut lutter contre ce nouveau modèle. La gendarmerie a mis en place (à titre d'essai avant l'homologation) ce nouveau radar sur une autoroute et on a obtenu les résultats suivants :

107 - 112 - 97 - 135 - 187 - 111 - 98 - 99 - 110 - 123 - 143 - 136 - 124 - 128 - 165 – 132 - 96 - 87 - 121 - 105 - 108 - 110 - 99 - 129 - 125 - 12 - 121 - 116 - 119 - 126 - 141 - 290 - 145 - 111 - 87 - 90 - 123 - 142 - 148 - 97 - 87 - 26 - 62 - 243 - 117 - 105 - 119 - 109.

1) a) Déterminer une valeur médiane de cette série statistique et en donner la signification.
b) Déterminer des valeurs pour les premier et troisième quartiles, que l'on notera respectivement Q_1 et Q_3, et en donner la signification.
c) Déterminer l'étendue de cette série statistique.

2) Le statisticien J.W. Tukey qualifiait d'aberrantes les valeurs d'une série statistiques qui ne se situaient pas entre les valeurs $Q_1 - 1{,}5(Q_3 - Q_1)$ et $Q_3 + 1{,}5(Q_3 - Q_1)$.
a) Déterminer les deux valeurs ci-dessus pour la série statistique donnée.
b) Quelles sont les valeurs aberrantes selon J.W. Tukey ?
c) Déterminer l'étendue de la série statistique privée de ses valeurs aberrantes selon J.W. Tukey.

6 John Wilder Tukey (1915-2000), né à New-Bedford dans le Massachusetts, fut un des plus grands statisticien du XX^e siècle. Il a écrit plus de 500 articles touchant de nombreux domaines de la staistique, il a amélioré d'anciens outils statistiques et en a inventé de nouveaux. Une des contributions importantes est d'avoir séparé en deux étapes l'analyse des données : l'analyse exploratoire puis l'analse comfirmatoire. On lui attribue l'invention des boîtes à moustache en 1977, également appelée diagrammes en boîte de Tukey. Si les "moustaches" sont, suivant les normes, les extrêmes ou les premier et neuvième déciles, celle de Tukey sont de longueur 1,5 fois celle de l'intervalle interquartile soit $1{,}5\times(Q_3 - Q_1)$.

Sources et bibliographie :

- *Premiers pas en simulation*, Yadolah Dodge, Giuseppe Melfi, Springer, 2008.

- *Modèles probabilistes d'aide à la décision*, Michel Nedzela, Presses de l'Université du Quebec, 1987.

- *La nécessité du hasard*, Alain Pavé, EDP Sciences, 2007.

- *L'induction statistique au lycée*, Philippe Dutarte, IREM Paris-Nord, 2005.

- *Manuel de calcul numérique appliqué*, Christian Guilpin, EDP Sciences, 2000,

- *L'enseignement des probabilités au collège et au lycée. Exemples européens et propositions*, Groupe probabilités et Statistiques, IREM de Lorraine, 2001.

- *Des Statistiques à la pensée statistique*, IREM de Montpellier, 2001.

- Maths 1ère S, collection Fractale, Bordas 2001.

- Repères-IREM, n°46, janvier 2002

- Wikipédia, encyclopédie en ligne

Réf : **R139**

Titre : **Une initiation aux probabilités par le jeu**

Auteur : Blandine Masselin et Frédéric Vivien
I.R.E.M. de Rouen

Public Visé : Enseignants de collège et lycée, étudiants préparant les concours de recrutement

Résumé : Cette brochure présente les activités présentées lors de stages faisant suite à l'introduction des probabilités dans le programme de mathématiques de troisième à la rentrée scolaire 2008. Leur support repose le plus souvent sur des jeux ou des concepts à la portée des élèves et utilisent largement les TICE pour permettre la réalisation d'un grand nombre d'expériences et approcher la notion de probabilité par son aspect fréquentiste.

Mots clés : Probabilité, hasard, aléatoire, simulation, Monte-Carlo, modélisation, paradoxe, fréquentiste, arbres de probabilité, jeux, collège, progression spiralée, TICE, expérience aléatoire, statistiques, quartiles, médiane.

Date : Septembre 2009

Nombre de pages : 103

Prix : 10 €

N° ISBN : **978-2-86239-097-0**

Publication : **IREM de Rouen, Université de Haute-Normandie**
Bâtiment de Mathématiques
Avenue de Broglie
B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cédex

Bon de commande à retourner à IREM, Université de Haute-Normandie
Bâtiment de Mathématiques
Avenue de Broglie
B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cédex

M, Mme ………………………..…………………………..
Adresse ………………………..…………………………..
………………………..…………………………..
………………………..…………………………..
Quantité : …………………………..
Prix à payer : nombre d'exemplaires …..× 10 € + frais de ports : 2,40 € + 0,80€ par livre supplémentaire

Date : ………………………….. Signature :

Chèque libellé à l'ordre de l'Agent comptable de l'Université de ROUEN.