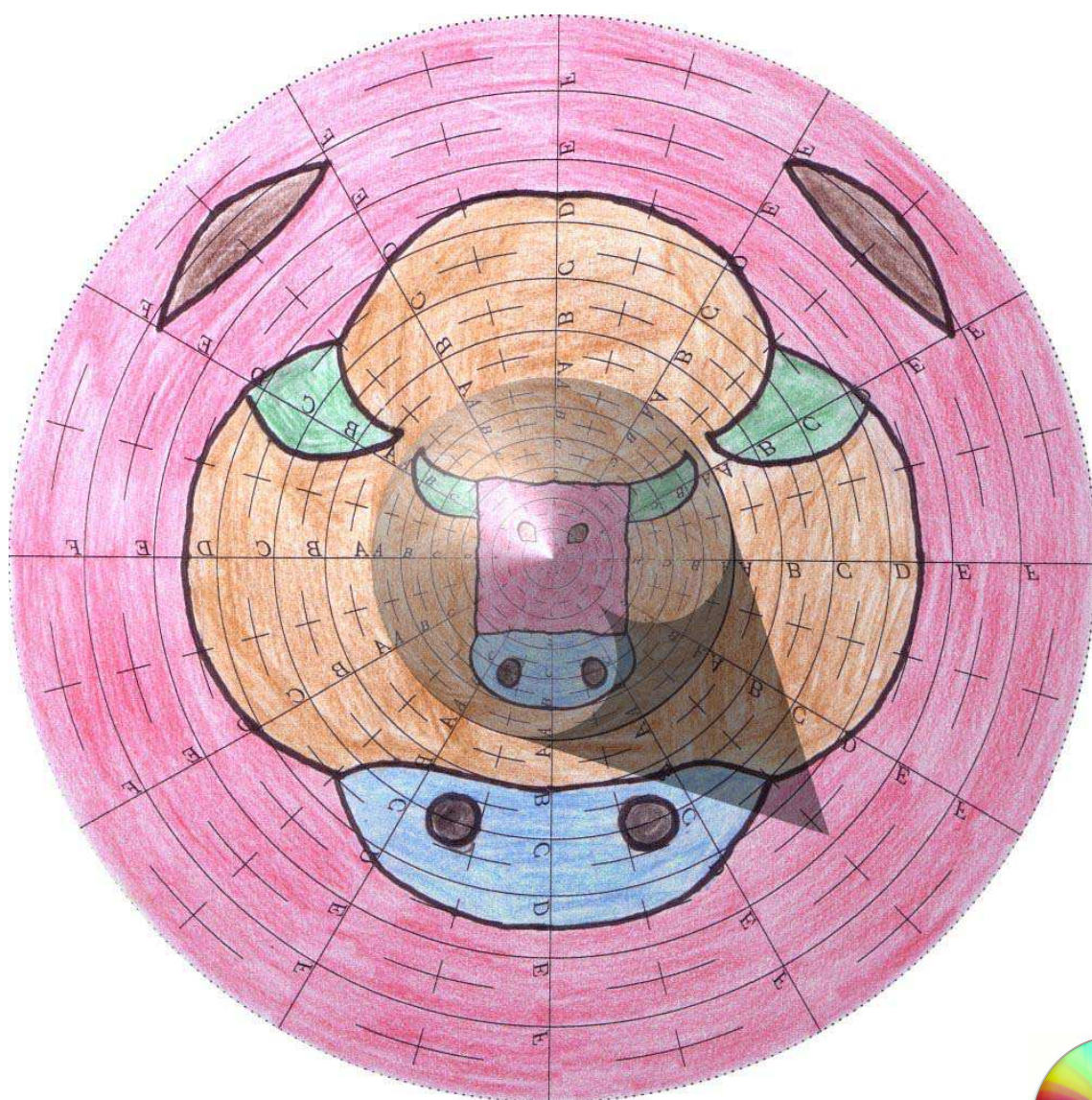


L'illusion conique

Mathieu Blossier



cd-rom inclus

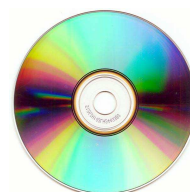


Table des matières

Introduction	7
1 Des transformations qui pètent la forme	11
I La symétrie par rapport à un cercle	11
1) Définition et premier exemple	12
2) Expérimentation en classe	12
3) Quelques figures	13
4) Conclusion	13
II L'anamorphose conique	14
1) Première rencontre	14
2) Les grilles d'anamorphose	14
3) Expérimentation en classe	15
III De beaux miroirs	16
1) Méthode historique...	16
2) ... moderne...	16
3) ... et bricolée	17
2 La clef des grilles	19
I Le stigmat, point de rencontre des lois de l'optique	19
1) Les lois de l'optique au bord du lac	20
2) Apparition du stigmat	20
3) Application à l'anamorphose conique	22
II La Perspective curieuse	23
1) Une jeune fille dans un miroir conique : l'exemple de Jean-François Nicéron	24
2) Nicéron explique sa grille	25
3) Quelques commentaires de l'auteur	27
3 Analyse et anamorphoses	29
I Résolution analytique, cas où l'angle au sommet du cône vaut 60°	29
1) Loi des sinus	29
2) Etude de la fonction $d \mapsto d' = \frac{18d}{12-d}$	31

3)	Application : règle de report	32
II	Généralisation	33
1)	Données	33
2)	Loi des sinus	33
3)	Conclusion	34
III	Quelques angles particuliers	34
1)	Remarques préliminaires	35
2)	Cas particulier pour $\beta = 60^\circ$	35
3)	Cas particulier pour $\beta = 90^\circ$	35
4)	Lorsque $\beta > 90^\circ$: cas particulier pour $\beta = 120^\circ$	36
5)	Cas particulier pour $\beta = 0^\circ$	36
4	Pour aller plus loin	39
I	Pantographe	39
1)	L'instrument	39
2)	Application à l'anamorphose conique	39
3)	Œil à l'infini ?	40
4)	Conclusion	43
II	« Miroir réciproque »	43
1)	L'impossible simplicité	44
2)	La difficile complexité	46
III	Erreur d'observation : importance de la hauteur de l'œil	47
1)	Figure de base	48
2)	Fonctions d'anamorphose et écart moyen	48
3)	Etude de l'écart moyen	50
4)	Représentation graphique	50
5)	Conclusion	51
5	AAO : Anamorphoses Assistées par Ordinateur	53
I	Les anamorphoses bousculent les repères	53
1)	Des changements de repère	54
2)	En Java dans le texte	56
II	Photographie numérique	59
1)	Images JPEG	59
2)	Utilisation d'une WebCam	62
	ANNEXES	63
A	Grilles d'anamorphose conique	63

TABLE DES MATIÈRES	5
B Extraits de La Perspective Curieuse	73
C Devoirs maison	81
D Quelques précisions sur le logiciel	85
I Fichier de configuration	85
II Paramètres des anamorphoses	86



fig.1 : Un vélo peint sur la route, vu du promeneur



fig.2 : Le même vélo, vu de dessus



fig.3 : ci-dessus : *Les Ambassadeurs*, vu de face
Hans Holbein le Jeune, 1533, huile sur panneau de chêne,
207 × 210 cm, National Gallery, Londres



fig.4 : ci-contre : le même tableau, vu de biais, depuis la droite

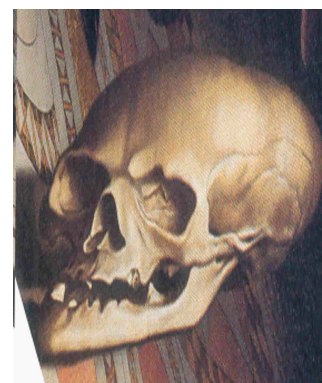


fig.5 : Détail du crâne, vu
de biais

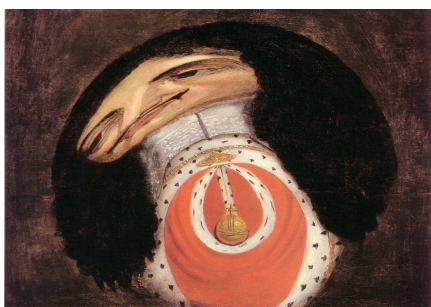


fig.6 : *Portrait de Charles II* - école anglaise, après 1660 - The
Swedish National Portrait Collection, Gripsholm



fig.7 : Vue de l'anamorphose à l'aide d'un miroir cylindrique

Introduction

Un peu d'histoire

L'anamorphose, étymologiquement « transposition de forme »¹, désigne une « image bizarre ou difforme dessinée sur une surface plane »², de manière à offrir, d'un certain point de vue, une figure régulière »³. Ce procédé suscite d'abord l'intérêt par son caractère « bizarre ou difforme », puis intrigue en offrant une image parfaitement proportionnée, lorsqu'elle est observée sous l'angle qui convient. La signalisation routière, d'ailleurs, exploite cette propriété lorsqu'elle peint, au sol, des vélos qui nous semblent tout à fait anodins (fig.1), sauf à les regarder du dessus, d'où ils apparaissent terriblement allongés (fig.2).

L'Art offre des exemples plus déroutants : le plus célèbre, sans doute, est contenu dans le tableau d'Hans Holbein, *Les Ambassadeurs*⁴, reproduit ci-contre (fig.3). Ce tableau, vu de face, représente en grandeur nature deux ambassadeurs français ; nous renvoyons le lecteur à Baltrušaitis qui en fait une étude détaillée⁵. Écartons-nous de cette œuvre, vers la droite ; jetons-y un dernier coup d'œil (fig.4) : une figure, jusque-là dissimulée, nous apparaît nettement (fig.5) ; il s'agit d'un crâne qui, vu de face, est tellement allongé qu'il est impossible à décrypter.

Au XVI^e siècle, les méthodes mathématiques de perspective sont en pleine expansion ; on va les utiliser jusqu'à l'outrance : ainsi apparaît l'anamorphose⁶. En regardant le tableau principal de biais, l'anamorphose apparaît régulière, alors qu'elle était dans une perspective curieuse, dépravée, lorsqu'on se tenait face au tableau. D'autre part, grâce à l'anamorphose, l'artiste peut cacher un message ; il n'est pas étonnant que cette pratique se soit développée dans le courant esthétique du Baroque.

Un peu plus tard, au début du XVII^e siècle, les miroirs entrent dans la ronde des anamorphoses. Cette fois, le point de vue qui convient se trouve devant le reflet d'un miroir, le plus souvent cylindrique ou conique. L'anamorphose en est d'autant plus difforme, comme le montre l'exemple ci-contre (fig.6 et fig.7).

D'un point de vue mathématique, ces exemples nous invitent à étudier les transformations du plan. Examinons l'anamorphose cylindrique page suivante.

1. Le mot anamorphose vient du grec *ana* (ἀνά), préfixe indiquant une transposition, et de *morphé* (μορφή), la forme (d'après Emile Littré, *Dictionnaire de la langue française*, Gallimard-Hachette, 1967).

2. Il existe également des anamorphoses peintes sur des surfaces non planes (cônes, pyramides, etc.).

3. Emile Littré, *Dictionnaire de la langue française*, Gallimard-Hachette, 1967.

4. Hans Holbein le Jeune, *Les Ambassadeurs*, 1533, huile sur panneau de chêne, 207 × 210 cm, National Gallery, Londres.

5. [BAL96] pages 125-160 ; on pourra se référer à cet ouvrage pour une histoire documentée des anamorphoses.

6. Pour un développement détaillé de ces considérations, on pourra se reporter notamment à l'article de Didier Bessot dans *les Cahiers de la perspective* [BES87].

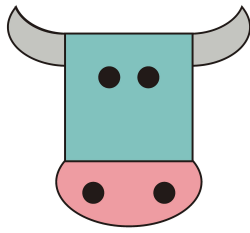


fig.8 : Figure initiale

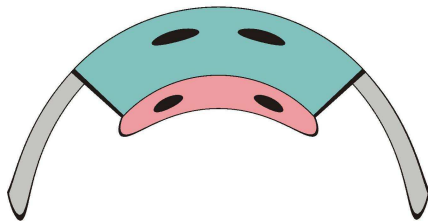
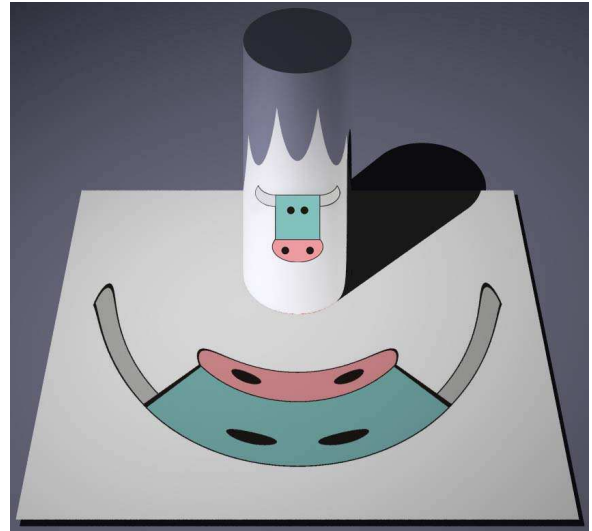


fig.9 : Anamorphose cylindrique

fig.10 : Vue de l'anamorphose à l'aide d'un miroir cylindrique
(image produite par ordinateur)

Nous passons de la vache (figure initiale, fig.8) à l'âne (image par anamorphose, fig.9) : cette transformation ne conserve pas les formes, puisque le carré central n'est plus un carré dans l'anamorphose, les disques représentant les yeux et les narines deviennent des ovales, dont la taille varie suivant la position des disques. On retrouve bien entendu la figure initiale en observant l'anamorphose dans un miroir cylindrique (anamorphose redressée, fig.10).

Ces trois étapes de l'anamorphose sont semblables dans le cas du miroir conique (fig.11). L'étude mathématique va consister à découvrir comment, à partir d'une figure initiale (étape 1), on peut en créer l'anamorphose (étape 2), de sorte que cette anamorphose soit naturellement redressée dans un miroir conique (étape 3), identiquement à la figure initiale (voir également fig.12).

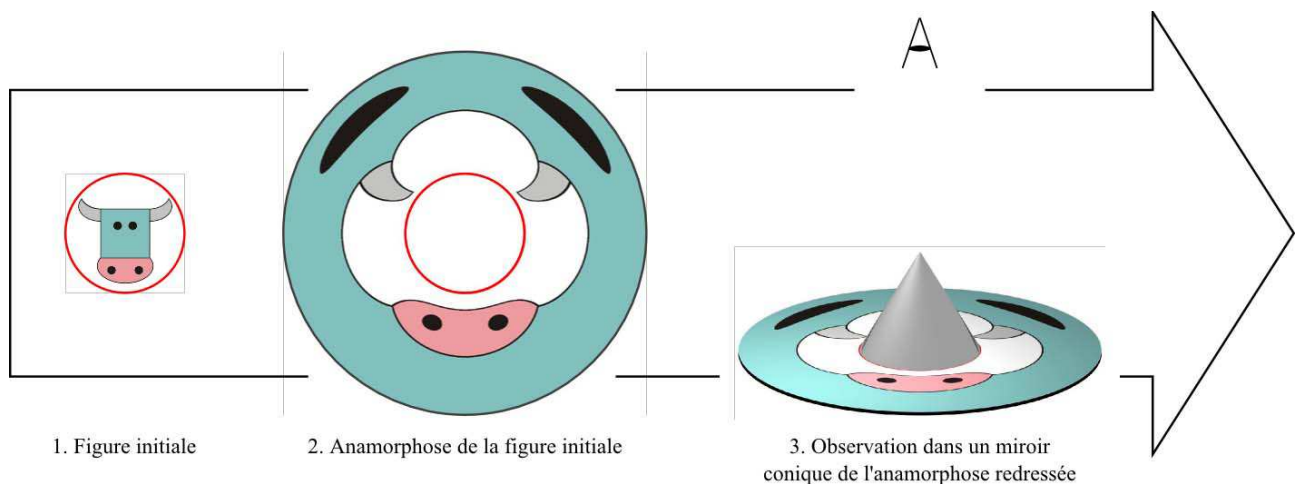


fig.11 : Principe de l'anamorphose conique en trois étapes

Problématique pédagogique

Le fait qu'une figure initiale contenant un carré soit anamorphosée en totalement autre chose qu'un carré fournit un contre-exemple aux isométries, seules transformations aujourd'hui enseignées en collège et en seconde. L'anamorphose ne conserve en général ni les longueurs, ni les angles, ni l'alignement des points. De quoi dérouter un peu les élèves, et les encourager à justifier les propriétés des transformations qu'ils utilisent : ce sera l'objet de notre premier chapitre, dans lequel nous montrerons un travail principalement centré sur l'anamorphose conique (fig.12), prolongement d'une autre transformation, la symétrie par rapport à un cercle.

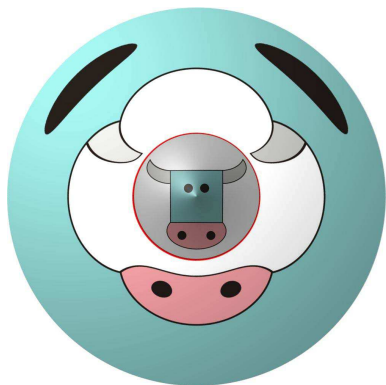


fig.12 : Anamorphose conique de la vache et redressement dans un miroir conique



BVH © CESR Tours

fig.13 : Jean-François Nicéron, gravure du XVII^e siècle

Cette anamorphose conique sera ensuite étudiée et expliquée grâce à l'optique géométrique : pour ce faire, le traité de Jean-François Nicéron (fig.13), *La Perspective curieuse* (1638), nous montrera la marche à suivre. Cette explication, purement géométrique, est accessible pour un élève de troisième ou de seconde ; nous proposons pour ce niveau un devoir maison.

Pour le niveau de première scientifique, une démonstration analytique basée sur la loi des sinus est exposée. Ce sera le sujet du troisième chapitre.

Le quatrième chapitre explore plus profondément l'anamorphose : quelles sont les possibilités d'une construction mécanique à l'aide d'un pantographe ? d'un « miroir réciproque » ? De plus, quelle est la bonne hauteur de l'œil pour observer une anamorphose conique ?

Enfin, dans un cinquième chapitre, nous présenterons quelques dispositifs d'anamorphose assistée par ordinateur, sous la forme de trois applications informatiques : la première permet le dessin automatique de l'anamorphose, les deux suivantes créent l'anamorphose d'une image numérique. Nous verrons comment ces applications peuvent aider les élèves à s'approprier les techniques de changement de repères, en coordonnées cartésiennes et polaires. Nous proposons également ces logiciels pour leur aspect ludique : que donnerait votre propre visage anamorphosé ?

Contenu du cd-rom

Comme l'indique la page `index.htm` située à la racine du cd-rom, celui-ci contient :

- les logiciels d'anamorphoses présentés au chapitre 5, dans le dossier `/logiciels` (ces logiciels sont libres de droits pour un usage non commercial) ;
- les figures de cette brochure marquées d'une étoile (★), dans le dossier `/figures` à partir de la page `index.htm` ; ces figures sont dynamiques, créées avec GeoGebra⁷ et nécessitent donc une version récente de Java⁸.

Pour nous contacter

Vous pouvez nous écrire à l'IREM de Rouen :

Mathieu Blossier
IREM de Rouen, Bâtiment de Mathématiques
Av. de Broglie - B.P.138
76821 Mont-Saint-Aignan

Téléphone : 02 35 14 61 41
Fax : 02 35 14 00 49
Site internet : <http://iremrouen.free.fr>
Mail : mathieu.blossier@ac-rouen.fr

7. www.geogebra.org

8. On trouvera le programme d'installation pour windows `jre-6u2-windows-i586-p-s.exe` dans `/logiciels/java`

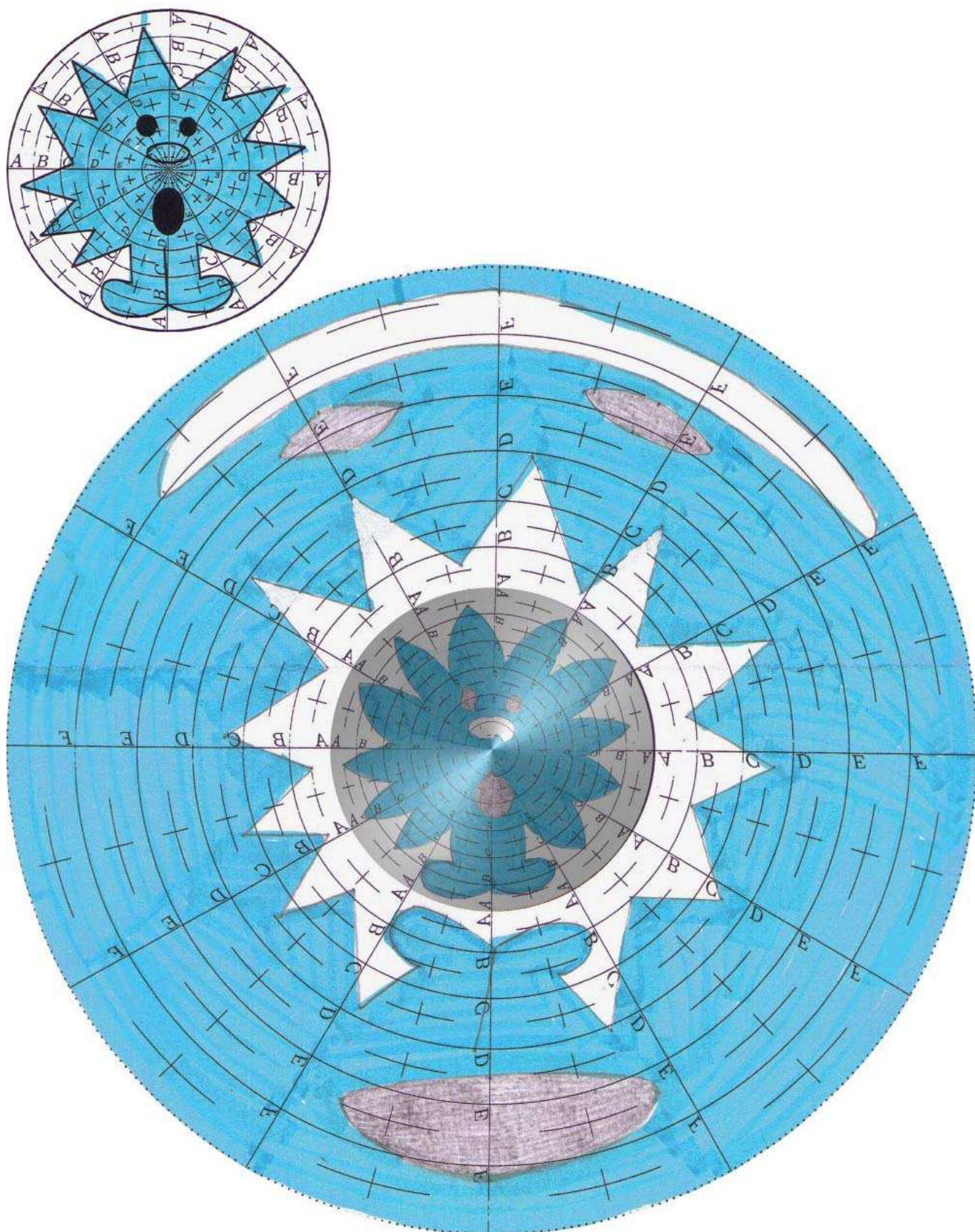


fig.14 : Anamorphose conique réalisée par un élève de seconde.

Figure initiale (en haut à gauche) : personnage au contour en ligne brisée.

Anamorphose (en couronne) : l'élève a tracé une ligne brisée...

Anamorphose redressée (au centre) : ... cette ligne brisée s'arrondit dans le miroir conique !

On ne pourrait donc pas relier les points par des segments, comme pour les isométries ?

Chapitre 1

Des transformations qui pètent la forme

Les isométries, seules transformations aux programmes du collège et de seconde des lycées, apparaissent comme de bien mauvais représentants de leur catégorie : elles ne transforment pas grand chose. Ce caractère d'isométrie est même justement utilisé pour la construction des images : lorsqu'un élève doit reproduire un carré par symétrie par exemple, on lui demande de reporter chacun des quatre sommets et de les relier par des segments ; il obtient ainsi un nouveau carré (fig.15).

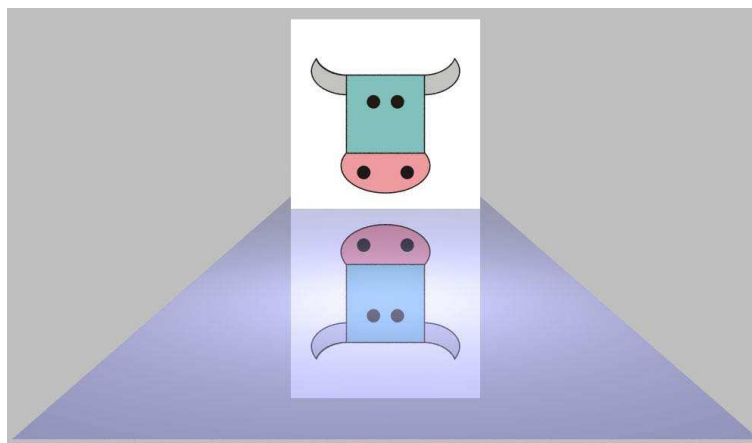


fig.15 : Au-dessus d'un lac tranquille, la symétrie axiale laisse la vache face à sa propre nature

En se limitant aux isométries, on risque de laisser l'élève penser que le monde n'est peuplé que de ces transformations-là. On comprend alors qu'il rechigne à justifier ses démonstrations avec toute la rigueur nécessaire (« les longueurs sont égales car... »). Pour remédier à cela, on peut le confronter à une transformation simple, la symétrie par rapport à un cercle, qui déroge à la règle.

Le monde n'est donc pas seulement peuplé de transformations conformistes : preuve supplémentaire en sont les miroirs déformants que l'on rencontre sur les fêtes foraines. Certains d'entre eux, les miroirs coniques, ont un lien privilégié avec la symétrie par rapport à un cercle, et introduisent tout naturellement l'univers des anamorphoses.

I La symétrie par rapport à un cercle

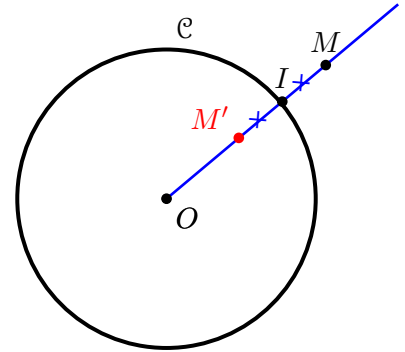
La symétrie par rapport à un cercle a été présentée dans de précédents travaux de l'IREM de Rouen¹, nous l'exposons ici parce qu'elle offre une bonne entrée en matière pour les anamorphoses en classe de troisième ou de seconde.

1. Voir notamment l'ouvrage *Faire des mathématiques en seconde* dirigé par Elisabeth Hébert [Ha97].

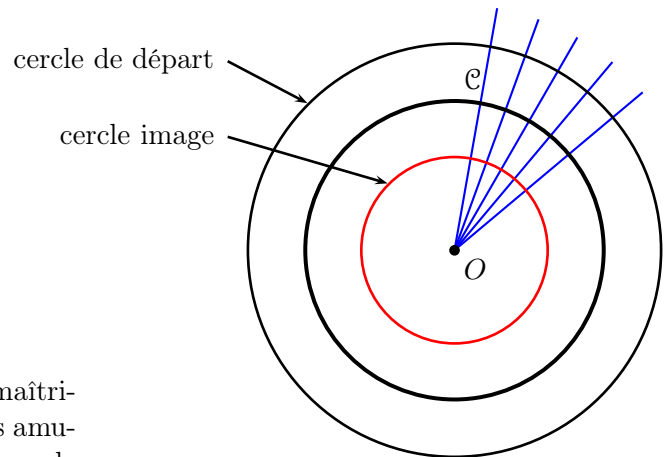
1) Définition et premier exemple

La symétrie par rapport à un cercle est définie de la manière suivante² :

$M \mapsto M'$ avec I point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ et du cercle $\mathcal{C}$
 I milieu de $[MM']$



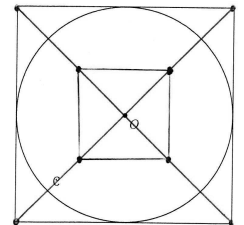
La première image que l'on peut construire est celle d'un cercle concentrique au cercle de symétrie : les élèves obtiennent un nouveau cercle concentrique, comme ils s'y attendent (voir ci-contre).



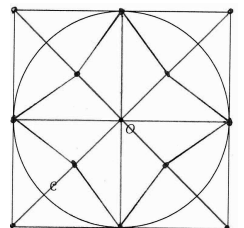
2) Expérimentation en classe

Les élèves sont donc sécurisés et pensent à ce moment maîtriser la symétrie par rapport à un cercle. Ça devient plus amusant lorsqu'on cherche l'image du carré circonscrit au cercle de symétrie.

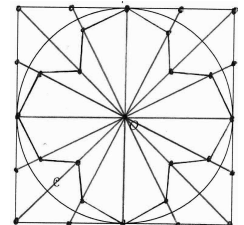
Dans un premier temps, les élèves construisent les images des quatre sommets du carré. Il les relient par des segments et obtiennent tout naturellement... un nouveau carré !



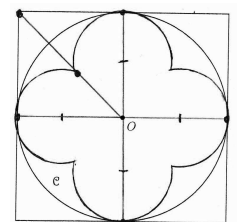
Le professeur leur fait remarquer que les milieux des côtés du carré initial n'ont pas les images qui conviennent ; il s'agit d'ailleurs de points invariants puisqu'ils sont situés sur le cercle de symétrie. Les élèves les ajoutent et obtiennent une figure à huit côtés, en étoile.



Oui mais : on peut recommencer indéfiniment avec de nouveaux points, situés à l'intérieur des segments. Le polygone n'aura jamais assez de côtés ; après tout, pourquoi l'image du carré devrait-elle être un polygone ?

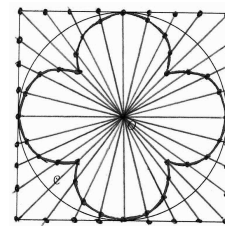


Certains élèves tentent une autre approche et, munis de leur compas, tracent des arcs de cercles passant par les premiers points construits. Malheureusement, cette nouvelle expérience n'est pas réellement concluante.



2. Bien entendu, le point O n'a pas d'image...

Alors ? Il ne nous reste plus qu'à construire des points en nombre suffisant pour pouvoir les relier *à main levée*. Les élèves s'interrogent : a-t-on vraiment le droit ? s'agit-il encore vraiment de mathématiques ?



3) Quelques figures

Nous reproduisons ci-dessous quelques figures que nous demandons à nos élèves de construire : tout d'abord le carré circonscrit (fig.16) ; un triangle dont la base est un segment globalement invariant (fig.17) ; une droite (fig.18) ; et enfin un cercle non concentrique au cercle $\mathcal{C}$ (fig.19).

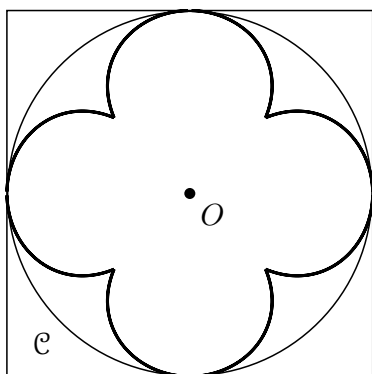


fig.16 : Carré

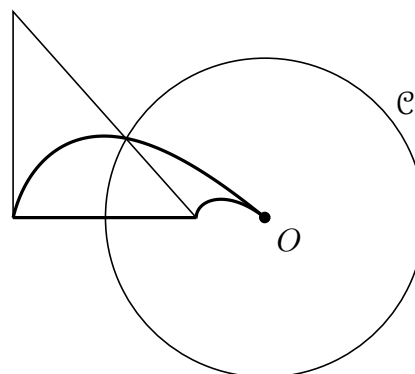


fig.17 : Triangle

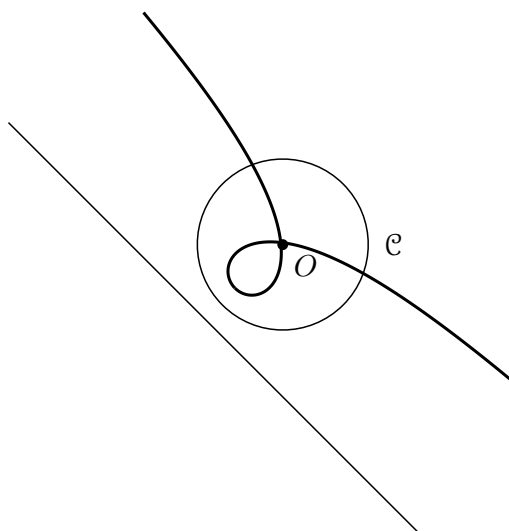


fig.18 : Droite

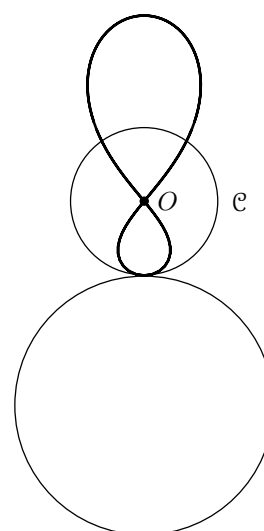


fig.19 : Cercle non concentrique

4) Conclusion

La symétrie par rapport à un cercle fonctionne donc comme un contre-exemple intéressant pour le chapitre des transformations du plan : les isométries ne partagent pas leurs propriétés de manière universelle.

De plus, elle amène les élèves à construire une figure en partie à main levée. On retrouve ici les réticences à se passer des instruments lors du tracé de courbes représentatives de fonctions par exemple.

II L'anamorphose conique

1) Première rencontre

Lorsque l'élève a terminé la symétrie par rapport à un cercle de son carré, l'enseignant lui présente un miroir conique qu'il pose au milieu du carré. L'élève place son œil au-dessus du miroir : surprise ! le reflet est la figure en trèfle qu'il vient de construire (fig.20).

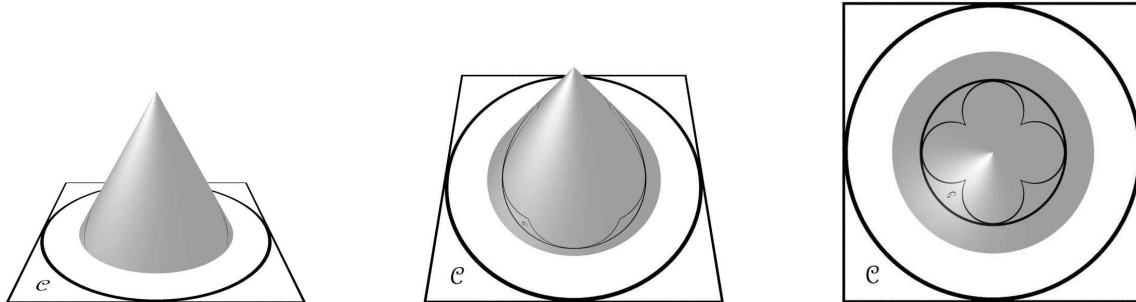
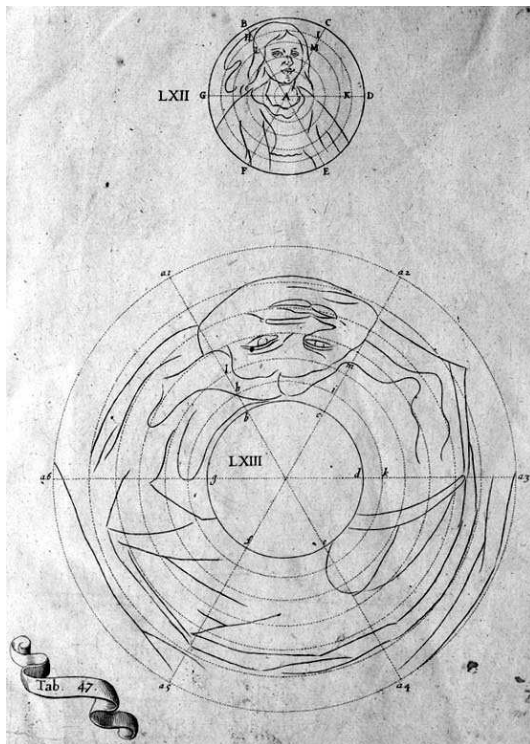


fig.20 : Vue de dessus, la figure en forme de trèfle apparaît (à droite)

Comment ça se fait ? Et comment pourrait-on obtenir la réciproque ? Quelle figure, tracée autour du miroir, se reflète sous la forme d'un carré ? Pour la trouver, nous allons nous aider d'une grille de construction, inspirée de *La Perspective curieuse* de Jean-François Nicéron (fig.21, [NIC63] planche 47).

2) Les grilles d'anamorphose



BVH © CESR Tours

fig.21 : Grille d'anamorphose conique par
Jean-François Nicéron :
en haut, figure initiale ; en bas, anamorphose

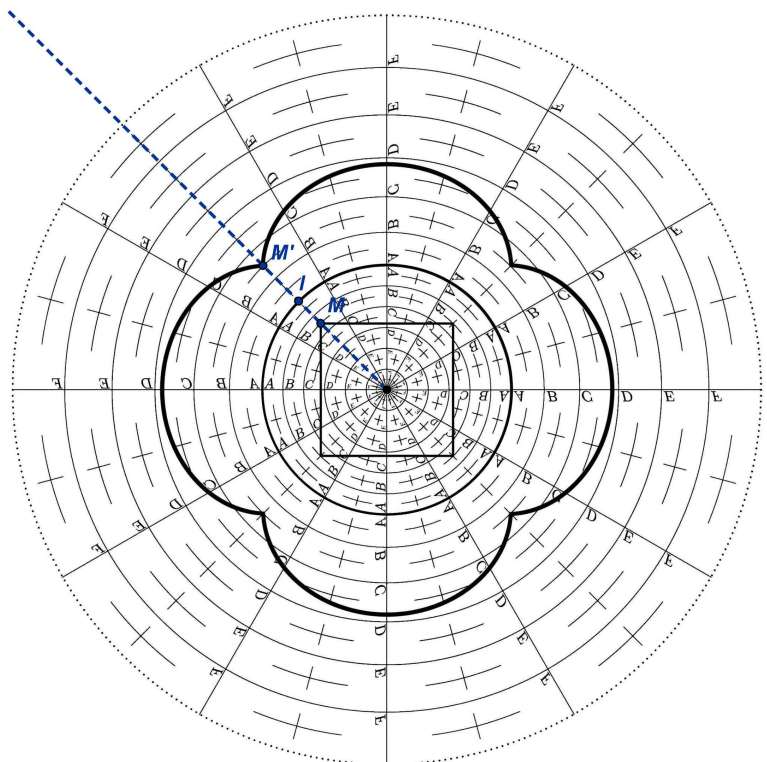


fig.22★ : Grille d'anamorphose conique pour obtenir un carré
et anamorphose tracée par ordinateur

On dispose donc sur la fig.22 d'une grille dont le disque central correspond à la base du miroir conique, ou

encore au miroir vu du dessus dans lequel on désire observer le carré par reflet de son anamorphose. Le mode de construction ressemble à celui de la symétrie par rapport à un cercle, la base du miroir conique faisant ici office de cercle de « symétrie » : un point M à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$ est reporté à l'extérieur en un point M' , sur une demi-droite issue du centre O . Dans le cas de la symétrie par rapport à un cercle, M et M' sont à la même distance du cercle $\mathcal{C}$; dans le cas de l'anamorphose conique, on va faire appel à une « fonction de report » plus complexe, et que nous étudierons en détail au chapitre 3.

Pour l'anamorphose conique donc, on peut utiliser le protocole de construction suivant (voir fig.22) :

$M \mapsto M'$ avec I point d'intersection de la demi-droite $[OM)$ et du cercle $\mathcal{C}$ $IM' = f(IM)$ où f est une « fonction de report »
--

Si pour la symétrie par rapport à un cercle, la fonction f est très simple ($IM' = IM$), dans le cas de l'anamorphose conique, il s'agit d'une fonction moins évidente (voir chapitre 3).

Une grille d'anamorphose supplée à la connaissance de la fonction f , en coupant de manière régulière le disque central par des cercles concentriques. Ces cercles, repérés $A, B, \dots, F$ sont reportés selon la fonction de report à l'extérieur du disque central sur les cercles extérieurs repérés $A, B, \dots, F$. Pour finir, la grille est divisée par des rayons : on dispose donc d'une multitude de cases (des secteurs de couronne) qui rayonnent depuis le centre, et qui se correspondent de l'intérieur à l'extérieur du disque.

Par exemple, sur la fig.22, le point M qui se situe sur la croix d'une case repérée B à l'intérieur du disque, se transforme par anamorphose en M' , sur la croix de la case extérieure sur le même rayon, repérée B .

3) Expérimentation en classe

En classe de seconde, le travail a été proposé autour de dessins de chapeaux³, avec la consigne supplémentaire d'en colorier l'intérieur. L'exécution en est délicate car l'anamorphose « retourne » complètement la figure : les premiers points sont souvent placés du mauvais « côté » de la case. De plus l'intérieur du chapeau, que l'élève doit colorier, est anamorphosé à l'extérieur de la grille.

Lorsque l'élève a placé suffisamment de points, il peut les relier à main levée, et vérifier le résultat à l'aide du miroir : ce n'est pas ici l'enseignant qui valide son travail, mais sa propre observation. Après quelques vérifications et corrections, la plupart des élèves parviennent à un résultat très honorable.

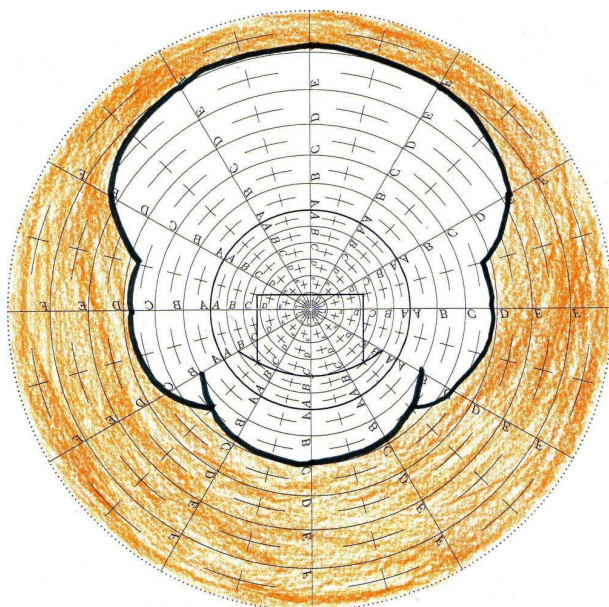


fig.23 : Un travail d'élève...

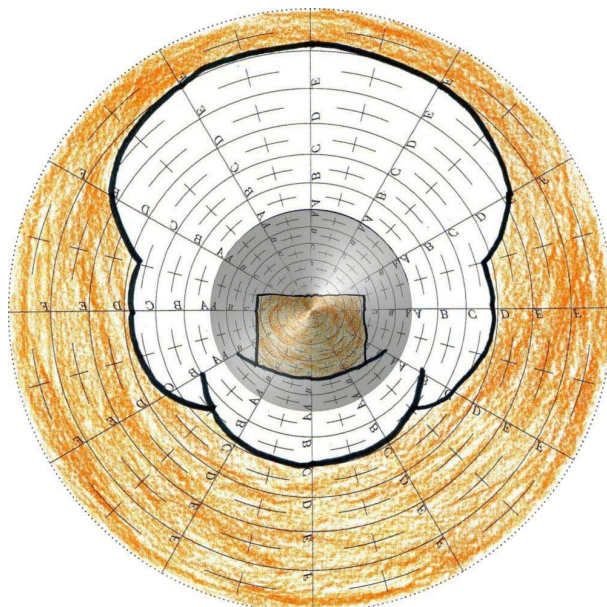


fig.24 : ... et sa vérification dans le miroir conique

3. Les grilles d'anamorphoses sont reproduites en annexe A, pages 64-66.

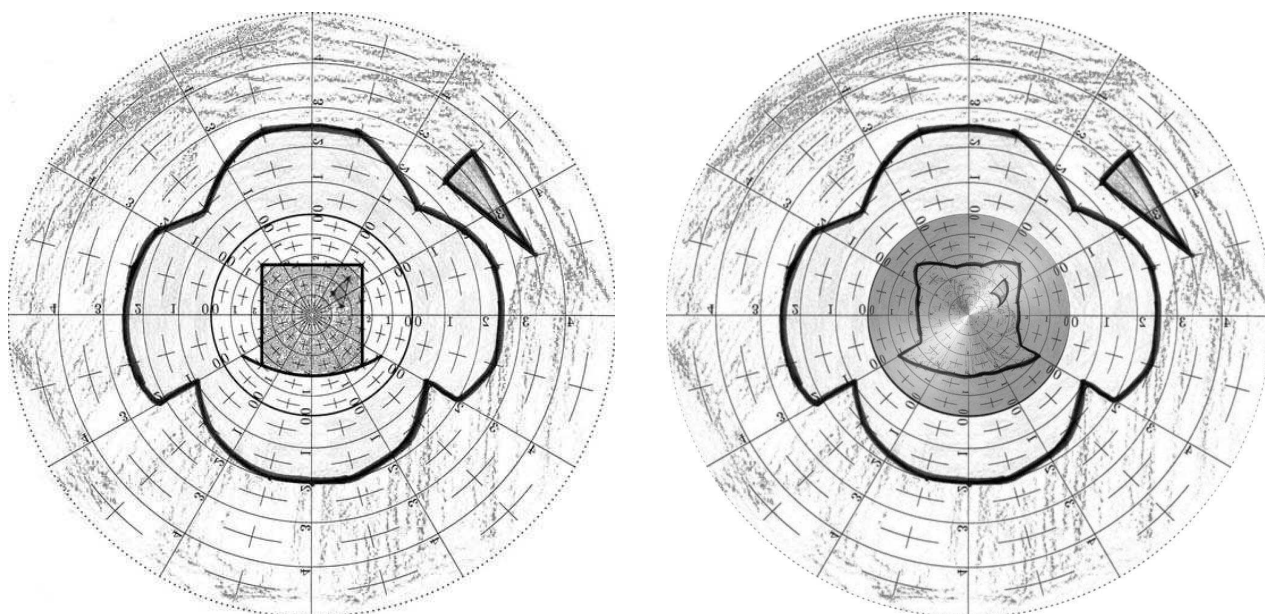


fig.25 : Un autre travail d'élève : une erreur en reliant les points de la base du chapeau, de plus le motif supplémentaire en triangle a été tracé trop rapidement (le reflet s'arrondit) ; les vérifications ont été insuffisantes...

Nous encourageons le lecteur à se livrer lui-même aux grilles d'anamorphose, situées en annexe A, pour se familiariser avec les différents aspects de cette transformation. Il pourra vérifier sa construction en réalisant son propre miroir conique, comme nous l'expliquons ci-après.

III De beaux miroirs

1) Méthode historique...

Niceron lui-même ne laisse pas ses lecteurs sans leur donner une méthode pour réaliser des « miroirs concaves & convexes tant cylindriques que coniques ; d'autant qu'il est très difficile, d'en faire de verre ou de crystal, qui soient bons & bien réguliers [...] ». Il s'agit de créer un moule et d'y verser un mélange chimique (dont une « tranche de lard » !) ; Niceron cite plusieurs compositions possibles⁴ :

Oronce met avec vne liure de rosette, & vne demie liure d'estain de glace, 4 onces de marcasite d'argent, & autant de salpestre, & le tout estant fondu ensemble, il y aiouste vne tranche de lard & remuë la matiere quelque temps dans le creuset avec vne verge de fer, afin que le meslange en soit plus parfait, & puis il la iette dans le moule preparé en l'une des façons que i'expliqueray.

Une fois le miroir démoulé, il faut encore le polir pour obtenir une surface réfléchissante.

2) ... moderne...

De nos jours, on peut se procurer dans l'industrie des métaux sous la forme de barres cylindriques pleines. Au lycée Le Corbusier de Saint Étienne du Rouvray, l'aluminium a été usiné par les élèves de sections BEP

4. [NIC63], Livre troisième, Proposition II, p 154.

Microtechnique sur des machines numériques. Ils ont ensuite poncé puis poli la surface.



fig.26 : Morceau de barre d'aluminium avant usinage...



fig.27 : ... pièce après usinage : cône en aluminium poli



3) ... et bricolée

Lorsqu'on ne dispose pas de ce matériel, on peut réaliser des miroirs en papier : tout d'abord, il faut former un cône à l'aide du patron ci-dessous (fig.28 et fig.29) ; on place ensuite une feuille de papier miroir en suivant l'une des génératrice du cône (fig.30), on pourra se servir d'un petit morceau de ruban adhésif double face vers la base du cône (il faut coller le papier miroir le moins possible pour obtenir une surface bien lisse) ; pour terminer, on découpe ce qui dépasse (fig.31).

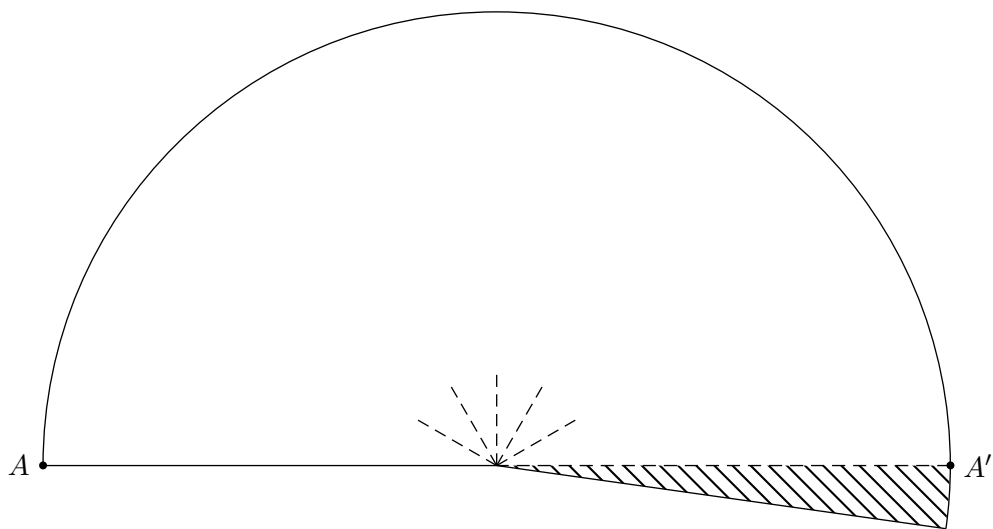


fig.28 : Patron de cône (diamètre 6 cm, angle au sommet 60°) ; le centre étoilé est le sommet du cône, le point A vient sur le point A', par dessus la partie hachurée

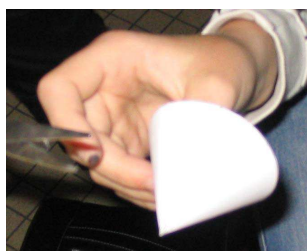


fig.29 : Cône en papier



fig.30 : Le papier miroir est placé sur le cône en papier



fig.31 : Découpe du papier miroir

Un tel miroir en papier ne « tient » pas toujours sa forme conique : il faut le travailler un peu pour qu'il conserve un aspect correct. De plus, il reste une partie du miroir inutilisable, autour de la génératrice de collage.



fig.32 : Le miroir papier terminé et en place

Un miroir papier est présenté fig.32 en place. Mais comment a-t-on produit l'anamorphose conique ? Et d'où viennent les grilles d'anamorphose ?

Chapitre 2

La clef des grilles

De nombreuses méthodes de construction d'anamorphoses sont publiées au XVII^e siècle : en premier lieu celles liées à la perspective, en œuvre dans *Les Ambassadeurs* notamment, puis celles utilisant des miroirs déformants¹. À notre connaissance, les descriptions les plus complètes et les plus accessibles se trouvent dans *La Perspective curieuse*, le traité de Jean-François Nicéron [NIC63] : c'est ce traité qui va nous guider pour expliquer la géométrie de l'anamorphose conique.

Ainsi, dans une première partie, nous exploitons les lois de l'optique géométrique pour justifier la construction des grilles d'anamorphose conique. Cette méthode géométrique est à la portée d'un élève de troisième ou de seconde².

Ensuite, dans une seconde partie, nous reprenons *La Perspective curieuse* par extraits, pour expliquer comment, dès le XVI^e siècle, cette construction était menée³.

I Le stigmat, point de rencontre des lois de l'optique

Dans cette partie, nous montrons comment les lois de l'optique géométrique, facilement observables dans le cas simple du miroir plan (un lac par exemple), peuvent expliquer les principes de l'anamorphose conique.

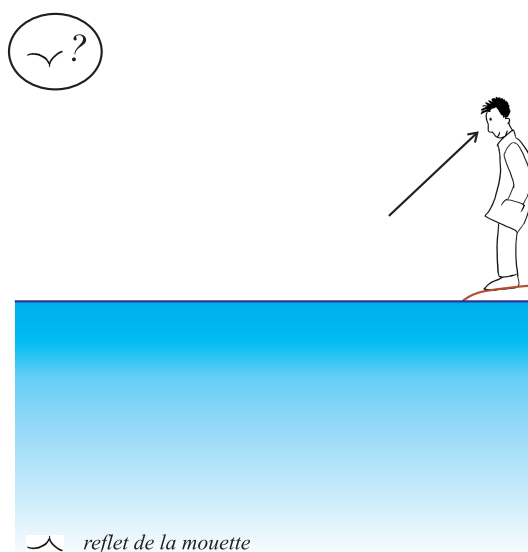


fig.33 : Devant un lac, l'observateur regarde le reflet d'une mouette

1. On pourra lire à ce propos Baltrušaitis [BAL96] et Didier Bessot [BES92].
2. On trouvera une proposition de devoir maison en annexe C, pages 82-83.
3. Une reproduction de ces extraits en est donnée en annexe B, pages 74-79.

1) Les lois de l'optique au bord du lac

Prenons un observateur, debout devant un lac ; une mouette vole au-dessus de ce lac, et l'observateur regarde son reflet dans l'eau calme (fig.33). Sachant où se situe le reflet, peut-on retrouver la mouette réelle ? Pour cela, on dispose de deux lois de l'optique.

Tout d'abord, pour l'œil (et le cerveau), les trajets lumineux semblent se déplacer en ligne droite depuis l'image virtuelle (fig.34), même lorsqu'en réalité ils sont réfléchis. Nous sommes donc face à un rayon virtuel, depuis le reflet jusqu'à la surface de l'eau, puis à une partie du rayon réel, appelé rayon réfléchi, de la surface de l'eau à l'œil. Le rayon réfléchi est en réalité le prolongement du rayon provenant de la mouette réelle, par réflexion justement sur la surface du lac. Pour déterminer ce rayon, appelé rayon incident, il faut suivre une loi d'incidence (fig.35) : les rayons réfléchis et incidents forment le même angle de part et d'autre de la normale à la surface de réflexion. À ce stade, nous avons donc construit une demi-droite sur laquelle est située la mouette réelle : par symétrie orthogonale du rayon réfléchi par rapport à l'axe de la normale, ou par symétrie orthogonale du rayon virtuel par rapport à l'axe représentant la surface du lac.

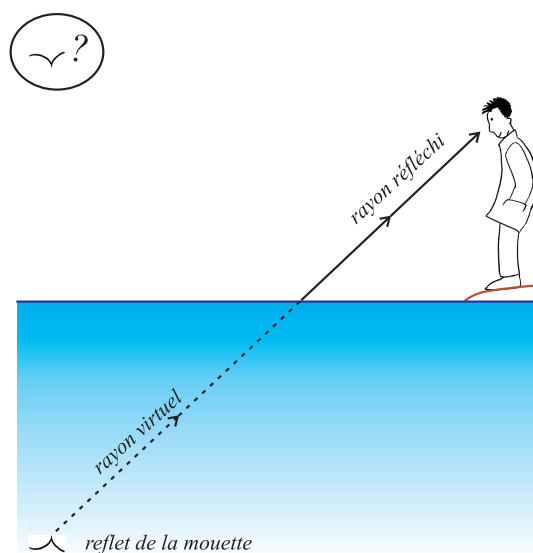


fig.34 : Rayon virtuel, rayon réfléchi

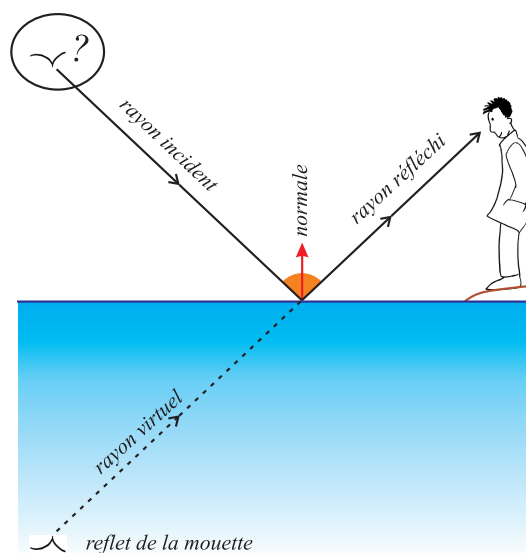


fig.35 : Rayon incident

Le lecteur pourra se demander à quel niveau du rayon incident la mouette se situe réellement. Pour l'anamorphose conique, la question de la « profondeur » de la mouette sur le rayon incident peut être éludée⁴.

2) Apparition du stigmatisme

Plusieurs mouettes volent maintenant au-dessus du lac. Si les lois de l'optique nous donnent une méthode pour construire les rayons incidents, elle est difficile à mettre en pratique car elle nécessite l'usage soit du rapporteur (peu précis), soit du compas, et ce autant de fois qu'il y a de mouettes à retrouver. Pour éviter ces manipulations fastidieuses, nous allons exploiter la symétrie de la figure, et faire apparaître le reflet de l'observateur, appelé stigmatisme⁵ (fig.36).

4. On peut rapprocher ces considérations de la problématique de la sténopée : dans ces deux cas, l'observateur ne peut utiliser qu'un seul œil, ce qui l'empêche de voir les objets en profondeur.

5. L'étymologie du mot stigmatisme n'est pas claire : ce mot vient du grec *stigma* (στίγμα) qui veut dire point, pique ; il est utilisé en optique sous sa forme privative « astigmatisme », qui désigne le « défaut d'un instrument d'optique qui ne donne pas une image ponctuelle d'un point » (*Le Petit Robert*, 1973).

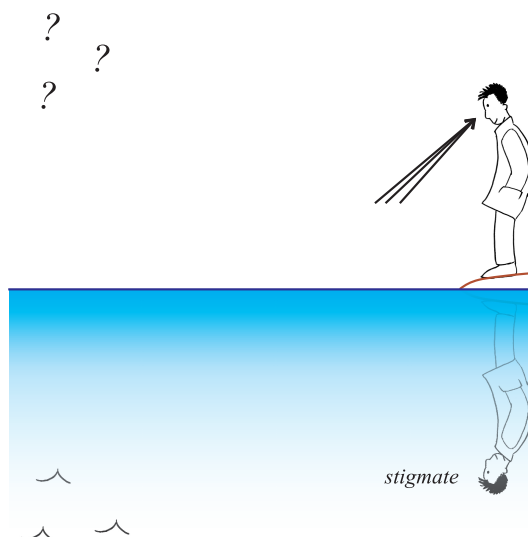


fig.36 : Le stigmatisme, reflet de l'observateur

Pour le stigmatisme, tout est inversé (fig.37) : les mouettes réelles sont des « reflets », les rayons incidents sont pour lui « virtuels », que le stigmatisme prolonge de manière rectiligne en « rayons réfléchis virtuels ». Apparaissent donc deux séries de segments : entre les mouettes et le stigmatisme d'une part (rayons incidents, rayons réfléchis virtuels, fig.37), entre le reflet des mouettes et l'observateur réel d'autre part (rayons virtuels, rayons réfléchis, fig.38) ; ces deux séries de segments sont symétriques et se coupent aux points d'incidence.

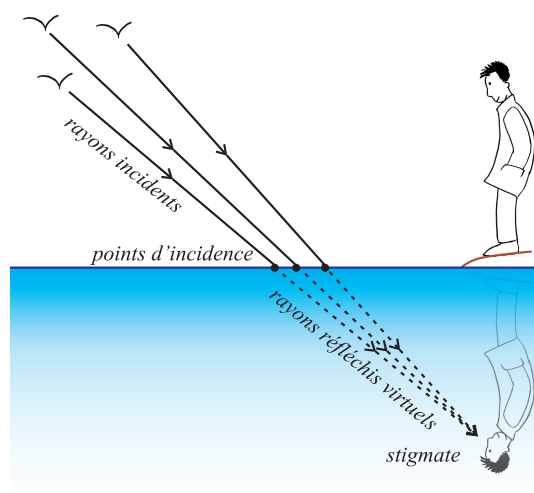


fig.37 : Le monde tel qu'il est « vu » par le stigmatisme

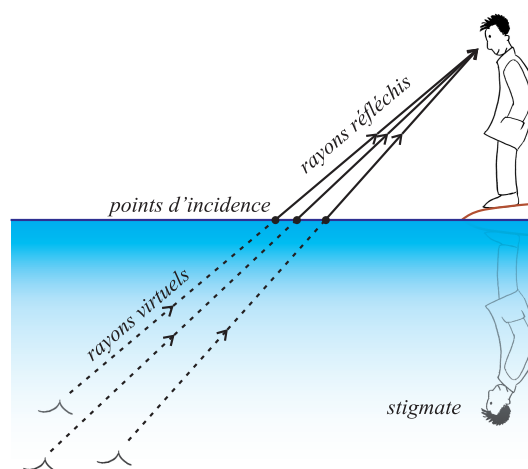


fig.38 : Le monde vu par l'observateur, symétrique du stigmatisme

Pour simplifier la construction, il faut donc commencer par construire de manière très précise (au compas) le stigmatisme, qui n'est autre que le symétrique du point d'observation par rapport à la surface de réflexion. À partir d'un reflet, le rayon incident s'obtient à la règle seule en deux étapes : le segment reliant l'observateur au reflet coupe la surface de réflexion au point d'incidence (trois fois sur la fig.39), le segment reliant le stigmatisme au point d'incidence se prolonge après ce point en une demi-droite sur laquelle se situe le rayon incident (trois fois sur la fig.40).

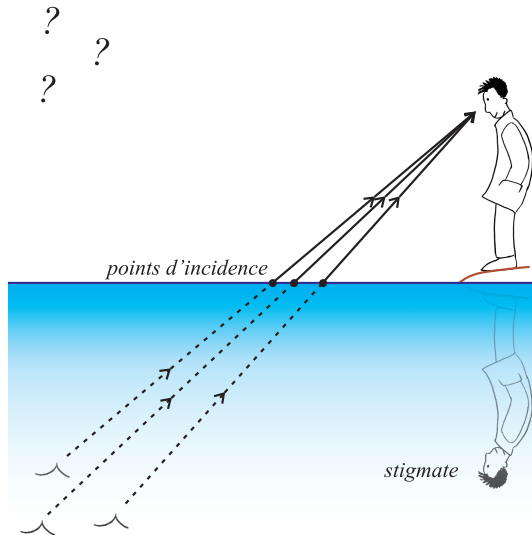


fig.39 : Construction de plusieurs points d'incidence

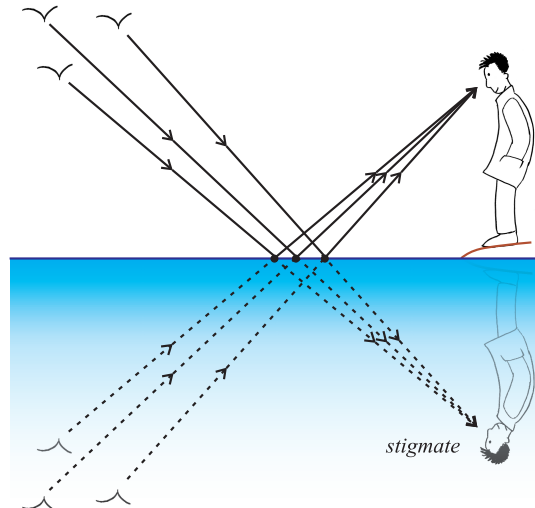


fig.40 : Construction de plusieurs rayons incidents

Nous éludons ici encore la question de la « profondeur » du point réel sur le rayon incident.

3) Application à l'anamorphose conique

Pour appliquer ces constations à l'anamorphose conique, il suffit de « pencher le lac » pour que l'axe de symétrie devienne une génératrice du cône miroir (fig.41).

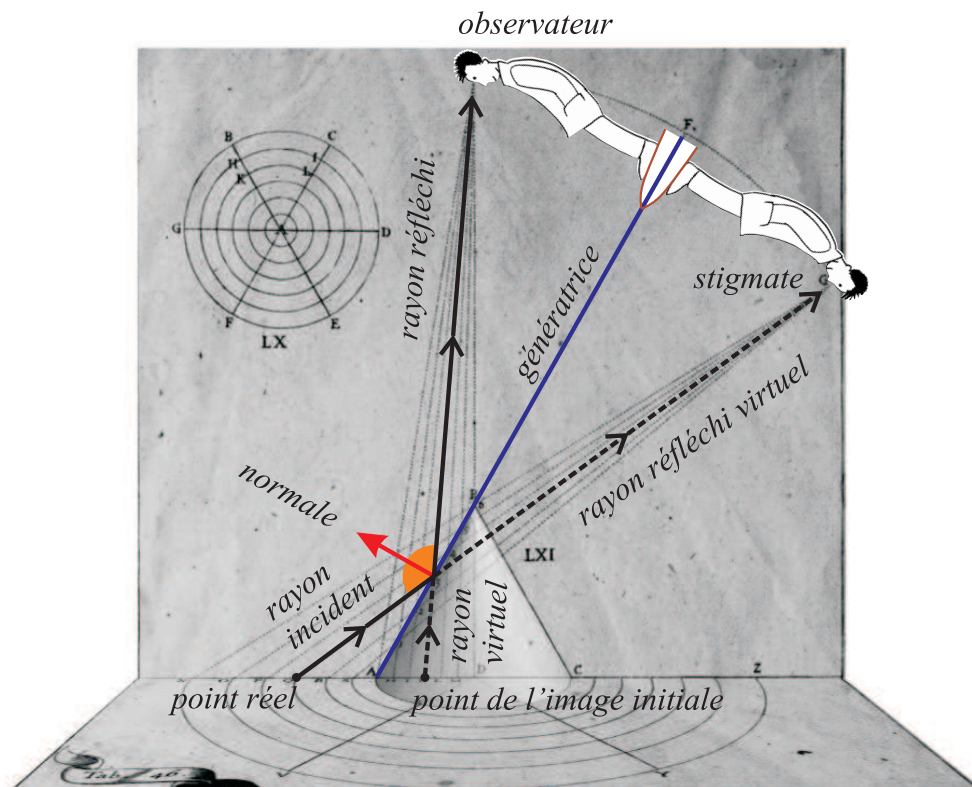


fig.41 : La méthode du stigmat appliquée à l'anamorphose conique

En effet, le dispositif optique de l'anamorphose conique admet une symétrie de révolution autour de l'axe du miroir conique. Dans le plan contenant l'axe du cône et un point de la figure considéré, se trouvent à la fois : le point de la figure initiale, autour du cône, le point réel de l'anamorphose dont il est le reflet, les rayons virtuel, incident, réfléchi et réfléchi virtuel, ainsi que l'œil de l'observateur et le stigmat. Toute la

construction se fait dans ce plan, ce qui rend les considérations géométriques particulièrement simples.

L'œil de l'observateur étant placé dans l'axe du cône, on construit le stigmat, en prenant pour axe de symétrie une génératrice du cône (c'est-à-dire un côté du triangle, dans le plan de la figure). Le point réel est construit en suivant l'algorithme précédent : segment œil (O) – point initial (M), coupant la génératrice au point d'incidence (S), puis demi-droite stigmat (O') – point d'incidence (S), coupant le plan de la feuille au point réel (M')⁶ (fig.41 et fig.42).

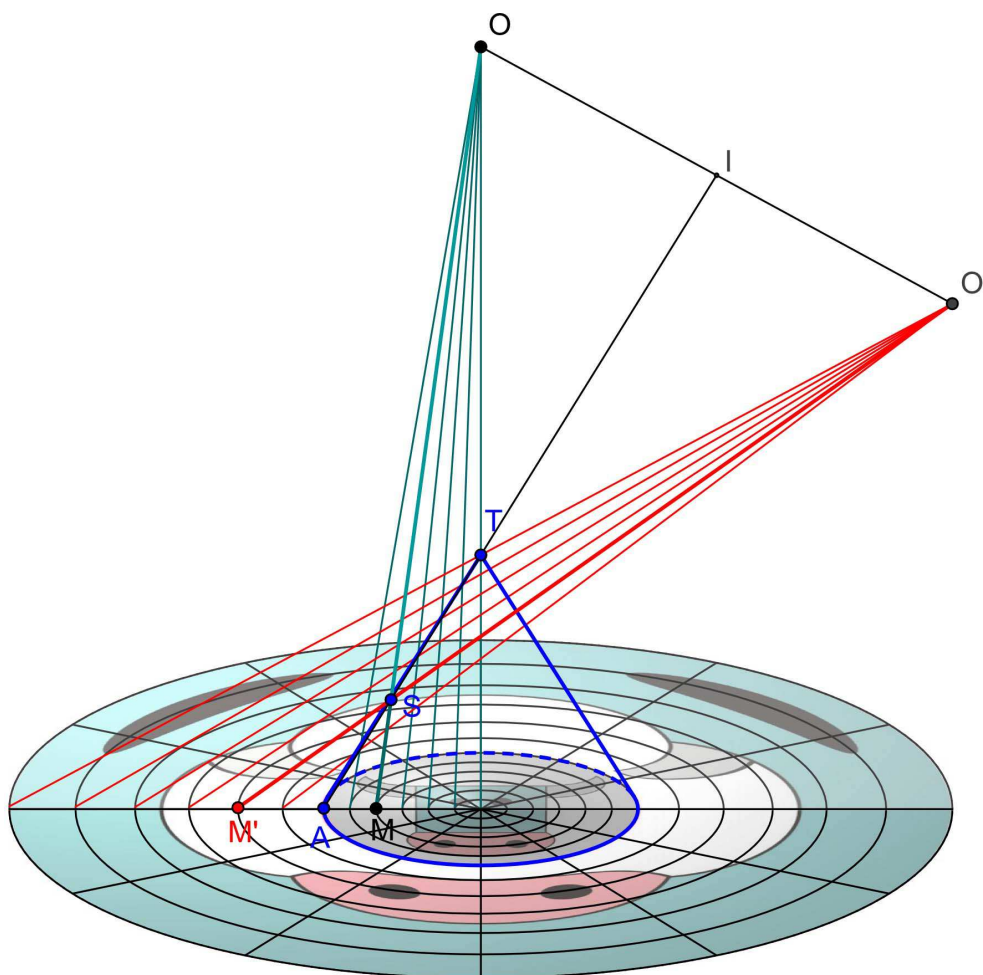


fig.42★ : Construction finale de la grille d'anamorphose conique

En répétant cet algorithme plusieurs fois, on peut reporter les cercles concentriques qui divisent la figure initiale au centre, pour construire les cercles correspondants sur la grille de report (fig.42). C'est la méthode décrite par Jean-François Nicéron, comme nous allons le voir dans ce qui suit.

II La Perspective curieuse

La construction de nombreux procédés de perspective et d'anamorphose est détaillé par Nicéron dans *La Perspective curieuse* [NIC63], dont l'anamorphose conique à la proposition V du livre troisième⁷.

6. Le point réel ne correspond pas ici à la symétrie axiale du point initial par rapport à la génératrice du cône (il devrait être « au-dessus » de la feuille) ; comme nous l'avons fait remarquer précédemment, la position du point réel sur la demi-droite du rayon incident n'a pas d'importance, puisque l'anamorphose est observée avec un seul œil, ce qui ne permet pas d'appréhender les notions de profondeur.

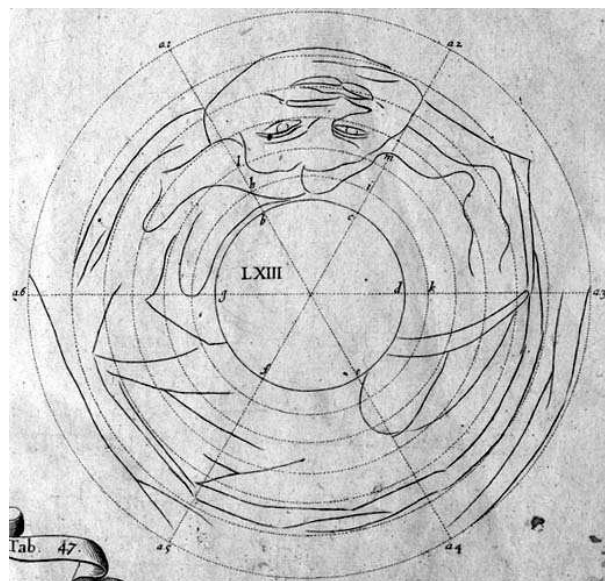
7. Nous reproduisons cette proposition en annexe B, pages 74-79.

1) Une jeune fille dans un miroir conique : l'exemple de Jean-François Nicéron



BVH © CESR Tours

fig.43 : *La Perspective curieuse*, planche 47, figure LXII :
partie supérieure, figure initiale de la jeune fille
« Il faut donc premierement diviser l'image [...] en l'enfermant
dans un cercle tel qu'est *BCDEFG*, qui sera divisé par
plusieurs diametres s'entrecoupans au centre *A* [...] ; de plus
quelqu'un des demy-diametres, comme *AB*, sera aussi divisé
en six parties egales [...] ; & du centre *A*, par les points de
cette division seront faits cinq cercles concentriques [...]. »⁸



BVH © CESR Tours

fig.44 : *La Perspective curieuse*, planche 47, figure LXIII :
partie inférieure, anamorphose conique de la jeune fille
« Il faut encore tracer sur le plan proposé autour du miroir
une figure, laquelle quoy que differente de cette-cy, luy
paresse neantmoins semblable estant veüe par reflexion dans
ce miroir [...]. »⁹

Pour illustrer son propos, Nicéron présente un exemple¹⁰ dans lequel sont gravées d'une part la figure initiale d'une jeune fille à l'intérieur d'une grille (fig.43), et d'autre part son anamorphose conique à l'intérieur de la grille de report (fig.44).

Ainsi, en plaçant un miroir conique au centre de l'anamorphose (fig.46), on observera l'image redressée identique à l'image initiale (fig.45).

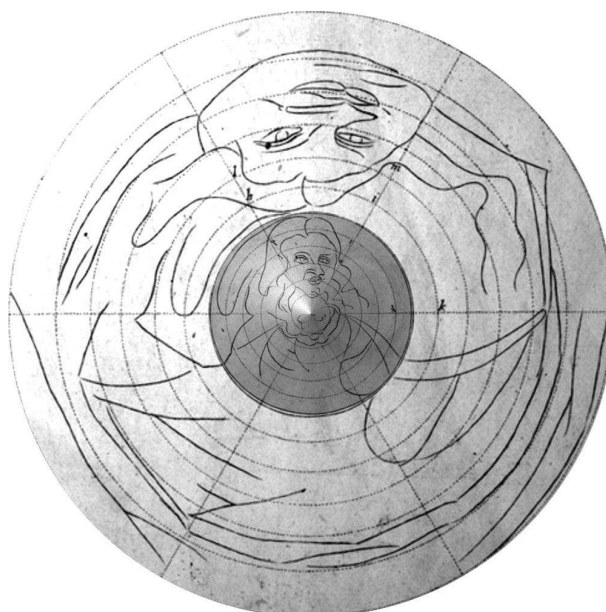


fig.45 : *La Perspective curieuse*, planche 47, figure LXIII : image
redressée de l'anamorphose de la jeune fille dans un miroir

8. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 168.

9. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 168.

10. Planche 47, reproduite dans son intégralité page 79.

On pourra remarquer à ce propos que Nicéron ne dessine pas la figure initiale au centre de l'anamorphose ; c'est sans doute pour une raison pratique : on peut ainsi dessiner l'anamorphose en contrôlant le résultat dans le miroir, sans que celui-ci masque le modèle.

2) Nicéron explique sa grille

Pour expliquer la construction de la grille d'anamorphose conique, Nicéron s'appuie sur une figure similaire à celle que nous avons présentée page 22 (fig.41). Nous reproduisons la planche originale « pliée » en fig.47 : nous retrouvons un plan contenant l'axe du cône et une série de rayons incidents et réfléchis sur la surface du miroir. Nicéron « déplie » la construction, et peut ainsi la présenter sur une figure plane¹¹ (fig.48). Nous reprenons maintenant son explication par extraits, que le lecteur pourra suivre sur la fig.48 annotée.

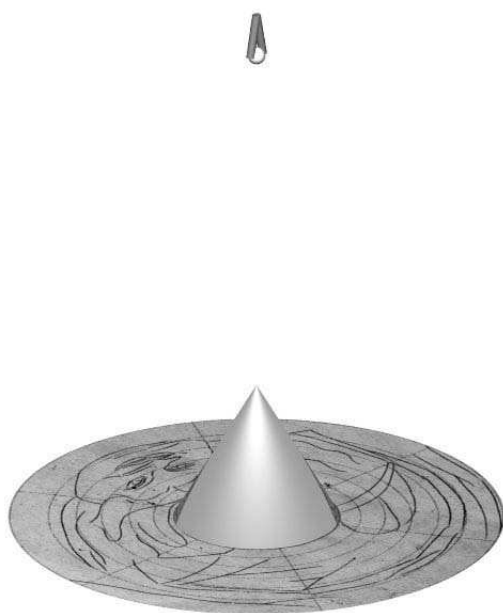


fig.46 : *La Perspective curieuse*, planche 47, figure LXIII : anamorphose conique de la jeune fille en situation avec miroir

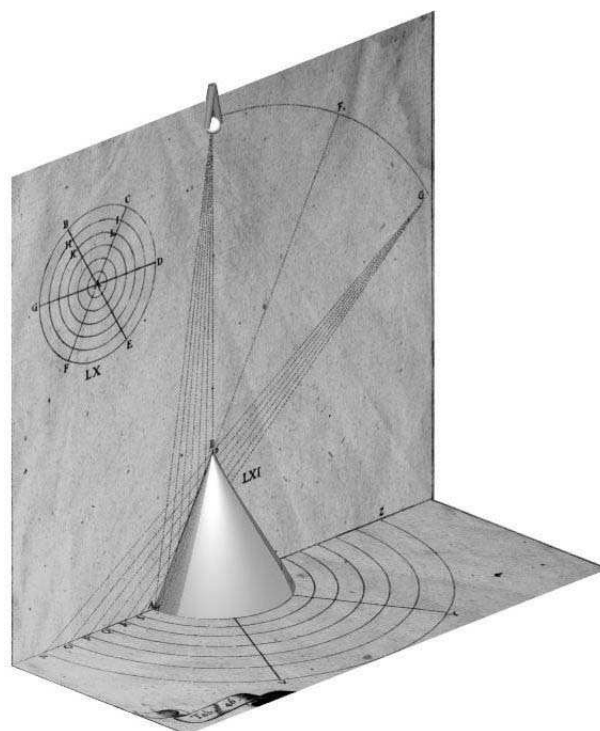
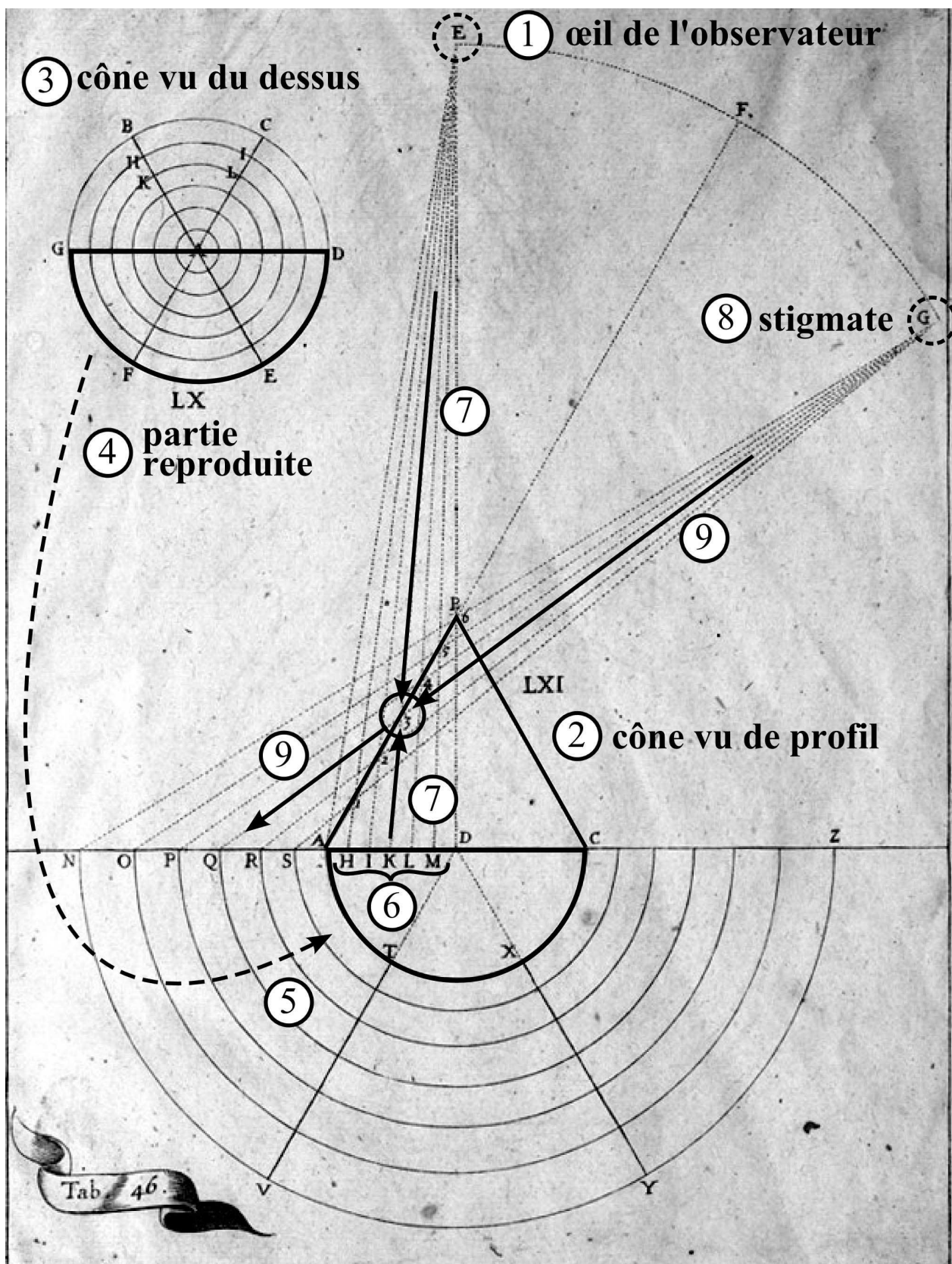


fig.47 : *La Perspective curieuse*, planche 46, pliée à 90° avec miroir conique et œil de l'observateur

11. De ce fait, seule la moitié inférieure de la grille d'anamorphose apparaît.



Bibliothèques Virtuelles Humanistes

© Centre d'Études Supérieures de la Renaissance, Tours

www.bvh.univ-tours.fr/B372615206_7163/ecran/CESR_7163_0455.jpgfig.48 : *La Perspective curieuse*, planche 46 (voir annexe B page 78 pour une reproduction sans annotation)

Sur la figure LXI (reproduite ci-contre), outre le point E figurant l'œil de l'observateur ①, apparaît, sous la forme du triangle ABC ②, le cône vu de profil, à la base duquel on retrouve en $[AC]$ un diamètre du cercle $BCDEFG$ ③ (représentant le cône vu de dessus). Le demi-cercle $DEFG$ ④ est reproduit en $CXTA$ ⑤. Le rayon $[AD]$ est divisé en six parties égales, graduées $HIKLMD$ ⑥.

Sous la forme d'un segment annoté ⑦, Nicéron trace ensuite les rayons lumineux virtuels (point K – point 3 par exemple) et réfléchis (point E – point 3 par exemple), il construit ainsi les points d'incidence notés 1, 2, 3, 4, 5, 6 : « [...] de tous ces points soient tirées des lignes droites ocultes au point E ; HE , IE , KE , LE , ME , DE , qui seront les incidentes, couperont la ligne AB , qui est le costé du cone proposé : HE , en 1 : IE , en 2 : KE , en 3 : LE , en 4 : ME , en 5 : DE , en 6. »¹²

Nicéron construit maintenant le stigmat, noté G ⑧ : « sur la pointe du miroir [...] soit mise l'une des jambes du compas au point B , duquel comme centre, & de l'intervalle BE , soit décrit l'arc de cercle EFG , qui coupe la ligne du costé du cone AB prolongée jusques en F ; & soit fait FG égal à FE [...]. »¹³. Il s'agit bien du symétrique de l'œil (point E) par rapport à la génératrice du cône (segment $[AB]$).

Nicéron termine sa grille en construisant en ⑨ les rayons lumineux réfléchis virtuels (point G – point 3 par exemple) et incidents (point 3 – point Q par exemple) : « [...] du point G , par tous les points des intersections du costé du cone, & des incidentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, soient tirées des lignes droites ocultes, lesquelles venant à tomber obliquement sur la ligne AN marqueront les points $SRQPON$ [...]. »¹⁴

Nicéron obtient donc les graduations $SRQPON$ pour tracer les cercles de la grille de report. En reportant la demi-grille ainsi tracée (fig.48) sur la planche 46 (fig.44), il achève sa construction.

3) Quelques commentaires de l'auteur

Nicéron poursuit sa proposition par quelques observations sur les effets produits : « [...] la reduction de l'image se fera de sorte que ce qui est au plan naturel [sur la figure initiale] plus proche du centre, en soit le plus esloigné à proportion [sur l'anamorphose]; ce qui la rendra extrêmement difforme, d'autant que les mesmes parties de l'objet qui seront les plus reserrées [sur la figure initiale], seront les plus estenduës [sur l'anamorphose] [...]. »¹⁵ Il encourage ensuite le praticien à colorer et ombrer son anamorphose une fois le trait achevé, et conseille « l'un des meilleurs ouvriers de Paris » qu'il connaisse pour se fournir en miroir conique.

Pour terminer, il indique que la hauteur de l'œil, bien qu'utilisée dans sa construction, n'est pas fondamentale ; ce qui est important, c'est de placer l'œil dans l'axe du cône : « hausser ou baisser un peu plus ce point de veüë pourveu qu'il soit tousjours en la ligne de l'axe ne cause pas grand'erreur [...]. »¹⁶ Nous renvoyons au chapitre 4 partie III pour une étude détaillée de ces considérations.

12. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 169.

13. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 169.

14. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 169.

15. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 170.

16. [NIC63] livre troisième, proposition V, page 170.

Chapitre 3

Analyse et anamorphoses

Des méthodes de résolution analytique des anamorphoses sont apparues dans la deuxième moitié du XX^e siècle, dans l'idée notamment de calculer les coordonnées des points image par des méthodes informatiques, voire de produire des anamorphoses par ordinateurs. Ces méthodes sont basées sur la géométrie projective, ce qui vient naturellement de leurs liens étroits avec la perspective ; on pourra se référer en particulier à Didier Bessot¹ qui traite des anamorphoses perspective, peinte sur cône et à miroir conique.

Nous allons présenter ici une autre méthode, basée sur la loi des sinus ; elle est accessible à un élève de première scientifique². Le premier cas traité sera celui particulier d'un cône de 60°, l'objectif étant la construction d'une règle de report ; nous généraliserons ensuite les formules ; enfin nous étudierons l'effet de l'angle au sommet du miroir conique sur l'anamorphose obtenue.

I Résolution analytique, cas où l'angle au sommet du cône vaut 60°

1) Loi des sinus

Nous utilisons une figure similaire à celle de Nicéron, dans un plan qui contient l'œil (point O) et l'axe du cône (fig.49). Le miroir conique coupe ce plan selon le triangle TRA .

Dans le cas étudié ici, le triangle TRA est équilatéral (l'angle au sommet du cône est de 60°) de côté $AR = 6$. On note G le milieu du segment $[AR]$, et on suppose ici que $OG = 3TG$ (la hauteur de l'œil est triple de la hauteur du cône). Puisque $TG = 6 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, on en déduit que $OG = 9\sqrt{3}$.

Le point M est un point de la figure initiale, le point M' est son image par anamorphose. On note α l'angle sous lequel le point M est observé, c'est-à-dire l'angle $\widehat{MOG}$.

1. [BES87], pour l'anamorphose conique : pages 143-153.

2. Voir annexe C page 84 pour une proposition de devoir maison.

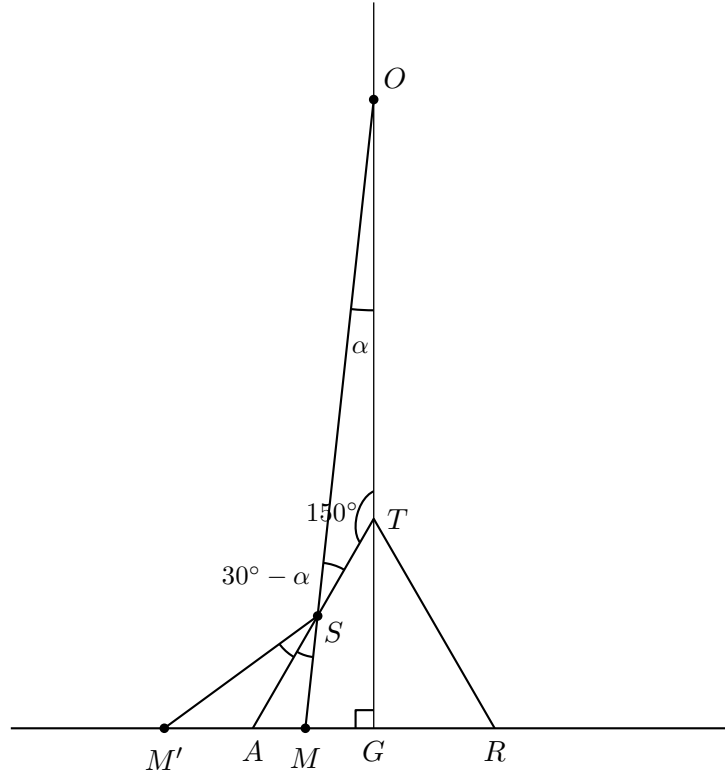
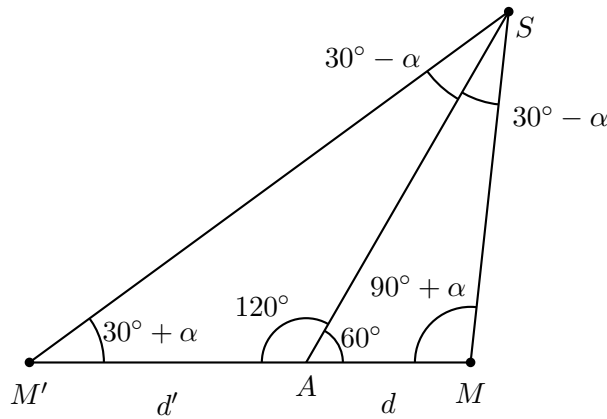


fig.49★ : Figure pour la résolution par la loi des sinus

Le segment $[M'S]$ représente le rayon incident, le segment $[SO]$ le rayon réfléchi, le segment $[MS]$ le rayon virtuel. Ici le stigmatisme n'intervient pas ; on utilise les lois de l'optique de la manière suivante : les points M , S , O sont alignés donc $\widehat{ASM} = \widehat{OST}$ (angles opposés par le sommet) ; les rayons incident et réfléchi forment le même angle de part et d'autre de la normale à (AT) , il vient que $\widehat{ASM'} = \widehat{OST}$. On a donc trois angles égaux de sommet S : $\widehat{ASM'} = \widehat{ASM} = \widehat{OST}$.

De plus, dans le triangle OST , $\widehat{OST} + \widehat{OTS} + \widehat{TOS} = 180^\circ$, or $\widehat{OTS} = 150^\circ$ et $\widehat{TOS} = \alpha$ donc $\widehat{OST} = 30^\circ - \alpha$.

Nous avons agrandi ci-dessous les triangles ASM et ASM' (fig.50), pour lesquels nous connaissons donc $\widehat{ASM} = \widehat{ASM'} = 30^\circ - \alpha$, ainsi que $\widehat{SAM} = 60^\circ$. Les autres angles s'en déduisent facilement.

fig.50 : Agrandissement des triangles ASM et ASM'

Ecrivons maintenant la loi des sinus :

- dans le triangle ASM , $\frac{\sin(30^\circ - \alpha)}{AM} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{SA} = \frac{\sin 60^\circ}{SM}$;
- dans le triangle ASM' , $\frac{\sin(30^\circ - \alpha)}{M'A} = \frac{\sin(30^\circ + \alpha)}{SA} = \frac{\sin 120^\circ}{SM'}$.

Par quotient des deux premiers membres des deux égalités, on obtient :

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha)}$$

Or $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ et $\sin(30^\circ + \alpha) = \frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha$ donc

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{\cos \alpha}{\frac{1}{2} \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \alpha}$$

en divisant par $\cos \alpha$

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{2}{1 + \sqrt{3} \tan \alpha}$$

D'après la fig.49, en posant $AM = d$ et $M'A = d'$, on a $MG = 3 - d$ et $\tan \alpha = \frac{MG}{OG} = \frac{3 - d}{9\sqrt{3}}$.

Donc $\frac{d'}{d} = \frac{2}{1 + \frac{3 - d}{9}}$ et finalement

$$\boxed{d' = \frac{18d}{12 - d}}$$

Ainsi a-t-on déterminé la mystérieuse fonction de report f dont il est question dans le chapitre 1, page 15. Il s'agit sans surprise d'une homographie, famille de fonctions liée à la géométrie projective, qui intervient naturellement dans la géométrie de la perspective.

2) Etude de la fonction $d \mapsto d' = \frac{18d}{12 - d}$

Les nombres d et d' désignent la distance respectivement des points M et M' au cercle base du cône. Si $d = 0$ alors $d' = 0$: les points du cercle sont invariants par l'anamorphose conique ; il s'agit des points en « contact » avec le miroir, à la frontière entre le monde réel et le monde reflet. Si $d = 3$ alors $d' = 6$: le point situé au centre du cercle est anamorphosé sur l'ensemble du cercle situé à la limite extérieure de l'anamorphose³ (l'anamorphose conique est donc une transformation du plan restreinte au disque base du cône privé de son centre).

De plus, $d \mapsto d' = \frac{18d}{12 - d}$ est une bijection croissante de $[0; 3]$ dans $[0; 6]$.

3. Le sommet du cône est un point singulier de sa surface : si l'on prend le trajet inverse de la lumière, un rayon partant de l'œil de l'observateur, et tombant sur le sommet du cône, est réfléchi dans toutes les directions pour décrire le cercle extérieur dans son entier.

II Généralisation

Nous reprenons dans cette partie la démonstration précédente en la généralisant pour n'importe quelle valeur β de l'angle au sommet du cône (non nécessairement égale à 60°) et pour n'importe quelle valeur h de la hauteur de l'œil.

1) Données

Le triangle TRA est donc seulement isocèle en T , d'angle au sommet $\beta \in [0^\circ; 180^\circ]$ de côté⁴ $AR = 6$. G est le milieu du segment $[AR]$, le point O représente l'œil positionné à la hauteur $OG = h$ ($h \in]GT; +\infty[$).

Le point M est un point de la figure initiale, le point M' est son image par anamorphose. On note α l'angle sous lequel le point M est observé, c'est-à-dire l'angle $\widehat{MOG}$.

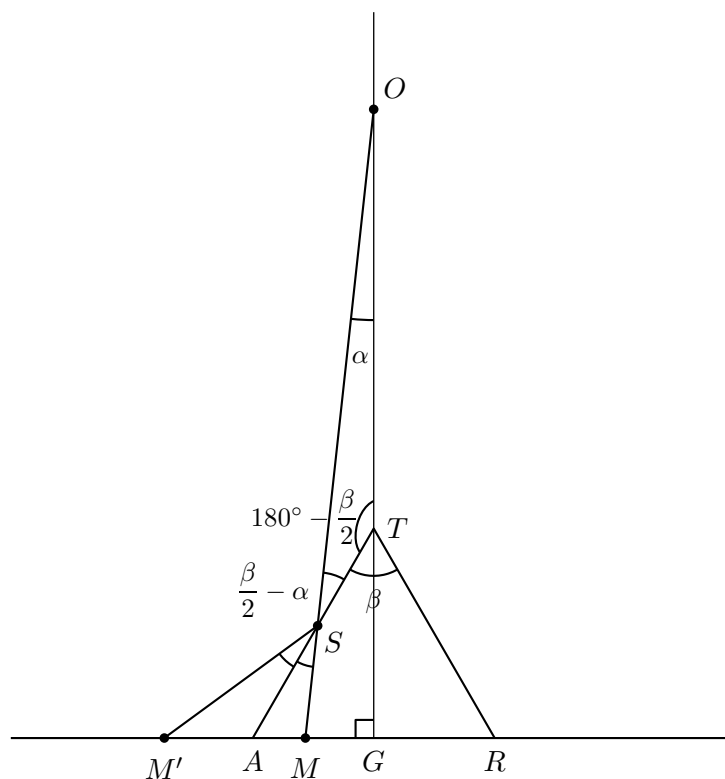


fig.53★ : Figure pour la résolution du cas général

Comme précédemment, le segment $[M'S]$ représente le rayon incident, le segment $[SO]$ le rayon réfléchi, le segment $[MS]$ le rayon virtuel.

Il vient que $\widehat{OTS} = 180^\circ - \frac{\beta}{2}$ et $\widehat{ASM'} = \widehat{ASM} = \widehat{OST} = \frac{\beta}{2} - \alpha$.

2) Loi des sinus

Nous avons agrandi de nouveau les triangles ASM et ASM' , pour lesquels nous connaissons donc $\widehat{ASM} = \widehat{ASM'} = \frac{\beta}{2} - \alpha$, ainsi que $\widehat{SAM} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$, desquels nous déduisons les autres angles.

4. La mesure du côté est arbitraire, c'est un facteur d'agrandissement de l'anamorphose. On la prend ici égale à 6 comme Nicéron.

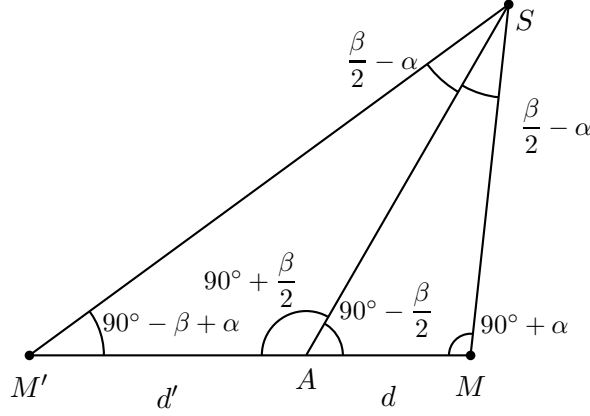


fig.54 : Loi des sinus dans le cas général

Ecrivons maintenant la loi des sinus :

- dans le triangle ASM , $\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)}{AM} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{SA} = \frac{\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right)}{SM}$;
- dans le triangle ASM' , $\frac{\sin\left(\frac{\beta}{2} - \alpha\right)}{M'A} = \frac{\sin(90^\circ - \beta + \alpha)}{SA} = \frac{\sin\left(90^\circ + \frac{\beta}{2}\right)}{SM'}$.

Par quotient des deux premiers membres des deux égalités, on obtient :

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(90^\circ - \beta + \alpha)}$$

3) Conclusion

Or $\sin(90^\circ + \alpha) = \cos \alpha$ et $\sin(90^\circ - \beta + \alpha) = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$ donc

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha}$$

en divisant par $\cos \alpha$

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{1}{\cos \beta + \sin \beta \tan \alpha}$$

D'après la fig.53, avec $AM = d$ et $M'A = d'$, on a $MG = 3 - d$ et $OG = h$ donc $\tan \alpha = \frac{MG}{OG} = \frac{3 - d}{h}$.

Donc $\frac{d'}{d} = \frac{1}{\cos \beta + \sin \beta \times \frac{3 - d}{h}}$ et finalement

$$d' = \frac{hd}{h \cos \beta + (3 - d) \sin \beta}$$

III Quelques angles particuliers

Nous étudions ici la fonction d'anamorphose conique $d \mapsto d'$ pour différentes valeurs de β et h .

1) Remarques préliminaires

Si $d = 0$ alors $d' = 0$: les points du cercle base du cône sont invariants, quels que soient l'angle au sommet du cône ou la hauteur de l'œil ; ce sont toujours des points en contact avec la surface de réflexion.

Si $d = 3$ alors $d' = \frac{3}{\cos \beta}$: lorsque $\cos \beta > 0$ (c'est-à-dire lorsque l'angle au sommet du cône β est aigu), cette valeur nous donne la largeur de la couronne de l'anamorphose, c'est-à-dire que l'anamorphose est inscrite dans un cercle de rayon ⁵ $3 + \frac{3}{\cos \beta}$. La fonction $\beta \mapsto \frac{3}{\cos \beta}$ est une bijection strictement croissante de $[0^\circ; 90^\circ[$ vers $[3; +\infty[$. Lorsque $\beta > 90^\circ$, on obtient une valeur négative, ce qui est absurde, comme nous allons le voir ci-dessous.

2) Cas particulier pour $\beta = 60^\circ$

Dans ce cas, $\cos \beta = \frac{1}{2}$ et $\sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$; alors $d' = \frac{2hd}{h + (3-d)\sqrt{3}}$.

Si $h = 9\sqrt{3}$, on retrouve $d' = \frac{18d}{12-d}$ de la partie I.

Si $h \rightarrow +\infty$ (fig.55), alors ⁶ $d' \rightarrow 2d$: cette « fonction de report » est particulièrement simple, c'est pourquoi nous étudierons ce cas dans le chapitre suivant.

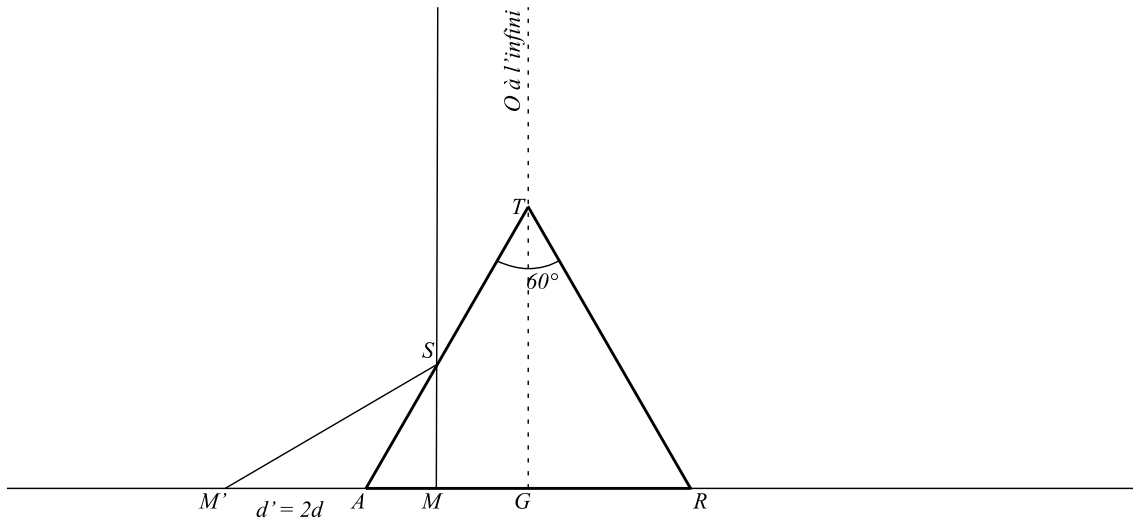


fig.55★ : Cas particulier pour $\beta = 60^\circ$, œil à l'infini

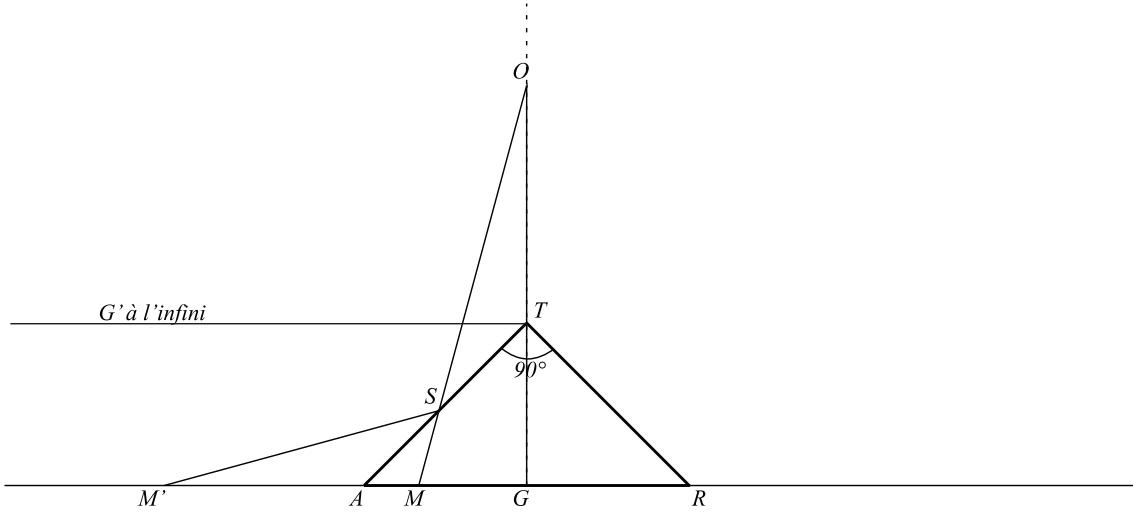
3) Cas particulier pour $\beta = 90^\circ$

$\cos \beta = 0$ et $\sin \beta = 1$; $d' = \frac{hd}{3-d}$.

Si $d \rightarrow 3$, alors $d' \rightarrow +\infty$: l'anamorphose occupe tout le plan privé du disque de rayon 3 où est dessinée la figure initiale.

5. Cette valeur est indépendante de la hauteur de l'œil, car le rayon considéré est réfléchi au sommet du cône, de manière verticale vers l'œil (en supposant bien sûr que l'œil est au-dessus du sommet du cône).

6. On peut retrouver ce résultat de manière purement géométrique : le triangle $M'SM$ est la moitié d'un triangle équilatéral dont le centre de gravité est A.

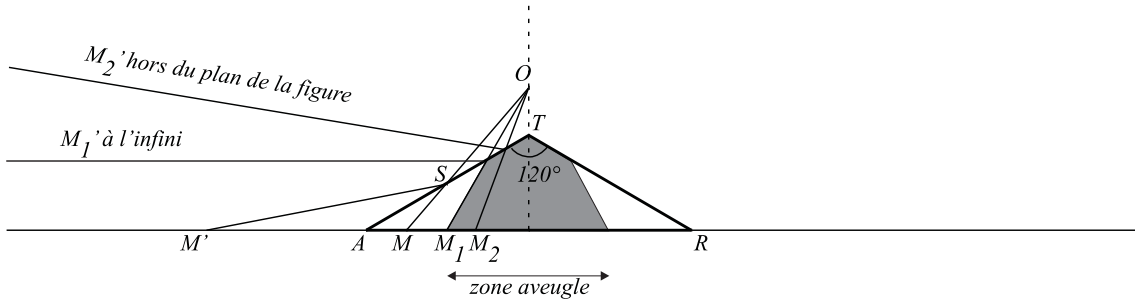
fig.56★ : Cas particulier pour $\beta = 90^\circ$, l'anamorphose occupe une surface infinie

4) Lorsque $\beta > 90^\circ$: cas particulier pour $\beta = 120^\circ$

$$\cos \beta = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \beta = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } d' = \frac{2hd}{-h + (3-d)\sqrt{3}}.$$

Si $d' < 0$ alors le point M' n'existe pas ; or $d' < 0$ équivaut à $-h + (3-d)\sqrt{3} < 0$, c'est-à-dire $d > 3 - \frac{h}{\sqrt{3}}$.

L'anamorphose existe donc pour $d \in \left[0; 3 - \frac{h}{\sqrt{3}}\right]$, une zone aveugle apparaît au centre de la figure ; il s'agit du disque de rayon $\frac{h}{\sqrt{3}}$.

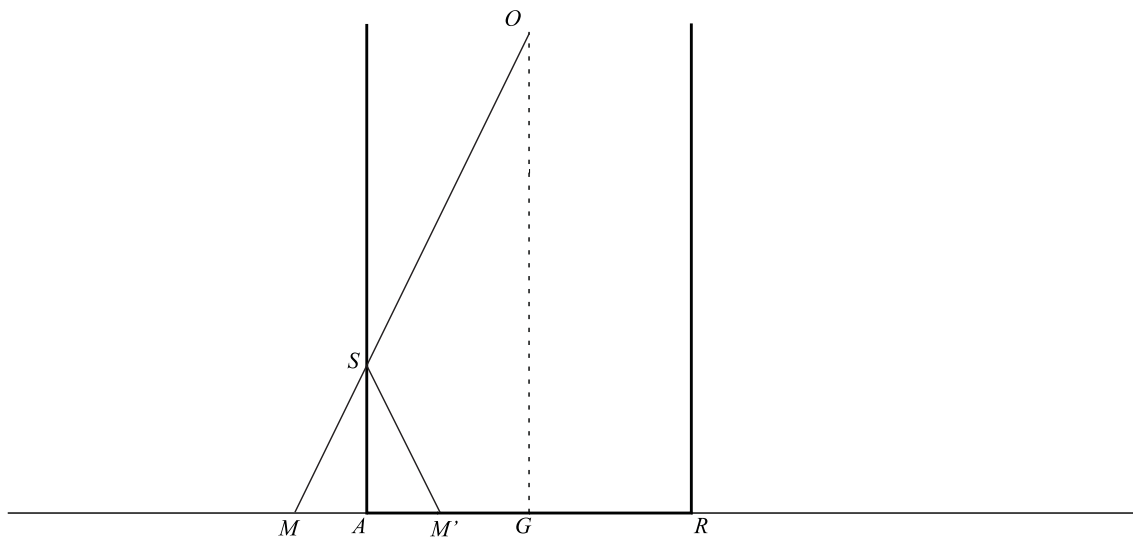
fig.57★ : Cas particulier pour $\beta = 120^\circ$, apparition d'une zone aveugle au centre de la figure

Remarquons que dans le cas général, $d' = \frac{hd}{h \cos \beta + (3-d) \sin \beta}$ donc $d' < 0$ équivaut à $d > 3 + h \cotan \beta$. Cela peut se produire à condition que $\cotan \beta < 0$, c'est-à-dire $\beta \in]90^\circ; 180^\circ]$. Il y a donc une zone aveugle dès que $\beta > 90^\circ$; c'est le disque central de rayon $-h \cotan \beta$.

Lorsque $\beta = 180^\circ$, le cône est plat et l'observateur n'est plus devant le reflet d'une anamorphose, mais face à lui-même...

5) Cas particulier pour $\beta = 0^\circ$

$\cos \beta = 1$ et $\sin \beta = 0$; $d' = \frac{hd}{h}$, c'est-à-dire $d' = d$: on retrouve la symétrie par rapport à un cercle ! Mais que se passe-t-il d'un point de vue physique ?


 fig.58★ : Cas particulier pour $\beta = 0^\circ$, œil à l'intérieur du « cône »

Si l'angle au sommet est de 0° et que l'on fixe le diamètre de la base à 6, alors le cône devient infini, c'est-à-dire qu'il se transforme en cylindre. Quant à l'œil, si sa hauteur est finie, il est nécessairement contenu dans ce cylindre ; il a donc face à lui la figure centrale en vision directe, qui se reflète sur les parois internes du cylindre, un peu comme pour un kaleïdoscope⁷. On retrouve donc la symétrie par rapport à un cercle de manière concrète sur le dispositif suivant : on utilise un miroir en forme de tube cylindrique, dont les parois internes sont réfléchissantes ; on place à l'extrémité de ce tube la figure obtenue par symétrie par rapport à un cercle, par exemple le « trèfle » ; son reflet sur les parois internes du miroir se redresse pour redonner la figure initiale, c'est-à-dire le carré circonscrit.

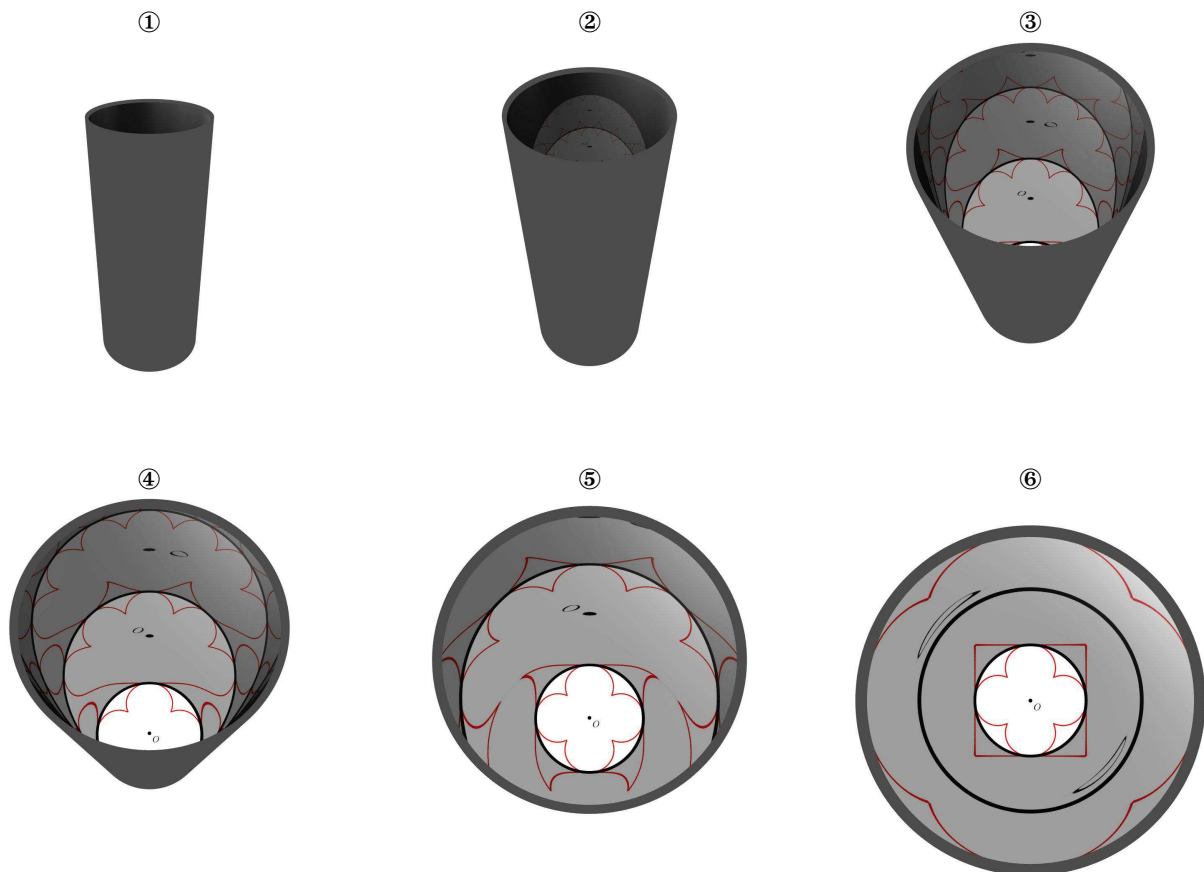


fig.59 : De ① à ⑥, le cylindre (« cône » infini) bascule vers le lecteur

7. Et comme pour un kaleïdoscope, un même point se reflète plusieurs fois, par réflexion multiple du même rayon lumineux.

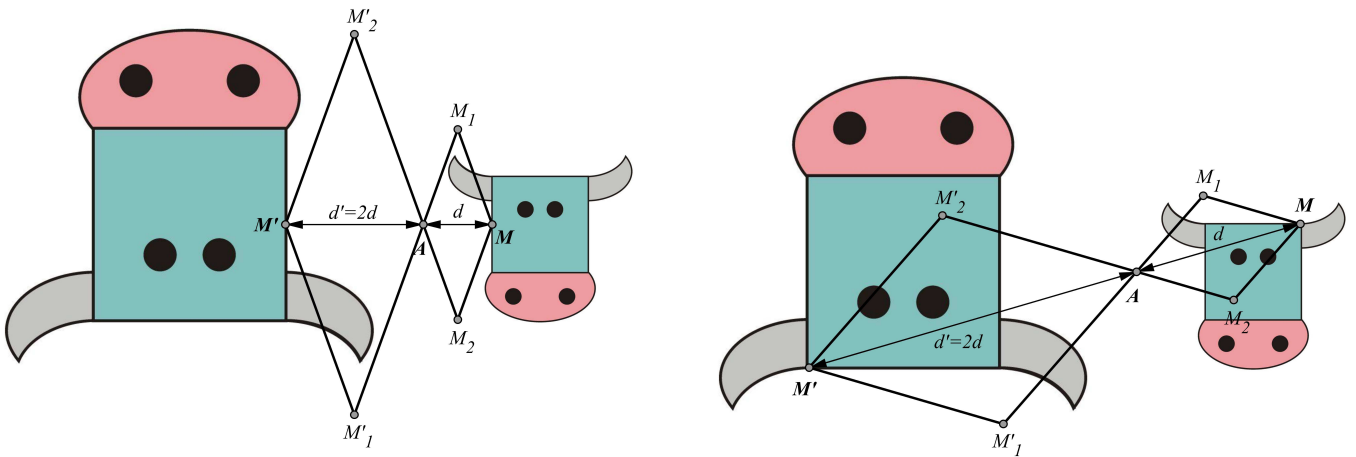


fig.60★ : Pantographe réalisant une homothétie de rapport -2 de deux points M

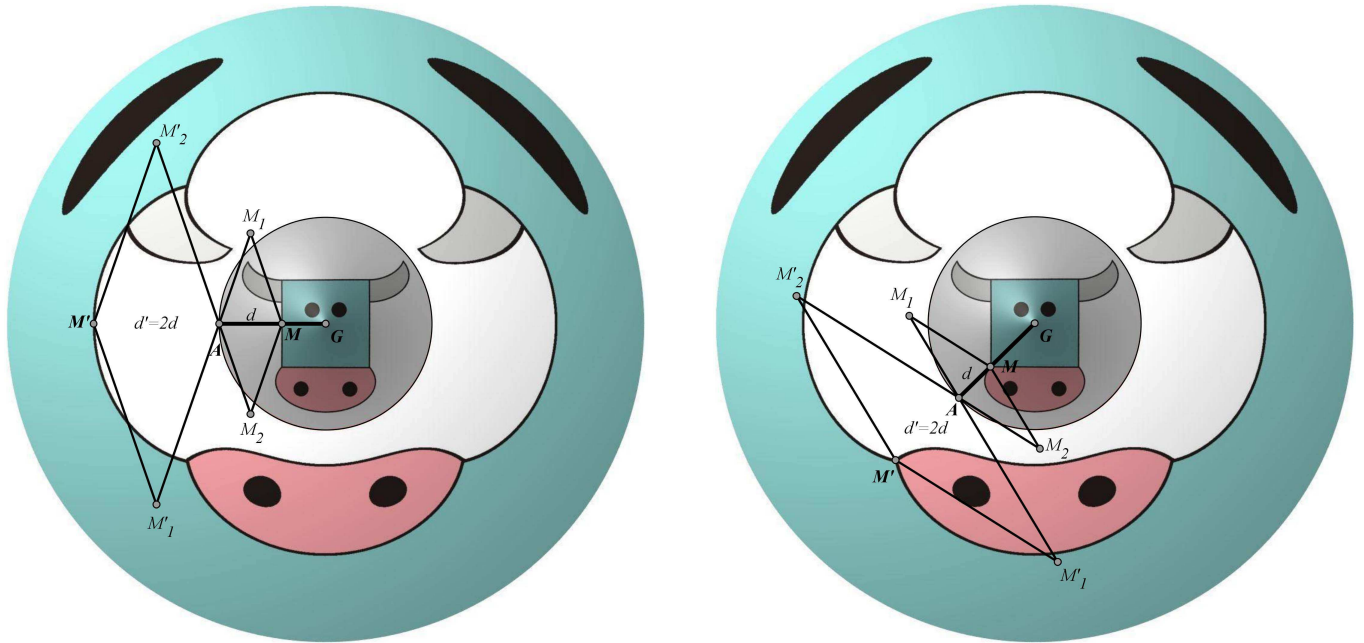


fig.61★ : Pantographe sur l'anamorphose conique

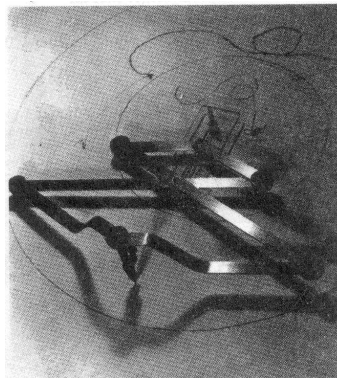


fig.62 : Pantographe réalisé par Michel Parré en 1973 (photographie tirée de [BAL96])

Chapitre 4

Pour aller plus loin

Nous allons nous intéresser dans cette partie à la construction d'une anamorphose conique de manière mécanique, à l'aide d'un pantographe, ou de manière optique à l'aide d'un « miroir réciproque ». Nous verrons dans quelle mesure ces constructions sont valides, dans le cas où elles sont effectivement possibles.

Nous nous poserons également la question de la hauteur de l'œil : celle-ci est fixée lors de la construction de l'anamorphose, faut-il la respecter scrupuleusement lorsqu'on veut observer la figure initiale redressée ?

Dans ce qui suit, le miroir conique initial a pour angle au sommet $\beta = 60^\circ$.

I Pantographe

1) L'instrument

Le pantographe est un instrument bien connu de qui souhaite reproduire un dessin, avec éventuellement un agrandissement ou une réduction. Il est formé de tiges articulées que l'on peut en général régler en fonction du rapport d'agrandissement/réduction souhaité. Dans le cas illustré ci-contre (fig.60), le pantographe réalise une homothétie de rapport -2 .

Le point A est fixe, les segments $[AM_1]$, $[AM_2]$, $[M_1M]$, $[M_2M]$ sont de même longueur, les segments $[AM'_1]$, $[AM'_2]$, $[M'_1M']$, $[M'_2M']$ sont de longueur double à celle des segments précédents. Lorsque le point M décrit la figure originale (vache de droite), le point M' décrit la copie (vache de gauche, à l'envers) qui en est l'homothétie de centre A et de rapport -2 . En effet, les triangles AMM_1 et $AM'M'_1$ par exemple fournissent une configuration de Thalès en papillon. Si l'on note d et d' les distances AM et AM' , on obtient donc le rapport $d' = 2d$.

2) Application à l'anamorphose conique

Comme nous l'avons constaté page 35, lorsque l'angle au sommet du cône vaut $\beta = 60^\circ$ et lorsque la hauteur de l'œil h tend vers l'infini, la fonction d'anamorphose devient $d \mapsto d' = 2d$. Le pantographe décrit précédemment peut donc être utilisé dans ce cas, à condition que :

- le point A décrive le cercle base du cône ;
- les points A , M et M' soient alignés avec le centre du cercle.

Les fig.61 et fig.62 ci-contre présentent une tige ayant pour extrémité fixe le point G , et dont l'autre extrémité A tourne autour de ce point G et décrit le cercle base du cône. On accompagne cette rotation en faisant glisser le point M sur la tige, de manière à suivre la figure qu'il faut anamorphoser.

Cependant, lorsque nous ferons face à l'anamorphose produite grâce au pantographe, notre œil ne sera pas situé à l'infini, et le reflet observé sera une déformation de la figure originale. Voyons de quel ordre sera cette déformation.

Il vient que

$$\frac{(3-d)d}{3k+d} = 3-d+3k - \frac{9k(1+k)}{3k+d}$$

$$\text{D'où } \bar{e}(k) = \frac{1}{3} \left[3d - \frac{d^2}{2} + 3kd - 9k(1+k) \ln(3k+d) \right]_{d=0}^{d=3}$$

et finalement

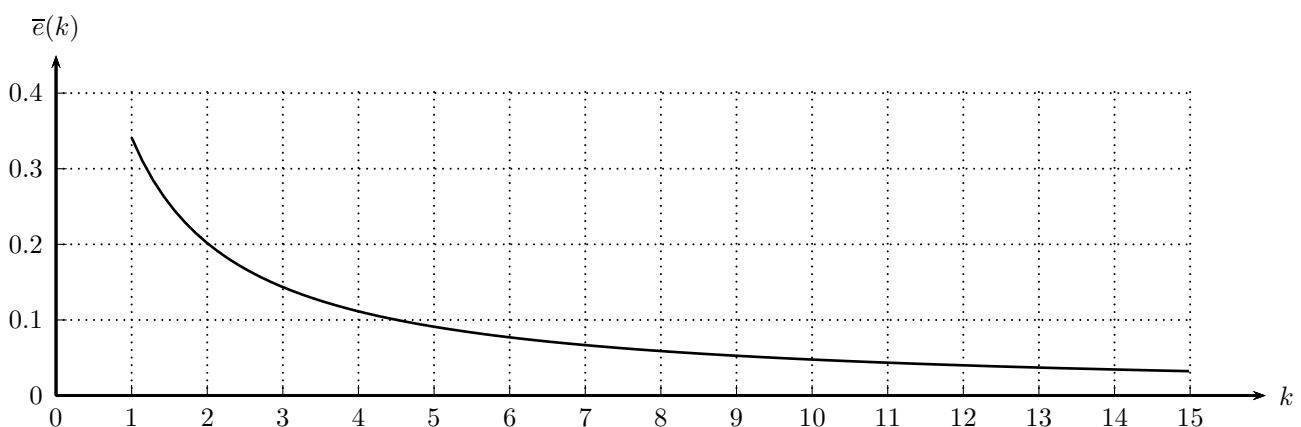
$$\boxed{\bar{e}(k) = \frac{3}{2} + 3k - 3k(1+k) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)}$$

On peut remarquer que lorsque k tend vers l'infini (c'est-à-dire lorsque l'œil se positionne à l'infini), $\bar{e}(k)$ tend bien vers 0 :

En effet, $\ln \left(1 + \frac{1}{k} \right) = \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k^2} \varepsilon(k)$ avec $\varepsilon(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$,

il vient donc que $\bar{e}(k) = \frac{3}{2k} - 3 \left(1 + \frac{1}{k} \right) \varepsilon(k)$ et que $\bar{e}(k) \rightarrow 0$ lorsque $k \rightarrow +\infty$.

De plus, $\bar{e}'(k) = 6 - (3+6k) \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)$ et on peut montrer que $\bar{e}'(k) < 0$ pour $k \geq 1$: la fonction $\bar{e}(k)$ est décroissante sur $[1; +\infty[$. Nous en donnons une courbe représentative ci-dessous :



Ainsi, pour un diamètre de base $AR = 6$ cm, l'écart moyen reste supérieur à 0,1 cm lorsque l'œil est situé à moins de 4,5 fois la hauteur du cône. Or la position d'observation est le plus souvent située dans cet intervalle. Comme l'illustre la fig.64 ci-après, la construction d'une anamorphose par pantographe est théoriquement fautive.

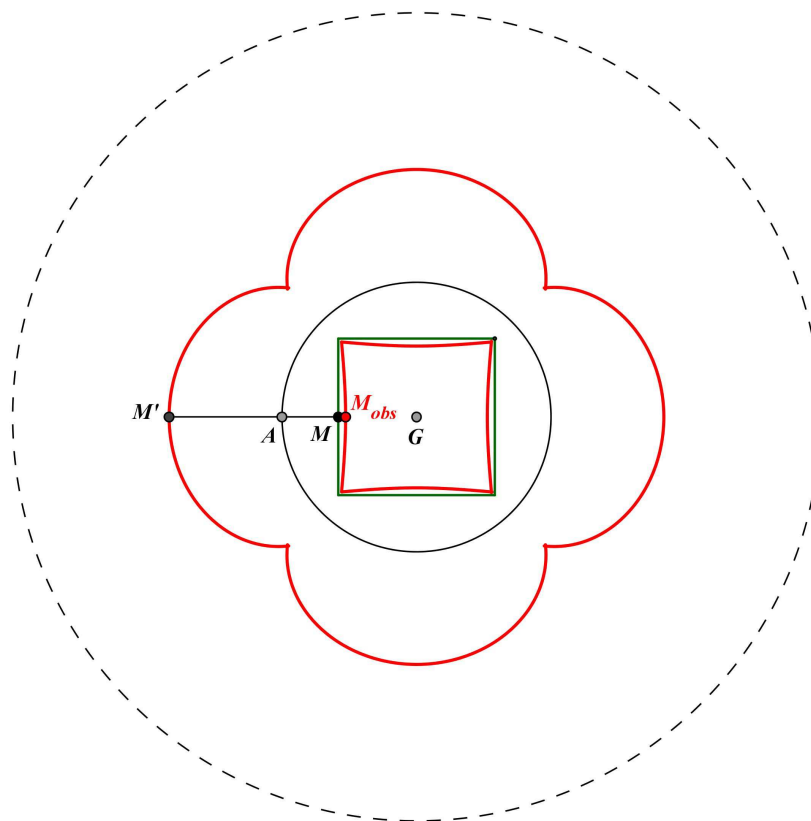


fig.64★ : En rosace, anamorphose au pantographe du carré central,
et figure réellement observée à l'intérieur du carré pour une hauteur de l'œil $h = 4 \times 3\sqrt{3}$

Cependant, on peut se demander si cet écart aura un effet réel pour une figure complexe et non géométrique. Par exemple, sur un détail de la *Joconde* (fig.65 à droite), on constate que la figure se « rétracte » vers son centre ; la déformation est donc bien apparente pour un œil placé à une distance finie.



fig.65 : anamorphose « au pantographe » d'un détail de la Joconde ;
à gauche, observée dans un miroir conique avec œil à l'infini, à droite observée avec une hauteur de l'œil $h = 4 \times 3\sqrt{3}$

4) Conclusion

Le pantographe est donc une solution approchée pour le tracé des anamorphoses¹ : il faudrait pouvoir placer son œil à l'infini (fig.65 à gauche) pour éviter toute déformation. Cependant, les autres méthodes (à l'aide d'une grille ou d'une règle) sont elles aussi approchées puisqu'elles s'exécutent « à l'œil » et à main levée. L'observation elle-même est approximative, car on n'indique jamais au spectateur à quelle distance il doit se situer pour regarder une anamorphose². De plus, les déformations du reflet sont continues en fonction de la hauteur de l'œil (et permettent donc un intervalle d'observation correct). Mais l'argument principal est sans doute que le spectateur est le plus souvent davantage attentif à la « révélation » de la figure originale. La magie des anamorphoses n'opère pas par une adéquation parfaite entre le reflet observé et la figure initiale, mais par l'apparition d'une figure connue à partir d'une figure difforme.

II « Miroir réciproque »

Une autre approche consisterait à inverser les rôles de la figure initiale et de l'anamorphose dans le dispositif d'observation avec un miroir : jusqu'à présent, une fois l'anamorphose créée et tracée sur papier, on la place autour d'un miroir conique (d'angle $\beta = 60^\circ$ pour le cas qui nous intéresse), et on retrouve la figure initiale dans le reflet du miroir. Ne pourrait-on pas combiner la figure initiale simplement tracée sur papier, avec un « miroir réciproque » (fig.66), de sorte que l'on retrouve cette fois l'anamorphose dans le reflet du miroir ? Une fois le miroir construit, cette méthode présenterait l'avantage d'être simple et immédiate à mettre en œuvre : on se donne une figure à anamorphoser sur papier, on la place au centre du « miroir réciproque » adéquat, et on observe l'anamorphose dans le reflet : l'anamorphose est alors créée de manière purement optique !

Nous allons voir que les choses ne sont pas aussi faciles...

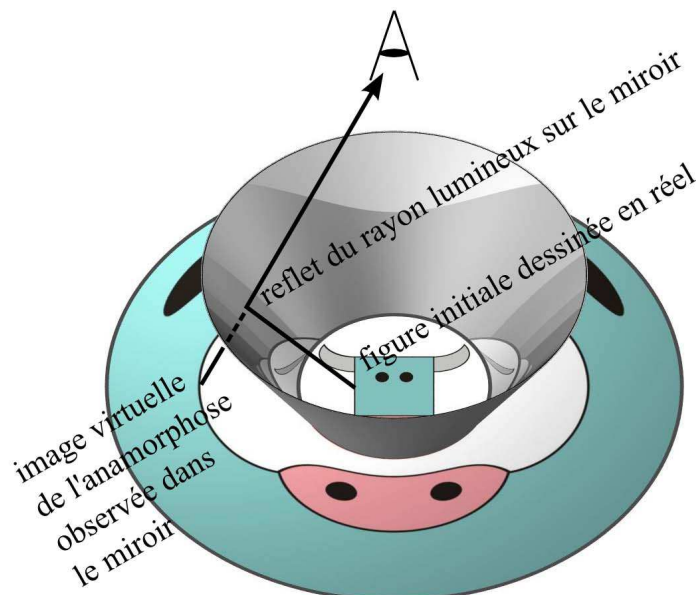


fig.66 : Existe-t-il un « miroir réciproque » ?

Nous nous plaçons cette fois encore dans le cas d'une anamorphose qui serait créée pour un miroir conique initial d'angle au sommet $\beta = 60^\circ$.

1. On pourrait ajouter que cela tient également au fait qu'il s'agit d'une méthode mécanique.

2. Se reporter à la partie III pour une étude détaillée de l'erreur induite par une mauvaise hauteur de l'œil.

1) L'impossible simplicité

Le miroir le plus simple que l'on pourrait construire ressemblerait à ces colerettes que l'on met aux chiens et chats lorsqu'on veut les empêcher de lécher une blessure. Il s'agit d'un tronc de cône, c'est-à-dire la révolution d'un segment autour de l'axe du regard. Dans les fig.67 et fig.68, l'une des extrémités du segment est fixée au point A : puisque ce point est invariant, il est naturel de le placer en contact avec le miroir.

Deux cas : ou bien le segment générateur $[AA']$ est tourné vers l'extérieur (fig.67), ou bien il est tourné vers l'intérieur (fig.68). Le premier cas est impossible : en effet, en utilisant la loi des sinus, on montre facilement qu'alors on a toujours $AM > M'A$, ce qui est problématique, ne serait-ce que lorsque M est confondu avec G (on doit avoir alors $AM = 3$ et $M'A = 6$ comme on l'a montré précédemment³).

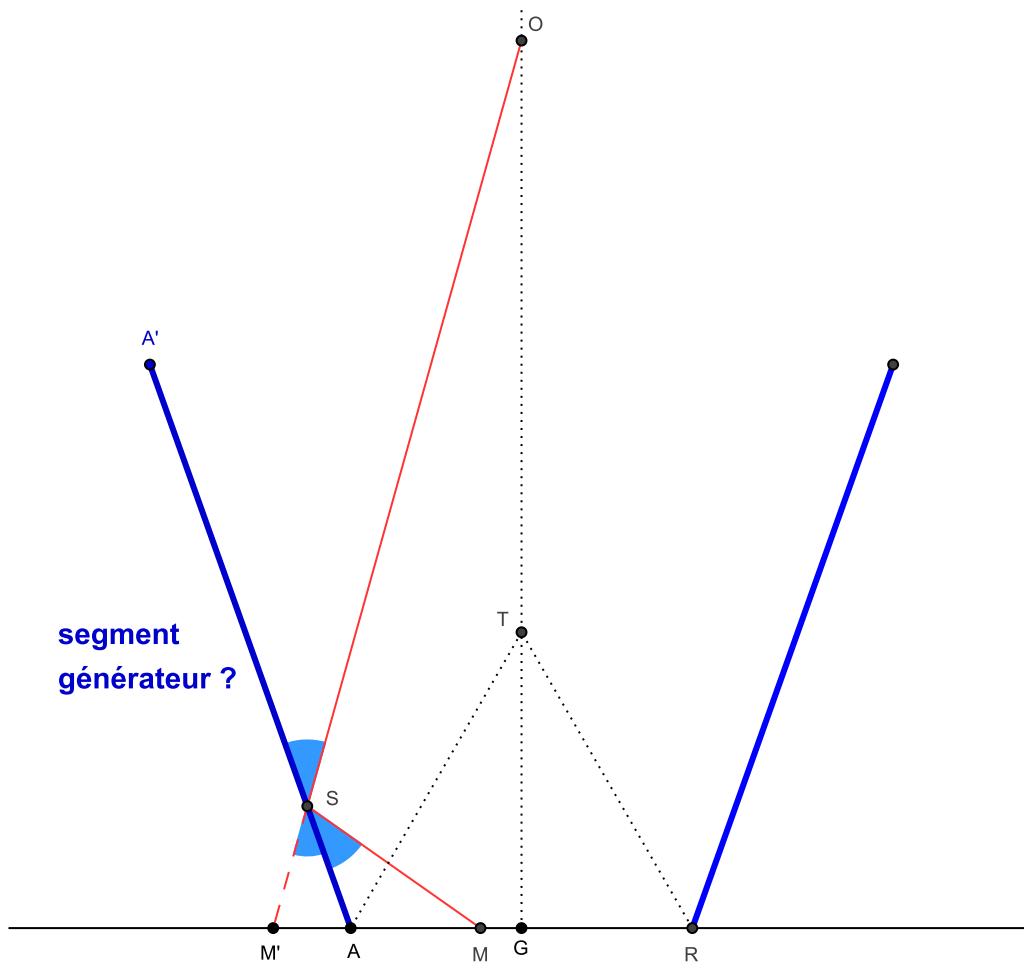


fig.67★ : Segment générant le tronc de cône miroir tourné vers l'extérieur

Dans le second cas, nous notons β' l'angle au sommet du cône qui prolonge le tronc de cône miroir, et α l'angle sous lequel est observé le point M' . On en déduit les angles notés sur la fig.68, et, à l'aide de la loi des sinus dans les triangles $AS'M$ et $AS'M'$, par un raisonnement analogue à ce qui précède⁴, l'égalité

$$\frac{M'A}{AM} = \frac{\sin(90^\circ + \beta' - \alpha)}{\sin(90^\circ - \alpha)}$$

et par suite, puisque $\sin(90^\circ + \beta' - \alpha) = \cos(\beta' - \alpha) = \cos \beta' \cos \alpha + \sin \beta' \sin \alpha$ et $\sin(90^\circ - \alpha) = \cos \alpha$

$$\frac{M'A}{AM} = \cos \beta' + \sin \beta' \tan \alpha$$

3. Voir chapitre 3, page 31.

4. Voir chapitre 3, page 34.

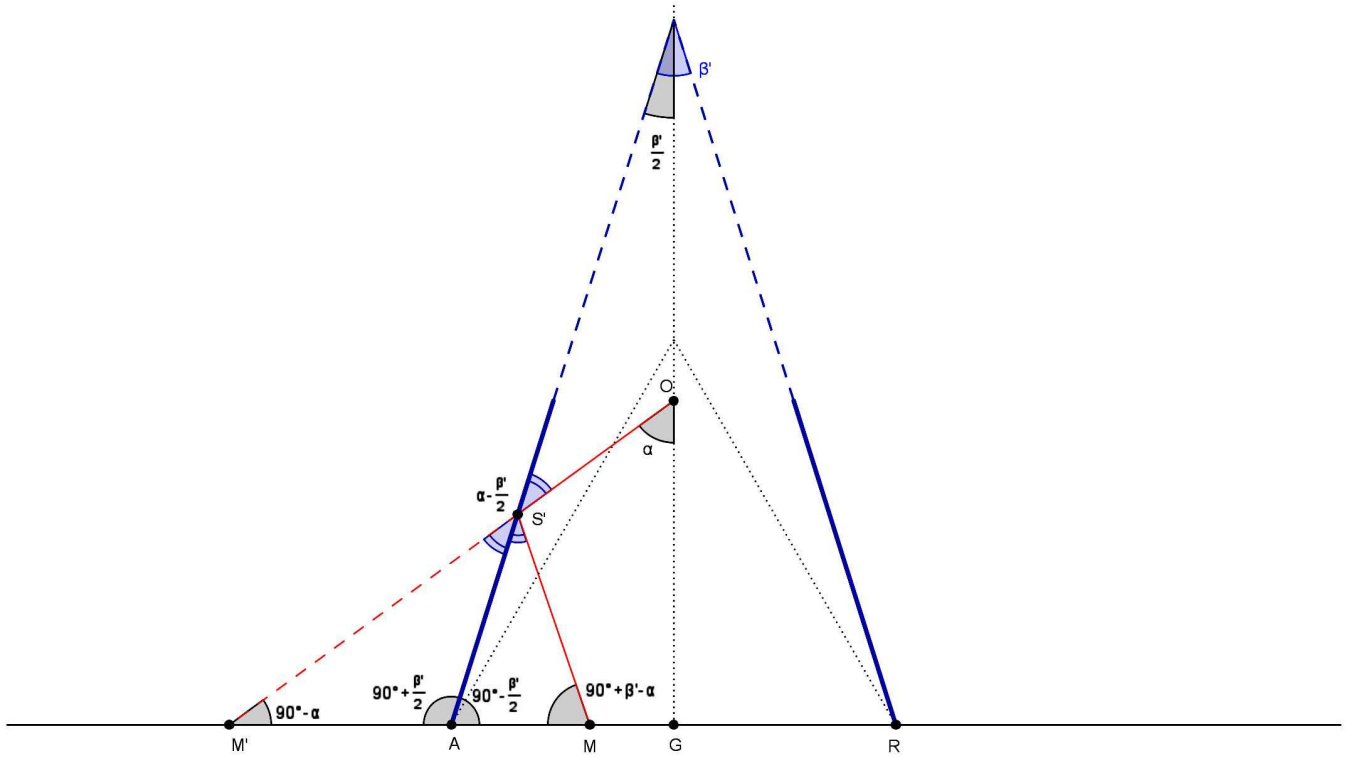


fig.68★ : Loi des sinus pour le « miroir réciproque » tourné vers l'intérieur

Intéressons-nous maintenant au cas où M est confondu avec le point G (fig.69) : on a alors $AM = 3$, $M'A = 6$, et $\tan \alpha = \frac{9}{OG}$ d'où

$$2 = \cos \beta' + \sin \beta' \frac{9}{OG}$$

qui permet de fixer la valeur de OG , hauteur de l'œil, en fonction de β' , comme nous l'avons fait dans la fig.69. Mais étudions de plus près à l'angle α : c'est la moitié de l'angle visuel sous lequel on observe le miroir, c'est-à-dire l'anamorphose. Or, pour l'observation d'un objet, le champ visuel est inférieur⁵ à 120° : on doit donc avoir $\alpha < 60^\circ$, donc $\tan \alpha < \sqrt{3}$. Puisque

$$2 = \cos \beta' + \sin \beta' \tan \alpha$$

il vient

$$2 < \cos \beta' + \sin \beta' \times \sqrt{3}$$

c'est-à-dire

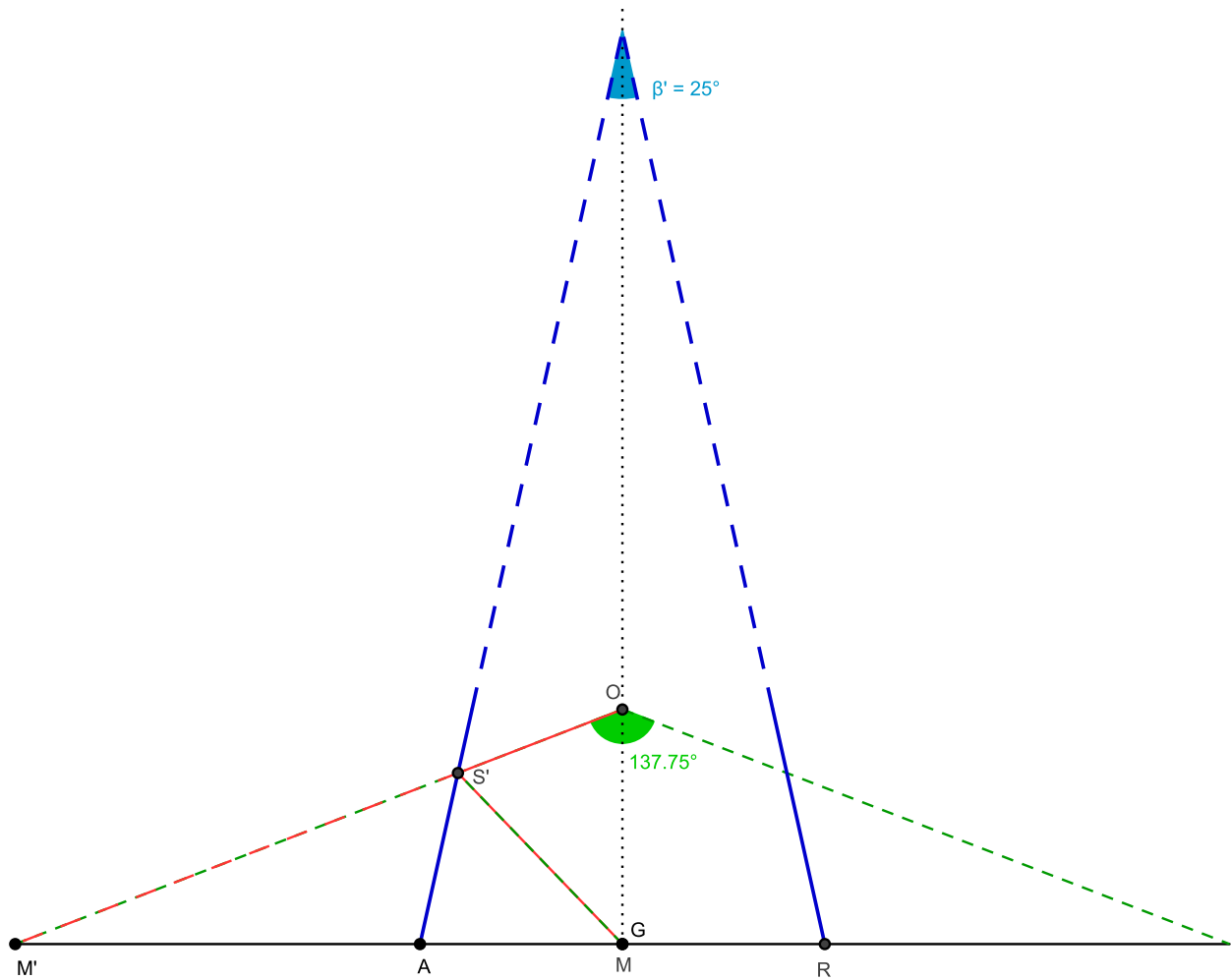
$$1 < \cos \beta' \times \frac{1}{2} + \sin \beta' \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ou encore

$$1 < \cos (\beta' - 60^\circ)$$

ce qui est impossible.

5. Voir [PZ79], page 287.

fig.69★ : M est confondu avec G : largeur du champ visuel

En conclusion, la construction d'un miroir en tronc de cône amènerait l'observateur à utiliser un champ visuel d'une ampleur supérieure à ses possibilités. On pourrait en outre démontrer⁶ que le rapport $\frac{M'A}{AM}$ n'est pas en adéquation avec celui déterminé au chapitre 3, c'est-à-dire que lorsque M n'est ni en A ni en G , le point M' ne décrit aucune fonction de report déterminée précédemment.

2) La difficile complexité

Qu'à cela ne tienne, dirons-nous, il suffit de construire un miroir courbe. L'œil étant fixé, on choisit un point S' du miroir cherché : celui-ci correspond à un point M' de l'anamorphose, et donc à un point M de la figure initiale ; du fait de la loi d'incidence, la tangente au miroir au point S' est fixée (voir fig.70). On peut donc construire une sorte de champ de vecteurs, au milieu duquel chemine notre miroir de manière toute tangentielle.

6. Nous laissons ici les joies de la démonstration au lecteur courageux ; de notre côté nous allons couper un peu de rhubarbe dans le jardin.

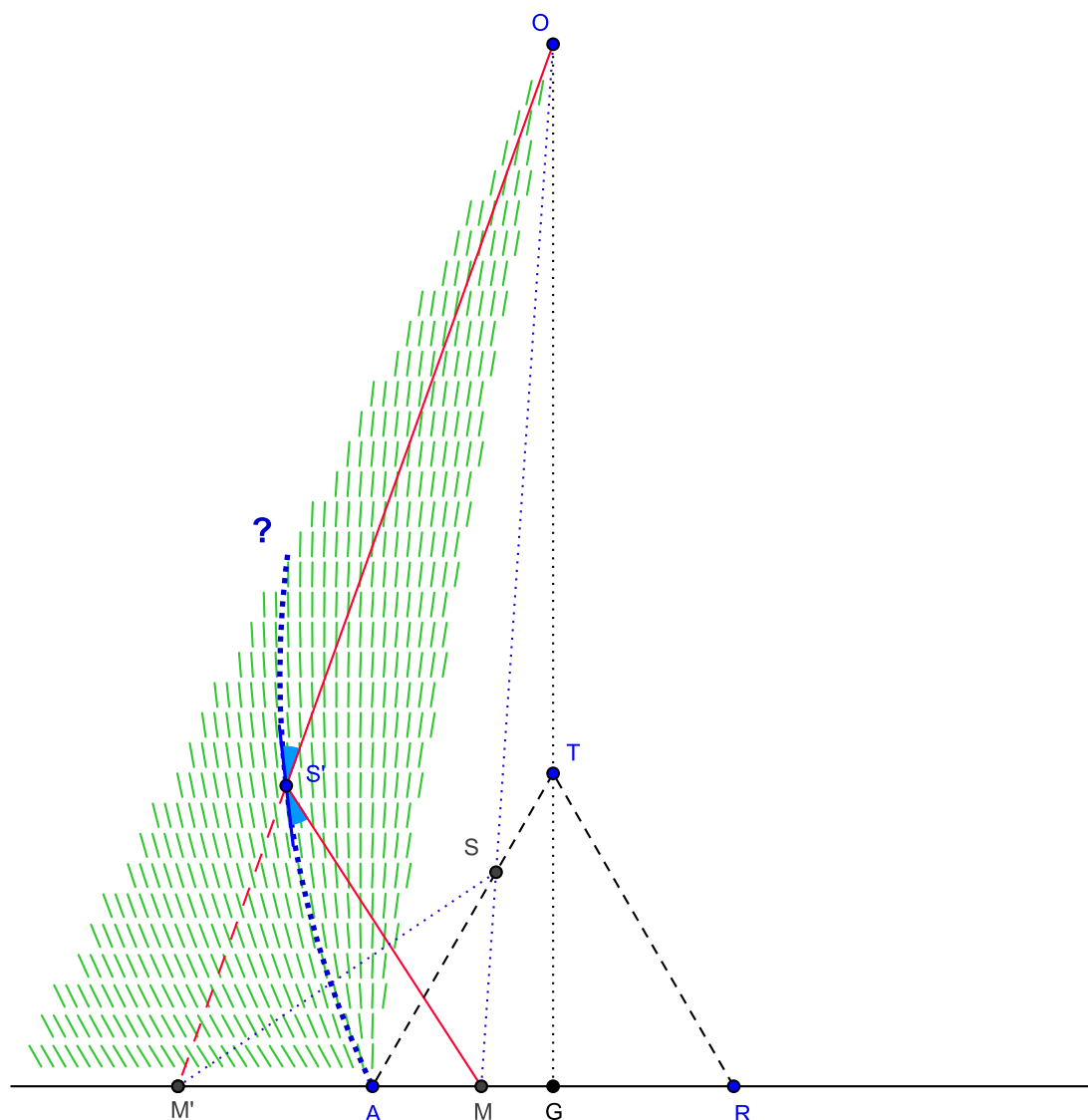


fig.70★ : Champ de vecteur, générant quel « miroir réciproque » ?

Tout cela débouche bien entendu sur une équation différentielle que nous ne retranscrivons pas ici⁷. Une résolution exacte nous semble impossible, mais on pourra réfléchir à une résolution numérique, ou approchée par une courbe simple (arc de parabole, arc de cercle, ...). Mais dans ce dernier cas, le « miroir réciproque » ne proposera plus une solution exacte à la production d'une anamorphose...

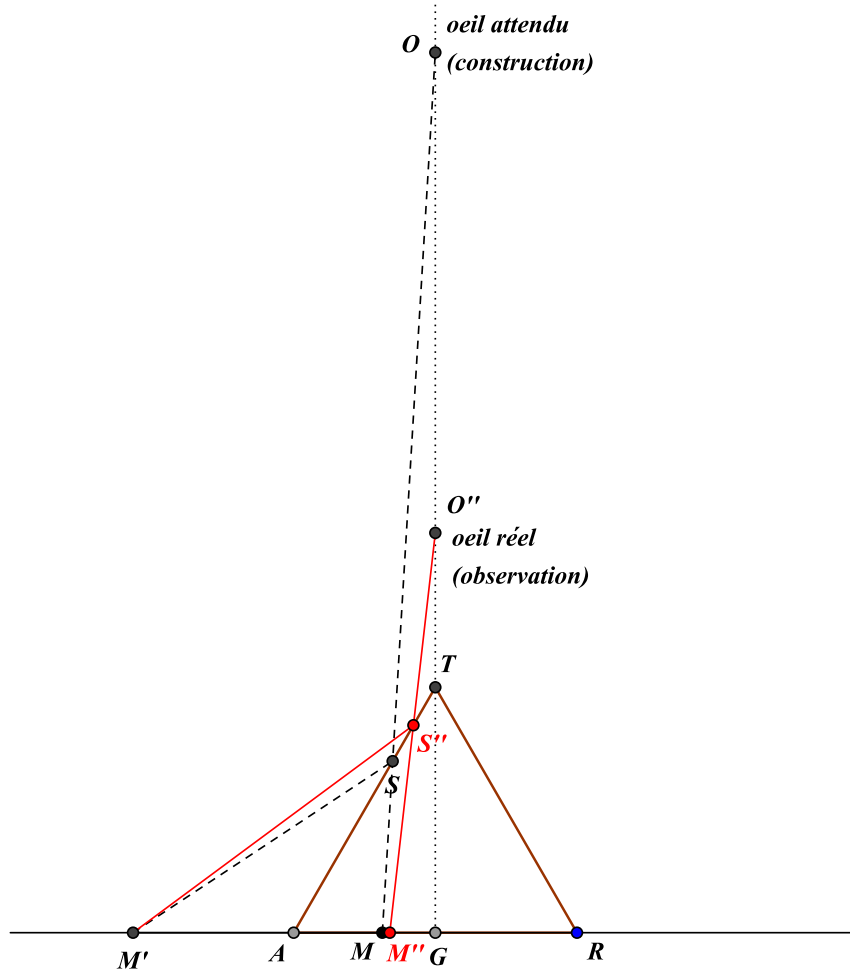
III Erreur d'observation : importance de la hauteur de l'œil

Il s'agit dans cette dernière partie d'étudier la raison pour laquelle, lorsqu'on présente une anamorphose, on ne prend pas la peine de préciser à l'observateur la distance à laquelle il doit placer son œil, par rapport au sommet du cône.

Le miroir conique initial a toujours pour angle au sommet $\beta = 60^\circ$.

7. Le lecteur ayant gardé courage saura retrouver cette équation différentielle ; à celui qui en trouvera une solution simple, nous ferons parvenir toute notre gratitude et une part de tarte à la rhubarbe.

1) Figure de base

fig.71★ : Ecart entre le point M de la figure initiale et le point M'' réellement observé

Nous nous plaçons donc dans la situation suivante (fig.71) : une anamorphose a été construite pour un point d'observation donné (noté O), et est observée depuis le point O'' , où l'observateur place réellement son œil. Il s'ensuit qu'un point M de la figure initiale, correspondant au point M' de l'anamorphose, apparaîtra en M'' , qui ne coïncide donc pas avec ce point initial.

2) Fonctions d'anamorphose et écart moyen

En notant $d = AM$, $h = OG$, $d' = M'A$, $h'' = O''G$ et $d'' = AM''$, on peut reprendre la fonction d'anamorphose déterminée page 35 :

$$d' = \frac{2hd}{h + (3-d)\sqrt{3}}$$

et

$$d' = \frac{2h''d''}{h'' + (3-d'')\sqrt{3}}$$

on a donc

$$\frac{2hd}{h + (3-d)\sqrt{3}} = \frac{2h''d''}{h'' + (3-d'')\sqrt{3}}$$

et par suite

$$d'' = \frac{hd\sqrt{3}(h'' + 3\sqrt{3})}{h''(h\sqrt{3} + 9) + 3d(h - h'')}$$

de même que page 40, l'écart entre le point initial et le point observé est

$$d'' - d = \frac{3(h - h'')d(3 - d)}{h''(h\sqrt{3} + 9) + 3d(h - h'')}$$

Cet écart est positif lorsque $h'' < h$ (l'image se « rétracte » vers le centre, voir fig.72) et, par permutation des points O et O'' , l'écart est négatif lorsque $h'' > h$ (l'image « gonfle » vers l'extérieur, voir fig.73).



fig.72 : Observation telle que $h'' < h$:

l'observateur est trop proche, l'image se « rétracte »



fig.73 : Observation telle que $h'' > h$:

l'observateur est trop éloigné, l'image « gonfle »

Anamorphose produite par ordinateur d'un détail de la Joconde ; construite pour une hauteur de l'œil $h = 3 \times 3\sqrt{3}$

Afin de simplifier l'écriture, on note $h = k \times 3\sqrt{3}$ et $h'' = h(1 + \eta)$ (la hauteur de l'œil est en facteur k de la hauteur du cône, et η apparaît comme une « perturbation » de la hauteur de construction, $\eta > -1$ tel que $h'' \geq 1$), on obtient alors :

$$d'' - d = \frac{-\eta d(3 - d)}{3(1 + k)(1 + \eta) - d\eta} = e(d, k, \eta)$$

Bien entendu, lorsque $\eta = 0$, $h'' = h$, et $e(d, k, 0) = 0$ pour toute valeur de d .

Calculons maintenant l'écart moyen $\bar{e}(k, \eta)$ en fonction de k et η ; lorsque k et η sont fixés, $e(d, k, \eta)$ est ou bien toujours positif ou bien toujours négatif, cette valeur moyenne est donc un bon indicateur de l'écart entre la figure initiale et l'image observée :

$$\bar{e}(k, \eta) = \frac{1}{3} \int_{d=0}^{d=3} e(d, k, \eta) dd = \frac{1}{3} \int_{d=0}^{d=3} \frac{-\eta d(3 - d)}{3(1 + k)(1 + \eta) - d\eta} dd$$

Il vient que

$$\frac{-\eta d(3 - d)}{3(1 + k)(1 + \eta) - d\eta} = -\frac{3(1 + k + k\eta)}{\eta} - d + \frac{9(1 + k)(1 + \eta)(1 + k + k\eta)}{\eta} \times \frac{1}{3(1 + k)(1 + \eta) - d\eta}$$

D'où

$$\bar{e}(k, \eta) = \frac{1}{3} \left[-\frac{3(1 + k + k\eta)d}{\eta} - \frac{d^2}{2} - \frac{9(1 + k)(1 + \eta)(1 + k + k\eta)}{\eta^2} \ln(3(1 + k)(1 + \eta) - d\eta) \right]_{d=0}^{d=3}$$

et

$$\boxed{\bar{e}(k, \eta) = \frac{3}{2} - \frac{3(1 + k)(1 + \eta)}{\eta} + \frac{3(1 + k)(1 + \eta)(1 + k + k\eta) \ln \left(1 + \frac{\eta}{1 + k + k\eta} \right)}{\eta^2}}$$

$$\bar{e}(k, \eta) = \frac{3}{2} + \frac{3(1+k)(1+\eta)}{\eta} \left(-1 + \frac{(1+k+k\eta) \ln \left(1 + \frac{\eta}{1+k+k\eta} \right)}{\eta} \right)$$

$$\bar{e}(k, \eta) = \frac{3}{2} + 3 \left(\frac{1+k+k\eta}{\eta} + 1 \right) \left(\frac{(1+k+k\eta) \ln \left(1 + \frac{\eta}{1+k+k\eta} \right)}{\eta} - 1 \right)$$

Notons $f(k, \eta) = \frac{\eta}{1+k+k\eta} = \frac{\eta}{1+k(1+\eta)}$

alors

$$\bar{e}(k, \eta) = \frac{3}{2} + 3 \left(\frac{1}{f(k, \eta)} + 1 \right) \left(\frac{\ln(1+f(k, \eta))}{f(k, \eta)} - 1 \right)$$

Donc, si l'on note $g(x) = \frac{3}{2} + 3 \left(\frac{1}{x} + 1 \right) \left(\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right)$, on obtient

$$\boxed{\bar{e}(k, \eta) = g(f(k, \eta))}$$

3) Etude de l'écart moyen

On montre facilement que :

- quel que soit $k \geq 1$, $\eta \in]-1; +\infty[\mapsto f(k, \eta)$ est croissante (avec $f(k, 0) = 0$) ;
- quel que soit $\eta \in]-1; +\infty[$, $k \in [1; +\infty[\mapsto f(k, \eta)$ est négative croissante si $\eta < 0$ et positive décroissante si $\eta > 0$.

On en déduit que $f(k, \eta) \in]-1; 1[$ pour tous $k \in [1; +\infty[$ et $\eta \in]-1; +\infty[$.

On peut montrer également que $x \in]-1; 1[\mapsto g(x)$ est continue⁸ décroissante ; on en déduit que :

- quel que soit $k \geq 1$, $\eta \in]-1; +\infty[\mapsto \bar{e}(k, \eta)$ est décroissante (avec $\bar{e}(k, 0) = 0$ comme on pouvait s'y attendre) ;
- quel que soit $\eta \in]-1; +\infty[$, $k \in [1; +\infty[\mapsto \bar{e}(k, \eta)$ est positive décroissante si $\eta < 0$ et négative croissante si $\eta > 0$ (ce qui veut dire que les déformations sont d'autant plus fortes que l'œil est proche du miroir⁹).

4) Représentation graphique

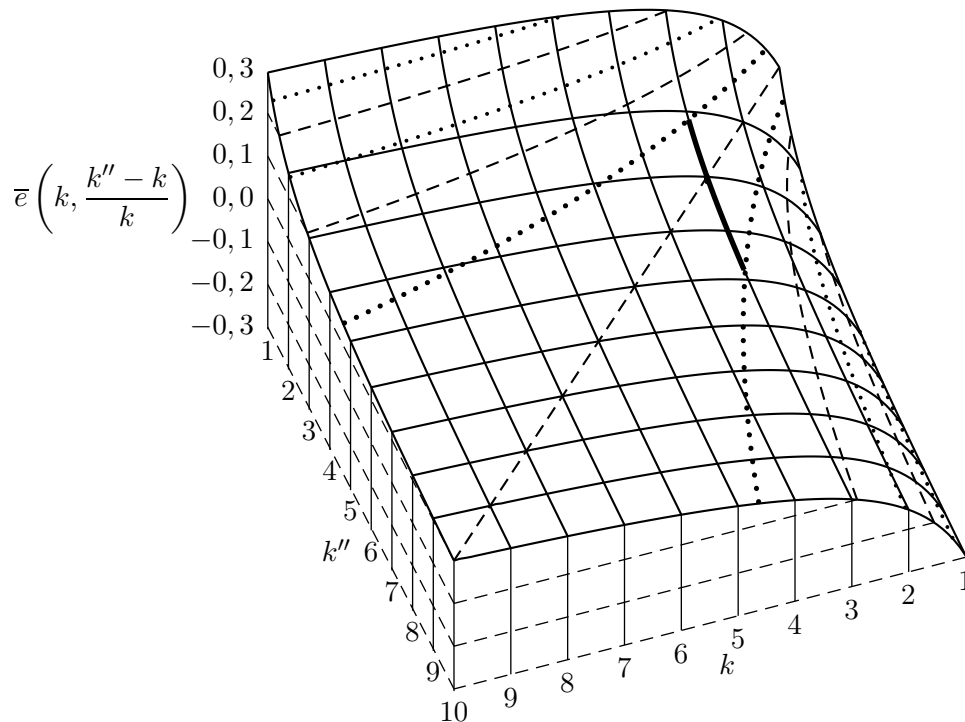
Nous donnons maintenant une représentation graphique de l'écart entre la figure initiale et l'image observée : l'œil de construction O est placé à une hauteur $h = k \times 3\sqrt{3}$ et l'œil d'observation à une hauteur $h'' = h(1+\eta)$.

Si l'on note $h'' = k'' \times 3\sqrt{3}$, il vient que $k'' = k(1+\eta)$ et $\eta = \frac{k'' - k}{k}$.

Nous allons donc représenter la fonction $(k, k'') \mapsto \bar{e} \left(k, \frac{k'' - k}{k} \right)$ pour $k \in [1; 10[$ et $k'' \in [1; 10[$; la surface représentative est symétrique par rapport à la droite d'équation $k = k''$:

8. On peut prolonger par continuité cette fonction en 0 en posant $g(0) = 0$.

9. Cette remarque est à rapprocher du cas du pantographe : on pourrait en effet imaginer que, puisque dans ce cas k est infini, on minimise l'écart ; mais, puisque l'observateur reste à une distance finie en $k(1+\eta)$, η devient très proche de -1 ...



Nous avons tracé sur la surface les courbes de niveau pour $\bar{e} = -0,25; -0,2; \dots; 0,2; 0,25$; la zone « correcte », si l'on prend pour paramètre $-0,05 < \bar{e} < 0,05$ est donc comprise entre les deux courbes en pointillés gras (écart inférieur à un demi millimètre pour un cône de 6 cm de diamètre). Par exemple, si $k = 3$, comme nous l'avons pris pour la construction des grilles de cette brochure, il faut que k'' soit compris environ entre 2 et 5 (courbe en gras) ; c'est-à-dire que l'intervalle d'observation s'étend de 1 fois la hauteur du cône en-dessous de la hauteur de construction, à 2 fois au-dessus.

5) Conclusion

Sur les exemples ci-dessous, le reflet peut sembler encore trop éloigné de la figure initiale. Cependant, il faudrait encore tenir compte de la taille apparente du reflet, suivant l'éloignement de l'observateur. Pour être tout à fait juste, il faudrait considérer l'écart entre la figure initiale et le reflet observé non pas comme la distance mesurée sur le plan de base de l'anamorphose, mais comme l'ouverture d'angle entre les deux points, sous l'œil. De quoi compliquer un peu plus nos investigations...



fig.74 : Observation telle que $h'' = 2 \times 3\sqrt{3}$



fig.75 : Observation telle que $h'' = 4 \times 3\sqrt{3}$

Anamorphose produite par ordinateur d'un détail de la Joconde ; construite pour une hauteur de l'œil $h = 3 \times 3\sqrt{3}$; observation dans l'intervalle « correct »

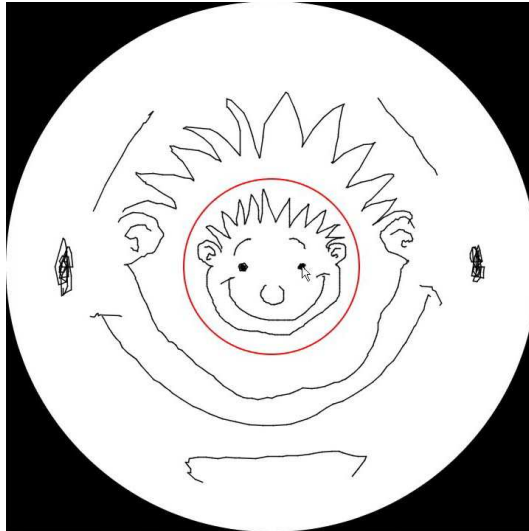


fig.76 : Dessin interactif d'une anamorphose conique

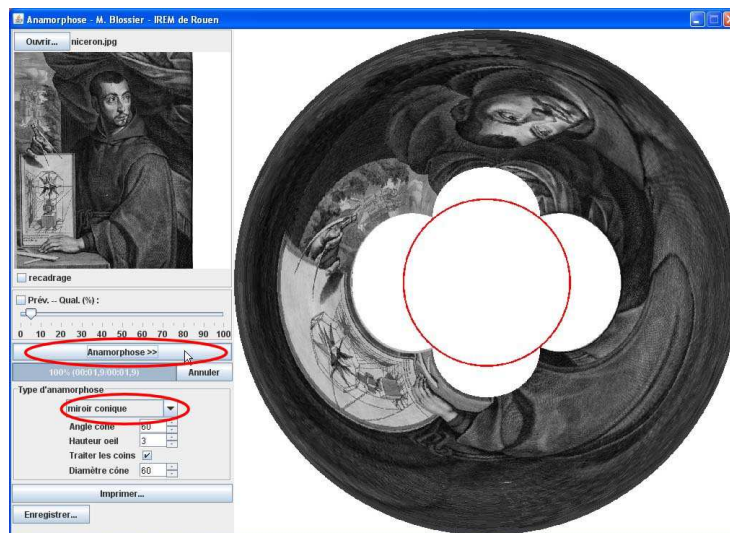


fig.77 : Anamorphose conique d'une image JPEG

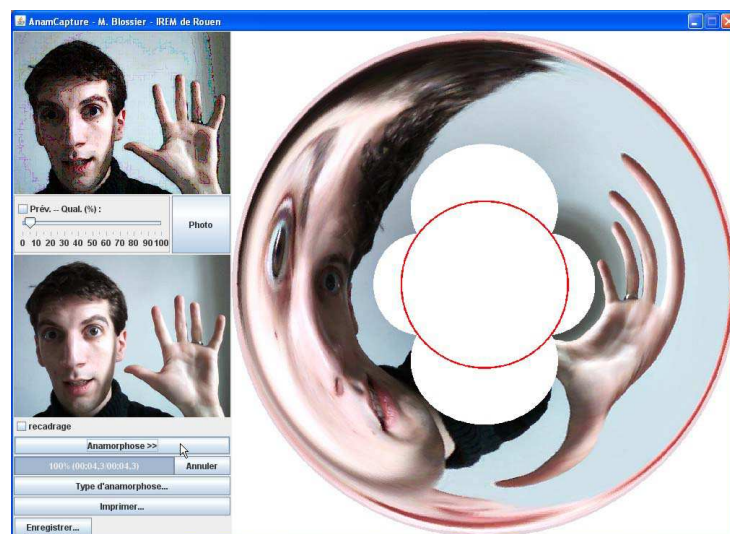


fig.78 : Anamorphose automatique avec une WebCam

Chapitre 5

AAO : Anamorphoses Assistées par Ordinateur

Dans ce chapitre, nous montrons comment la fonction de report déterminée au chapitre 3 peut être exploitée par les outils informatiques modernes.

Dans la première partie, nous proposons un logiciel pour dessiner automatiquement des anamorphoses (voir fig.76). Les élèves de première scientifique pourront insérer eux-même la fonction de report, en pratiquant quelques changements de repères (cartésiens et polaires).

Nous présentons pour terminer deux logiciels permettant l'anamorphose en un clic d'une image JPEG ou d'une photographie. Nous gageons que le lecteur saura en faire bon usage (voir fig.77 et fig.78).

Pour utiliser l'ensemble des logiciels de cette brochure, il faut installer Java sur l'ordinateur (c'est sans doute déjà le cas de celui du lecteur). La dernière version est téléchargeable sur internet (www.java.com/fr) et nous proposons le programme d'installation pour windows sur le cd-rom (`jre-6u2-windows-i586-p-s.exe` dans le dossier `/logiciels/java`).

Le lecteur trouvera :

- le logiciel de dessin interactif `AnamDConique.jar` dans le dossier `/logiciels/aao/programmes` ;
- les logiciels de traitement d'images JPEG `Anamorphose.jar` et `AnamCapture.jar` dans le dossier `/logiciels/photographie_numerique` (voir pages 59 et 62 pour plus de détails).

L'ensemble des logiciels proposés par cette brochure sont libres de droits pour une utilisation non commerciale.

I Les anamorphoses bousculent les repères

Nous présentons ici un programme, écrit en langage Java, permettant de dessiner une anamorphose conique de manière interactive : l'utilisateur dessine au centre de la fenêtre (emplacement du miroir conique) et le programme reporte le dessin point par point sur l'anamorphose (fig.76).

Ce logiciel de dessin interactif `AnamDConique.jar` se trouve sur le cd-rom dans le dossier `/logiciels/aao/programmes`.

Il s'agit donc d'utiliser une fonction de report $d \mapsto d'$ et de l'adapter à une application informatique : c'est ce travail que nous présentons maintenant, travail que nous pensons pouvoir demander à un élève de première scientifique.

1) Des changements de repère

Du repère informatique...

Lorsque l'on déplace la souris dans la fenêtre de l'application informatique, l'ordinateur retourne les coordonnées du pointeur de la souris dans le repère qui lui est lié (fig.79). Ce repère est toujours centré sur le coin supérieur gauche de la fenêtre, l'axe des abscisses est toujours orienté vers la droite et l'axe des ordonnées vers le bas. L'unité est le pixel, il s'ensuit que les coordonnées du point central sont la moitié respectivement de la largeur et de la hauteur de la fenêtre. Ces dimensions¹ sont ici de 720×720 , ainsi le centre de la figure a pour coordonnées (360;360) dans le « repère informatique ».

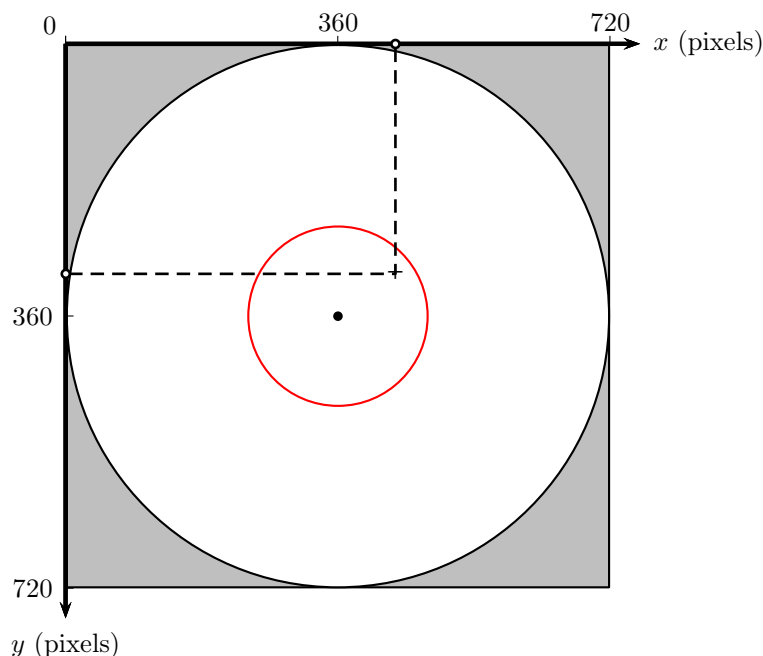


fig.79 : Repère lié à la fenêtre de l'application informatique :
coordonnées $(x; y)$ retournées par l'ordinateur

... au repère orthonormal centré...

Afin de pouvoir exploiter la formule $d \mapsto d'$ d'anamorphose, il faut se placer dans le repère orthonormal centré décrit dans la fig.80.

1. On peut les régler à des valeurs différentes comme on le verra par la suite.

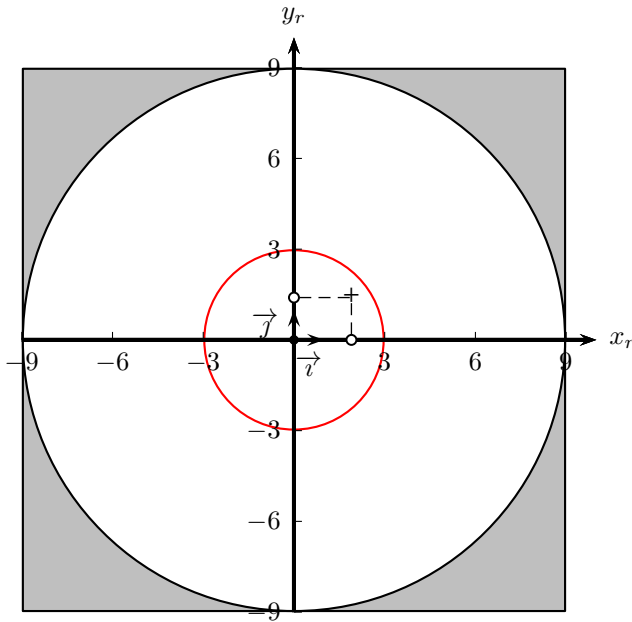


fig.80 : Repère orthonormal centré :

coordonnées $(x_r; y_r)$ exploitables pour l'anamorphose

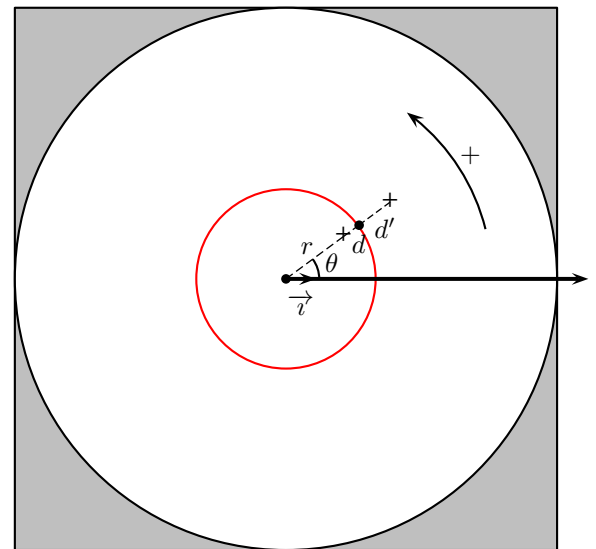


fig.81 : Repère polaire :

coordonnées $(r; \theta)$ et distances d et d'

Il vient facilement que 1 unité dans ce repère correspond à 40 pixels dans le « repère informatique », et ce pour chacun des axes. On en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x_r = \frac{x - 360}{40} \\ y_r = -\frac{y - 360}{40} \end{cases}$$

... en passant par les coordonnées polaires...

Comme on peut l'observer sur la fig.81, le repérage polaire permet très simplement de calculer d (et donc d') puisque, si les coordonnées polaires du point de la figure initiale sont $(r; \theta)$, il vient immédiatement que $d = 3 - r$. On calcule r et θ par les formules :

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_r^2 + y_r^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{x_r}{r}\right) \times \text{signe}(y_r) \quad (\text{si } r \neq 0) \end{cases}$$

... pour un retour de l'anamorphose à la fenêtre informatique

On calcule donc d' avec la formule² $d' = \frac{18d}{12-d}$ avec $d = 3 - r$. On en déduit les coordonnées polaires $(r'; \theta')$ du point d'anamorphose par les égalités $r' = 3 + d'$ et $\theta' = \theta$. D'où les coordonnées dans le repère orthonormal centré :

$$\begin{cases} x'_r = r' \cos \theta' \\ y'_r = r' \sin \theta' \end{cases}$$

2. C'est ici celle démontrée page 31, adaptée à un miroir conique de 60° au sommet et de diamètre 6.

Puis dans le repère de la fenêtre informatique

$$\begin{cases} x' = 40x'_r + 360 \\ y' = -40y'_r + 360 \end{cases}$$

Le lecteur remarquera que l'on aurait pu calculer x'_r et y'_r sans avoir recours à l'angle θ , puisqu'en utilisant le théorème de Thalès il vient que $x'_r = x_r \times \frac{r'}{r}$ et $y'_r = y_r \times \frac{r'}{r}$ (si $r \neq 0$).

2) En Java dans le texte

Le langage Java

Pour l'implémentation de ces méthodes, nous utilisons le langage Java, qui présente l'avantage d'être utilisable sur de multiples plates-formes. Le lecteur habitué à un autre langage de programmation pourra les adapter sans trop de difficulté.

« L'environnement » Java est le plus souvent déjà installé sur la plupart des ordinateurs. Pour pouvoir programmer en Java, il faut installer un « Java Development Kit » que l'on trouvera en tapant ces trois mots dans un moteur de recherche. Le cd-rom contient, dans `/logiciels/java`, le programme d'installation pour windows `jdk-6-windows-i586.exe`. Il faut également disposer d'un éditeur Java ; on s'en procurera un parmi les nombreux mis à disposition gratuitement sur internet.

Sur le cd-rom de la brochure, on trouvera dans les dossiers `/logiciels/aao/exercice` et `/logiciels/aao/correction` un certain nombre de fichiers `.class` et les deux fichiers `Exercice.java` et `Correction.java`. Les fichiers `.class` sont la partie « immergée » du programme Java, que nous avons développés pour pouvoir mettre en œuvre les formules démontrées précédemment. Les fichiers `.java` doivent être ouverts avec l'éditeur Java, qui se chargera de les compiler puis de les exécuter.

Le fichier `Correction.java` contient, comme son nom l'indique, une correction dont le lecteur pourra observer le fonctionnement.

C'est au niveau du fichier `Exercice.java` que les élèves de première scientifique entrent en piste : l'adaptation de la fonction de report à la fenêtre informatique reste à faire, par le biais de changements de repères.

Le programmeur trouvera dans le dossier `/logiciels/aao/sources` l'ensemble des fichiers sources `.java`.

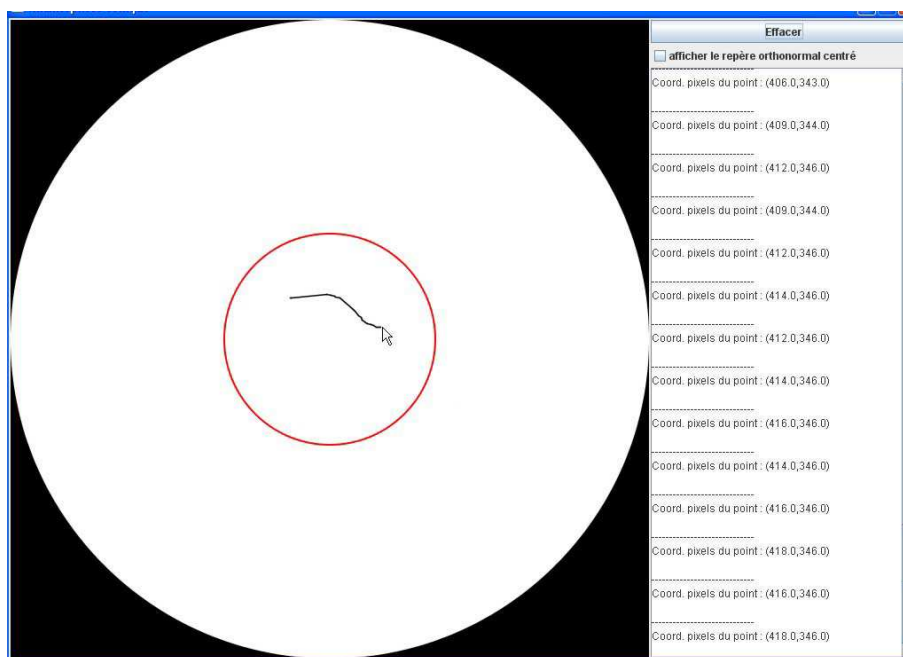
On pourra se faire une idée de la solution à différents stades en double-cliquant sur les programmes `Exercice.jar`, `Correction.jar` et `AnamDConique.jar` contenus dans le dossier `/logiciels/aao/programmes`.

La solution

Dans le fichier `Exercice.java`, juste avant la partie à modifier par les élèves, on trouve la commande

```
affiche("Coord. pixels du point : (" + x + ", " + y + ")");
```

Cette commande permet d'afficher, chaque fois que l'on clique dans le disque central de la fenêtre d'anamorphose, les coordonnées (en pixels) du pointeur de la souris, dans la partie droite de la fenêtre (fig.82). Les parties entre guillemets sont du texte, les parties `+x+` et `+y+` permettent d'y insérer les valeurs des variables `x` et `y`.

fig.82 : Utilisation de la commande `affiche("...")`

L'élève pourra utiliser cette commande chaque fois qu'il le désire pour contrôler sa solution, comme nous l'avons fait dans le fichier `Correction.java` :

```
// 1) Déterminer les coordonnées (xr,yr) du point à anamorphoser
// dans le repère orthonormal centré
float xr = (float) (x-360)/40;
float yr = (float) -(y-360)/40;
affiche("-> rep. orthon. centré : (" +xr+", "+yr+"");
```

Il peut également contrôler les coordonnées dans le repère orthonormal centré, en affichant ce repère dans la fenêtre (fig.83).

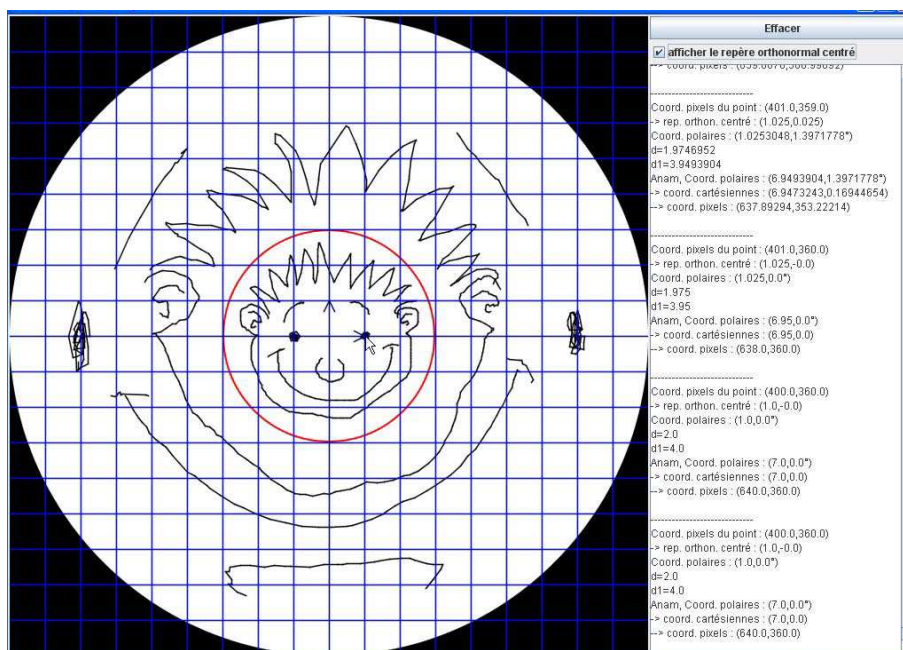


fig.83 : Utilisation du repère orthonormal centré

Comme beaucoup de langages de programmation, Java utilise le symbole = pour l'affectation d'une valeur à une variable. La syntaxe `float xr = ...` permet donc de créer une nouvelle variable de type `float`³ et de lui affecter la valeur retournée par le calcul à droite du symbole =. La syntaxe `(float)` permet de forcer Java à faire le calcul avec des nombres décimaux (sans quoi il risque de faire une division avec des entiers). Ajoutons les fonctions mathématiques fournies par Java :

```
Math.sqrt(valeur)
```

qui renvoie la racine carrée de la variable `valeur` ;

```
Math.acos(valeur)
```

qui renvoie l'arccos de la variable `valeur` ;

```
Math.PI
```

qui renvoie une valeur décimale du nombre π ;

```
Math.cos(valeur)
```

```
Math.sin(valeur)
```

qui renvoient le cosinus et le sinus de la variable `valeur`.

Nous n'avons pas testé nous-même cet « exercice » auprès d'un groupe d'élèves de première scientifique, mais nous pensons que les quelques spécificités du langage Java leur sont accessibles, et que la démarche que nous présentons est un bon moyen de mettre en perspective la notion de changement de repère.

Dessin point par point

Un dernier mot sur la méthode de dessin utilisée : avec le programme `Correction.jar`, lorsque l'utilisateur glisse la souris dans le disque central, le programme dessine point par point sous le pointeur de la souris, ainsi que l'anamorphose correspondante. Comment fait-il pour relier deux points ? Il trace un segment (comme le fait une calculatrice sur son écran graphique). On s'indignera avec raison, car lorsqu'on déplace rapidement la souris, l'anamorphose obtenue est pour le moins approximative. Nous avons donc ajouté pour cela une « interpolation », c'est-à-dire qu'au lieu de tracer un segment entre deux points de l'anamorphose, le programme trace autant de points que nécessaire pour « lisser » l'anamorphose. Pour bien comprendre cela, le lecteur pourra comparer les fig.84 et fig.85. Il pourra également observer le comportement de `Correction.java` en remplaçant, à la fin du fichier :

```
jc.setInterpole(false);
```

par :

```
jc.setInterpole(true);
```

Il obtiendra alors le même comportement que le programme `AnamDConique.jar`.

3. Pour faire simple, il s'agit d'un nombre décimal.

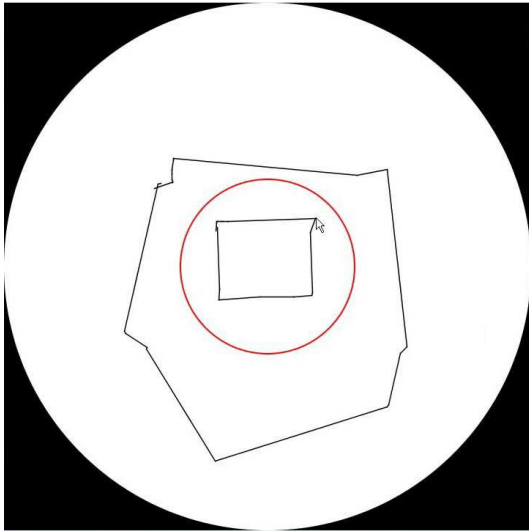


fig.84 : Dessin d'anamorphose sans interpolation

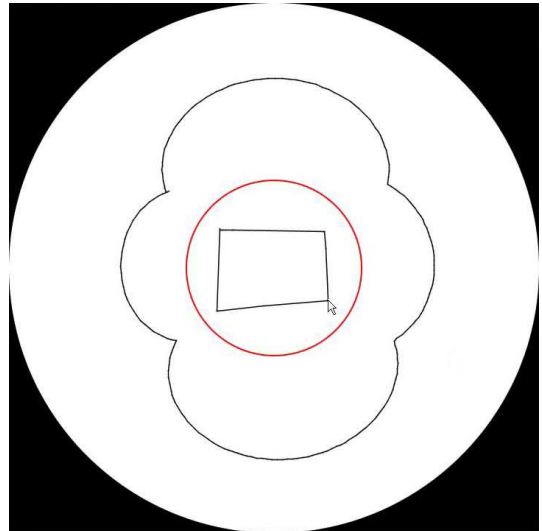


fig.85 : Dessin d'anamorphose avec interpolation

Taille de l'anamorphose

Nous avons fixé, comme nous l'avons dit plus haut, la taille de l'anamorphose à 720×720 pixels. On peut modifier cette valeur sur dans les fichiers `Exercice.java` et `Correction.java` :

```
AnamPDessin jc = new AnamPDessin(new Exercice(),720);
```

L'anamorphose conique s'inscrit naturellement dans un carré ; le côté de mesure 720 pixels a été choisi pour que l'unité dans le repère orthonormal corresponde à une valeur entière (ici 40 pixels).

II Photographie numérique

Nous concluons en présentant ici un logiciel permettant de créer par ordinateur l'anamorphose d'une photographie numérique, plus précisément d'une image JPEG ou d'une image prise par une WebCam. Nous nous servons nous-même de ces programmes auprès des élèves, en fin de séquence, pour anamorphoser leur propre visage.

1) Images JPEG

Le lecteur trouvera sur le cd-rom, dans le dossier `/logiciels/photographie_numerique`, le logiciel `Anamorphose.jar`. Il se lance en double-cliquant dessus ; si cela ne fonctionne pas, il faut installer la dernière version de Java sur l'ordinateur (on trouvera dans `/logiciels/java` le programme d'installation pour windows `jre-6u2-windows-i586-p-s.exe`). On voit alors apparaître la fenêtre présentée en fig.86.

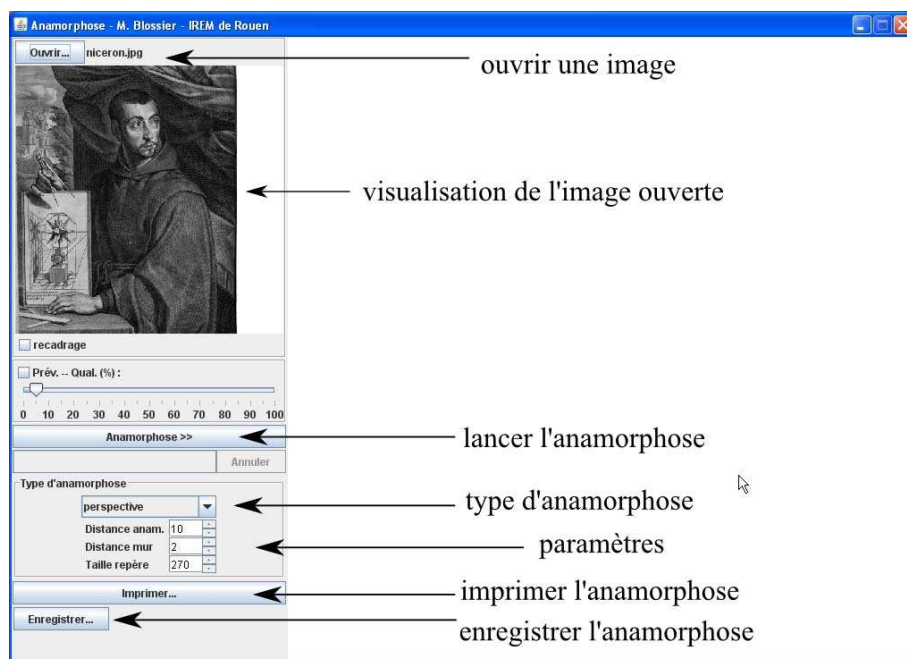


fig.86 : Logiciel « Anamorphose »

Le logiciel peut être copié à n'importe quel endroit, à condition d'être accompagné des fichiers `anamConfig.txt` (fichier de configuration) et `niceron.jpg` (image ouverte au lancement).

Première anamorphose

Nous allons maintenant créer l'anamorphose conique de `niceron.jpg` (le lecteur peut changer d'image en cliquant sur « Ouvrir... »). Pour cela, on change le type d'anamorphose pour « miroir conique » (fig.86), et on clique sur le bouton « Anamorphose » : le tour est joué !

Le lecteur pourra observer l'effet des différents paramètres⁴ (« Angle cône », « Hauteur œil », « Traiter les coins ») sur l'anamorphose. Le paramètre « Diamètre cône » permet de spécifier, en millimètres, le diamètre de la base du miroir conique, de sorte que, lorsqu'on l'imprime, l'anamorphose aura la dimension adéquate (bouton « Imprimer... »). On peut enfin enregistrer l'anamorphose au format JPEG.

Comment ça marche ?

Le logiciel utilise la fonction d'anamorphose $d \mapsto d'$ pour créer l'anamorphose : chaque pixel de la figure initiale est considéré comme un carré, dont les quatres sommets sont transformés par anamorphose pour obtenir un quadrilatère⁵. On affiche ce quadrilatère dans l'anamorphose avec la couleur du pixel de départ (fig.87).

4. Se reporter à l'annexe D page 86 pour une description complète.

5. Le quadrilatère n'est, en général, bien entendu qu'une approximation de l'anamorphose du carré initial.

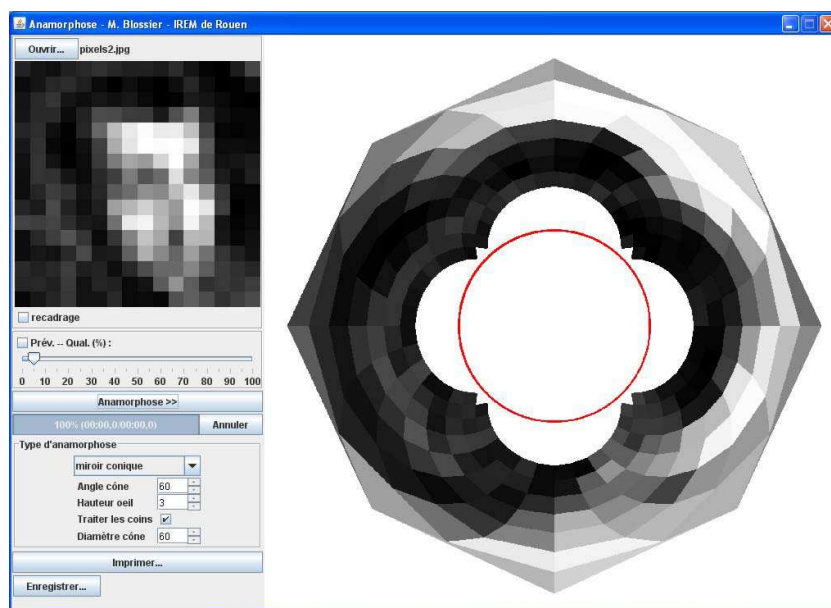


fig.87 : Illustration de l'anamorphose « pixel par pixel »

Autres anamorphoses

Le logiciel permet également de créer deux autres types d'anamorphoses : perspective (fig.88) et cylindrique (fig.89).

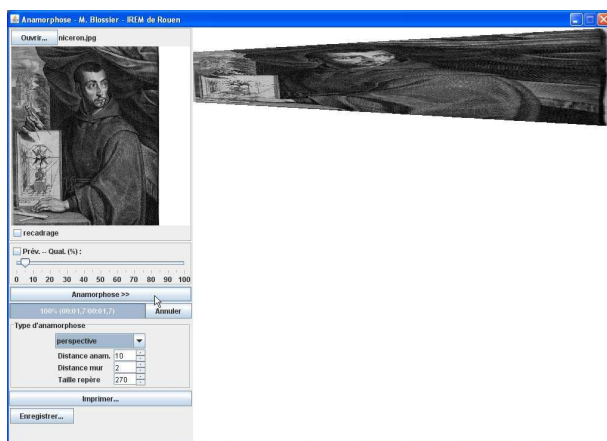


fig.88 : Anamorphose perspective

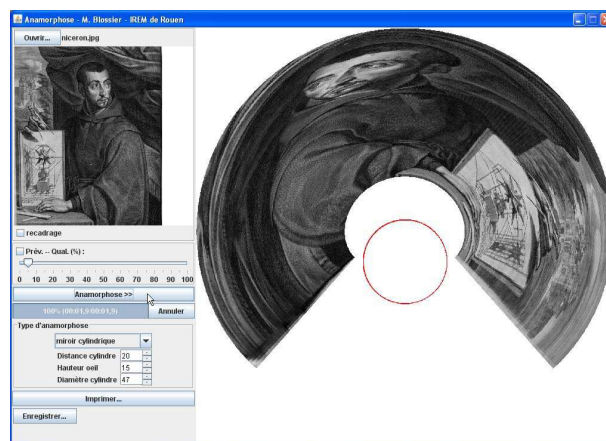


fig.89 : Anamorphose cylindrique

Prévisualisation et recadrage

La création d'une anamorphose pouvant être longue, le logiciel en permet une prévisualisation de moindre qualité, en cochant la case « Prév.-Qual(%) : » (fig.90). De plus, on peut choisir de recadrer sur un détail de la figure l'anamorphose à produire en cochant la case « recadrage » (fig.91).

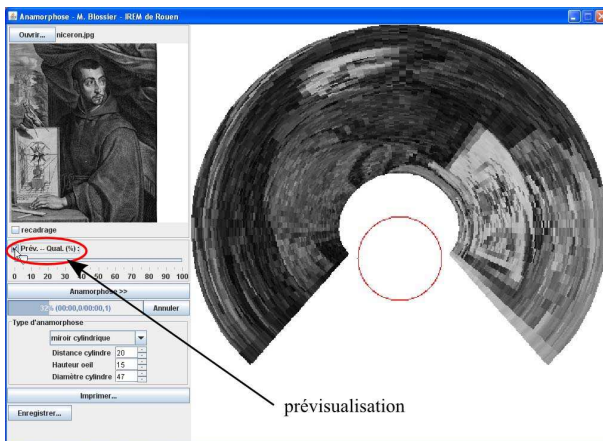


fig.90 : Utilisation de la prévisualisation

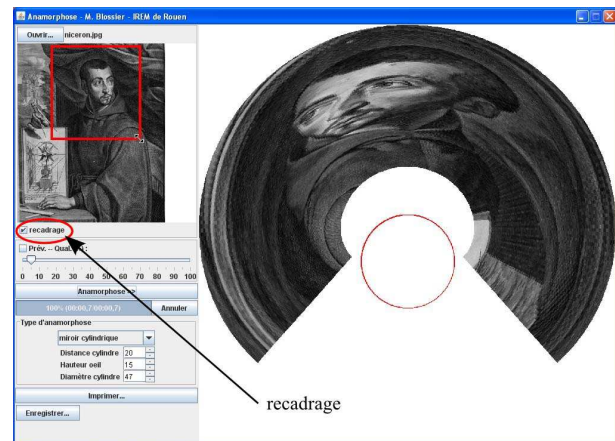


fig.91 : Recadrage

2) Utilisation d'une WebCam

On peut également utiliser directement une image capturée à l'aide d'une WebCam, avec le logiciel **AnamCapture.jar** (dossier /logiciels/photographie_numerique). Pour pouvoir l'exécuter, il faut installer « Java Media Framework », une API Java permettant l'usage des WebCam (on trouvera le programme d'installation pour windows **jmf-2_1_1e-windows-i586.exe** dans /logiciels/java).

Ce deuxième logiciel peut être copié à n'importe quel endroit, à condition d'être accompagné des fichiers **anamConfig.txt** (fichier de configuration) et **jmf.jar** (API Java Media Framework).

Si l'ordinateur est correctement installé, le lancement du logiciel fait apparaître la fenêtre reproduite en fig.92. Il faut choisir à ce moment la résolution dans laquelle l'image de la WebCam sera capturée (plus la résolution est fine, meilleure sera la qualité de l'anamorphose).

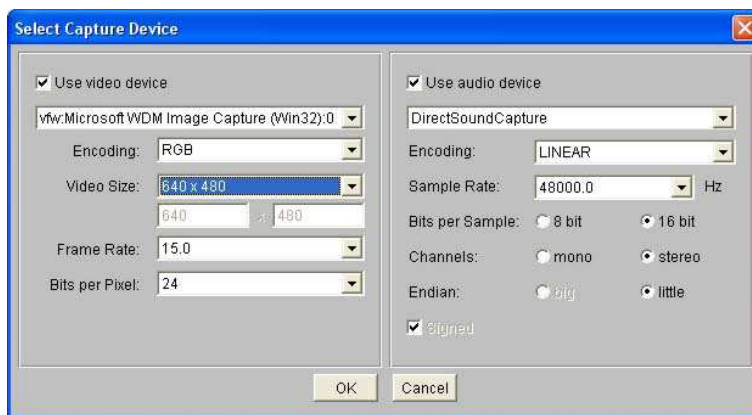


fig.92 : Choix de la résolution de la WebCam



fig.93 : Choix du type d'anamorphose

Une fois la résolution choisie, une fenêtre analogue à celle du logiciel précédent apparaît (fig.78 en tête de chapitre). Il suffit de cliquer d'abord sur « Photo » pour capturer une image, puis sur « Anamorphose » pour créer l'anamorphose de cette figure. On peut à nouveau prévisualiser, recadrer, imprimer et enregistrer. Le choix du type d'anamorphose se fait à partir d'une fenêtre qui apparaît en cliquant sur le bouton « Type d'anamorphose... » (fig.93).

Nous utilisons ce dernier logiciel en classe à la fin du travail sur les anamorphoses. Les élèves se placent devant la caméra deux par deux, et repartent avec l'anamorphose de leur photo...

Annexe A

Grilles d'anamorphose conique

Nous reproduisons ici différentes grilles proposées à nos élèves : différents chapeaux, pages 64 à 66 ; une vache et différents bonshommes¹ pages 67 à 70 ; enfin une grille vierge pour les plus imaginatifs, page 71.

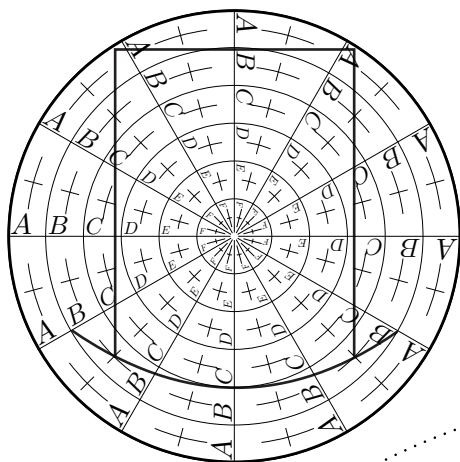
Les grilles présentant les chapeaux ont été expérimentées en seconde, en demi-groupe : soit pendant une demi-heure, puis à terminer à la maison, soit pendant une heure, avec la consigne supplémentaire d'ajouter un « motif » sur le dessin et de l'anamorphoser. Les élèves disposent en classe de miroirs pour vérifier leur travail.

Les autres grilles sont proposées en devoir facultatif à la maison ; elles sont réalisées à l'aide de la règle de report.

1. Inspirés des personnages créés par Roger Hargreaves.

Grille pour une anamorphose conique - Nom :

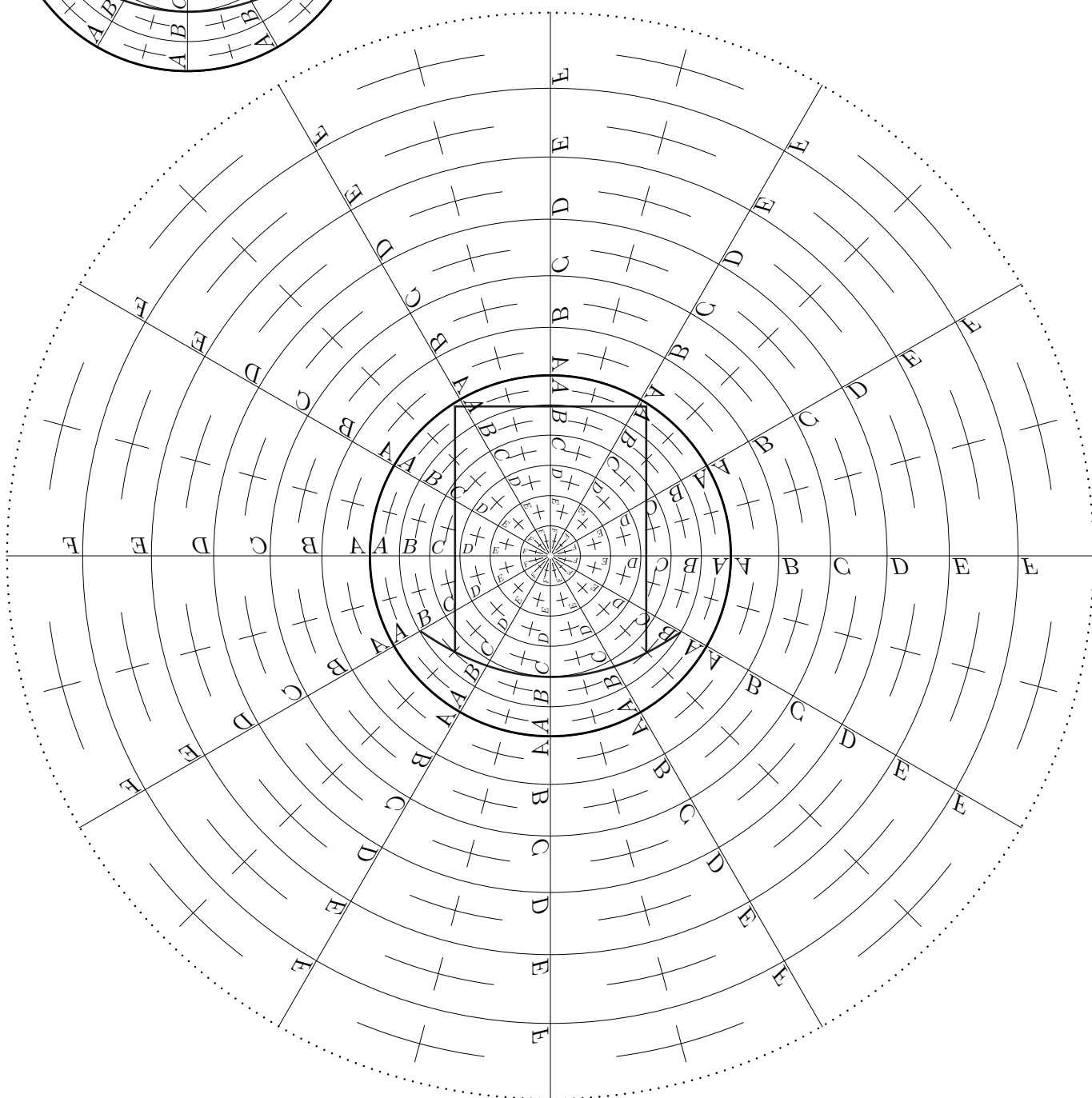
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique du chapeau tracé au centre et reporté ci-contre.

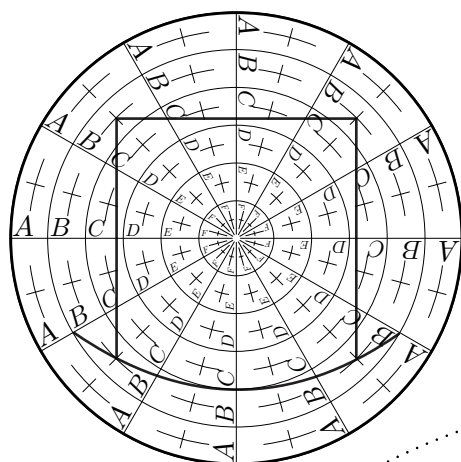
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, le chapeau dessiné au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier le chapeau au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

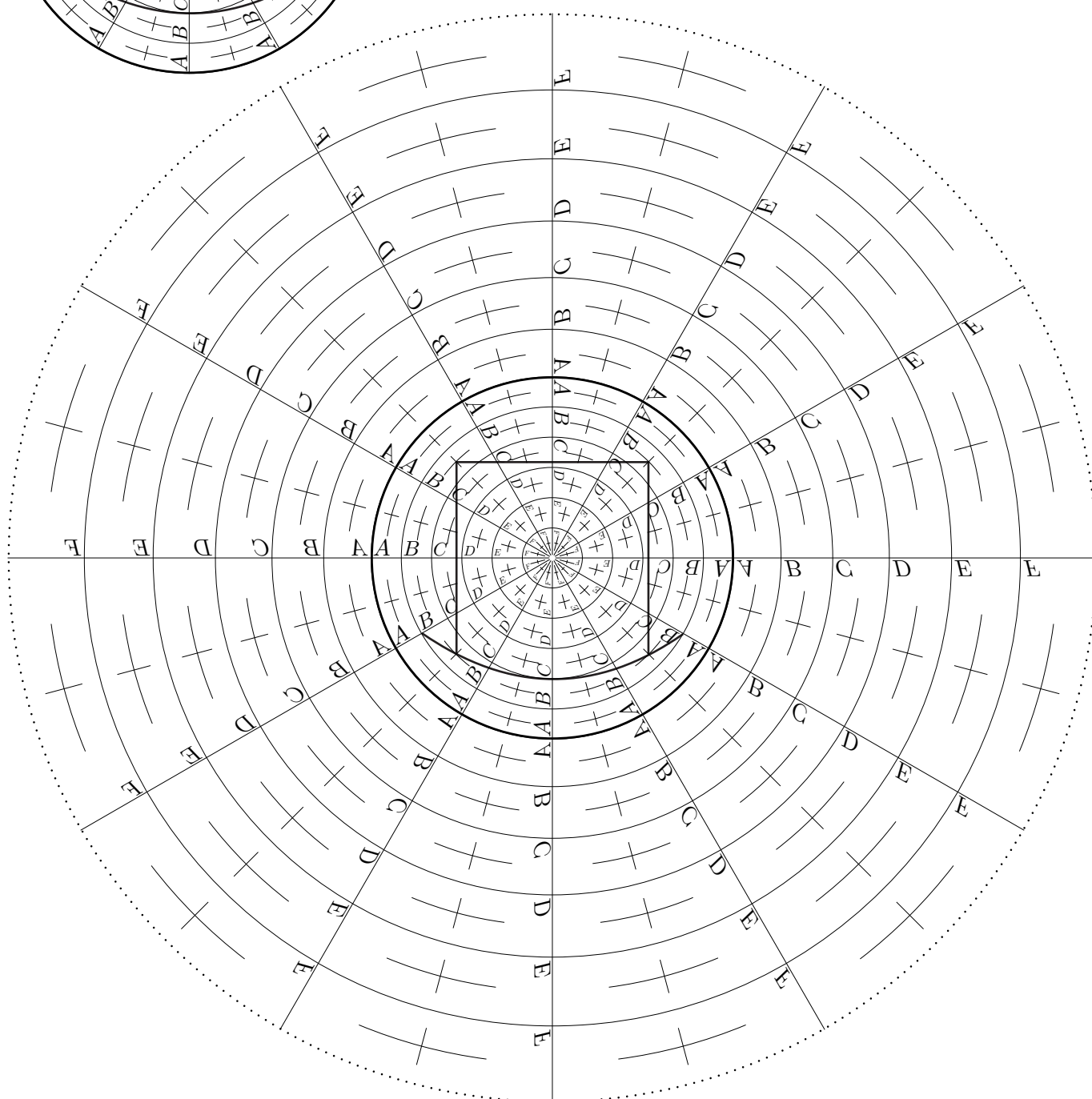
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique du chapeau tracé au centre et reporté ci-contre.

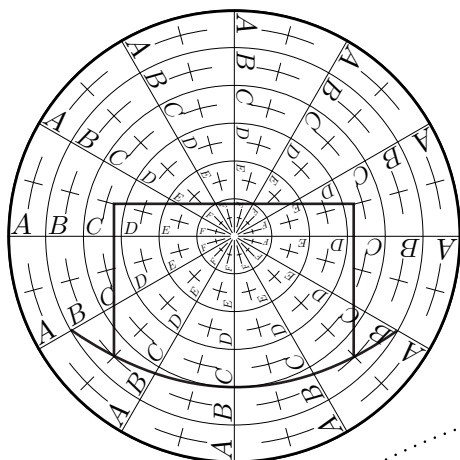
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, le chapeau dessiné au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier le chapeau au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

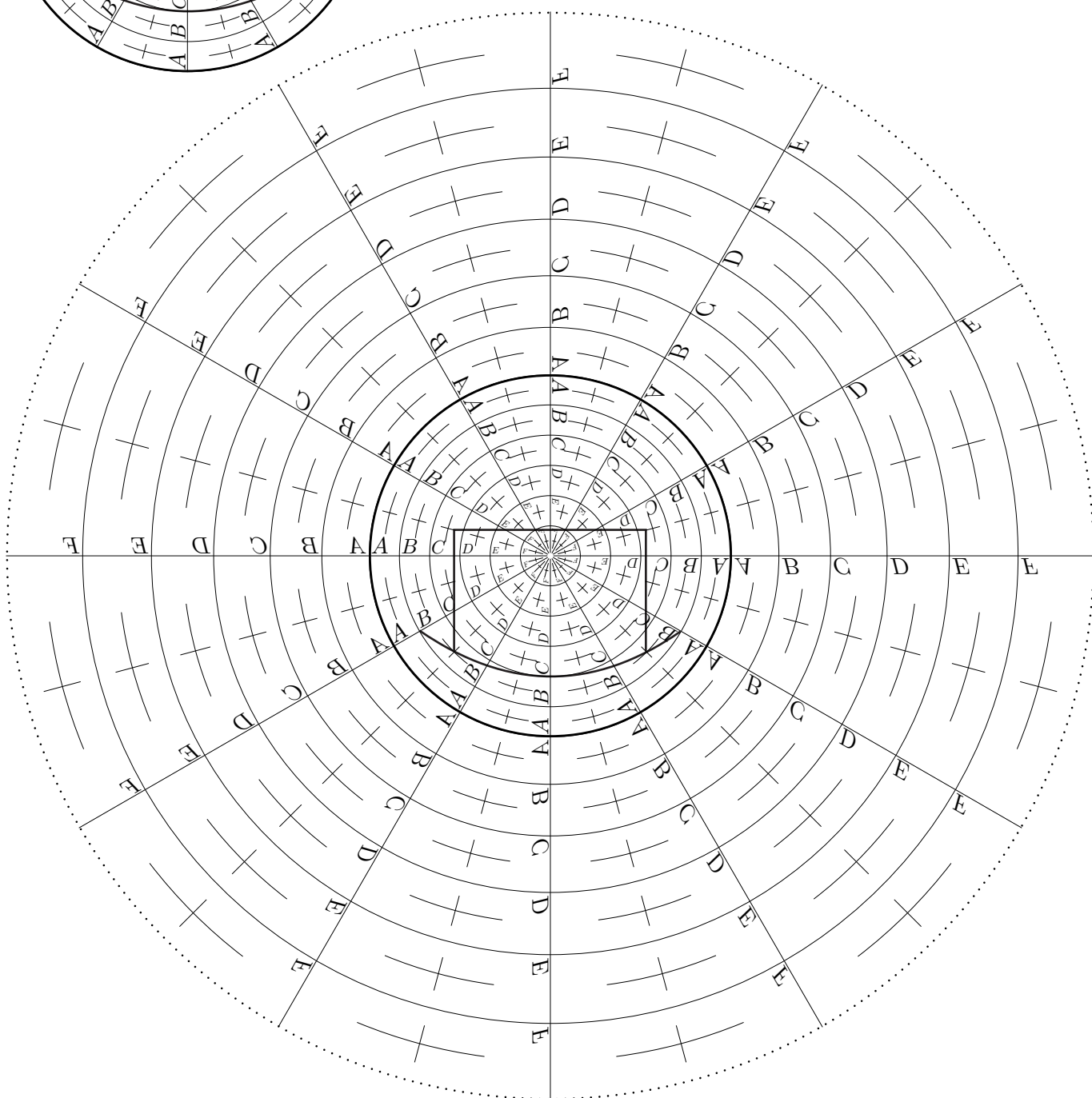
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique du chapeau tracé au centre et reporté ci-contre.

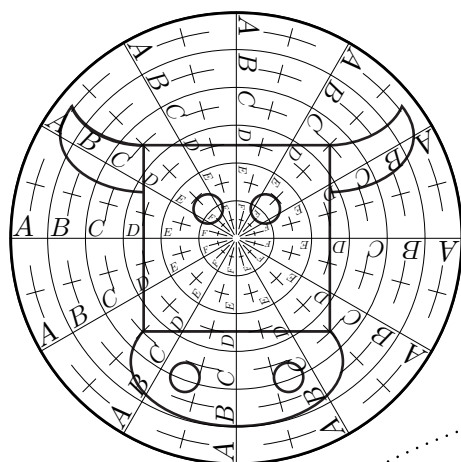
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, le chapeau dessiné au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier le chapeau au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

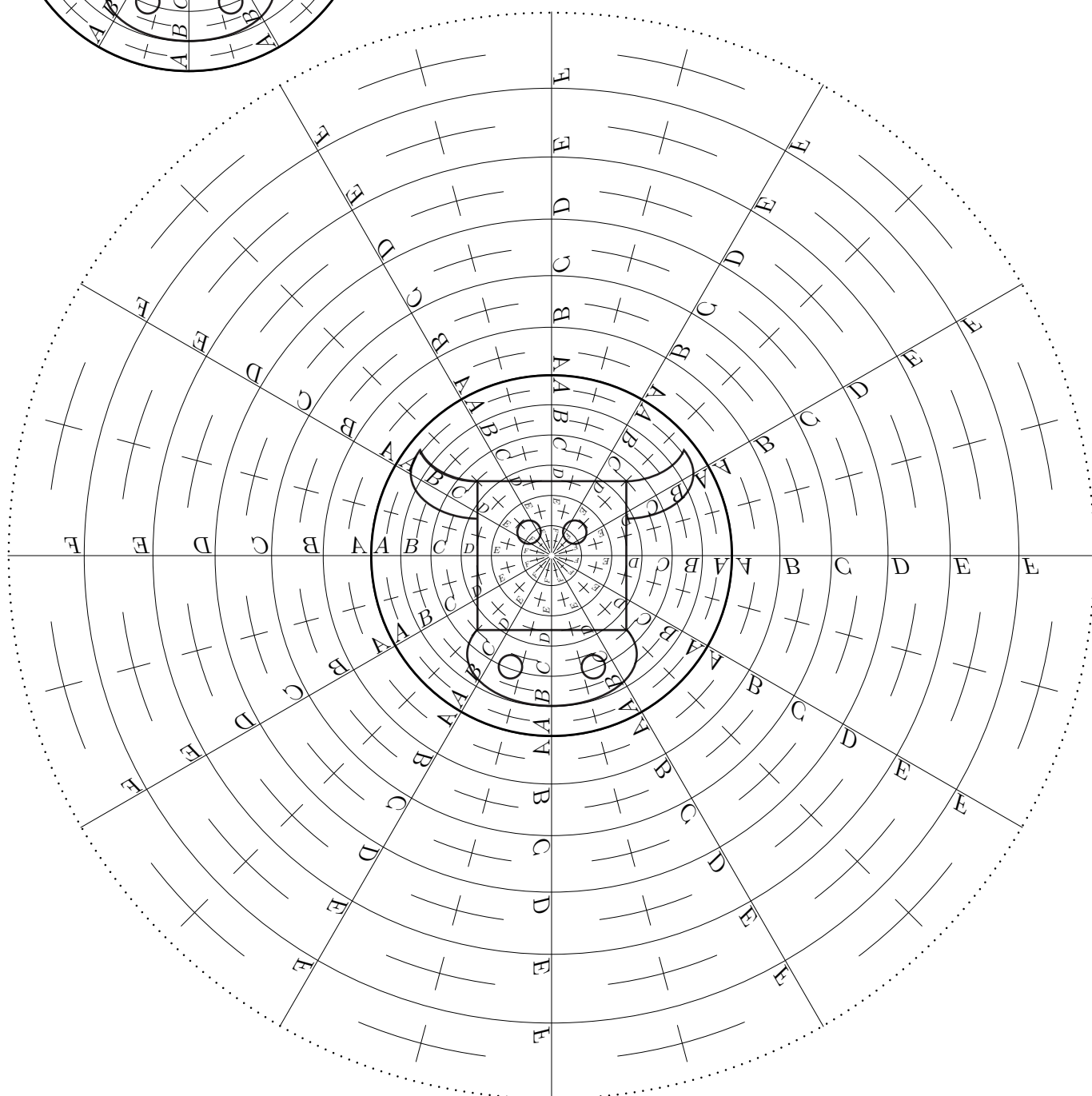
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique de la figure tracée au centre et reportée ci-contre.

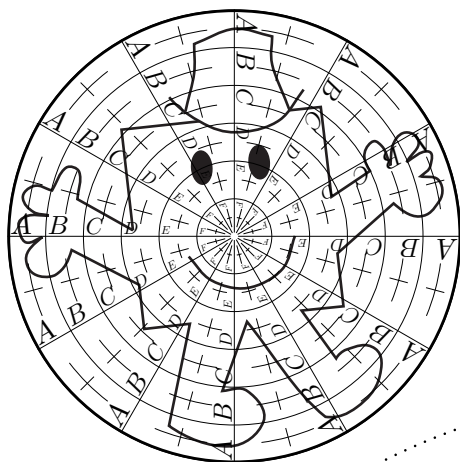
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, la figure dessinée au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier la figure au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

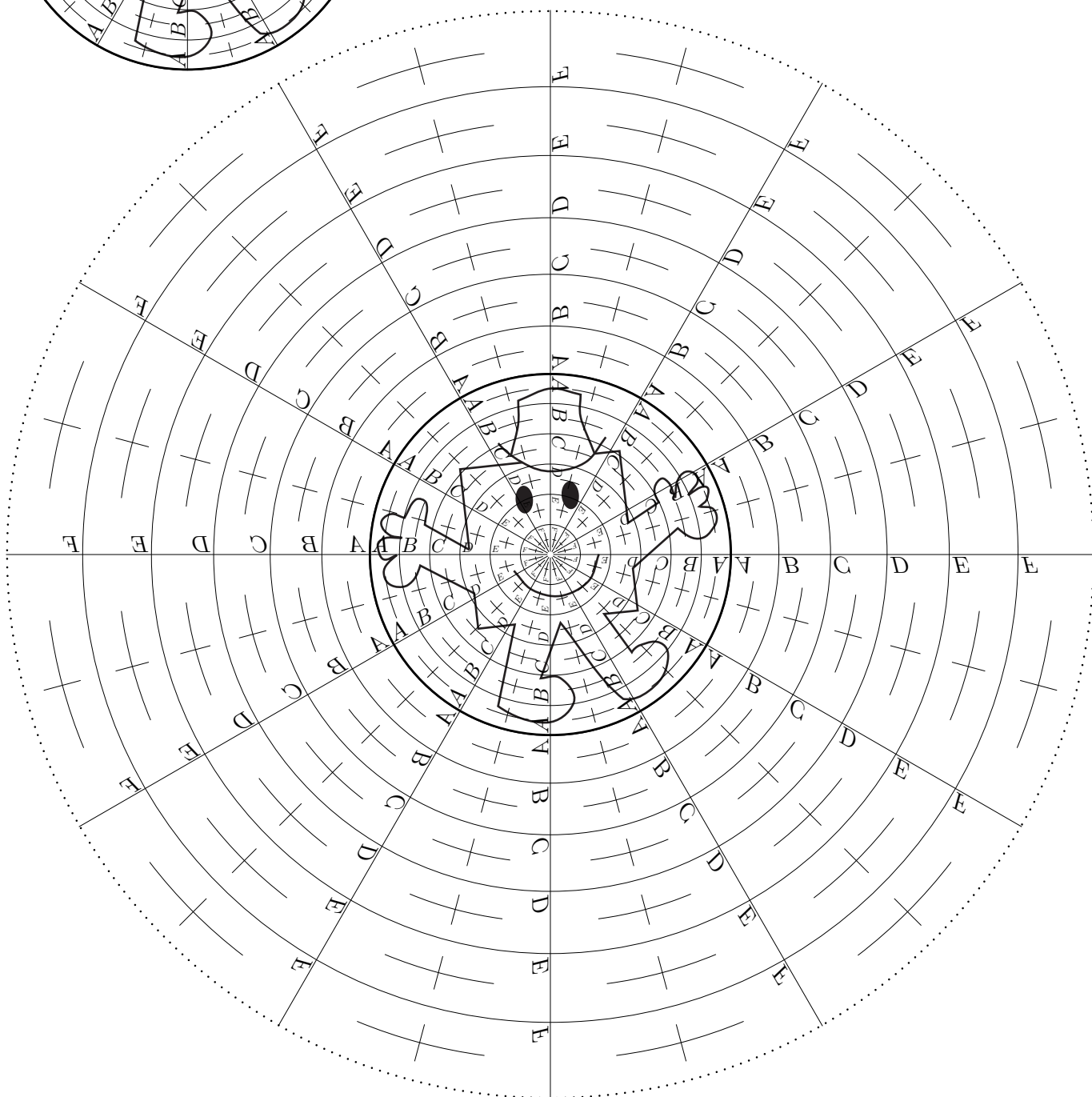
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique de la figure tracée au centre et reportée ci-contre.

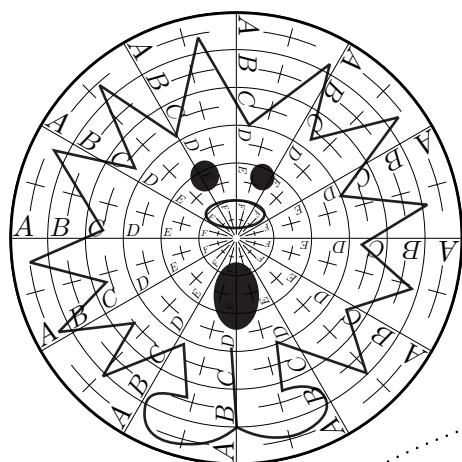
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, la figure dessinée au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier la figure au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

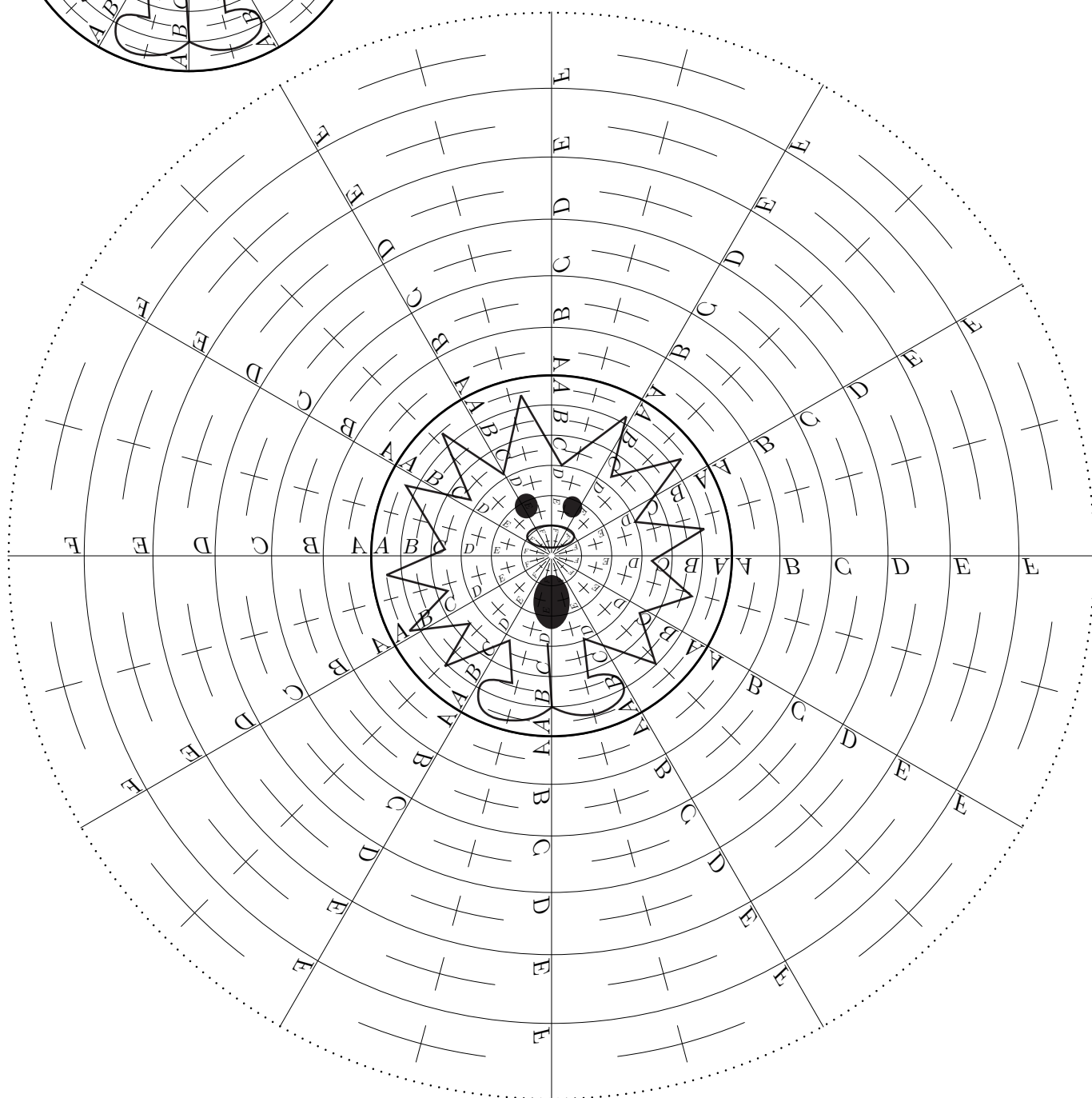
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique de la figure tracée au centre et reportée ci-contre.

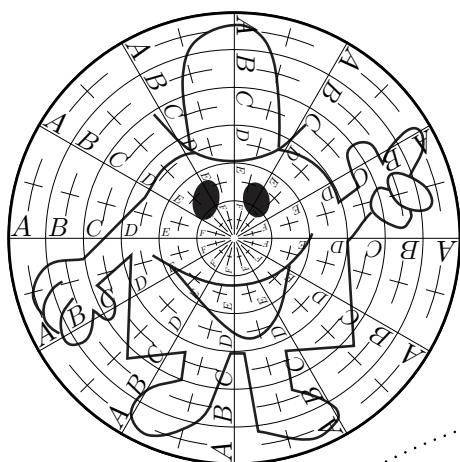
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, la figure dessinée au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier la figure au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

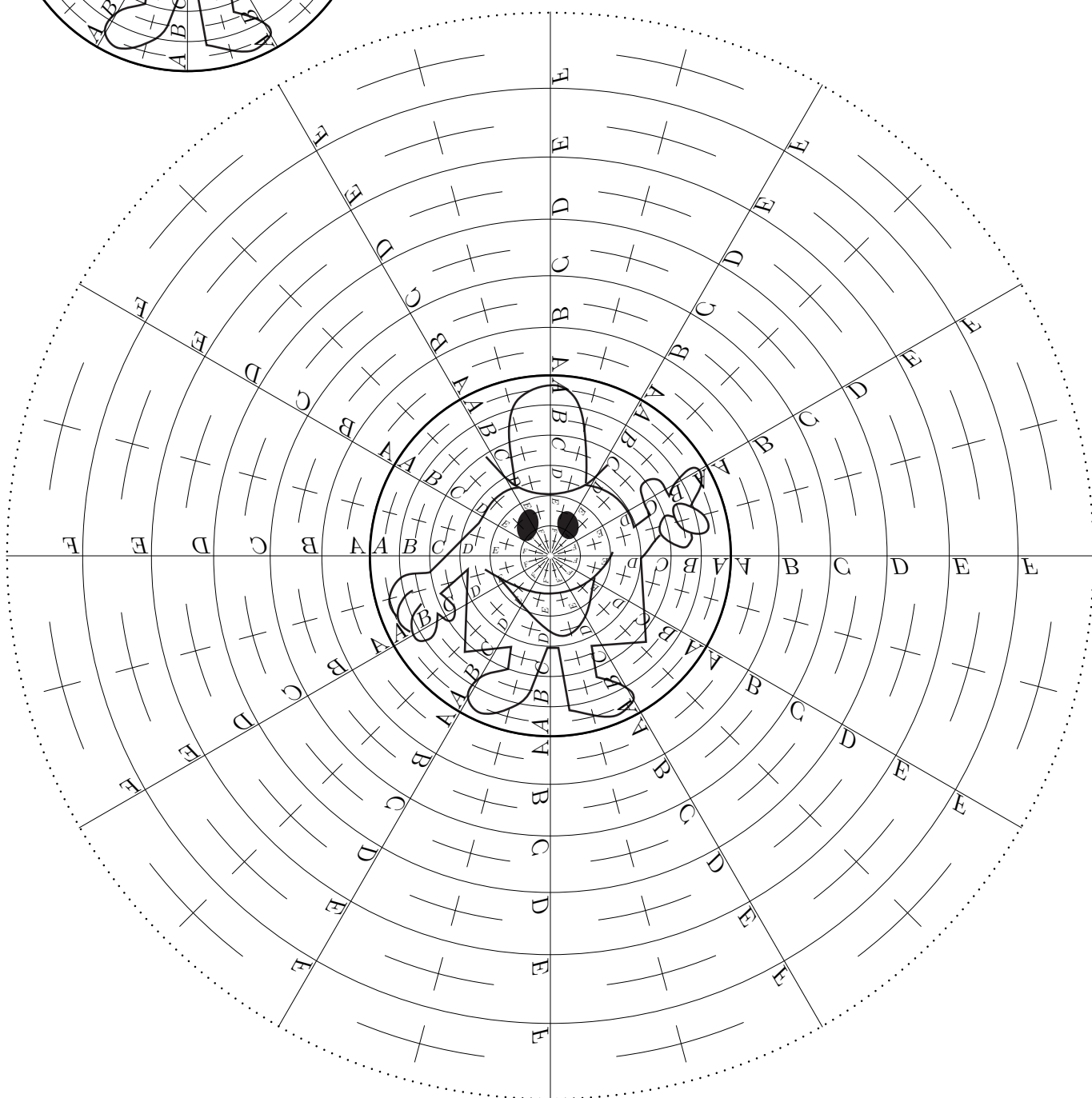
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique de la figure tracée au centre et reportée ci-contre.

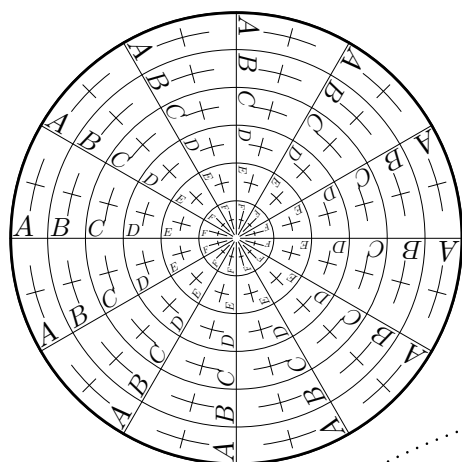
Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, la figure dessinée au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier la figure au centre, puis colorier l'anamorphose.



Grille pour une anamorphose conique - Nom :

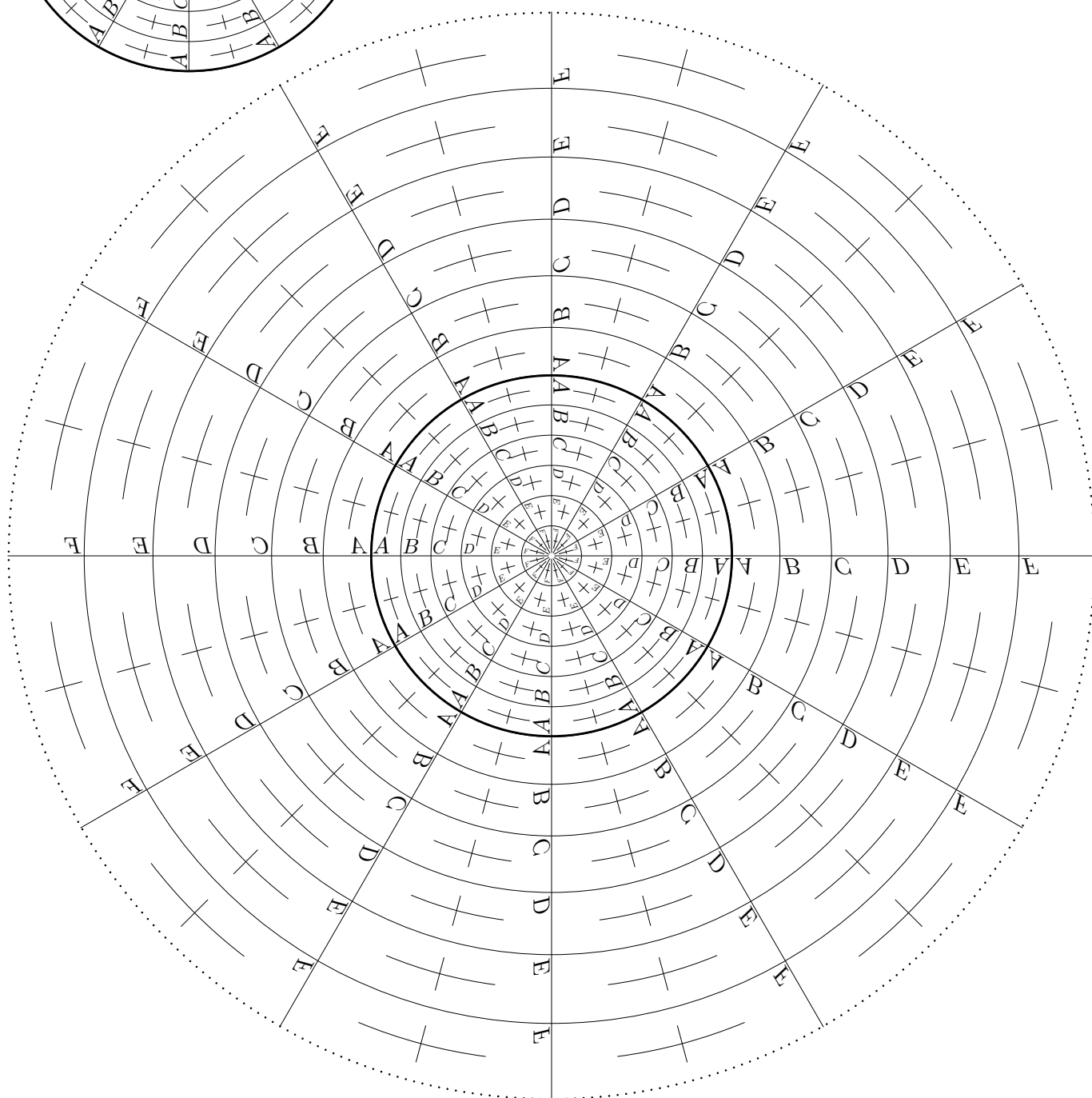
Prénom :



A l'aide de la grille ci-dessous, on veut créer l'anamorphose conique de la figure tracée au centre et reportée ci-contre.

Attention ! Une ligne droite ne se transforme pas toujours en une autre ligne droite...

- 1) Reporter au crayon à papier, point par point, la figure dessinée au centre, à l'aide de la grille.
- 2) Vérifier l'anamorphose à l'aide du miroir puis la repasser au feutre épais.
- 3) Colorier la figure au centre, puis colorier l'anamorphose.



Annexe B

Extraits de La Perspective Curieuse

Nous reproduisons ci-après la proposition V du livre III de *La Perspective Curieuse* de Jean-François Nicéron [NIC63], à partir d'une numérisation d'un exemplaire publié en 1663, conservé au Centre d'Études Supérieures de la Renaissance (Tours). Avec l'aimable autorisation des Bibliothèques Virtuelles Humanistes © Centre d'Études Supérieures de la Renaissance, Tours (www.bvh.univ-tours.fr).

PROPOSITION V.

Estant donné vn miroir conique conuexe sur vn plan parallele à sa base, le point de veüe estant en la ligne de l'axe, laquelle soit perpendiculaire au mesme plan, esloigné du mesme plan & de la pointe du miroir d'une distance proposée : decrire sur ce plan autour du miroir vne figure, laquelle quoy que difforme & confuse en apparence, estant veüe de son point par reflexion dans le miroir, pareisse bien proportionnée & semblable à quelque obiet proposé.

LE sieur Vaulezard explique au 12 probleme de sa Perspective cylindrique, vne methode tres-exacte, laquelle ie rends icy plus familiere pour les Praticiens.

Et pour ce suiet ie mets vn exemple de la reduction des obiets ou figures proposées, qui seruira pour en faciliter l'vsage & la pratique, qui est plus difficile qu'on ne s'imagine quand on ne l'a pas expérimenté. J'ajouteray encore pour Corollaire vne inuention gentille tirée de cette proposition, pour dresser vne figure, dont vne partie soit veüe directement & de front; vne autre directement & de costé, & la troiefme par reflexion, avec quelques-aütres pensées nouuelles sur ce suiet.

Il faut donc premierement diuiser l'image ou l'objet proposé par le moyen d'une figure semblable à la soixantiefme de la 46 planche, en l'enfermant dans vn cercle tel qu'est B C D E F G, qui sera diuisé par plusieurs diametres s'entrecoupans au centre A en six ou huit triangles égaux: Nous l'auons icy diuisé en six par les trois diametres B E, C F, D G; de plus quelqu'un des demy-diametres, comme A B, sera aussi diuisé en six parties egales, ou davantage, si on le trouue plus commode; & du centre A, par les points de cette diuision seront faits cinq cercles concentriques avec le premier B C D E F G, lesquels, avec les diametres qu'ils couperont en quelques endroits, formeront plusieurs quadrangles; & quelques triangles qui diuiseront l'image comme il est requis.

Il faut encore tracer sur le plan proposé autour du miroir vne figure, laquelle quoy que differente de cette-cy, luy pareisse neantmoins semblable estant veüe par reflexion dans ce miroir, d'un point déterminé en la ligne de son axe, afin que les figures ou images reduites proportionnellement de l'une en l'autre pareissent aussi semblables, chacune estant veüe en sa façon.

Soit donc, en la soixante-vniefme figure, tirée la ligne N Z aussi longue qu'il sera necessaire, & au milieu d'icelle soit marqué le diametre de la base du cone, que nous supposons estre A C, sur laquelle ligne A C sera esleué le triangle A B C égal & semblable à celuy que formeroit le diametre de la base, & les deux costez du cone s'il estoit

de la Perspective Curieuse. 169

estoit coupé par quelque plan passant par son axe; de sorte qu'AB, & BC, représentent les deux costez du cone, comme AC represente le diametre de sa base, laquelle est exprimée par le cercle ATXC, que nous supposons entier, aussi bien que les autres, encore que nous n'en ayons marqué que la moitié pour ne point embrouiller la construction. Or la circonference de ce cercle de la base sera diuisée en six parties égales, aussi bien que le cercle BCDEFG de la soixantiesme, comme la moitié ATXC est diuisée en trois arcs, ou espaces égaux AT, TX, XC; & du centre D, par tous les points de cette diuision seront tirées des lignes droites à l'infiny DN, DV, DY, DZ, lesquelles exprimeront & représenteront au miroir des diametres semblables à ceux qui diuiseroient la base en 6 parties égales, comme BE, CF, DG, en la soixantiesme figure, en quelque distance que soit l'œil de la pointe du miroir B, pourueu qu'il ne soit pas hors la ligne de l'axe DE.

Mais pour trouuer les proportions qui doiuent estre gardées pour les espaces compris des cercles depuis A iusques à N, afin qu'ils paraissent au miroir égaux entr'eux, & semblables à ceux de la soixantiesme figure, soit diuisé le demy-diametre de la base AD en autant de parties égales comme AB de la soixantiesme figure, à sçauoir en 6, és points HIKLMD, & de tous ces points soient tirées des lignes droites ocultes au point E; HE, IE, KE, LE, ME, DE, qui seront les incidentes, couperont la ligne AB, qui est le costé du cone proposé: HE, en 1: IE, en 2: LE, en 4: ME, en 5: DE, en 6. Or pour trouuer les reflexions de ces incidentes, il faut sçauoir la distance du point de l'œil, c'est à dire combien'il est esleué sur le plan où est descrite la figure; ou de la pointe du miroir qui nous est représentée en B, & le suposant esleué sur le plan de la distance DE, & sur la pointe du miroir de la distance BE, soit mise l'vne des iambes du compas au point B, duquel comme centre, & de l'interualle BE, soit descrit l'arc de cercle EFG, qui conpela ligne du costé du cone AB prolongée iusques en F; & soit fait FG égal à FE; puis du point G, par tous les points des intersections du costé du cone, & des incidentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, soient tirées des lignes droites ocultes, lesquelles venant à tomber obliquement sur la ligne AN marqueront les points SRQPON, par lesquels doiuent passer les cercles tirez du centre D, qui représenteront au miroir ceux de la soixantiesme figure, & les espaces compris d'iceux égaux & semblables, pourueu que l'œil soit en la ligne de l'axe esleué par dessus la pointe du miroir, de la distance BF.

Ayant ainsi tracé la figure entiere, comme nous auons fait la moitié NVYZ, la reduction de l'image se fera de sorte que ce qui est au plan naturel en la soixante-deuxiesme figure de la 47, plan-

Y

170

Liure troisieme

che plus proche du centre, en soit le plus esloigné à proportion en la soixante-troisieme; ce qui la rendra extremement difforme, d'autant que les mesmes parties de l'obiet qui seront les plus reserrées en la soixante-deuxieme, seront les plus estendues en celle-cy: par exemple, ce qui est en la soixante-deuxieme, compris es six petits triangles qui sont au centre, se trouue deuoir estre reduit en la soixante-troisieme es six quadrangles *a1, a2, a3, a4, a5, a6*; l'on peut encore recognoistre que ce qui est en la soixante-deuxieme au quadrangle *BHIC*, est reduit en la soixante-troisieme au quadrangle marqué de mesmes caracteres *bhic*; & ce qui est compris en *HLMI*, est reduit en *hlmi*, & ainsi du reste.

Le trait del'image estant acheué, comme il se voit en la stampe, on y peut aiouster le coloris, & les ombres, pour auoir vne figure parfaite & disposée à produire vn beleffet en vn miroir conique de la grandeur determinée, qui sera mis au cercle *bcdefg*.

Que si quelqu'un en veut faire l'essay sur l'exemple mesme, en le peignant de coloris; ou qu'il se veuille seruir du trait des lignes ponctuées pour y reduire d'autres figures semblables en la façon que j'ay dit, sans qu'il ait la peine de faire faire le modele de ce miroir, il en trouuera de cette mesme grandeur, & sur ce modele, comme aussi des cylindres semblables à celui dont ie me fers chez les heritiers de feu le Seigneur au fauxbourg S. Germain, car ie luy ay donné les modelles de l'un & de l'autre, & ie l'ay connu l'un des meilleurs ouuriers de Paris pour faire de ces miroirs de métal de toutes sortes.

Pour le point de veüe; bien qu'il doie estre fort exactement placé, à raison que ce qui est au limbe exterior du plus grand cercle en la construction doit estre veu iustement à la pointe du cone, ce qui pourroit varier aisément: toutes fois il faut principalement prendre garde à l'establir iustement en la ligne de l'axe perpendiculaire au plan où est descrite la figure de sorte qu'il ne soit hors cetteligne ny d'un costé ny d'autre; ce qu'on pourra faire par le moyé d'une regle percée au milieu d'un petit trou & mise en trauers & soustenuë par deux petits puiots plantez aux deux costez de la figure: car hausser ou baisser vn peu plus ce point de veüe pourueu qu'il soit tousiours en la ligne de l'axe ne cause pas grand' erreur: & mesme il sera quelquesfois à propos de hausser l'œil par dessus l'obiet vn peu plus qu'il n'est prescrit en la construction, veu que pour l'ordinaire il faudra mettre ces figures à terre au bas de quelque fenestre, afin que le grand iour se rompe, & ne tombe pas si viuent sur le costé du cone, comme il fait estant mis sur vne table à niueau d'une fenestre; ce qui est cause que la partie del'image qui se reflechit en ce costé, ne se void pas si bien, à cause de la trop grande incidence de lumiere qui affoiblit les especes du miroir: on peut

de la Perspective Curieuse 171

neanmoins y remedier en moderant cette lumiere par l'interposition d'une feuille de papier blanc, & bien delié qu'on dressera entre le passage de la lumiere & l'objet; ce qui fera voir la figure & le miroir également esclairez par tout.

C O R O L L A I R E.

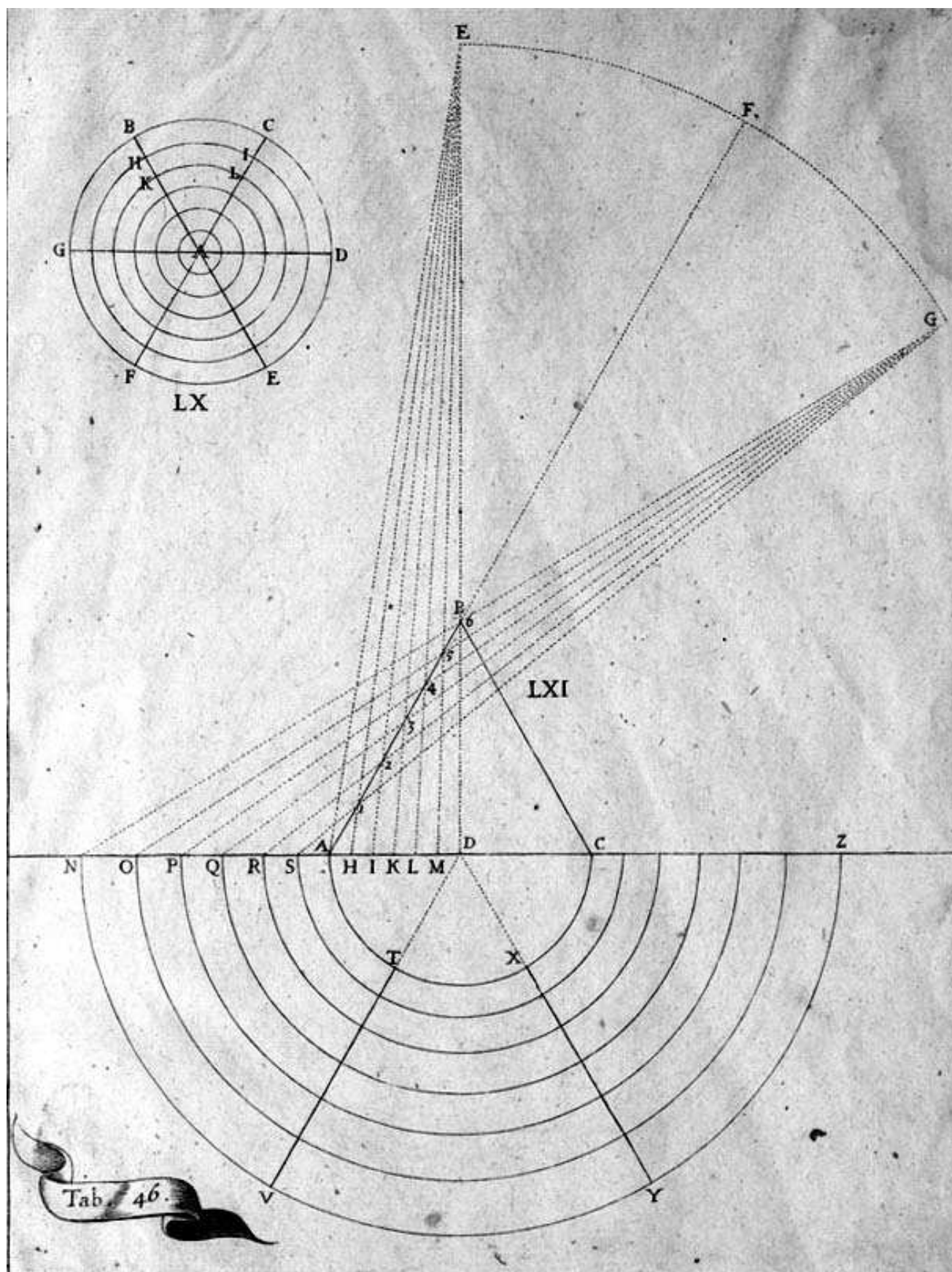
L'usage de cette proposition se peut appliquer avec beaucoup de grace à l'ornement des plats-fonds, de mesme que nous avons dit du cylindre au second corollaire de la quatriesme proposition: à sçavoir en attachant au milieu de ce plat fonds vn miroir conique ayant la pointe en bas, & en dessinant autour de sa base sur vn plan quiluy sera parallele ce qu'on voudra y faire voir, en establisant le point de veüe en bas esleué de terre enuiron la hauteur d'un homme, de sorte que quiconque se rencontrera directement sous la pointe du miroir en regardant en haut, y verra vne image bien proportionnée naistre d'une confusion de traits, & de couleurs mises comme à l'auanture & sans dessein.

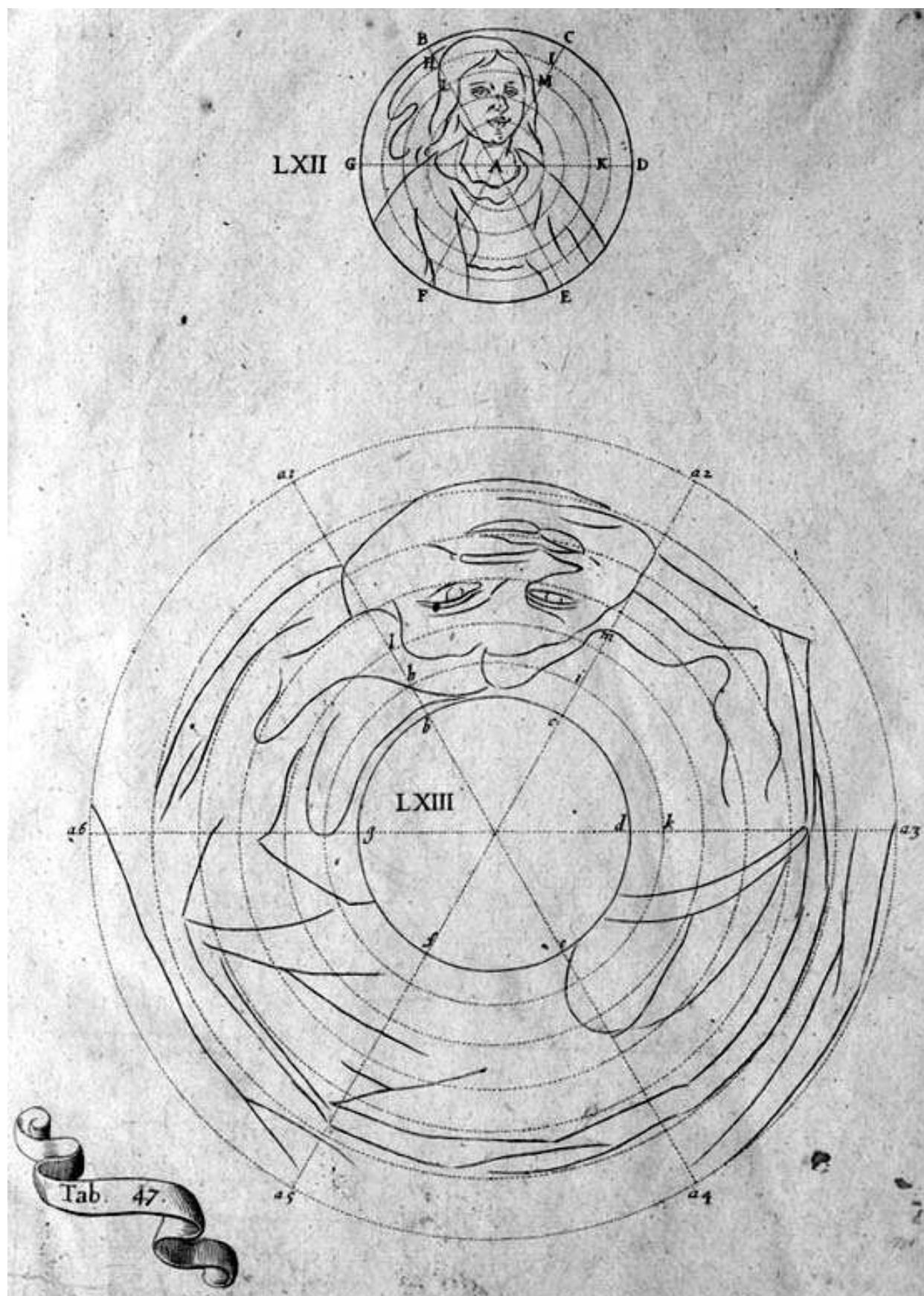
On peut mesme peindre plusieurs de ces figures sur vn mesme plan, pourueu qu'il ait assez d'estendue, lesquelles se verront successiuement l'une apres l'autre, en haussant ou baissant le miroir sur ce plan, en sorte que sa base demeure tousiours parallele au mesme plan.

Mais, par vn artifice beaucoup plus admirable, on peut de cette proposition, tirer la methode de construire en quelque plan, soit en haut ou en bas, soit sur quelque paroy perpendiculaire à l'horizon, vne figure dont vne partie soit veüe directement & de front; vne autre partie directement mais de costé; & vne troisieme partie par reflexion, on y peut à mon auis proceder de la sorte.

Soit vn plan proposé rond, triangulaire, quarré, pentagone, ou tel autre qu'on voudra pour y dresser cette figure, il faut premiere-ment dans l'estendue de ce plan faire le dessein soit d'un pourtrait, d'un paysage, ou d'une histoire: en apres au milieu du dessein soit fait vn cercle de grandeur à discretion, qui laisse autour de soy en dehors vne partie du dessein descrit au plan, laquelle partie sera celle qu'on verra de front & directement; qui pour ce sujet ne doit point estre changée ny alterée, mais doit estre laissée en sa proportion naturelle. Or supposé que ce premier cercle ait vn pied de diametre, on en fera encore vn autre plus petit de la moitié, ou des deux tiers, qui luy sera concentrique & parallele; & la partie de l'objet comprise entre les circonferences de ces deux cercles sera diuisée & transférée en la surface exterieure d'un cône dont la base sera égale au plus grand cercle; & cette partie de l'image ou du tableau tombera encore sous la vision droite, & pour ce sujet, il faut retrancher vne partie de ce cône vers la pointe, par exemple de 3

Y ij





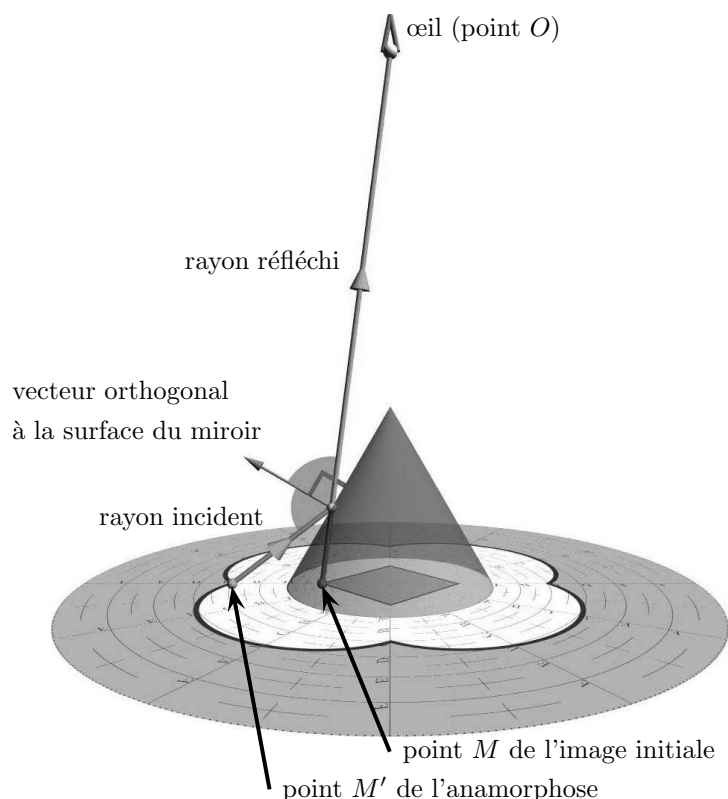
Annexe C

Devoirs maison

Le lecteur trouvera une proposition de devoirs en temps libre, pour le niveau collège/seconde pages 82 et 83, pour le niveau première scientifique page 84.

Le devoir maison de niveau collège/seconde a été expérimenté en classe de seconde, il est proposé à l'issue du chapitre sur les transformations. Le devoir de niveau première scientifique n'a pas été expérimenté en classe sous cette forme.

Description du problème du point de vue physique : lois de l'optique



Le rayon lumineux issu d'un point de l'anamorphose (rayon incident) se reflète à la surface du miroir pour frapper la rétine de l'œil (rayon réfléchi). En physique, les lois de l'optique s'appliquent à partir du vecteur orthogonal à la surface du miroir :

loi n°1 :

l'angle compris entre
le vecteur orthogonal et le rayon réfléchi
est égal à
l'angle compris entre
le rayon incident et le vecteur orthogonal

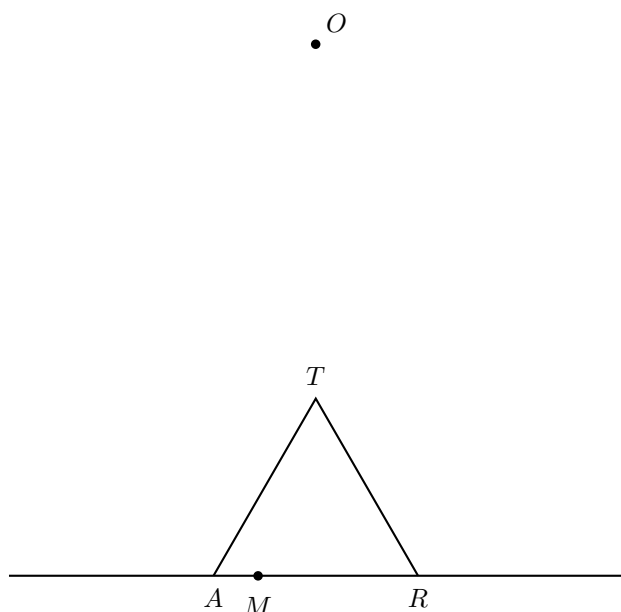
Comme pour l'œil, le trajet d'un rayon lumineux est rectiligne, le rayon réfléchi semble provenir d'un point situé à la base du cône, depuis l'image initiale non déformée :

loi n°2 :

l'œil, le point situé à la surface du miroir,
et le point de l'image initiale sont alignés.

1) Résolution géométrique du problème

On se place dans le plan qui contient l'œil de l'observateur et les rayons lumineux tracés ci-dessus :



TRA est un triangle représentant le miroir conique de profil.

O est un point du plan représentant l'œil.

M est un point de l'image initiale.

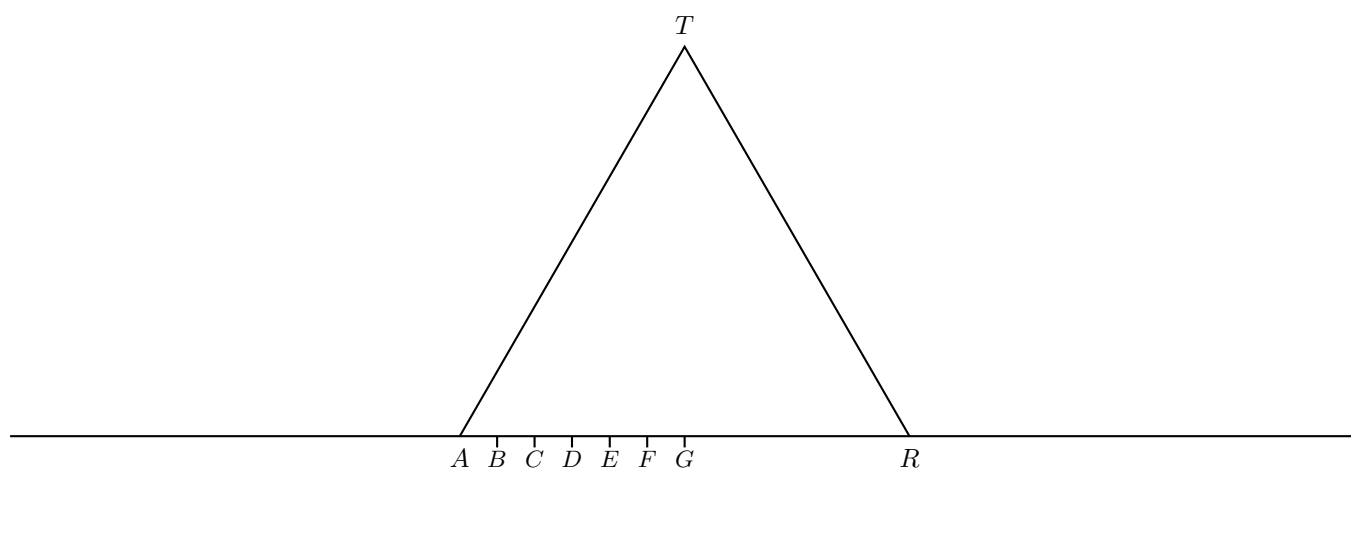
On cherche à construire le point M' de l'anamorphose qui correspond au point M .

- 1) a) La droite (OM) coupe la droite (TA) en S .
Tracer le segment $[OM]$ et placer le point S .
- b) Construire le point O' , symétrique du point O par rapport à la droite (TA) .
- c) La droite $(O'S)$ coupe la droite (AR) en M' .
Construire le point M' .
- d) Placer un point N tel que le segment $[SN]$ soit extérieur au triangle TRA et perpendiculaire à la droite (AT) .
- 2) a) Durant la construction, quelle loi de l'optique avez-vous respectée ? A quelle étape de la construction (question 1) cela correspond-il ?
- b) Il reste à démontrer que la figure respecte encore une loi de l'optique : laquelle ?
- 3) a) Comparer les angles $\widehat{TSO'}$ et $\widehat{ASM'}$ (justifier).
- b) Montrer que $\widehat{TSO'} = \widehat{TSO}$.
- c) Que peut-on en déduire sur les angles $\widehat{TSO}$ et $\widehat{ASM'}$?
- 4) a) Montrer que $\widehat{OSN} = \widehat{M'SN}$.
- b) En déduire que le point M' est bien le point recherché.

2) Construction de plusieurs points

Utiliser la construction précédente pour construire ci-dessous les points B' , C' , D' , E' , F' , G' correspondant aux points B , C , D , E , F , G .

• O

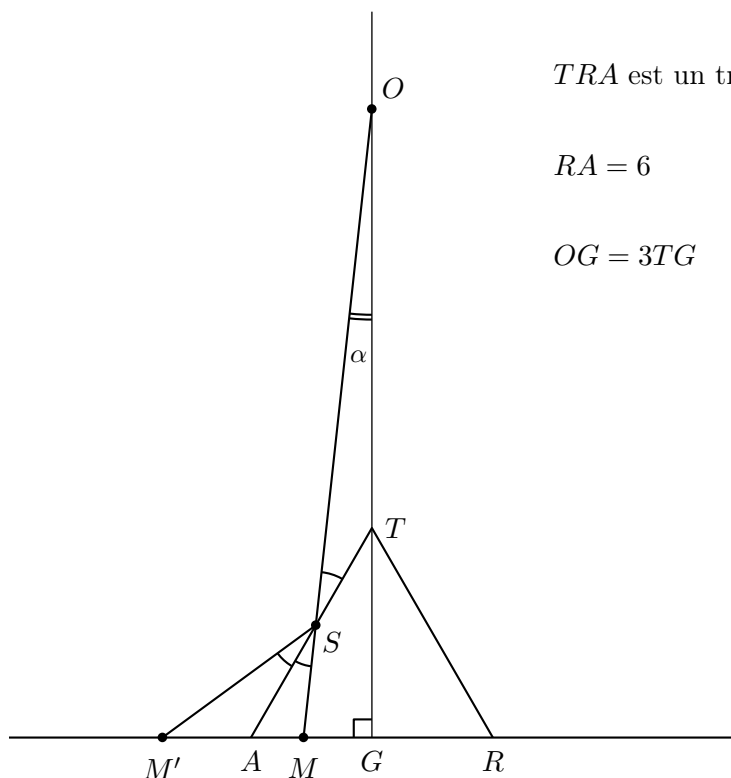


3) Application : règle d'anamorphose conique



Compléter à l'aide de ce qui précède la règle d'anamorphose conique ci-contre, qui permet de reporter un point de l'image initiale sur un point de l'anamorphose.

Devoir maison - Première S - Résolution du principe d'anamorphose par la loi des sinus



TRA est un triangle équilatéral

$$RA = 6$$

$$OG = 3TG$$

On note α une mesure de l'angle $\widehat{TOS}$.

- 1) a) Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{OTS}$.
 b) En déduire une mesure de l'angle $\widehat{TSO}$ en fonction de α .
- 2) On rappelle que, d'après les lois de l'optique, $\widehat{TSO} = \widehat{ASM} = \widehat{ASM'}$.
 a) Déterminer une mesure des angles des triangles SMA et $SM'A$ en fonction de α .
 b) En utilisant deux fois la loi des sinus dans les triangles SMA et $SM'A$, montrer que :

$$\frac{AM'}{MA} = \frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha)}$$

- c) A l'aide des formules de trigonométrie, en déduire l'expression de $\frac{AM'}{MA}$ en fonction de $\cos \alpha$ et $\sin \alpha$, puis en fonction de $\tan \alpha$.
- 3) On pose $MA = d$ et $AM' = d'$.
 Déduire de ce qui précède l'égalité $d' = \frac{18d}{12 - d}$.
 (On exprimera $\tan \alpha$ en fonction de d .)

Annexe D

Quelques précisions sur le logiciel

I Fichier de configuration

Le fichier de configuration `anamConfig.txt` permet de régler l'image chargée au démarrage, et la taille des différents panneaux d'images :

Fichier :
`niceron.jpg` (`fichierImage`)

L'image chargée au démarrage est le fichier `niceron.jpg`.

Dimension d'affichage de l'image initiale :
`300 300` (`dimImageOuvrir`)

Le panneau contenant l'image (en haut à gauche de la fenêtre) a pour dimensions 300×300 pixels.

Dimension d'affichage de l'anamorphose :
`700 700` (`dimAnamorphose`)

Le panneau contenant l'anamorphose (à droite de la fenêtre) a pour dimensions 700×700 pixels.

Dimension d'affichage de la caméra :
`300 225` (`dimWebcam`)

Le panneau contenant l'image de la WebCam (pour le logiciel **AnamCapture**) a pour dimensions 300×225 pixels.

L'utilisateur pourra modifier notamment ces trois derniers paramètres pour adapter les logiciels à la taille de l'écran de son ordinateur. Pour éviter les déformations, le panneau de la WebCam doit avoir un rapport de $4/3$.

La fin du fichier décrit les trois anamorphoses disponibles ; supprimer une ligne revient à supprimer l'anamorphose correspondante de la liste des différents types.

Anamorphose :
 AnamTPerspective (nomClass)

Anamorphose :
 AnamTCylindrique (nomClass)

Anamorphose :
 AnamTConique (nomClass)

II Paramètres des anamorphoses

Le lecteur trouvera ici l'explication des différents paramètres d'anamorphose.

Anamorphose perspective

Distance anam.	distance de l'œil au côté gauche du panneau d'anamorphose, le long du mur	unité : largeur de l'image initiale
Distance mur	distance de l'œil par rapport au mur	unité : largeur de l'image initiale
Taille repère	largeur d'impression de l'anamorphose	en millimètres

Anamorphose cylindrique

Distance cylindre.	distance de l'œil au cylindre	unité : largeur de l'image initiale
Hauteur oeil	hauteur de l'œil	unité : largeur de l'image initiale
Diamètre cylindre	diamètre du cylindre à l'impression	en millimètres

Anamorphose conique

Angle cône.	angle au sommet du cône	en degrés
Hauteur oeil	hauteur de l'œil	unité : hauteur du cône
Traiter les coins	option de traitement des coins de l'image	
Diamètre cône	diamètre du cône à l'impression	en millimètres

Bibliographie

- [BAL96] Jurgis BALTRUSAITIS. *Anamorphoses, les perspectives dépravées, II*. Flammarion, coll.Champs, Paris, 1996.
- [BES87] Didier BESSOT. « O che curiosa cosa e questa prospettiva ». *Les cahiers de la perspective*, 4 :110–187, 1987.
- [BES92] Didier BESSOT. La perspective de Nicéron et ses rapports avec Maignan. In M. BUCCIANINI and M. TORRINI, editors, *Geometrica e atomismo nella scuola galileiana*, pages 147–169. L.S.Olschki, Florence, 1992.
- [Ha97] Elisabeth HEBERT and al.. *Faire des mathématiques en seconde*. IREM/CNDP, Rouen, 1997.
- [NIC63] Jean-François NICERON. *La Perspective curieuse*. Jean Du Puis, Paris, 1663. numérisé sur le site des Bibliothèques virtuelles humanistes (<http://www.bvh.univ-tours.fr>).
- [PZ79] Julius PANERO and Martin ZELNIK. *Human dimension & interior space*. Whitney Library of Design, New York, 1979.

Remerciements

Merci à Elisabeth Hébert pour m’avoir entraîné sur les traces des anamorphoses.

Merci à Martial Quesnel et à ses élèves pour leurs miroirs parfaits.

Merci à Jean-Patrick et Philippe pour leur disponibilité à plier l’inox à tous mes désirs.

Merci aux copains de l’IREM (Catherine, Christian, Elisabeth, Josette) qui ont relu cette brochure et testé les logiciels avec brio.

Merci à tous les collègues qui ont éclairé ma démarche par leurs remarques pertinentes.

Un grand merci à Anne qui a supporté l’invasion progressive des anamorphoses.