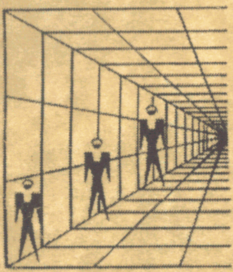
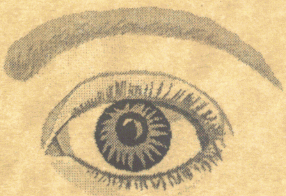
Université de Rouen
Institut de Recherche
sur
l'Enseignement des Mathématiques

IREM de ROUEN

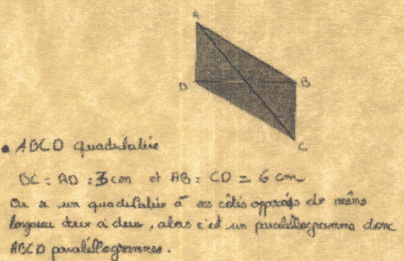
Figures et sens

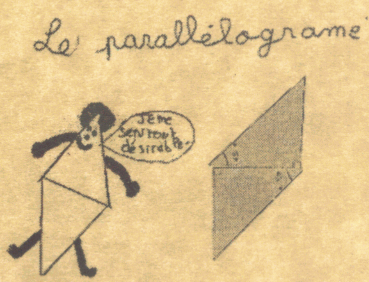


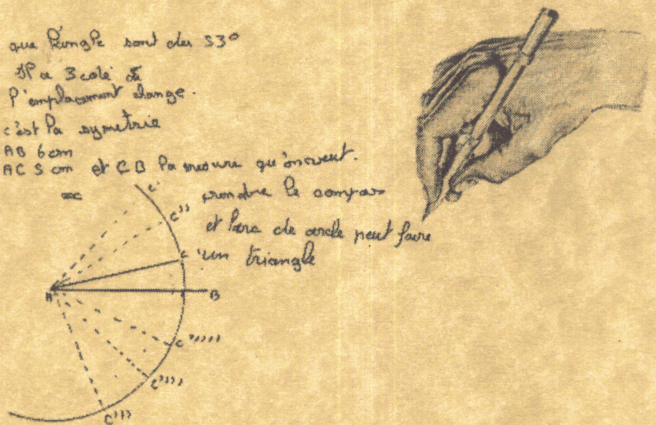


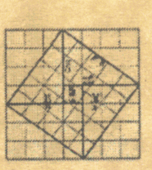
Voir pour comprendre

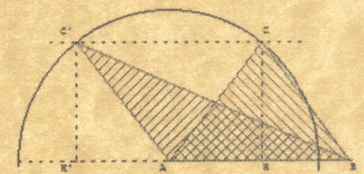
Comprendre pour démontrer











Hélène COLONNA

Michel CHEVALLIER

IREM de ROUEN, Batiment de Mathématiques, Av. de Broglie,
B.P. 138 76821 Mont-Saint-Aignan Tél. 02 35 14 61 41

IREM de ROUEN

Université de Rouen
Institut de Recherche
sur
l'Enseignement des Mathématiques

Figures et sens

Voir pour comprendre

Comprendre pour démontrer

Hélène COLONNA Michel CHEVALLIER

IREM de ROUEN, Batiment de Mathématiques, Av. de Broglie,
B.P. 138 76821 Mont-Saint-Aignan Tél. 02 35 14 61 41

Sommaire

Introduction

Ce travail est né d'une rencontre : deux collègues de collège qui ne se connaissent pas et que cent vingt kilomètres séparent. Mais l'IREM, endroit de tous les possibles pour l'ouverture, la réflexion, la création et l'entraide - sans oublier l'amitié - permet cette rencontre.

Nous qui étions en quête de cet « indéfinissable quelque chose » qui a trait à la recherche de solutions pour vaincre certaines des difficultés de nos élèves, mais qui est aussi une volonté d'évoluer, d'avancer dans notre métier, de nous insérer dans cette énorme mutation de l'école propre à notre époque, nous avons pu construire dans ce cadre un travail spécifique, partagé ensuite avec nos collègues de la région dans le cadre d'un stage du Plan Académique de Formation.

Ce travail cible les élèves de cycle central du collège. Il a pour but d'aplanir certaines des difficultés d'appropriation et de résolution du problème de géométrie. Ces difficultés, liées au passage trop brutal à la démonstration, empêchent de ce fait certains élèves d'y accéder.

Pourquoi, lors de la dévolution d'un problème, observons-nous toujours deux groupes dans la classe, ceux qui s'illuminent parce que la solution ou une piste de solution jaillit comme une évidence, et ceux qui se désolent et s'enlisent parce qu'ils ne savent plus ni où ils en sont ni ce qu'on attend d'eux ? Nous avons donc créé des moments d'apprentissage spécifiques qui amènent les collégiens à manipuler les objets étudiés, à décoder et à s'approprier les figures proposées et ainsi leur permettre d'accéder à une démarche heuristique.

Avant l'élaboration de la preuve et sa rédaction, il est un moment primordial de l'apprentissage où l'objet manipulé doit évoluer et devenir un objet théorique lié à un schème de connaissances. Entre l'objet manipulé ou le dessin tracé qui appartiennent au monde matériel, et la figure qui est un objet théorique, il faut apprendre à lire, interpréter l'image proposée, lui associer le texte joint et en même temps plonger dans le bagage de définitions et propriétés déjà étudiées.

Or, dans un problème de géométrie, on propose en même temps à l'élève deux types d'informations :

- tout d'abord celles qui, à travers la figure, relèvent du registre de l'image et dont la perception est, dans un premier temps, spontanée et globale. On peut supposer que pour les élèves actuels, cette perception là a pris une importance énorme, baignés qu'ils sont dans la société de l'image ;

- mais il y a aussi l'écrit qui relève du registre de la langue maternelle et se présente sous forme structurée, conventionnelle.

De plus on attend de l'enfant qu'il se réfère naturellement à ses connaissances théoriques des objets proposés ... et cela de façon implicite !

Les situations que nous avons créées, expérimentées et partagées ont donc pour objectif principal d'aider à assimiler ces différentes approches tout en mettant en place des images mentales fortes de ces moments spécifiques d'apprentissage. Elles ont été l'occasion d'installer dans nos classes un climat particulier d'intérêt et de confiance qui « permet de développer conjointement et progressivement les capacités d'expérimentation et de raisonnement, d'imagination et d'analyse critique et contribuer ainsi à la formation du futur citoyen » (cf. les instructions officielles)

Du fait du fonctionnement particulier de ces séquences, elles deviennent des situations de référence pour les élèves, qui les évoquent spontanément en cours, mais aussi pour l'enseignant(e) qui peut les réutiliser, luttant ainsi contre le morcellement des connaissances.

Revenons à l'image. Nous avons, au collège, la responsabilité de négocier le délicat passage du dessin à la figure (« le triangle 5-6 »*, « du triangle au triangle »*, ...), de redonner du sens aux notions de grandeur et de mesure (« Pythagore »*, « de l'aire »* ...) et d'installer, en lui donnant du sens, le codage des figures. Le codage ne va pas de soi et il nécessite un véritable apprentissage.

Tout problème de géométrie s'inscrit non pas dans l'espace physique mais dans un espace conceptualisé et, par conséquent, la validation ne se fait pas par rapport au dessin mais par l'absence de contradictions dans le raisonnement.

Notre but est alors d'apprendre à « VOIR ». Voir avec les yeux bien sûr, mais ensuite voir pour comprendre, voir pour construire, voir pour démontrer : c'est-à-dire « voir dans la tête ».

Dans ces situations d'apprentissage, les mots que l'élève retrouve régulièrement sont :

trace / construis / fabrique / observe / produis / formule.

Il s'agit pour lui de se mobiliser, d'agir pour donner du sens au processus d'apprentissage.

Les mots de l'enseignant(e) sont :

motivation / construction des savoirs / formulation / validation.

avec toujours présent à l'esprit, le nécessaire respect du temps d'apprentissage.

---

* Noms donnés aux situations décrites et analysées dans la brochure.

Préambule

Le travail par « activités »* est maintenant connu. Aussi nous ne détaillerons pas toute la mise en œuvre, en particulier la gestion du travail de groupes, et l'analyse des variables didactiques. Nous vous renvoyons pour cela au site de l'I.R.E.M. de Rouen : http://www.univ-rouen.fr/sciences/IREM/.

Toutes les situations proposées ont évolué sur plusieurs années, comme vous pourrez le voir à travers certains travaux d'élèves qui ne correspondent pas tout à fait à la consigne finale. Ces versions définitives ont été expérimentées dans de nombreuses classes. Les indications horaires peuvent être modulées, par contre la consigne, la mise en œuvre et la synthèse ont leur cohérence.

Nous vous proposons notre façon de faire très liée à notre « philosophie » d'enseignants.

Chacune des situations est au service du but que nous nous sommes fixé à chaque fois. Outre la découverte d'une notion, formule ou propriété, il y a cette volonté constante d'accompagner l'élève et de l'aider à franchir les obstacles que nous venons de pointer. Notre regard sur les productions est toujours attentif à repérer la remarque, aussi maladroite soit-elle, qui permettra de le questionner, le prendre là où il est pour le faire avancer. Il ne s'agit pas d'ajouter une rupture aux ruptures inhérentes à tout acte d'apprentissage.

* Ce mot est utilisé avec des sens très différents dans les I.O., les livres, les articles ... aussi nous l'utiliserons avec prudence !

Le triangle 5 - 6

Comment naît une activité ? C'est une question qu'on nous pose souvent … Il y a de multiples réponses et pas de règles.

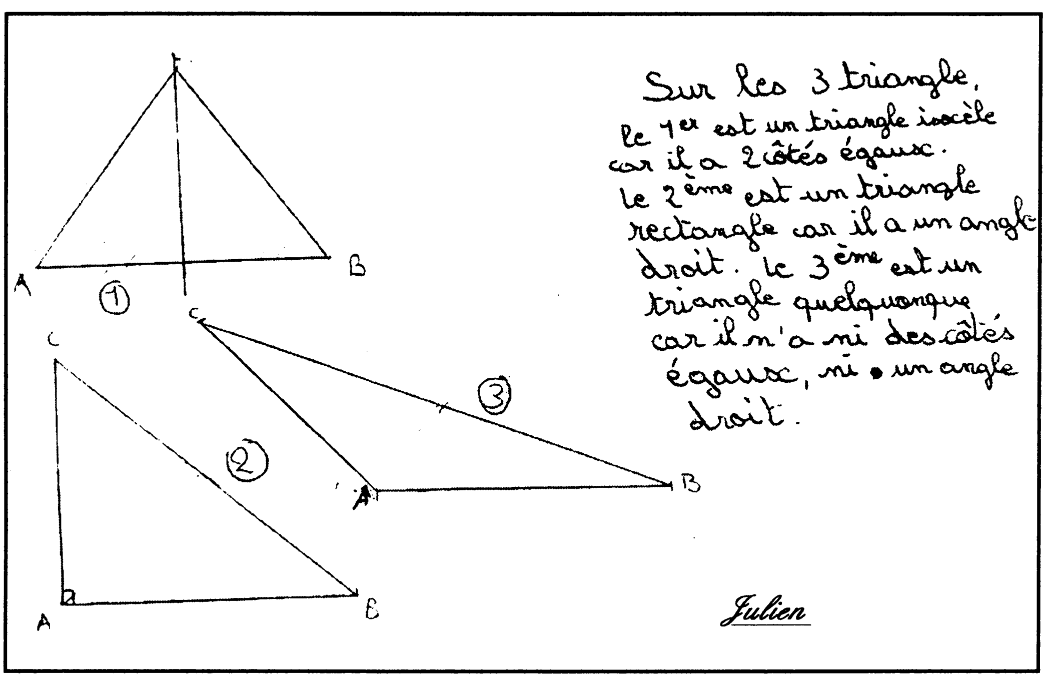
Ici, le besoin de créer des situations pour aider le passage du dessin à la figure nous a préoccupés longuement et l'idée présente s'est imposée … sur le sable d'une plage corse !

Nous la proposons en 5ème sur trois séances d'une heure, synthèse comprise.

Les élèves disposent d'une feuille format A4 blanche, de leur trousse et des instruments usuels de géométrie. Nous leur donnons la consigne suivante :

> ***Tracez des triangles ABC tels que AB = 6 cm et AC = 5 cm.***
>
> ***Observez et comparez.***
>
> ***Qu'est-ce qui change ? Et comment ?***

Après environ 20 min de travail individuel (T. I.), tous les élèves ont produit au minimum des tracés. En voici un exemple accompagné ici des premières remarques :



Julien a tracé 3 triangles en commençant par 2 triangles particuliers, ce qu'on retrouve très fréquemment. Les formes connues et préférées sont souvent privilégiées : citons Christopher qui a fait 5 fois le même triangle isocèle (5, 5, 6) dans des positions différentes, ce qui représentait pour lui 5 triangles différents. Le travail de groupes (T. G.) lui a permis de prendre conscience que le positionnement n'intervient pas sur la nature de l'objet géométrique.

Revenons à la production de Julien. Après avoir tracé un triangle isocèle puis rectangle, il les définit. Il quitte ensuite son dessin pour aller confronter son tracé avec ses connaissances mathématiques : il utilise ainsi ses savoirs et éprouve le besoin de créer une définition du triangle quelconque.

D'autres élèves éprouvent des difficultés à écrire clairement leurs remarques. Mais les formulations très maladroites ne doivent pas occulter la richesse des réflexions et des productions, comme ici pour Maxime :

Bc peut être alongé comme on le veut mais AB et AC ont ne peut pas les rallongées.
sur mes deux triangle ci-dessous dans le premier BC n'a pas la même mesure que le deuxièmes, Mais Bc est illimité

Maxime

La notion de variable s'impose à Maxime à travers l'expression « *peut être allongé comme on le veut* » en opposition aux données fixes AB et AC.

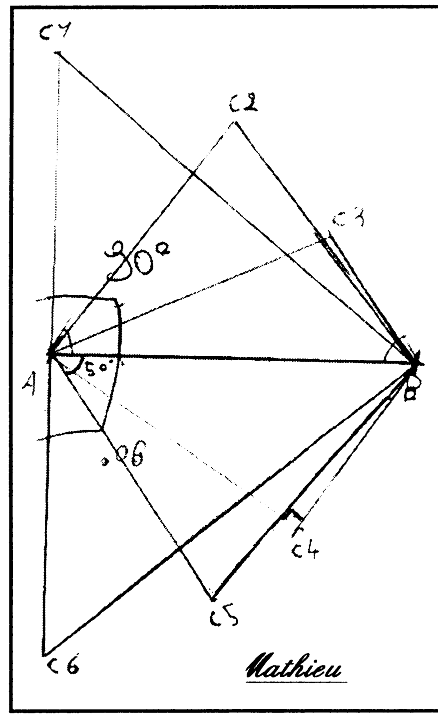
La notion de limite va émerger lorsque l'enseignant(e) lui suggèrera de tracer un triangle qui convienne dans lequel BC aura pour longueur 25 cm.

Mathieu n'est pas plus à l'aise avec les mots, il s'en est donc dispensé ; mais il y a tant de choses dans sa production !

- Les triangles particuliers ne l'ont pas bloqué,

- l'unicité du segment [AB] montre qu'il en est au stade de la figure et une simple suggestion de l'enseignant(e) lui permettra d'aller aisément vers le lieu du point C,

- la symétrie axiale a été envisagée.



Mathieu

Dans la phase de T. I., notre rôle est essentiel par notre attention à chacun.

> Tous les triangles ont un angles différent. Certains sont plus ouvert ou plus refermé que l'autre. Il y a des angles droit. Quand l'angle A change la droite CB change. Si A est un angle droit, la droit CB mesure 7,8 cm.
>
> *Aline*

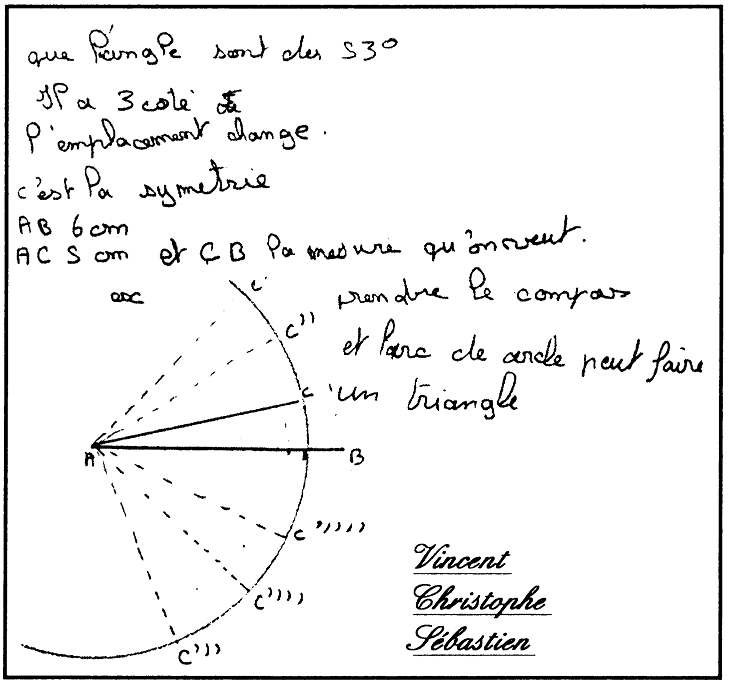
> . le segment BC n'est jamais pareil soi il est d'une taille plus petite comme le n°2 ou ~~au~~ d'une mesure ~~plu~~ moyenne comme le 1 ou le 3 ou alors une plus grande comme le n°5
>
> *Loïc*

L'enseignant(e) a encadré une phrase d'Aline en lui demandant de préciser sa pensée. Pour Loïc, il a suffi de souligner plusieurs mots pour l'aider à concevoir les notions de variation et de limites.

Nous ne multiplierons pas davantage les exemples de travaux individuels.

Les élèves sont mis en groupes pour la fin de la première séance, le choix des regroupements nécessitant, de la part de l'enseignant(e), une bonne connaissance du fonctionnement de la classe : certains sont mis ensemble parce qu'ils ont labouré le même champ, d'autres le sont pour favoriser la confrontation de démarches et/ou d'idées différentes.

Trois élèves, Vincent, Christophe et Sébastien ont été mis en groupe parce qu'ils avaient tous les trois travaillé sur la symétrie, thème en cours d'étude dans cette classe. Voici leur production à la fin de la première heure. Enfermés au départ dans une seule et même conception, ils ont su évoluer et dépasser leur première production.



La symétrie par rapport à la droite (AB) est notée, la longueur BC qui varie est repérée et, maladroitement, le lieu de C est exprimé.

Citons aussi le cas particulier d'un groupe de quatre élèves dans lequel les 14 dessins produits en T. I. se répartissent ainsi :

- 9 triangles en position [AB] horizontal et de gauche à droite, qui témoignent de la prégnance de l'horizontal chez nos élèves ;
- 6 triangles isocèles ;
- 4 triangles rectangles.

Voici leur production à l'issue de la première séance :

> Sur tous les triangles, il y a 2 mesures identiques (5 cm - 6 cm) **Groupe G. 3**
> la seule chose qui change c'est la forme.
> Ils sont soit isocèle, rectangle, ou quelquonque. AB et AC ont la même longueur

Ils ne veulent pas perdre de vue les mesures fixées dans la consigne : les première et dernière phrases l'expriment. S'attachant à ces deux longueurs fixées, ils n'ont cependant pas pu envisager la troisième longueur du triangle. « *La seule chose qui change c'est la forme* » montre qu'ils ont abandonné la grandeur longueur pour passer à l'étude de la surface : l'appréhension perceptive l'emporte sur l'analyse de la situation.

A la fin de la première heure, le travail de groupe est relevé et à nouveau le professeur intervient dans une « relance » écrite afin d'approfondir la recherche au début de la 2ème séance.

Voici la relance de l'enseignant(e), pour le groupe G. 3 précédent

Pourquoi la forme change-t-elle ?
Qu'est ce qui change ?
Comment ?
Relance

et leur production finale lors de la 2ème séance :

la forme change parce que ce ne sont pas les mêmes
triangles (triangle isocèle, rectangle, quelquonque)
les angles, la hauteur et la longueur BC changent.
les longueurs AB et AC ne peuvent pas changer mais
la longueur BC peut varier entre 1 et 11 car si l'on
met les longueurs AB et AC à 180° la longueur
BC ne peut faire plus de 11 cm. Lorsque l'on fait
le total de tous les angles on obtient 180°.
Groupe G. 3

La notion de limite est difficile, elle a cependant été analysée dans ce groupe avec succès.

L'intervention de l'enseignant(e) est parfois inutile, la confrontation des idées au sein du groupe permet de faire tomber des « théorèmes élèves ». Et quel plaisir d'être à l'écoute de ces échanges …

Dans l'exemple qui suit la démarche, très construite, aboutit à l'idée suivante : « *Les limites de l'angle (0° - 180°) et du côté opposé (1 cm – 11 cm) étant repérées, à mi-parcours de l'angle (90°) la longueur du segment (7,8 cm) ne répond pas à ce qui était prévu (6 cm).* ». Ce qui était attendu là se trouve ailleurs : « *A la moitié de la variation de la longueur du segment (6 cm) on trouve un triangle isocèle.* ».

- Le segment bc change de longueur selon l'angle A.
- Si l'angle A est aigu, le segment bc est petit.
- Si l'angle A est obtus, le segment bc est grand
- l'angle A varie entre 0° et 180°.
- Le segment bc varie entre 1 et 11 cm.
- Si l'angle A est ~~un~~ droit, le segment bC mesure 7,8cm, mais ne fait pas le milieu de la variation du segment BC.

Le milieu de la variation du segment BC fait un triangle isocèle si [AC] Est la base de ce triangle.

Cette activité est très ouverte et les élèves s'engagent dans des recherches très variées qui dépendent de leur imagination, de leurs préférences mais aussi des thèmes récemment abordés en classe ; nous avons déjà vu le cas avec la symétrie axiale.

Ici le groupe a travaillé sur l'évolution de l'aire du triangle.

De T1 à T5 laire augmente et de T5 à T7 laire diminue car

$T1 = \frac{6 \times 0,2}{2} = 0,6$

$T2 = \frac{6 \times 1,1}{2} = 3,3$

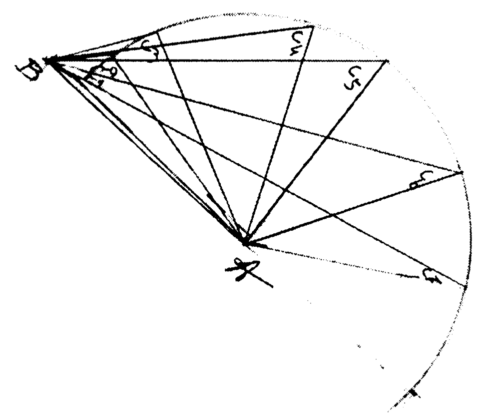
$T3 = \frac{6 \times 2,1}{2} = 6,3$

$T4 = \frac{6 \times 4,1}{2} = 12,3$

$T5 = \frac{6 \times 5,1}{2} = 15,3$

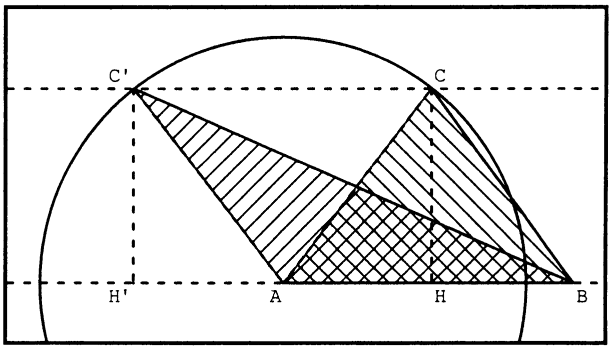
$T6 = \frac{6 \times 2,7}{2} = 8,1$

$T7 = \frac{6 \times 1,5}{2} = 4,5$



C'est une production riche qui permet d'aller vers les limites de l'aire, la recherche d'un maximum mais aussi de réinvestir la notion de grandeur. On peut ensuite représenter sur un graphique l'aire en fonction du côté de longueur non fixée ou en fonction de la hauteur du triangle.

L'outil informatique permet de visualiser aisément les deux triangles de même aire qui n'ont pas la même forme.



Cet outil est éminemment performant lorsque l'enseignant(e) est confronté(e) à ce type de difficulté :

C'est le segment [BC] qui change. Si l'angle $A\hat{B}C$ mesure 30°, [BC] fera alors ≃ 8 cm.

Si $A\hat{B}C$ mesure entre 1 et 180° :
BC peut mesurer entre 1 cm et 11 cm.
BC ne peut pas faire moins de 1 cm et ne peut pas faire plus de 11 cm, car si l'angle mesure 1°, BC fera alors 1 cm. Si $\widehat{ABC}$ mesure plus de 180°, BC fera moin de 11 cm.

Pour ces quatre élèves, le passage de l'autre côté de la droite (AB) pose problème : ils n'envisagent pas la symétrie et ne visualisent pas l'angle $\widehat{BAC}$ (nommé $\widehat{ABC}$). Les aspects dynamiques et continus des logiciels de construction géométrique ont permis de modifier efficacement leur image mentale de la situation. Malgré ces difficultés, ce qu'exprime ce groupe montre qu'ils ont franchi le pas vers la figure : le triangle ABC est l'objet géométrique étudié et ils ne considèrent plus la somme des dessins particuliers obtenus.

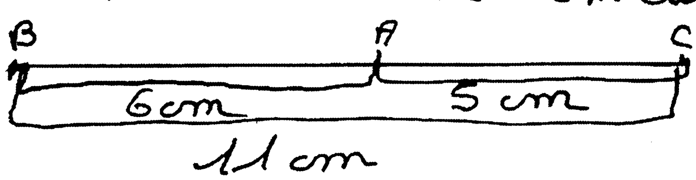
Ce qui n'est pas le cas pour tous, comme le montre cette production :

> BC dans le n°① n'a pas la même grandeur que BC du n°②, parce que les angles du triangle n°① ne sont pas les mêmes que les angles du n°②.
> BC ne peut pas être supérieur à 11cm.
> Le triangle n°③ a un axe de cimétrie car les cotés sont égaux de 5cm chacun

Nous supposons que ces élèves en sont encore au stade du dessin, illustré par la première et troisième phrase et ce malgré « *BC ne peut pas être supérieur à 11 cm* ». Chaque triangle est envisagé comme une entité.

La notion de figure est en construction en cinquième. Tous les élèves ne perçoivent pas les concepts de limites et de continuité des points sur une ligne liée à la continuité des nombres.

> $\widehat{CBA}$ peut avoir une infinité de mesure différentes.
> Le segment [BC] peut avoir plusieurs mesures différentes.
> Le segment [BC] ne peut pas mesurer + de 11, ni = à 11.
> Si [BC] mesure 11 cm ce n'est pas un triangle.



Pour ceux-là, la notion d'infinité dans la variation de l'angle est présente. En voient-ils les limites ? Il semble peu probable qu'ils perçoivent la continuité des nombres entre 0 et 180 alors qu'ils ne la conçoivent pas entre 0 et 11 comme l'indique leur deuxième phrase : « *Le segment [BC] peut avoir plusieurs mesures différentes* ».

La recherche des limites est très intéressante, elle montre les réticences à aller vers le particulier, le « pas dans la norme », ici le triangle aplati.

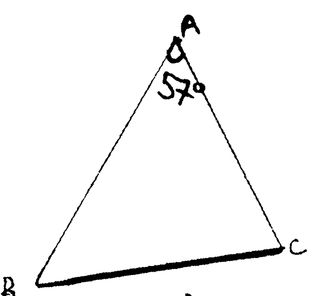
Pour d'autres, le millimètre est la plus petite unité de longueur disponible, les possibilités sont découpées en séquences discrètes.

La mesure de BC maximun est de 11,5 cm
Il y a 115 possibilité (environ). 10 x 10 = 100 + 15 = 115

« Le maximum est 11,5cm et 11,5 cm = 115 mm, donc 115 triangles possibles. »

Au milieu de la deuxième heure, les productions sur transparents sont organisées par l'enseignant(e) dans un ordre qui sert son objectif final. Elles sont projetées et font l'objet d'un débat de classe ; c'est à ce moment là que nous essayons de rendre plus claires et plus correctes les formulations des élèves (sans s'appesantir cependant).

Voici un transparent qui peut clore la présentation des travaux de groupes à la classe (inutile de préciser qu'il est un de nos préférés).



Nous avons remarqué que la distance BC (noircie sur le dessin) dépendait de l'angle BÂC (également noirci). Tout en respectant les distances AB (6 cm) et AC (5 cm), la distance BC et l'angle BÂC varient selon la volontée du constructeur du triangle.

Mais une activité ne peut se conclure sur la projection des transparents produits par les groupes. Ces productions traduisent presque toujours un réel travail de réflexion que l'enseignant(e) se doit de valoriser dans le débat de classe qui s'instaure alors. Elles ouvrent une voie royale à l'installation, par le professeur, des connaissances visées.

La troisième heure de travail, l'institutionnalisation des connaissances, est menée par l'enseignant(e) et porte ici sur :

- le lien entre la mesure de l'angle $\widehat{A}$ et la mesure du côté [BC],

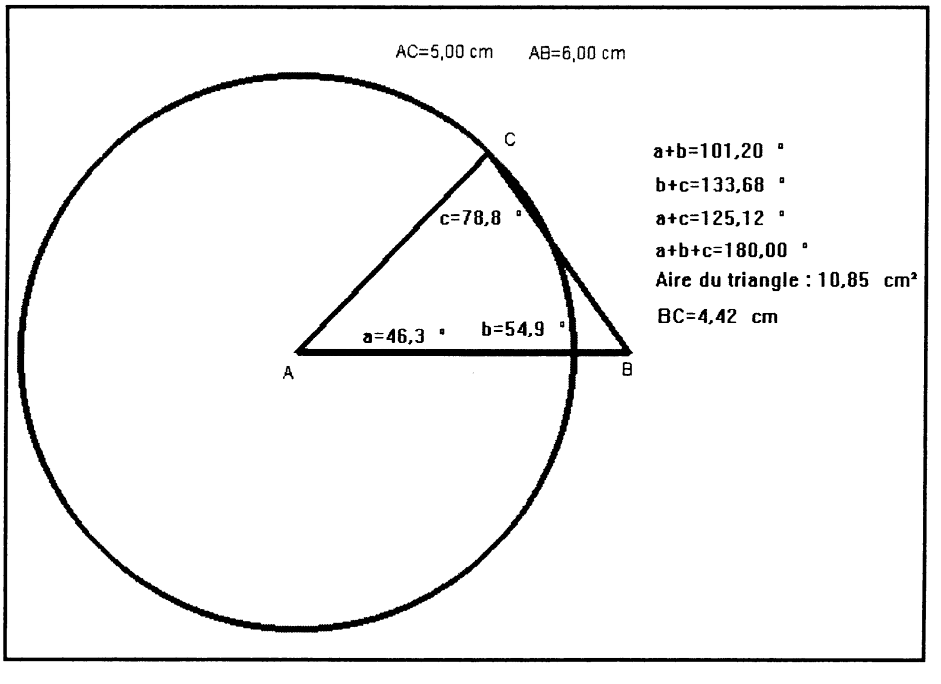
- les limites,

- le lieu du point C,

- l'existence du triangle ABC et l'inégalité triangulaire,

- les conditions minimales pour l'obtention d'un triangle unique.

L'outil informatique permet d'illustrer efficacement chacun de ces points.



On peut réinvestir cette activité lors d'un travail sur la somme des angles d'un triangle et approfondir la recherche en s'intéressant aux limites de chacun des angles de ce « triangle 5-6 ».

Cette situation peut également être utilisée lors d'un travail sur l'aire du triangle.

<u>De l'aire !</u>

L'histoire des mathématiques, des Babyloniens à aujourd'hui, constitue une source quasi inépuisable d'activités pour nos élèves. Les nombreux ouvrages historiques sont en effet remplis de problèmes qui peuvent facilement être adaptés à nos classes.

Les Égyptiens (scribe Ahmès, 2000 ans av. J.-C.) s'intéressaient aux calculs de superficie de surfaces triangulaires, mais utilisaient des formules approximatives. Les géomètres grecs puis arabes ont adopté une démarche différente : ils ont étudié les transformations de triangles ou de polygones donnés en triangles équivalents (c'est-à-dire, pour nous, de même aire).

L'activité, décrite ici, à destination d'élèves de cinquième, s'appuie sur ces problèmes remontant à l'Antiquité et au Moyen âge et permet de travailler, au cycle central, l'appréhension d'une figure et les notions de grandeurs et mesures.

Nous avons fait le choix de travailler d'abord sur les grandeurs pour éviter le passage trop rapide aux mesures et aux formules, cause de nombreux échecs repérés par les évaluations.

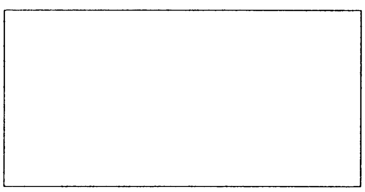
Cette activité se déroule en deux séances d'une heure. Les élèves ont besoin de leur trousse, d'une paire de ciseaux, de colle et d'une feuille blanche format A4.

Pour la première séance, chaque élève dispose de la consigne suivante :

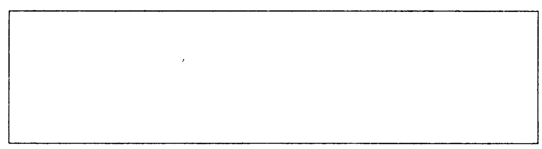
> ***Les rectangles donnés sont tous superposables.***
> ***À partir d'un rectangle, fabriquez un triangle de même aire.***
> ***Recommencez afin d'obtenir d'autres triangles non superposables.***

Cette consigne et un des quatre rectangles suivants reproduit 5, 6 ou 8 fois sont photocopiés sur des feuilles de quatre couleurs différentes afin que le professeur s'y retrouve facilement.

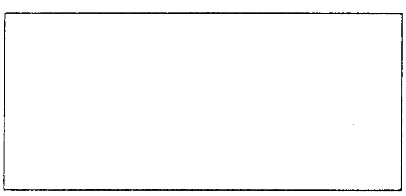
Voici, en réduction, les rectangles proposés :



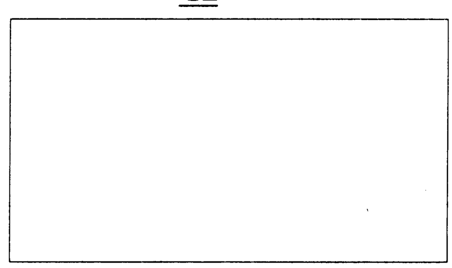
C1



C2



C3



C4

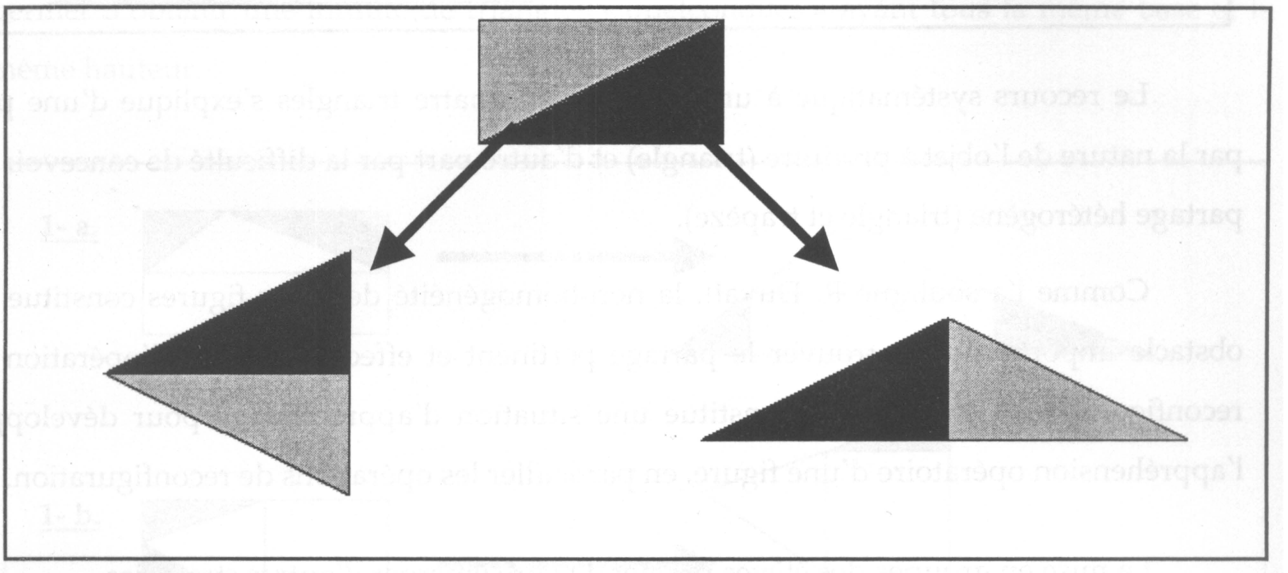
Les rectangles proposés sont différents pour mieux gérer l'hétérogénéité de nos classes.

- Le rectangle n° 1 dans lequel la longueur est double de la largeur permet d'envisager plus facilement certaines découpes mais produit des triangles superposables avec des démarches différentes.

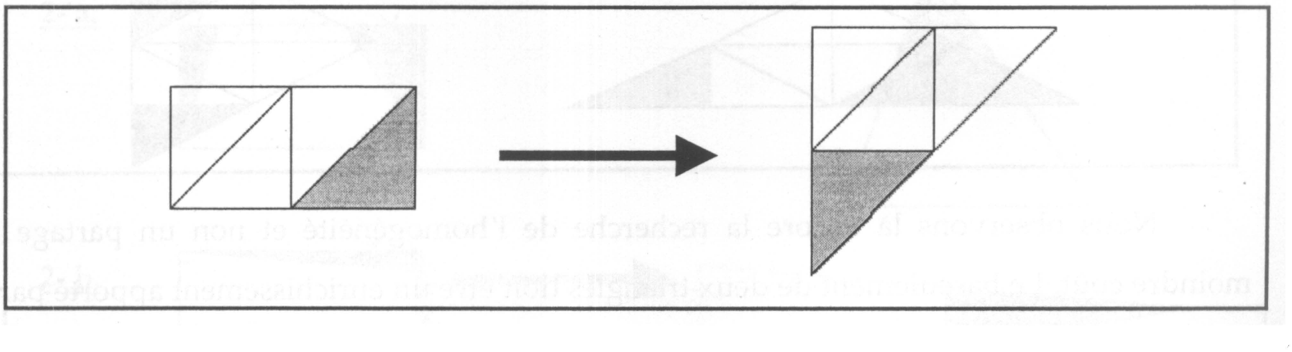
- Le rectangle n° 2 avec $L = 4 \times l$ permet de visualiser des triangles plus inhabituels et force à une disposition oblique dans la feuille.

- Les rectangles n° 3 et n°4 ($L > 2 \times l$ et $L < 2 \times l$) offrent des situations plus confortables aux élèves.

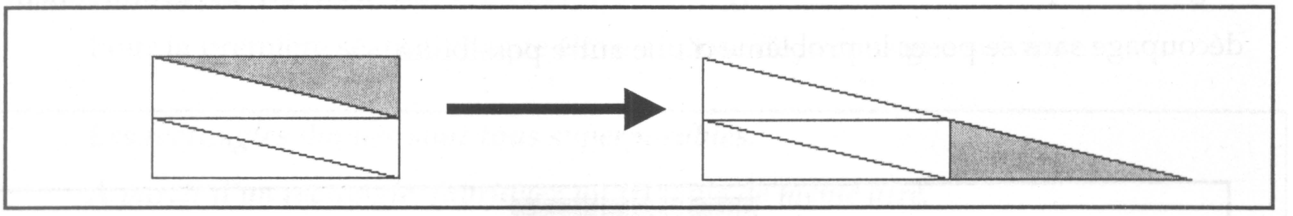
Les élèves découpent rapidement un rectangle suivant une diagonale et assemblent les deux triangles obtenus suivant la longueur. La deuxième configuration (suivant la largeur) est plus difficile à émerger : une solution étant trouvée, ils abandonnent ce découpage sans se poser le problème d'une autre possibilité.



Ils éprouvent ensuite quelques difficultés à changer de point de vue et considérer un autre découpage possible du rectangle. Là encore, le rôle de l'enseignant(e) qui relance, motive, est essentiel. Très majoritairement, ils envisagent alors de découper le rectangle en quatre parties suivant un axe de symétrie, puis une diagonale pour chaque rectangle obtenu. Ils assemblent ensuite les quatre pièces pour former un triangle rectangle.



La transposition de cette même découpe sur la largeur ne se fait pas aisément, malgré l'expérience du premier découpage.

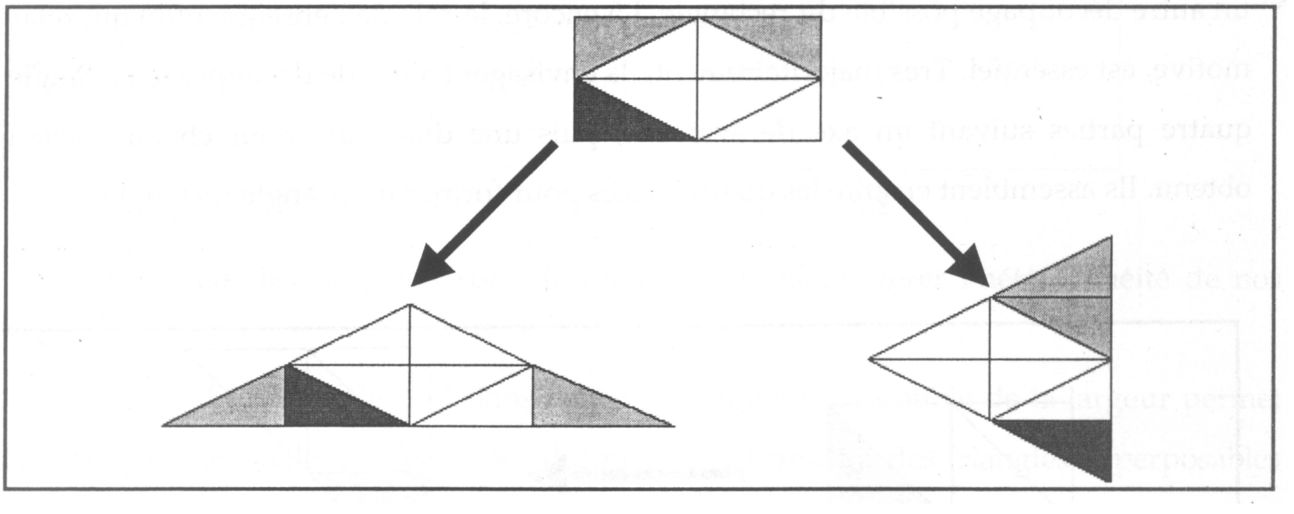


Le recours systématique à une découpe en quatre triangles s'explique d'une part par la nature de l'objet à produire (triangle) et d'autre part par la difficulté de concevoir un partage hétérogène (triangle et trapèze).

Comme l'a souligné R. Duval[1], la non-homogénéité des sous-figures constitue un obstacle important pour trouver le partage pertinent et effectuer ensuite l'opération de reconfiguration. Cette activité constitue une situation d'apprentissage pour développer l'appréhension opératoire d'une figure, en particulier les opérations de reconfiguration.

La mise en groupes des élèves permet de faire émerger d'autres stratégies.

Nous avons régulièrement rencontré, dans nos classes, les reconfigurations suivantes :

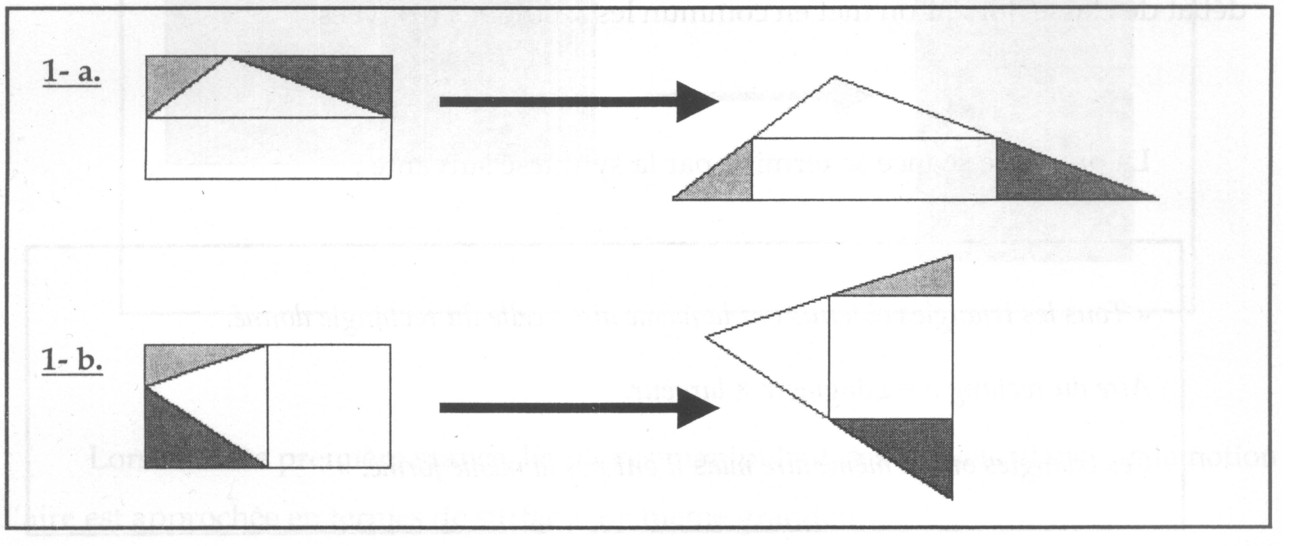


Nous observons là encore la recherche de l'homogénéité et non un partage au moindre coût. Le basculement de deux triangles doit être un enrichissement apporté par le professeur (comme dans l'exemple précédent).

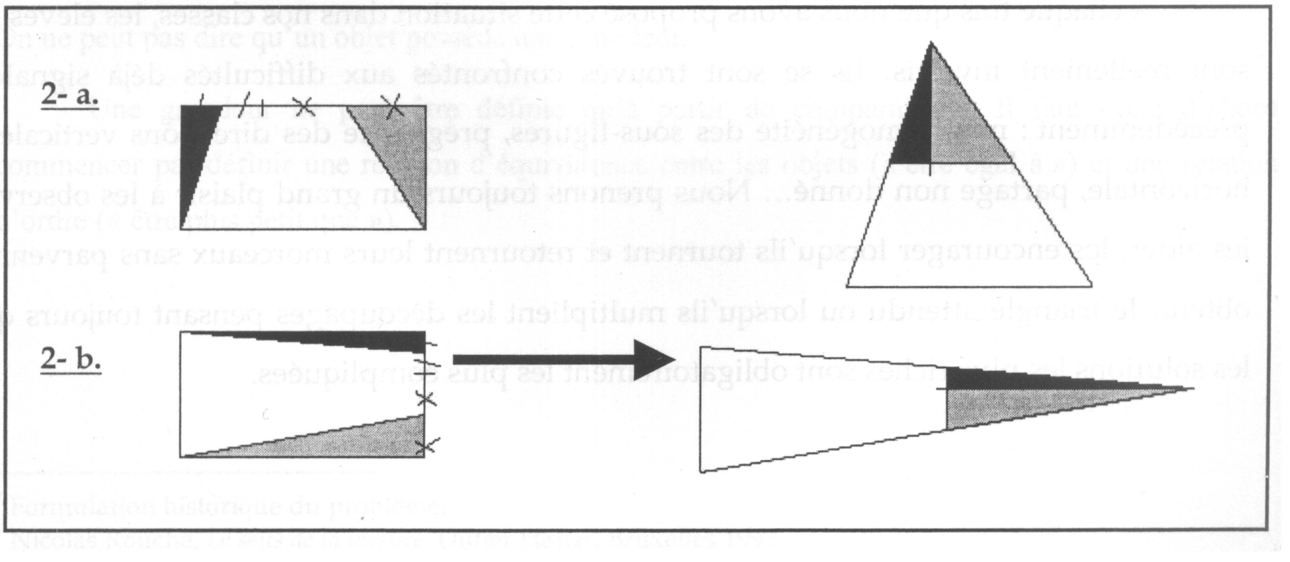
[1] Raymond DUVAL, *les différents fonctionnements d'une figure dans une démarche géométrique*, Repères IREM n° 17, octobre 1994.

Toutes les reconfigurations aboutissent jusqu'ici à l'obtention de triangles particuliers (isocèles ou rectangles). Le passage aux triangles « quelconques » est difficile.

La démarche précédente permet cependant à certains élèves l'étude d'un cas général : il suffit de considérer les milieux de deux côtés opposés et de les relier à un point quelconque d'un troisième côté. Le partage ainsi obtenu (un pentagone et deux triangles) permet d'obtenir une infinité de triangles « quelconques » ayant tous la même base et la même hauteur.



Une autre démarche qui donne également une infinité de triangles « quelconques » est possible mais très rarement rencontrée dans nos classes :



Il est important de confronter l'élève aux deux cas précédents. Un logiciel de constructions géométriques (GeoplanW ou Cabri-géomètre® II) facilite la visualisation de ces différentes reconfigurations. Les élèves remarquent rapidement que, pour chacun des cas, la base et la hauteur des triangles ne changent pas. D'autre part, dans la reconfiguration **1- a.**, la base du triangle est le double de la longueur du rectangle tandis que la hauteur est égale à sa largeur. Pour la reconfiguration **2- a.**, c'est la hauteur qui est le double de la largeur alors que la longueur du rectangle et la base du triangle sont égales. Ces observations constituent une première approche de la formule. Elles émergent dans le débat de classe, lorsqu'on met en commun les méthodes trouvées.

La première séance se termine par la synthèse suivante :

« *Tous les triangles obtenus ont la même aire : celle du rectangle donné.*

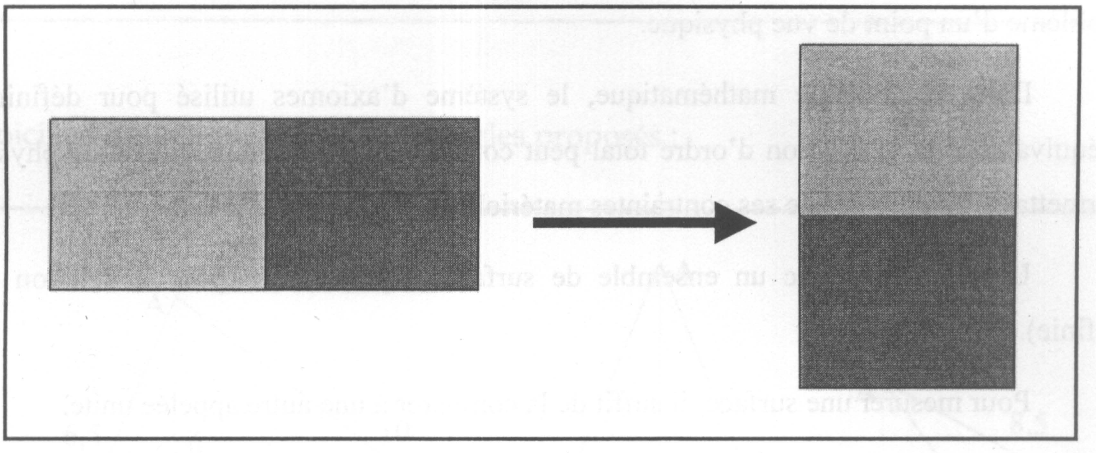
Aire du rectangle = Longueur × largeur.

Ces triangles ont la même aire mais n'ont pas la même forme. »

Cette synthèse porte uniquement sur les grandeurs.

À chaque fois que nous avons proposé cette situation dans nos classes, les élèves s'y sont réellement investis. Ils se sont trouvés confrontés aux difficultés déjà signalées précédemment : non-homogénéité des sous-figures, prégnance des directions verticale et horizontale, partage non donné... Nous prenons toujours un grand plaisir à les observer, les aider, les encourager lorsqu'ils tournent et retournent leurs morceaux sans parvenir à obtenir le triangle attendu ou lorsqu'ils multiplient les découpages pensant toujours que les solutions les plus riches sont obligatoirement les plus compliquées.

D'autres méthodes pour « *transformer le rectangle donné en un triangle équivalent* »[2] existent. Nous les avions envisagées dans notre analyse a priori mais nous ne les avons pas (ou pratiquement pas) rencontrées dans nos classes. On peut, par exemple, transformer le rectangle donné en un autre rectangle non superposable et appliquer ensuite les différents procédés déjà utilisés sur le rectangle origine.



Lors de cette première séance, les élèves manipulent des « objets plans » et la notion d'aire est approchée en termes de surfaces de même grandeur.

Mais qu'est-ce que la grandeur d'une surface ?

Comme le rappelle Nicolas Rouche[3], une grandeur n'est pas un attribut absolu d'un objet. On ne peut pas dire qu'un objet possède une grandeur.

Une grandeur ne peut être définie qu'à partir de comparaisons. Il faut donc d'abord commencer par définir une relation d'équivalence entre les objets (« être égal à ») et une relation d'ordre (« être plus petit que »).

---

[2] Formulation historique du problème.
[3] Nicolas Rouche, *Le sens de la mesure*, Didier Hatier, Bruxelles 1992.

Pour comparer des surfaces planes ou développables, on peut essayer de les superposer ou encore les découper dans du carton et comparer les masses des morceaux obtenus.

Pour les surfaces polygonales, on peut les décomposer en surfaces plus petites puis les recomposer si on a, au préalable, défini la sommation de deux surfaces (en les rapprochant, les juxtaposant).

Cependant les surfaces non planes et non développables (les sphères, par exemple) posent problème d'un point de vue physique.

Dans le domaine mathématique, le système d'axiomes utilisé pour définir la relation d'équivalence et la relation d'ordre total peut correspondre au mieux au monde physique tout en permettant de se libérer de ses contraintes matérielles.

Une aire est donc un ensemble de surfaces équivalentes (pour la relation « d'égalité » définie).

Pour mesurer une surface, il suffit de la comparer à une autre appelée unité.

Le rectangle est une surface simple qui rapproche deux domaines de grandeurs : aire et longueur. La mesure d'un rectangle (surface) est le produit des deux mesures de segments (les côtés du rectangle).

Les programmes du cycle 3 de l'école élémentaire[4] reprennent ces différents points sous la forme suivante :

- Classer et ranger des surfaces (figures) selon leur aire.

- Produire une surface qui a même aire qu'une surface donnée (et qui ne lui est pas superposable).

- Mesurer l'aire d'une surface par un pavage effectif à l'aide d'une surface de référence.

- Calculer l'aire d'un rectangle.

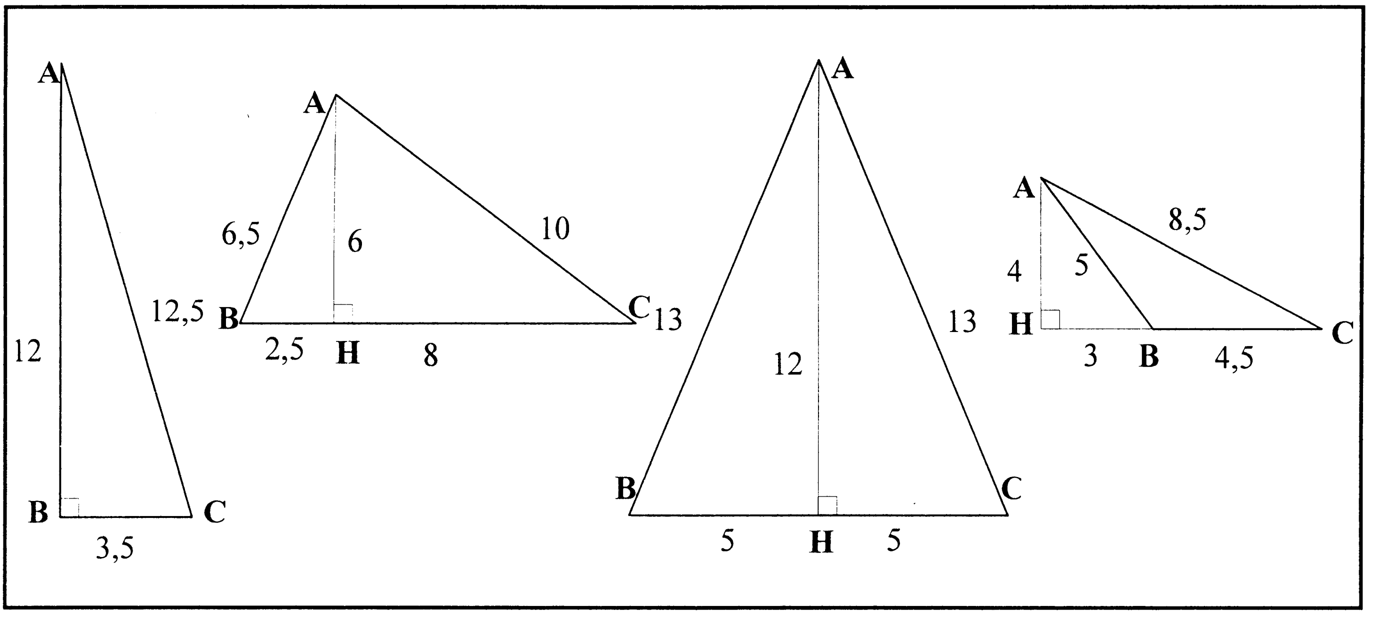
[4] Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche, Direction de l'enseignement scolaire, *Documents d'application des programmes de mathématiques au cycle 3*, CNDP 2002.

La deuxième séance consacrée à cette situation va permettre d'aborder le calcul de la mesure de l'aire d'un triangle et d'en établir la formule.

Pour cette deuxième heure, nous distribuons aux élèves une feuille de couleur sur laquelle figurent la consigne suivante et quatre triangles :

Quelle est l'aire de chacun de ces triangles ABC ?

Voici, en réduction, les quatre triangles proposés :



Des triangles supplémentaires sont à leur disposition.

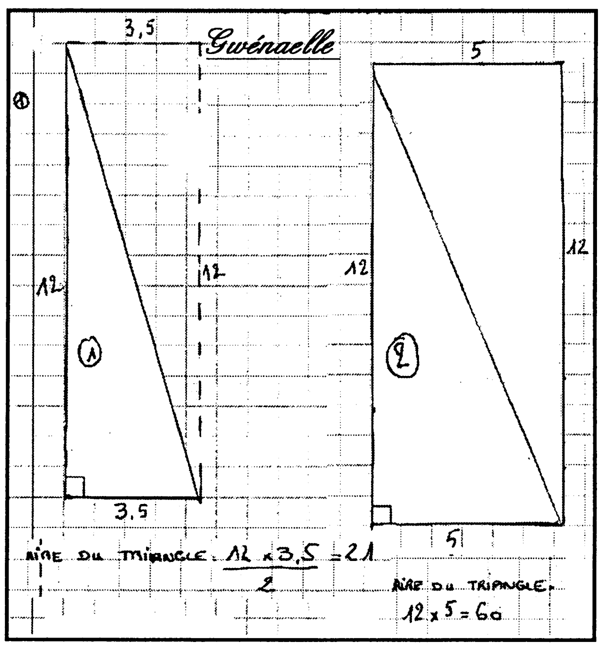
Nous attendons, a priori, qu'ils fassent le lien entre cette situation et l'activité proposée lors de la première heure.

Ce n'est pas le cas pour le premier triangle proposé. En effet, le triangle rectangle, renvoie principalement à l'image mentale construite dans les classes antérieures. En $6^{ème}$, les activités menées présentent généralement le triangle rectangle comme la moitié d'un rectangle dans lequel il est plongé. Peu d'élèves réinvestissent donc spontanément le travail de la première heure pour calculer l'aire demandée.

Par contre, pour le triangle isocèle, beaucoup d'élèves le découpent suivant l'axe de symétrie et associent les deux triangles rectangles obtenus pour former un rectangle de même aire.

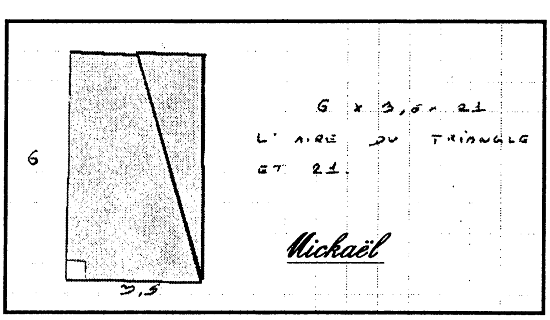
Les méthodes employées sont variées. Généralement, un même élève utilise tantôt le « plongement » du triangle dans un rectangle, tantôt la reconfiguration.

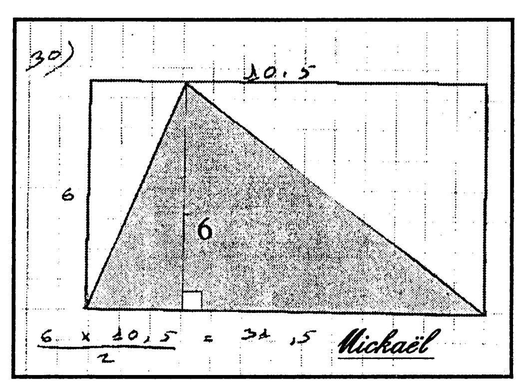
Gwénaëlle, par exemple, utilise les deux. Elle choisit de plonger le triangle rectangle dans un rectangle et de transformer le triangle isocèle en un rectangle.



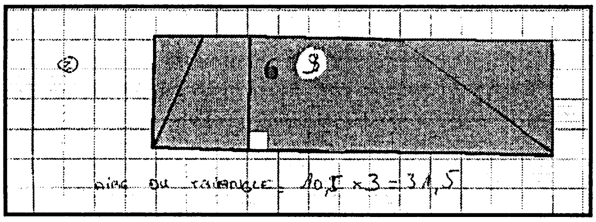
Dans cette confrontation entre les deux procédures, la division par 2 prend tout son sens. Dans le premier cas, le triangle occupe la **moitié** de l'aire du rectangle. Dans le deuxième cas, les aires sont égales mais la largeur du rectangle est la **moitié** de la base du triangle isocèle.

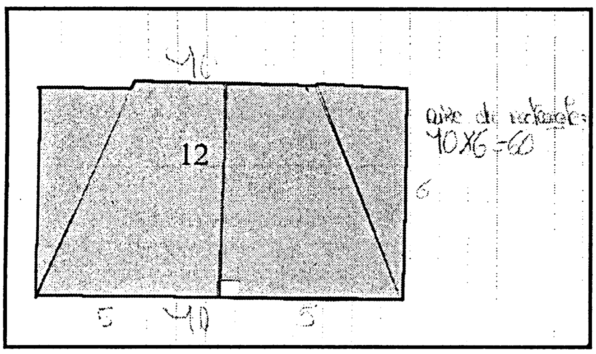
On retrouve ces deux mêmes démarches chez Mickaël.

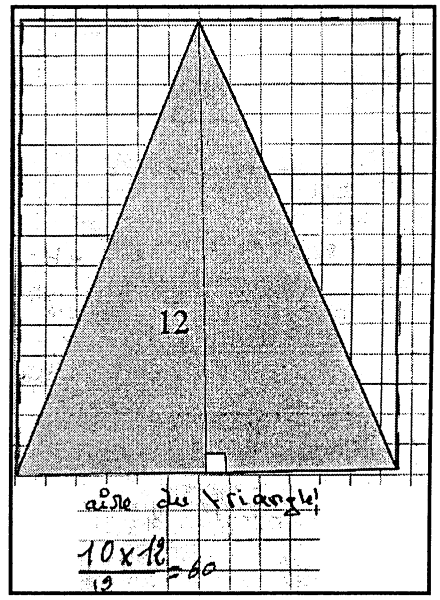




Voici d'autres exemples de productions, mais nous laisserons aux lecteurs le plaisir de découvrir toute la richesse des propositions des élèves.

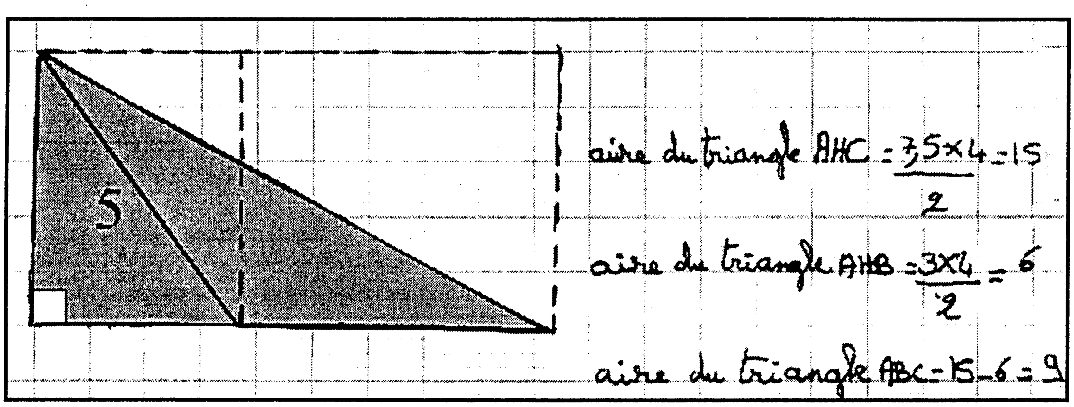






Le triangle scalène possédant un angle obtus pose davantage problème.

La solution majoritairement choisie consiste à soustraire l'aire du triangle AHB de l'aire du triangle AHC après les avoir plongés dans des rectangles.



La synthèse permet de confronter les différentes méthodes utilisées et de rapprocher les expressions numériques ainsi obtenues. Tout un travail, de découverte ou de réinvestissement, peut alors s'effectuer pour renforcer le sens des opérations et des écritures numériques : conventions opératoires, distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, addition et multiplication de nombres en écritures fractionnaires ... C'est une excellente occasion de donner du sens aux égalités d'écritures numériques.

Voici les égalités généralement obtenues.

<u>Pour le triangle 1 :</u> $\frac{12\times 3{,}5}{2}=\frac{12}{2}\times 3{,}5$.

<u>Pour le triangle 2 :</u> $\frac{10\times 12}{2}=5\times 12=10\times\frac{12}{2}$.

<u>Pour le triangle 3 :</u> $\frac{6\times(2{,}5+8)}{2}=\frac{6\times 2{,}5}{2}+\frac{6\times 8}{2}$ ou $\frac{6}{2}\times(2{,}5+8)=\frac{6}{2}\times 2{,}5+\frac{6}{2}\times 8$

La formule de l'aire du triangle est ensuite institutionnalisée en apportant le vocabulaire spécifique :

$$\boxed{\text{Aire d'un triangle}=\frac{\text{côté}\times\text{hauteur correspondante}}{2}}$$

Le côté peut être appelé base pour la hauteur utilisée et on écrit alors : $\mathscr{A}=\frac{b\times h}{2}$.

Cette formule est appliquée au dernier triangle. Elle trouve alors pleinement son utilité compte tenu de la difficulté de reconfiguration dans ce dernier cas.

On peut également établir ou rappeler les quelques règles rencontrées :

$\boxed{a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)}$ puis sous forme simplifiée $\boxed{a(b + c) = ab + ac}$;

$\boxed{b \times \frac{h}{2} = \frac{b}{2} \times h = \frac{b \times h}{2}}$.

Ces règles sont d'autant mieux acceptées et intégrées que le contexte leur donne du sens.

Dans la première séance, les élèves ont manipulé les objets surfaces et ont travaillé sur la grandeur aire.

Dans la deuxième partie, ils travaillent sur les mesures et on établit la formule de calcul de l'aire du triangle.

Cette activité permet de comprendre véritablement la formule, de créer une image mentale forte justifiant le choix des mesures à multiplier et la division par 2 :

- Les deux mesures utilisées doivent correspondre à des segments perpendiculaires (image du rectangle) ;

- la division par 2 s'explique de deux façons différentes : plongement dans un rectangle ou reconfiguration en prenant la moitié d'une des deux longueurs utilisées.

Le Litre

Dans « le triangle 5-6 », les élèves partent d'un texte, qui leur fait construire plusieurs dessins, dans lesquels deux longueurs sont données et une troisième est variable. L'ensemble des dessins obtenus leur permet ensuite d'accéder à la figure.

Dans « de l'aire », ils travaillent d'abord sur des objets physiques pour appréhender la notion d'aire à travers des surfaces équivalentes. Dans la 2ème phase, à partir de mesures données, ils doivent déterminer la grandeur aire de chaque triangle.

Dans cette nouvelle situation, les élèves disposent d'abord et uniquement de la grandeur (ici, le volume). Ils doivent alors créer leur propre représentation à partir de la consigne et se donner les moyens de construire l'objet physique en déterminant des mesures qui conviennent.

Cette situation permet donc d'envisager le problème de la représentation dans l'autre sens. Chaque élève a sa propre histoire à créer pour obtenir l'objet. C'est un moment d'autonomie totale qui lui est donné.

La consigne est on ne peut plus simple, en voici la première version destinée à des élèves de 5ème.

Construire un prisme droit, à bases triangulaires, de volume un litre.

(On ne tiendra pas compte de l'épaisseur du carton)

Elle a été expérimentée la première fois avec une classe de 29 élèves, section foot, de 16h à 17h, un lundi ! La perplexité des visages, la rapidité avec laquelle chacun s'est replié sur son univers intérieur, se demandant comment il fallait prendre cela, la capacité à relever le défi, chacun avec sa personnalité, tout cela reste gravé dans la mémoire de l'enseignant(e) qui l'a vécu !

Avec ce travail on se situe dans la « pédagogie de projet » : on demande un produit fini ; à l'individu de s'organiser dans ce but. Il est **libre**, donc entièrement **responsable** de sa démarche. Précisons que nos élèves sont habitués à ce type de fonctionnement et vont aller chercher naturellement, dans leurs documents, les renseignements qui leur manquent, ou contrôler leurs connaissances.

Environ trois séances d'une heure sont nécessaires à l'obtention d'un patron construit sur feuille A3. L'attention de l'enseignant(e) pendant ces séances se porte essentiellement sur ceux qui ont du mal à démarrer, les autres travaillent en autonomie sur une feuille qui est relevée et annotée d'une séance à l'autre.

Une mise au point sur le sens de « litre » et sa transformation en cm^3 est nécessaire au cours de la première heure afin de ne pas créer trop de distance entre les élèves.

Une contrainte supplémentaire est imposée au début de la deuxième heure, oralement :

« Les objets que vous allez créer seront ensuite exposés dans la classe. Il n'est pas intéressant de se retrouver avec le même objet construit plusieurs fois. Je serai donc amené(e) à demander à un élève de modifier ses données lorsque ce qu'il propose a déjà été prévu par un de ses camarades. »

On incite les élèves les plus à l'aise à éviter les valeurs les plus simples, qu'ils proposent rapidement, afin de les réserver aux élèves en difficulté.

L'appréhension discursive de cette consigne, si simple en apparence, nécessite d'accéder au concept pour voir l'objet, le volume comme image mentale en trois dimensions, puis le volume comme grandeur et enfin comme choix de nombres liés à la mesure de cette grandeur.

Voici une première production :

1 litre = 1 dm^3 = 1 000 cm^3
On trouve le volume d'un prisme droit à base triangulaire
en faisant : $\frac{b \times h}{2} \times H$

$\frac{8 \times 5}{2} \times 50 = \frac{40}{2} \times 50 = 20 \times 50 = 1\,000\ cm^3 = 1$ litre

On remarque le besoin de s'approprier la consigne en la reformulant à sa façon, tout en y incluant ses connaissances.

Le passage par la reformulation d'un texte afin d'obtenir une meilleure compréhension est une tâche que nous faisons, et faisons faire quotidiennement dans notre métier ; il prend tout son sens lorsqu'on lit ces traces du travail fourni :

> Il faut mettre 1 litre dant un prisme droit à base triangulaire.

Ici la reformulation est action : « Il faut mettre … ».

En voici d'autres qui portent sur la formule du volume :

> Pour construire un prisme droit a base triangulaire il faut les bonnes mesures. 1 litre = 1 dm^3 = 1000 cm^3 pour calculer le volume d'un prisme droit $\frac{b \times H \times h}{2}$

« … les bonnes mesures » disent que l'élève s'est posé le problème correctement : le point de départ (le litre) est réglé et il sait que le choix de b, H, h doit répondre à une logique.

> Il faut que l'aire de la base du triangle multiplié par la hauteur soit égale à 1000 cm^3.

Là, la reformulation débouche sur une mise en équation spontanée et réussie, que l'on peut réutiliser lors d'un travail sur la modélisation.

Dans ce genre de problème posé à l'élève, l'objectif général est qu'il mobilise efficacement diverses connaissances au service du but à atteindre, ce qui est l'essence même du travail mathématique.

C'est en cela que, contrairement à ce qu'on nous dit souvent, ce type de travail n'est pas dévoreur de temps mais, au contraire, un réel gain au niveau du temps et des savoirs à maîtriser. Ces savoirs sont ici, à faire fonctionner, à contrôler par l'élève, pour atteindre le but fixé.

On constate qu'il existe de multiples façons de s'approprier la consigne en lien avec le champ de connaissances mais aussi avec la personnalité de l'élève.

Dans un prisme droit les 2 bases sont parallèles Les autres faces sont des rectangles. $1L = 1dm^3 = 1000cm^3$
Comment calcule-t-on le volume d'un prisme droit?

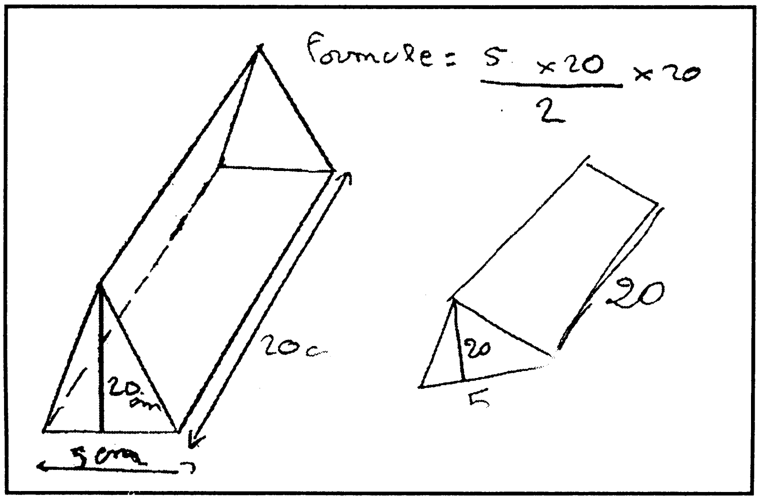
L'attention de l'élève a d'abord porté sur les propriétés du prisme droit, sur l'identification des faces de l'objet. La relance de l'enseignant(e) entre la première et la deuxième séance permet à l'élève de poursuivre son travail en autonomie.

Lorsqu'on arrive au choix des mesures à donner pour que l'objet convienne, on a souvent ce genre de démarches :

Pour faire un prisme droit à base triangulaire on sais que 1 l fait $1 dm^3 = 1000 cm^3$
volume du prisme : $\left(\frac{b \times h}{2}\right) \times H$.
$\cancel{\left(\frac{2 \times 4}{2}\right) \times 4} =$
$\left(\frac{20 \times 20}{2}\right) \times 5 = 1000$ cm

Le premier calcul se fait vraiment au hasard, l'objectif un litre n'est pas pris en compte (surcharge cognitive) mais la relecture de la consigne (toujours vivement conseillée et rappelée) permet d'aboutir au second essai (même si l'unité écrite ne correspond pas à la grandeur travaillée !).

En 5ème, on a moins souvent ce type de démarche :



L'objectif ici est visualisé par le dessin en perspective cavalière. Les essais se font avec la calculatrice et il n'y a pas de traces. Seule la solution qui convient apparaît.

Cette représentation illustre encore une fois la prégnance des figures préférées … et particulières : le triangle est spontanément isocèle. On peut noter ici, en nous appuyant sur toutes les situations de travail que l'on a expérimentées, la réticence de beaucoup d'élèves de 5ème à envisager le triangle quelconque (d'où le second tracé proposé en classe à la réflexion de l'élève, par l'enseignant(e)).

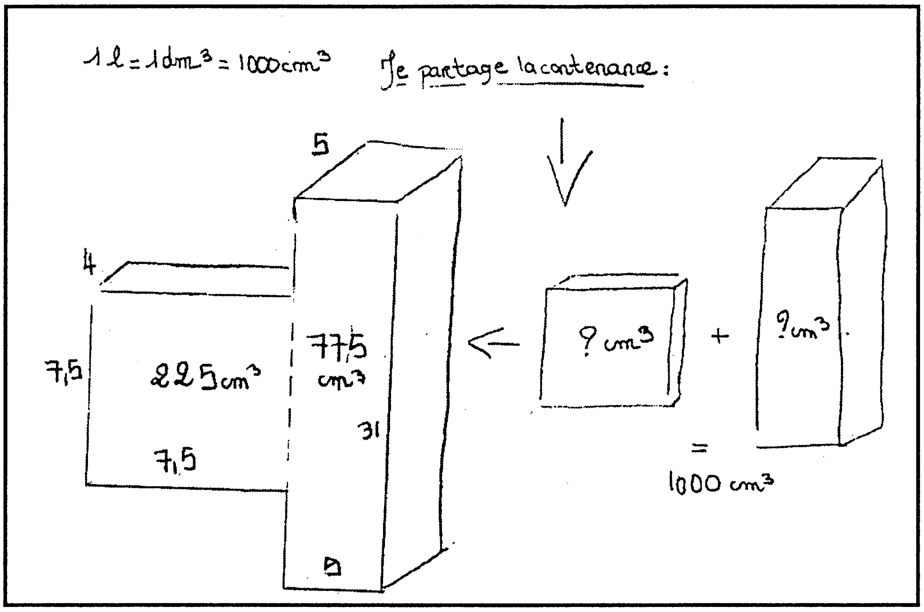
Ensuite nous avons travaillé une autre version avec nos classes de 5ème, 4ème et 3ème :

Construire un volume de contenance un litre.

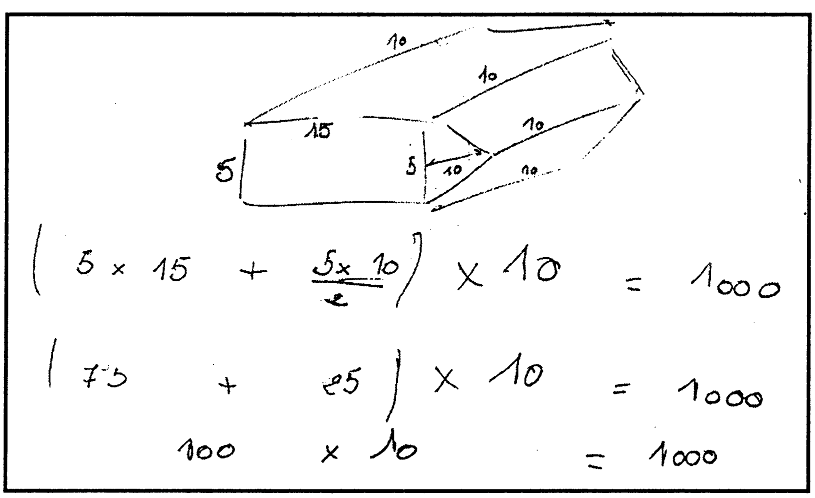
(On ne tiendra pas compte de l'épaisseur du carton)

Voici quelques productions de classes de 3ème. Ce qui est évident, c'est la maturité de la démarche par rapport aux travaux de 5ème.

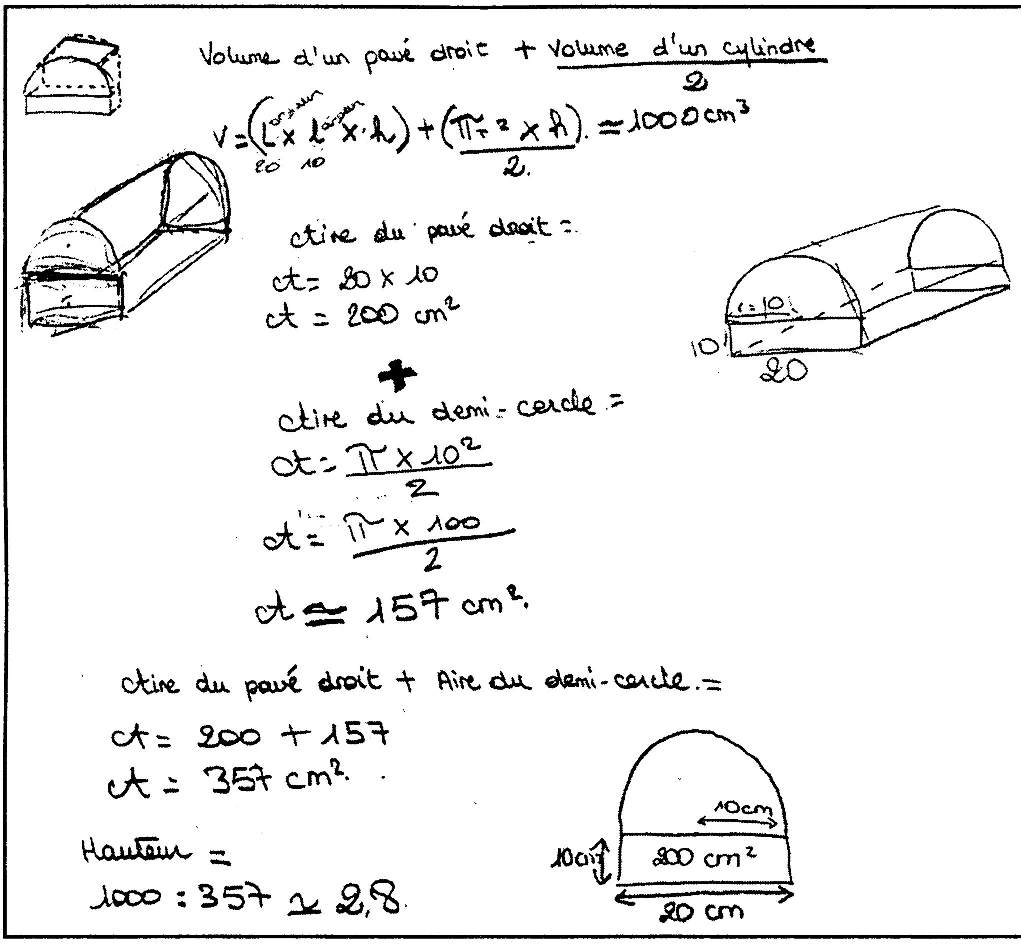
D'emblée, les élèves s'engagent dans le problème avec une représentation en perspective cavalière.



L'idée de concevoir un volume en deux parties est originale. Les calculs aboutissent à un résultat qui semble cohérent ; le passage au patron (réalisé sur feuille A3) ne pose pas de problème ; cependant le montage de l'objet est impossible compte tenu du décalage de profondeur. La modification des mesures, pour obtenir un prisme droit, se fait alors assez rapidement.



L'écriture du calcul du volume montre que celui-ci est perçu dans sa globalité alors que le précédent est perçu comme deux volumes accolés mais indépendants, d'où l'erreur de nature. Cet élève a travaillé directement à la calculatrice par essais et corrections successifs. Là encore, bien que l'on soit en 3ème, le triangle proposé est spontanément isocèle.

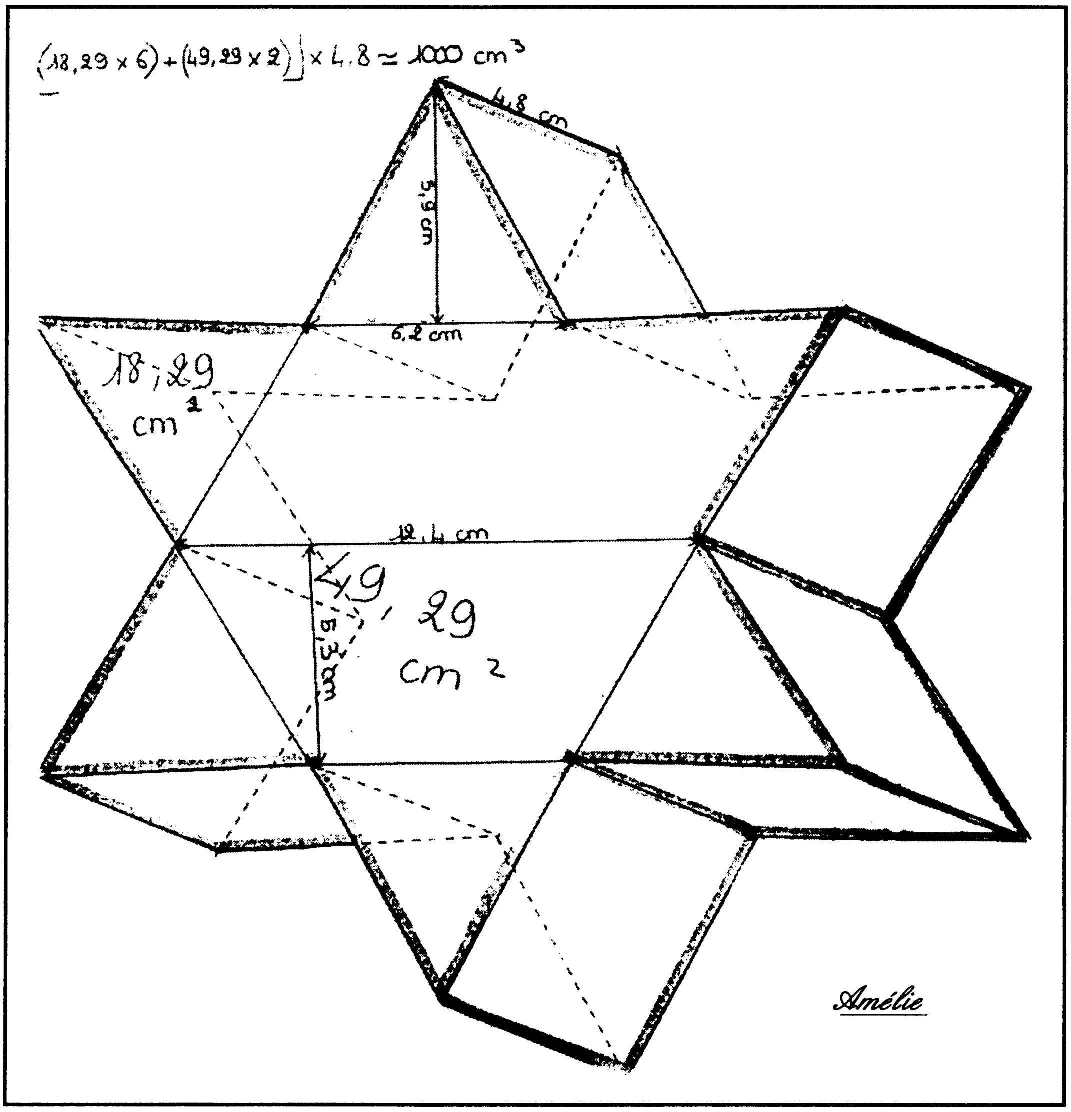


Ici le solide est perçu d'abord comme assemblage de deux volumes séparés.

La toute première visualisation en perspective cavalière est imparfaite. L'élève a recherché une aide dans son livre puis s'en est très bien sortie pour le second tracé.

Elle utilise ensuite une démarche arithmétique et traite séparément les aires, les ajoute puis détermine la hauteur à donner au solide. A chaque étape de calcul, elle a besoin d'associer une représentation. On peut supposer que pour choisir la dernière opération, elle devait voir ce que représentait son précédent calcul.

La liberté dont disposent les élèves pour imaginer leur solide leur permet non seulement de s'exprimer dans l'originalité de la forme mais les engage dans des calculs parfois compliqués, qu'ils exécutent volontiers car choisis.



Les calculs d'Amélie montrent que la décomposition de la base en sous-figures s'est faite en deux étapes séparées : elle a compté les triangles isocèles puis, au centre, deux parallélogrammes (qui reprennent deux triangles isocèles). Il suffit à l'enseignant(e) de solliciter l'explication orale de la démarche. Amélie réalise son erreur et reprend ses calculs rapidement puisque le raisonnement est correct.

Là encore, tel quel, le travail est très riche et la correction à apporter est peu coûteuse pour l'élève.

Terminons par un dernier exemple :

$V = \dfrac{A_{base} \times h}{3}$

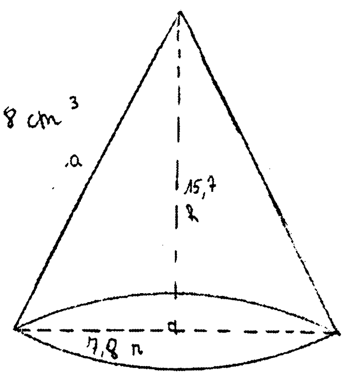
$1000 = \dfrac{A_{base} \times h}{3}$

$3000 = \pi r^2 \times h$

$7{,}8^2 \pi \times 15{,}7 \approx 3000{,}8\ cm^3$

$V = \dfrac{\pi \times 7{,}8^2 \times 15{,}7}{3}$

$V \approx 1000{,}3\ cm^3$



Triangle rectangle alors j'utilise le théorème de Pythagore

$a^2 = h^2 + r^2$

$a^2 = 15{,}7^2 + 7{,}8^2$

$a^2 = 307{,}33$

$a = \sqrt{307{,}33}$

$\boxed{a \approx 17{,}5\ cm}$

$\dfrac{49}{2 \times 17{,}5 \times \pi} \approx 0{,}446$

Périmètre du cercle : $\pi d = 15{,}6\pi \approx 49\ cm$

$0{,}446 \approx \dfrac{161}{360}$

La mise en équation pour trouver *r* et *h* se fait aisément et s'ensuit un travail par essais et corrections successifs directement à la calculatrice. Aucune difficulté pour les élèves à travailler avec les valeurs approchées : l'objet, avec sa réalité physique, est bien perçu comme une approximation dans une démarche mathématique. Le périmètre du disque de base étant trouvé, l'élève sait mobiliser le théorème de Pythagore, outil nécessaire pour trouver la longueur de la génératrice du cône. La démarche redevient arithmétique pour le calcul de l'angle du patron du cône : Thomas travaille la calculatrice à la main.

La production de Thomas illustre parfaitement ce que nous avons évoqué au début de ce chapitre : la tâche de l'élève est de repérer et mobiliser différentes connaissances qui sont autant d'outils au service de l'objectif final. L'outil équation trouve ici sa place et son sens parce qu'il est efficace.

Lorsque Thomas écrit $3000 = \pi \times r^2 \times h$, on remarque la complexité de cette équation comprenant trois lettres aux statuts différents. Mais ceci est une autre histoire, trop longue à traiter ici et que nous espérons vous proposer … plus tard !

Revenons au déroulement de l'activité.

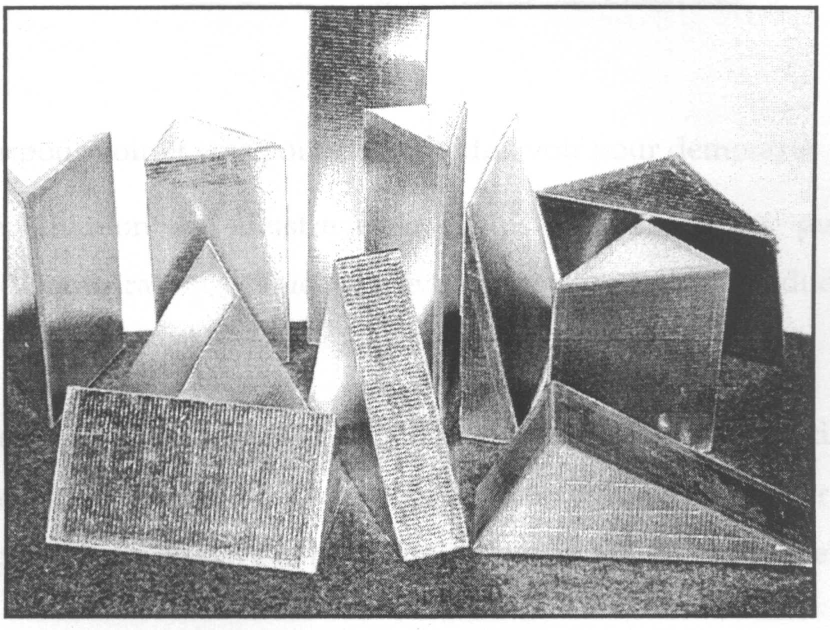
La réalisation de l'objet en carton se fait ensuite par petits groupes, en T.D., après validation du patron sur feuille A3. La validation est individuelle : la cohérence du patron se trouve vérifiée ou non lors du montage. Cette auto validation permet à l'enseignant(e) de consacrer son temps à ceux qui éprouvent le plus de difficultés.

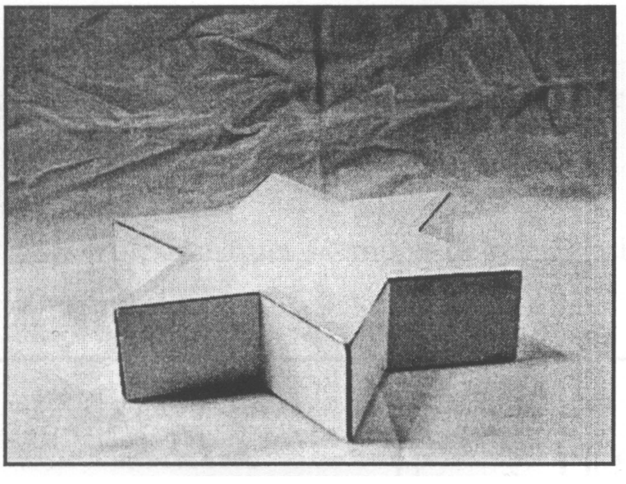
La variété des productions réalisées et exposées permet une synthèse intéressante sur « formes différentes mais même volume ». Les élèves expriment spontanément une appréciation esthétique sur les objets présentés.

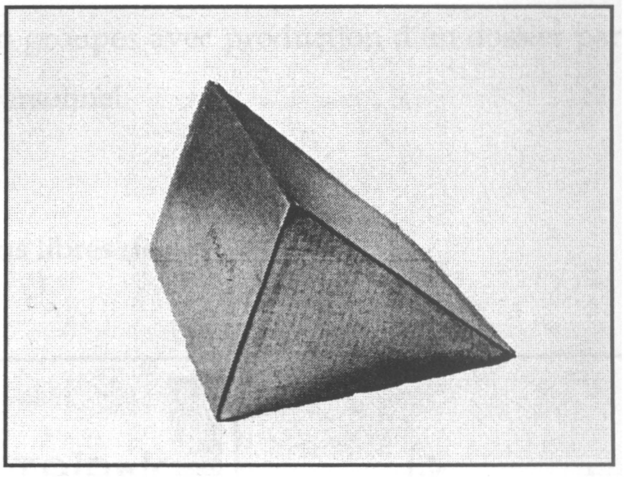
Dans « le litre », l'objet est la finalité de l'exercice. Sa représentation sur la feuille, en perspective, est une figure issue des conventions de la représentation à plat des objets en 3D. Et cette figure est d'une tout autre nature que celle de l'objet étudié. Lorsqu'on passe au tracé du patron, on revient à la géométrie plane et à la construction avec les instruments d'un dessin particulier dont les figures de base sont les faces.

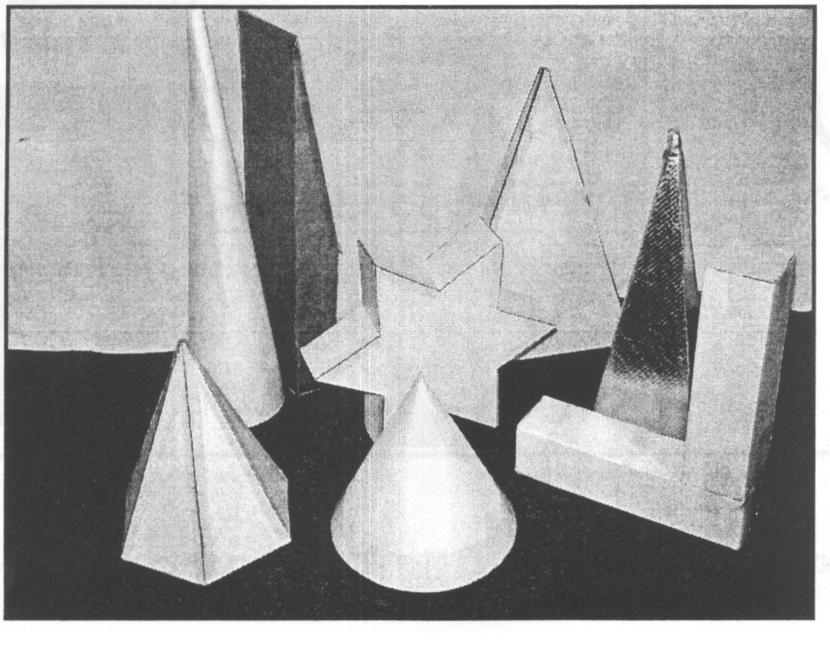
C'est en cela que nous trouvons cette situation très riche du point de vue du travail sur les figures. Elle l'est aussi du point de vue de la variété des outils mathématiques à mobiliser.

Voici quelques illustrations des objets fabriqués par nos élèves.









Du triangle aux polygones

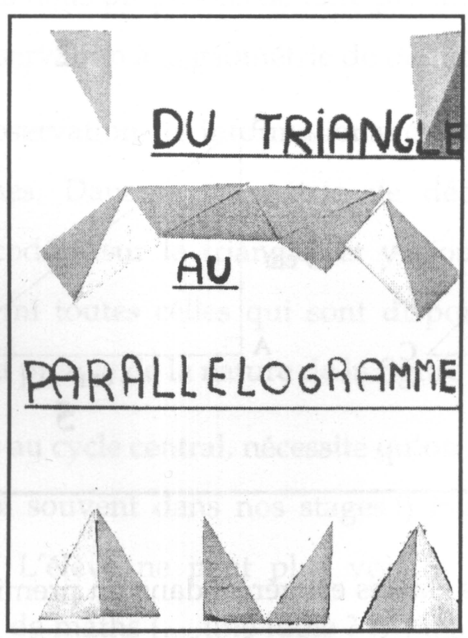
Manipuler pour voir et voir pour comprendre, voir pour démontrer.

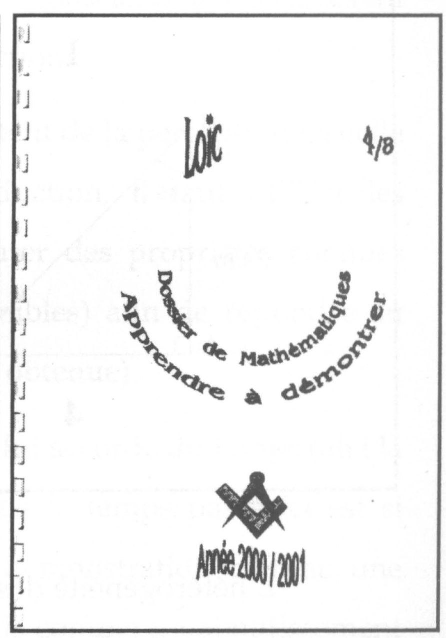
Voici une situation qui illustre encore plus que les autres, puisqu'elle mène directement à la démonstration, ce que nous évoquions dans notre introduction.

Elle peut se mener en fin de 5e ou en début de 4e. Nous l'avons utilisée également avec succès en 4e d'aide et de soutien, en collaboration avec le professeur de technologie qui a assumé la partie mise en page et réalisation d'une brochure individuelle.

Selon les classes, nous l'avons menée en groupes avec production d'un dossier par groupe, ou en travail individuel avec dossier personnel.

Voici quelques exemples de présentations libres de ces dossiers :





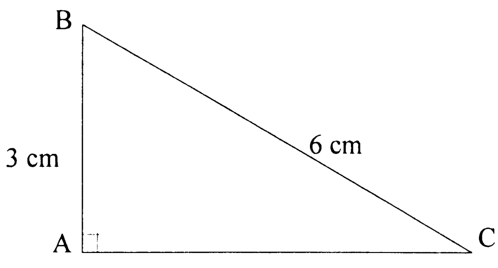
Travail de groupe en fin de 5ème

Dossier individuel en 4ème A.E.S.

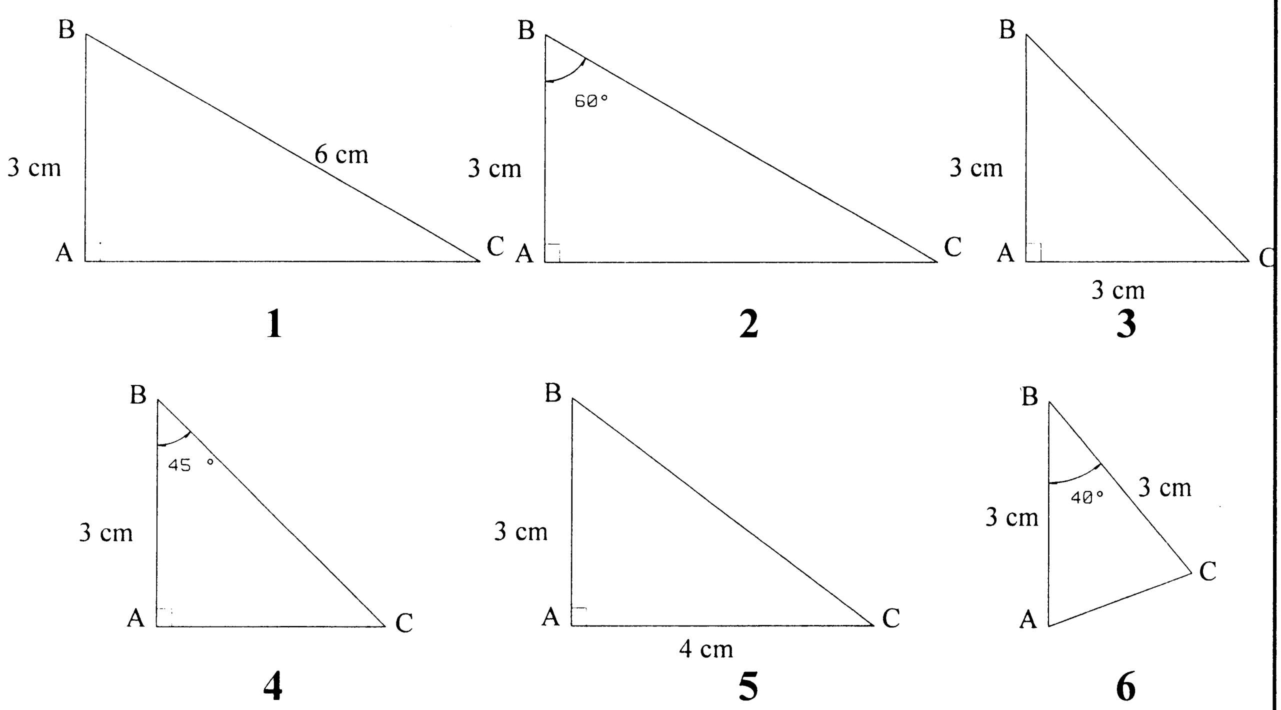
Chaque élève dispose de la consigne 1 :

Consigne 1

Découper soigneusement les triangles.
Trouver tous les polygones que l'on peut obtenir en associant deux de ces triangles par un côté égal.
Eliminer les polygones superposables.
Coller les polygones ainsi obtenus sur la feuille de groupe.
Etudier chacune de ces figures.
Justifier la nature du polygone particulier obtenu chaque fois que c'est possible.



Le triangle qui figure sur cette consigne n'est pas le même pour tous. En voici l'échantillonnage :



L'hétérogénéité des classes est gérée, dans un premier temps, par le choix que nous ferons lors de la distribution : les triangles 3, 4 et 6 offrant moins d'assemblages, seront moins longs à travailler. Certaines justifications nécessitant deux pas de démonstration seront plus coûteuses à produire (voir le travail de Loïc proposé plus loin).

Chaque élève reçoit donc cette consigne accompagnée d'un représentant codé des triangles superposables, et une feuille de couleur où sont reproduits les triangles. Ce triangle codé, accompagnant la consigne, est la mémoire indispensable des données dont il dispose puisque les triangles de la feuille couleur perdront leurs indications par découpage.

Toujours dans le même souci de gérer l'hétérogénéité, nous avons prévu une deuxième consigne afin d'élargir le champ de travail des enfants les plus rapides :

<u>***Consigne 2***</u>

Construire (autant de fois que nécessaire) le premier des polygones obtenus et reprendre la consigne 1 en remplaçant le triangle donné par ce polygone.

Mais nous devons reconnaître qu'elle a été assez peu utilisée, seulement lorsque les élèves ont travaillé par groupe dès le départ. En effet, la tâche essentielle de la consigne 1 qui est d'élaborer une démarche déductive prend beaucoup de temps lorsqu'elle est individuelle.

Dans cette activité nous nous proposons de faire prendre conscience à nos élèves du passage de la géométrie d'observation à la géométrie de déduction.

Dans la géométrie d'observation, les informations résultent de la perception visuelle et se suffisent à elles-mêmes. Dans la géométrie de déduction, il faut utiliser les informations explicites (ici codées sur le triangle) et y ajouter des propriétés connues (après les avoir choisies parmi toutes celles qui sont disponibles) afin de répondre au problème posé (ici apporter la preuve de la nature de la figure obtenue).

Cette étape, essentielle au cycle central, nécessite qu'on lui accorde du temps (ah ! la course au temps invoquée si souvent dans nos stages !) mais le temps passé ici est si rentable en terme de sens ! L'élève ne peut plus voir la démonstration comme une exigence particulière du prof de maths (... une lubie ? ...) mais comme un aboutissement de la pensée... et alors que d'incompréhensions évitées !

Le travail de l'élève commence par le découpage et l'assemblage de deux triangles : il y entre aisément et avec plaisir. Cette étape de manipulation donne du sens, de la réalité à la suite.

La première difficulté s'annonce pour quelques-uns lorsqu'il faut retourner les triangles de départ pour obtenir tous les polygones attendus et/ou lorsqu'il faut ensuite éliminer les figures superposables par retournement. Le retournement est à réaliser matériellement avec eux pour les convaincre. Cette difficulté concerne les deux « sœurs ennemies » que sont la symétrie axiale et la symétrie centrale : l'une est un anti-déplacement (étudiée dès l'école élémentaire, elle n'est pas toujours maîtrisée en 3e) l'autre est un déplacement (moins « naturel » que l'effet miroir du précédent). La confusion est peut-être aussi confortée par le fait que le même mot en début d'expression n'incite pas à la recherche des différences.

Un autre obstacle à prévoir : trouver tous les polygones possibles. Obtenir deux ou trois configurations passe encore, mais six !... A vrai dire, ce type d'exploration est assez peu fréquent dans ce qu'on leur propose habituellement. L'élève agit ici davantage par tâtonnement que par réflexion-organisation. C'est donc un espace privilégié pour ce type d'apprentissage ; de même, c'est un espace privilégié pour voir en acte les deux symétries, les confronter et lever certaines confusions.

Lorsque tous les assemblages sont réalisés, on demande de les coller sur une feuille blanche puis de nommer ou caractériser chaque figure. Commence alors pour chacune la recherche de la preuve.

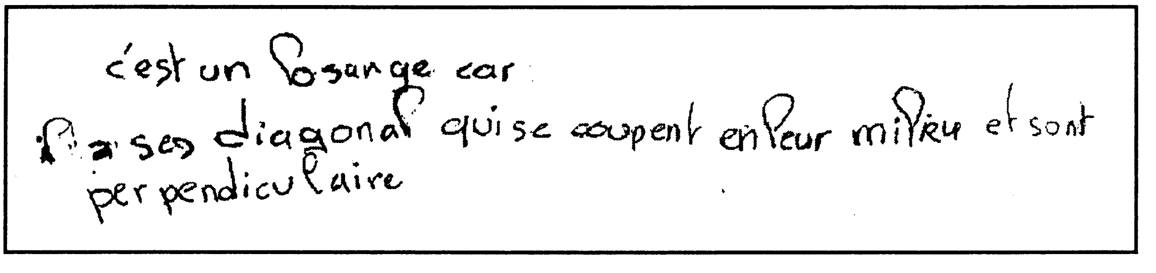
Cette étape est un long va et vient entre l'enseignant et l'élève ou l'enseignant et le groupe. Dans un premier temps on obtient souvent un catalogue de ce qui est vu, perçu ou connu par l'élève.

Dans cet exemple, on part du triangle 6.

1ère production d'un groupe :

Par perception de la configuration obtenue et reproduite à main-levée (on est passé à la figure), les élèves reconnaissent le losange. Les informations perdues par découpage ou retournement ne sont pas reprises et ils énoncent une propriété à partir des renseignements écrits ou mémorisés restants (dans d'autres cas, ils se basent sur ce qui est perçu spontanément). Mais cette pseudo-propriété énoncée est réfutée par l'enseignant : *« Quelles sont les données qui te permettent de l'affirmer sur les autres angles du losange ? Un quadrilatère qui a ses angles opposés de même mesure est-il toujours un losange ? »*

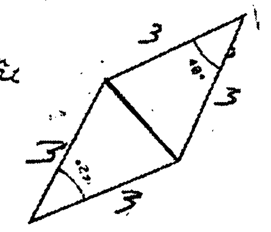
2ème production du groupe :



Là, la propriété est correcte mais elle ne correspond pas aux données du problème : ils ont récupéré une propriété connue du losange dans leur bagage mathématique et ils l'ont confrontée à la réalité visuelle et non à la réalité du problème. Il faut alors renvoyer le groupe à la lecture de la consigne et aux informations qui accompagnent le triangle témoin, non découpé.

3ème production de ce même groupe :

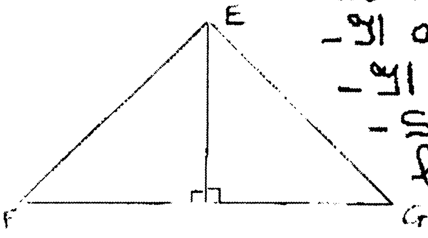
C'est un losange car :
- C'est un quadrilatère qui a ses quatres côtés de même longueur donc c'est un losange.



Le dialogue avec le professeur a payé : la justification est acceptée.

Autre exemple avec comme point de départ le triangle 3.

1ère production :



le Triangle isorectangle :
- Il a un angle droit
- Il a deux côtés égaux
- Ses deux angles à la base mesurent 45°
Il a deux côtés perpendiculaires et de même mesure

Dans cette première version, on peut supposer qu'il y a accommodation tantôt sur le triangle de départ, tantôt sur le triangle obtenu : en effet, l'homogénéité entre ces deux figures n'aide pas à lever cette confusion, l'élève ayant perdu de vue à la fois le point de départ et l'objectif de son travail. Là encore, un questionnement précis de l'enseignant(e) permettra une identification correcte de chacune. L'élève doit se dégager de l'élément de base donné, manipulé, connu, pour appréhender la reconfiguration réalisée comme nouvel objet géométrique : il doit apprendre à changer de point de vue.

2ème production :

Le triangle isocèle et rectangle : Il a deux côtés égaux -
l'angle $\hat{B}$ et l'angle $\hat{C}$ mesurent chacun 45°. Donc
45°+45°= 90°. On en conclue que ce triangle possède
un angle droit l'angle $\hat{E}$. Les deux angles à la
base sont égaux à 45° ~~Alors~~ c'est un triangle isocèle
~~rectangle pour cause~~ qu' ~~il a un angle droit~~

donc il est ~~également~~ rectangle.

L'expression est encore confuse mais le raisonnement se construit : un des triangles de départ est nommé ainsi que la nouvelle figure obtenue.

3ème production :

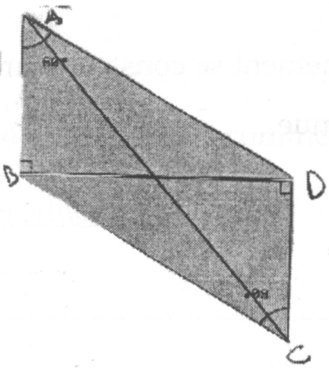
le triangle est isocèle et rectangle :
l'angle $\hat{B}$ et l'angle $\hat{C}$ du triangle de départ
mesurent chacun 45°. Donc 45 + 45 = 90°. On
en conclut que ce triangle possède un angle droit
l'angle $\hat{E}$, donc il est rectangle. les deux angles
à la base $\hat{F}$ et $\hat{G}$ sont égaux à 45°. Alors
c'est un triangle isocèle. le Triangle EFG est
isocèle et rectangle ou isorectangle.

Le triangle de départ est identifié, le raisonnement organisé et le triangle, objet de la justification, est nommé.

La perte d'informations (illustrée par le premier exemple), la difficulté à dissocier l'objet de départ de l'objet produit (deuxième exemple), la prégnance de ce qui est perçu visuellement et spontanément, tout cela isole souvent l'enfant dans une bulle dont il a du mal à se sortir. Ce genre de travail permet l'apprentissage de méthodes de questionnement.

L'élève peut aussi s'enfermer dans une voie d'exploration unique.

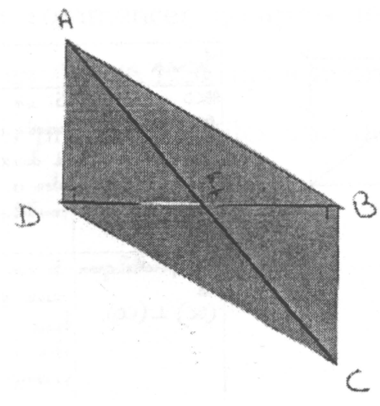
La donnée de la mesure d'un angle oriente ici la réflexion vers la propriété des angles alternes-internes.



* $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$ sont deux angles alternes internes et
$\widehat{ABD} = \widehat{CDB} = 90°$
Si deux angles alternes internes sont de même mesure alors les droites sont parallèles
donc (AB) // (CD)
* $\widehat{DBC}$ et $\widehat{ADB}$ sont deux angles alternes internes et $\widehat{DBC} = \widehat{ADB} = 35$
Si deux angles alternes sont de même mesure alors les droites sont parallèles.
donc (AD) // (BC)

* ABCD quadrilatère (AB) // (CD) (AD) // (BC)
si un quadrilatère a ses côtés opposés parallèles deux à deux alors c'est un parallélogramme.
donc ABCD est un parallélogramme.

La donnée des longueurs oriente cet autre élève vers l'utilisation d'une propriété sur les côtés.



• ABCD quadrilatère

BC = AD = 3cm et AB = CD = 6 cm

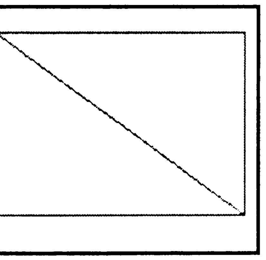
Or si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur deux à deux, alors c'est un parallélogramme donc ABCD parallélogrammes.

L'influence des données de départ, la difficulté à changer de point de vue sont deux éléments qui empêchent de produire une solution au moindre coût.

Différents types de productions sont possibles, pour la même figure obtenue, selon les objectifs fixés et le niveau de la classe.

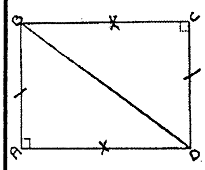
Dans cet exemple, la réflexion est déjà organisée et mise en mots même si on n'a pas encore la démonstration conventionnelle, nous sommes en classe de 5ème.

Le rectangle a quatre angles droits : deux déjà donnés sur le triangle rectangle et deux qui se forment en ajoutant les deux angles complémentaires et deux triangles rectangles.



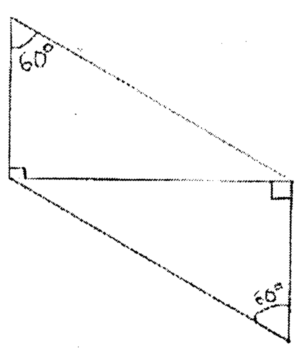
Dans l'exemple qui suit, le niveau du groupe a permis un premier travail autour de la démonstration et la production obtenue est déjà très élaborée.

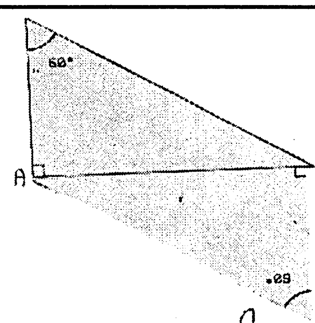
figure 1:



Je sais que	propriété	Je peux dire que
ABCD quadrilatère BC = AD CD = AB	Si un quadrilatère a ses cotés opposés de même longueur deux à deux alors ce quadrilatère est un parallélogramme.	ABCD parallélogramme.
ABCD parallélogramme (BC) ⊥ (CD)	Si un parallélogramme possède deux cotés consécutifs perpendiculaires alors ce parallélogramme est un rectangle.	ABCD rectangle.

Voici un dernier exemple extrait du dossier individuel de Loïc (élève de 4ème A.E.S.).





les noms des sommets ?

1) Ce que je sais :

$\widehat{B'CA} = 90°$ $\widehat{CAB} = 90°$

et B'C = 3 cm, AB = 3 cm

2) Propriété :

Si deux angles en position d'alternes - internes sont égaux . Alors ils sont formés par deux parallèles et une sécante. Donc (B'C) // (AB) .Si un quadrilatère a deux cotés opposés parallèles et de même mesure alors c'est un parallelogramme.

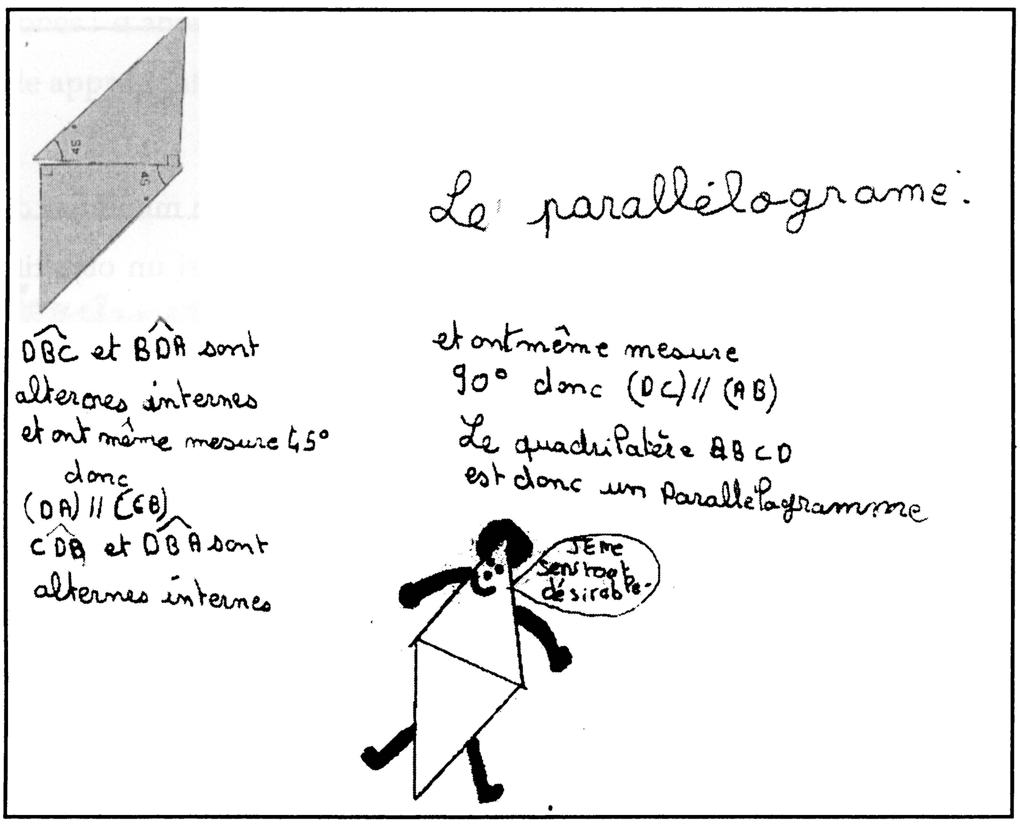
3) Conclusion :

B'ABC est un parallelogramme.

Ici, le collage et la construction cohabitent à la demande de l'enseignant(e). La production finale est encore incomplète mais nous nous sommes donnés une limite de temps. Il ne s'agit pas de lasser les élèves par des allers et retours trop prolongés, de plus la réalisation en technologie ne peut commencer qu'après le travail mathématique. Précisons encore que, pour ce travail en 4ème A.E.S., nous avons donné une « fiche de connaissances » qui regroupe toutes les propriétés utiles afin de limiter leur charge de travail.

Spontanément naissent des manifestations personnelles liées à ce type de travail.

En voici deux exemples.



Les élèves (de niveau faible) de ce groupe ont éprouvé beaucoup de plaisir tout au long de cette activité et l'ont exprimé naturellement en illustrant chaque page du dossier (et l'inspiration n'a pas faibli).

L'originalité du fonctionnement dans cette activité a conduit un groupe d'élèves à donner leur avis. Ils ont effectivement beaucoup travaillé les démonstrations et nous ont offert un très beau dossier.

Je trouve que le travail en groupe est plus efficace que le travail seul. Ce devoir était intéréssant et demandai beaucoup de soins. Grégory	C'est un travail intéressant qui demande beaucoup de temps et de travail soigné. Carole.
Je trouve que lorsque qu'on travail à plusieurs, on découvre beaucoup de choses intéréssantes Julie	Cela nous oblige à réflechir d'avantage On découvre des choses nouvelles et intéressantes. Flavie,

Ce travail est très intéresant et il l'ai surtout quand on est en groupe, on découvre plus de choses à plusieurs.

Amélie

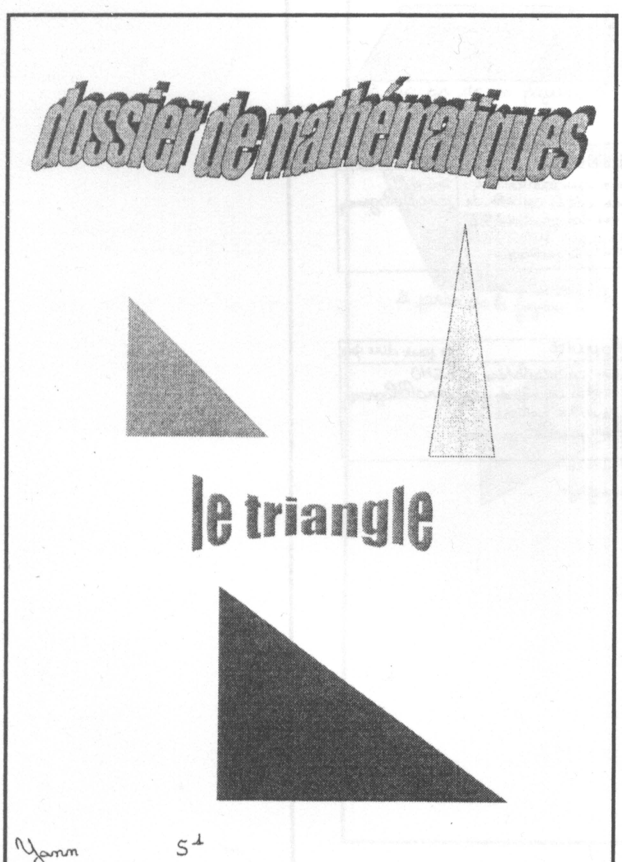
L'élaboration d'une démarche déductive, qui nécessite un minimum de maîtrise de la langue, est l'objectif principal de cette situation, et c'est aussi un objectif essentiel du cycle central.

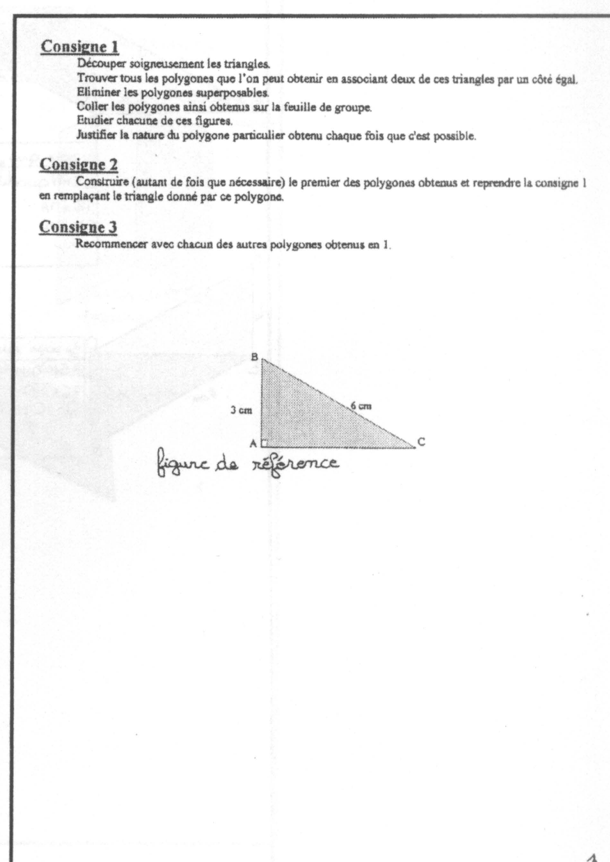
Mais cette activité comporte aussi, dans son volet travail de groupe, un objectif plus général « d'éducation à la citoyenneté ». Il y a en effet, au sein du groupe, nécessité de collaborer, de s'organiser, de se respecter et c'est ainsi que nous participons à cet objectif décliné dans les Instructions Officielles.

La synthèse de ce travail se fait au sein de chaque groupe (ou individuellement) au fur et à mesure que la production est validée par l'enseignant. Des échanges de dossiers entre ceux qui travaillaient sur les triangles 1 et 2 (ou 3 et 4) sont fructueux : les données ne sont pas les mêmes, les démonstrations non plus, mais on obtient les mêmes polygones.

A l'évidence, ce travail plait aux élèves pour différentes raisons. Il y a, dans un premier temps, le repli sur soi et ses connaissances, son petit univers matérialisé par les collages obtenus (la manipulation permet une appropriation forte). Dans un deuxième temps, il y a la relation particulière entre l'enseignant et le groupe pendant laquelle s'instaure un dialogue direct, prolongé et privilégié, parfois douloureux, mais dans lequel l'enfant prend conscience de ce qui se construit. Enfin, il y a ce dossier final -production inhabituelle- où l'élève peut exprimer un peu de sa personnalité, ce qui est assez rare dans notre matière.

Voici, reproduit dans son intégralité, le dossier de Yann, élève de 5ème. On remarquera en particulier la page de présentation et l'évolution dans le choix des noms des polygones : d'abord ABC, OPQ puis BETA, MARS, JEAN, RENO (ce qui témoigne d'une réelle appropriation du travail demandé).




Consigne 1

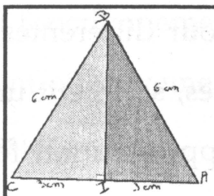
Découper soigneusement les triangles.
Trouver tous les polygones que l'on peut obtenir en associant deux de ces triangles par un côté égal.
Eliminer les polygones superposables.
Coller les polygones ainsi obtenus sur la feuille de groupe.
Etudier chacune de ces figures.
Justifier la nature du polygone particulier obtenu chaque fois que c'est possible.

Consigne 2

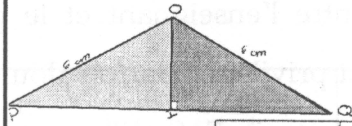
Construire (autant de fois que nécessaire) le premier des polygones obtenus et reprendre la consigne 1 en remplaçant le triangle donné par ce polygone.

Consigne 3

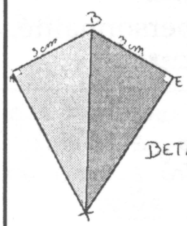
Recommencer avec chacun des autres polygones obtenus en 1.



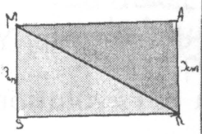
Je sais que	propriété	Je peux dire que
$\widehat{AIC} = \widehat{AIB} = 90°$		B, I, C sont alignés
C, I, B alignés		CB = 6 cm
BAC triangle CD = AD = CA = 6 cm	Si un triangle a ses côtés de même longueur alors il est équilatéral	DAC = triangle équilatéral



Je sais que	propriété	Je peux dire que
$\widehat{OIP} = \widehat{OIQ} = 90°$		P, I, Q sont alignés
OP = OQ = 6 cm	Si un triangle a deux côtés de même longueur alors il est isocèle	OQP = triangle isocèle

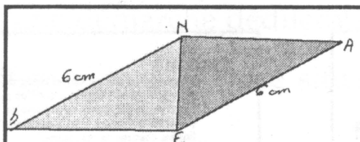


DETA = cerf-volant

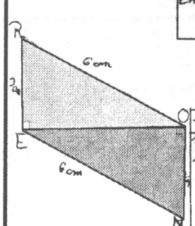


Je sais que	propriété	Je peux.
MARS quadrilatère MA = RS MS = AR = 3 cm	Si un quadrilatère a ses cotés opposés de même longueur 2 à 2 alors c'est un parallélogramme	MARS parallélogramme
MARS parallélogramme $\widehat{MAR} = 90°$	Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle	MARS rectangle

2

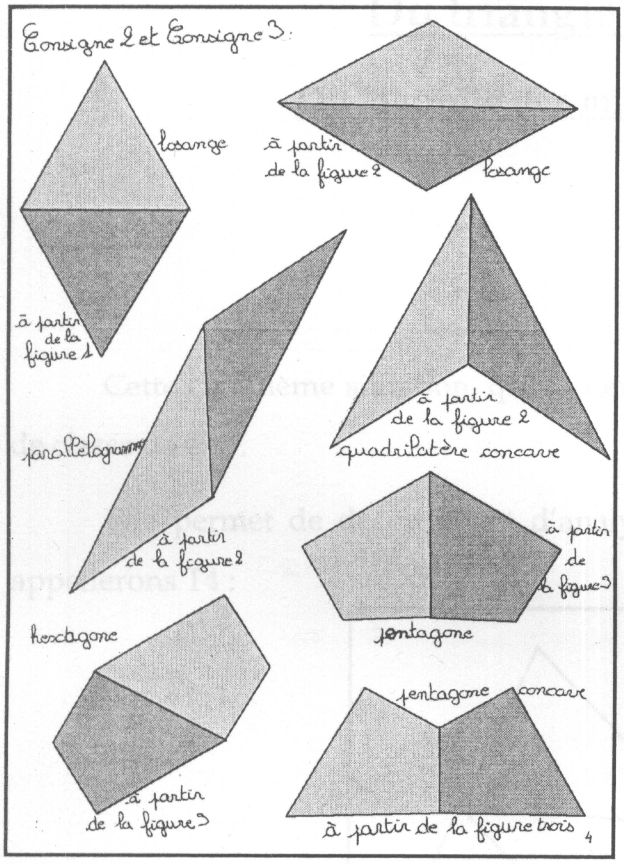


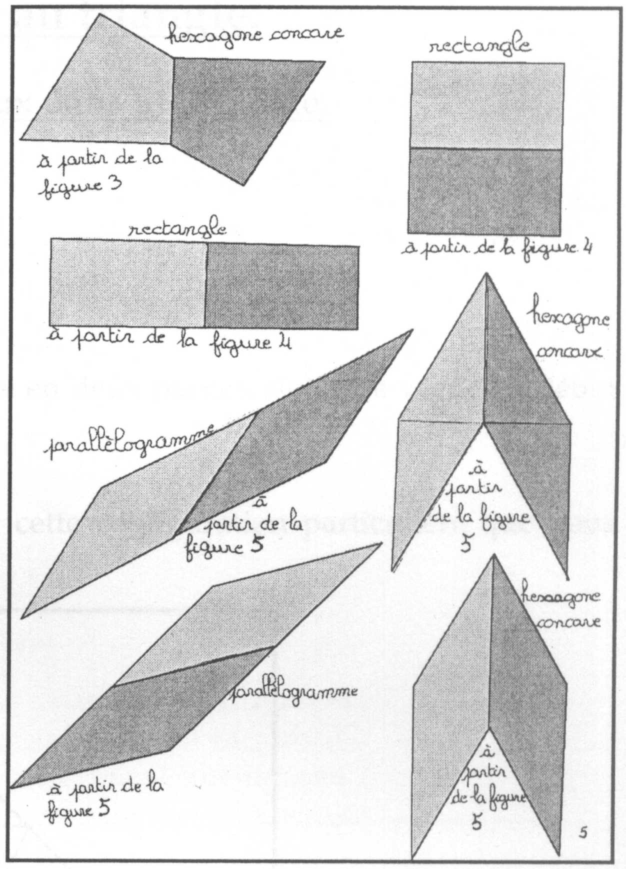
Je sais que	propriété	Je peux dire que
JEAN quadrilatère JE = NA EA = JN	Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur 2 à 2 alors c'est un parallélogramme	JEAN parallélogramme

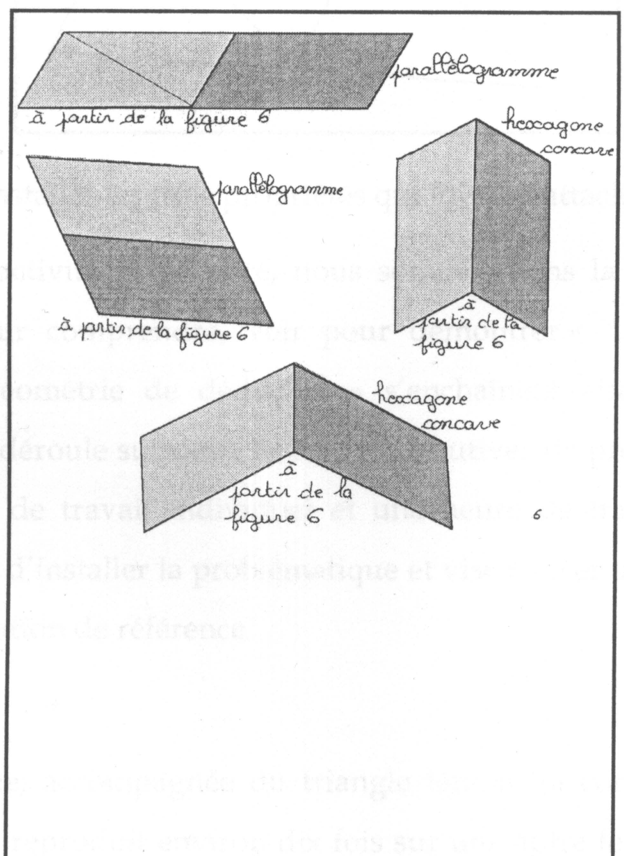


Je sais que	propriété	Je peux dire que
RENO quadrilatère RE = NO RO = EN	Si un quadrilatère a ses côtés opposés de même longueur 2 à 2 alors c'est un parallélogramme	RENO parallélogramme

3


Consigne 2 et Consigne 3 :
losange
à partir de la figure 1
à partir de la figure 2
losange
à partir de la figure 2
quadrilatère concave
parallélogramme
à partir de la figure 2
à partir de la figure 3
pentagone
hexagone
à partir de la figure 3
pentagone concave
à partir de la figure trois
4


hexagone concave
à partir de la figure 3
rectangle
à partir de la figure 4
rectangle
à partir de la figure 4
hexagone concave
parallélogramme
à partir de la figure 5
à partir de la figure 5
hexagone concave
parallélogramme
à partir de la figure 5
à partir de la figure 5
5

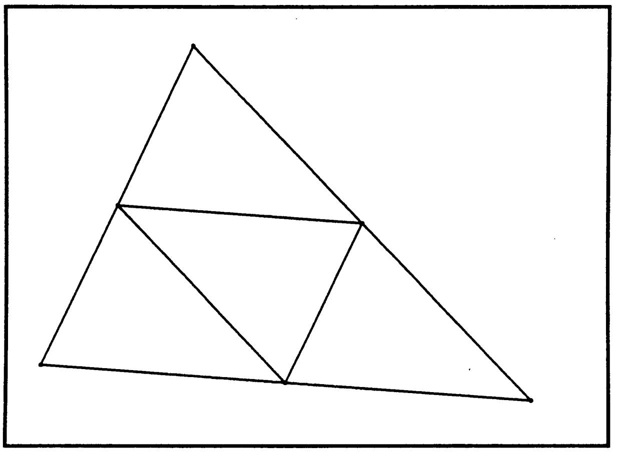

parallélogramme
à partir de la figure 6
parallélogramme
à partir de la figure 6
hexagone concave
à partir de la figure 6
hexagone concave
à partir de la figure 6
6

Du triangle ... au triangle.

Ou la droite des milieux dans un triangle.

Cette cinquième situation, qui se déroule en deux parties, doit être vécue en début de classe de 4ème.

Elle permet de découvrir et d'analyser cette configuration particulière que nous appellerons T4 :



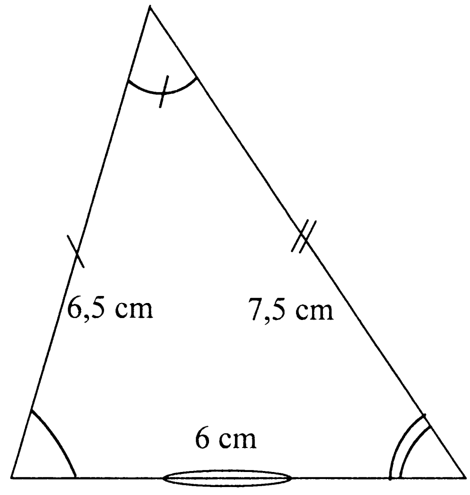
et, de ce fait, d'installer les trois propriétés qui lui sont attachées.

Comme dans l'activité précédente, nous sommes dans la démarche « manipuler pour voir et voir pour comprendre, voir pour démontrer ». Les phases « géométrie d'observation » et « géométrie de déduction » s'enchaînent aisément au cours de la première partie qui se déroule sur deux heures consécutives de préférence (on peut aussi scinder en une heure de travail individuel et une heure de travail de groupe). Cette première étape permet d'installer la problématique et vise à créer une image mentale forte qui la fera devenir situation de référence.

Voici la consigne, accompagnée du triangle témoin (à conserver telle quelle par l'élève) ; ce triangle est reproduit environ dix fois sur une autre feuille couleur distribuée en même temps :

Consigne : **Triangle 1**

Tous les triangles construits sur la feuille jointe sont identiques au triangle d'origine ci-dessous :

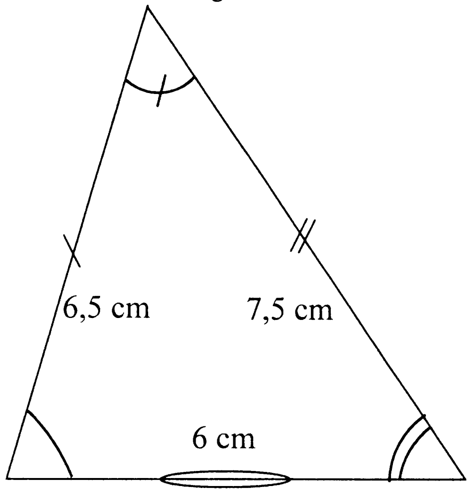


Découper des triangles.
Obtenir, en les juxtaposant, un nouveau triangle.
Construire la figure ainsi obtenue.
Observer et formuler toutes les remarques possibles.

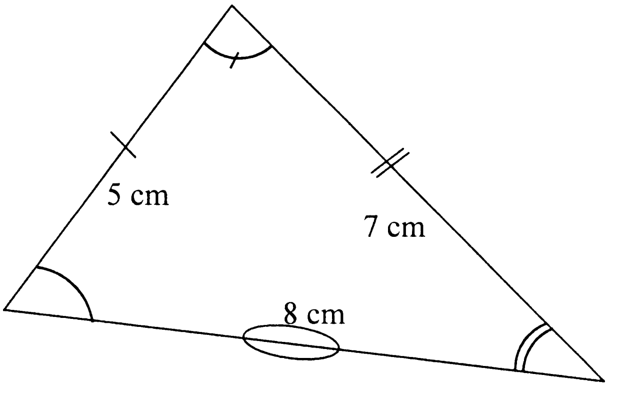
Nous ne proposons pas le même triangle à tous. Il s'agit, là encore, de gérer l'hétérogénéité mais aussi de donner à la confrontation au sein du groupe la dimension généralisante qui fait accéder à la figure.

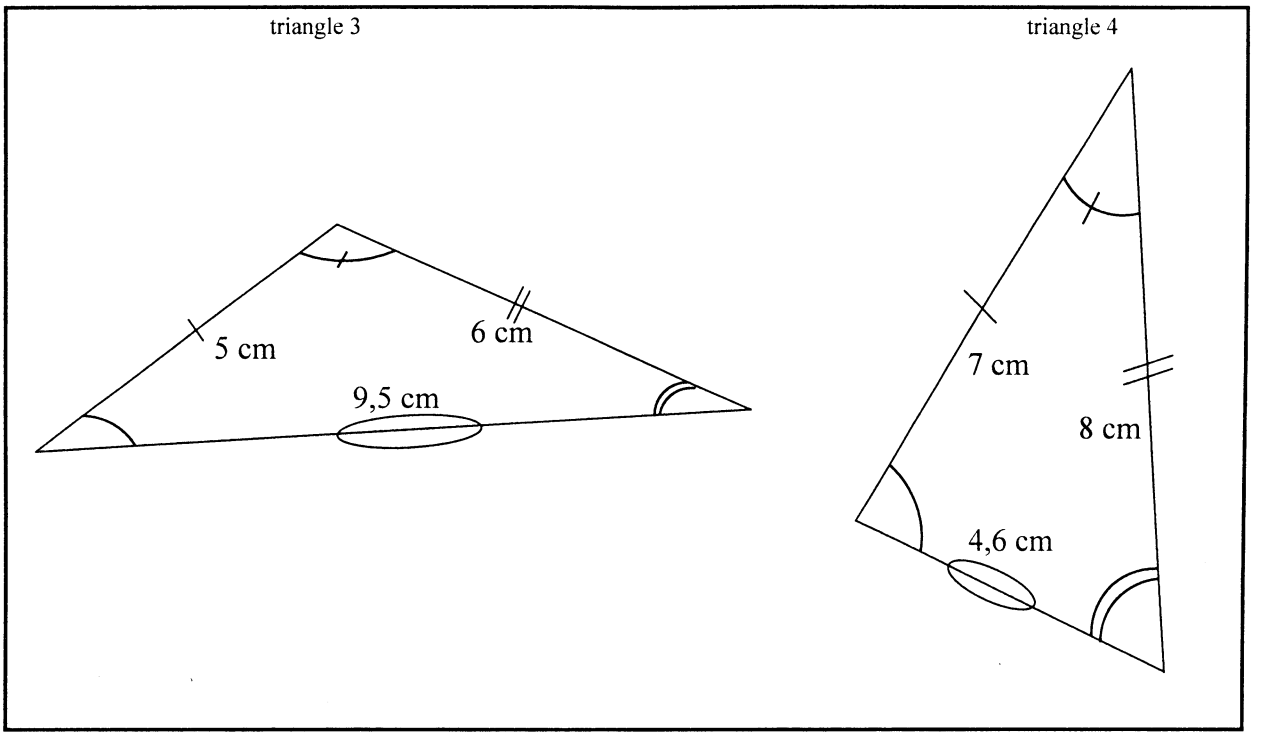
Voici les différents triangles proposés :

Triangle 1



Triangle 2



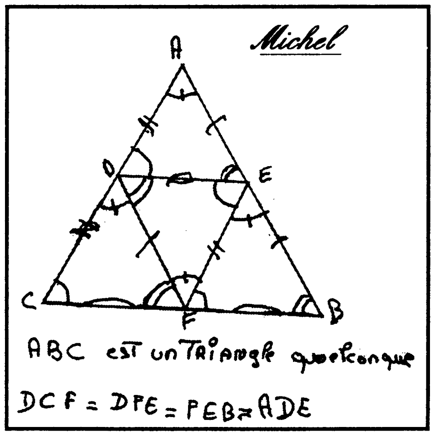


Nous avons introduit un triangle avec un angle obtus pour élargir la perception du dessin triangle et aboutir au concept.

Un premier temps d'appropriation individuelle par le découpage et l'assemblage permet de travailler la reconfiguration. Ici la reconfiguration est homogène : triangles au départ, triangle à l'arrivée. Dans l'activité précédente, elle était parfois homogène, parfois hétérogène : triangles au départ, différents triangles ou quadrilatères à l'arrivée. Pour obtenir le triangle de référence T4 ou le triangle avec un niveau de plus (configuration de 9 petits triangles, T9), des modifications méréologiques (de position) sont nécessaires : nous sommes très attentifs à laisser du temps aux élèves afin qu'ils tournent et retournent leur triangle dans les mains ou sur la table jusqu'à ce qu'ils trouvent. Généralement, ils sont suffisamment intéressés pour oublier leur voisin et faire le cheminement attendu seuls. C'est un moment privilégié pour les observer, les encourager sans jamais les juger.

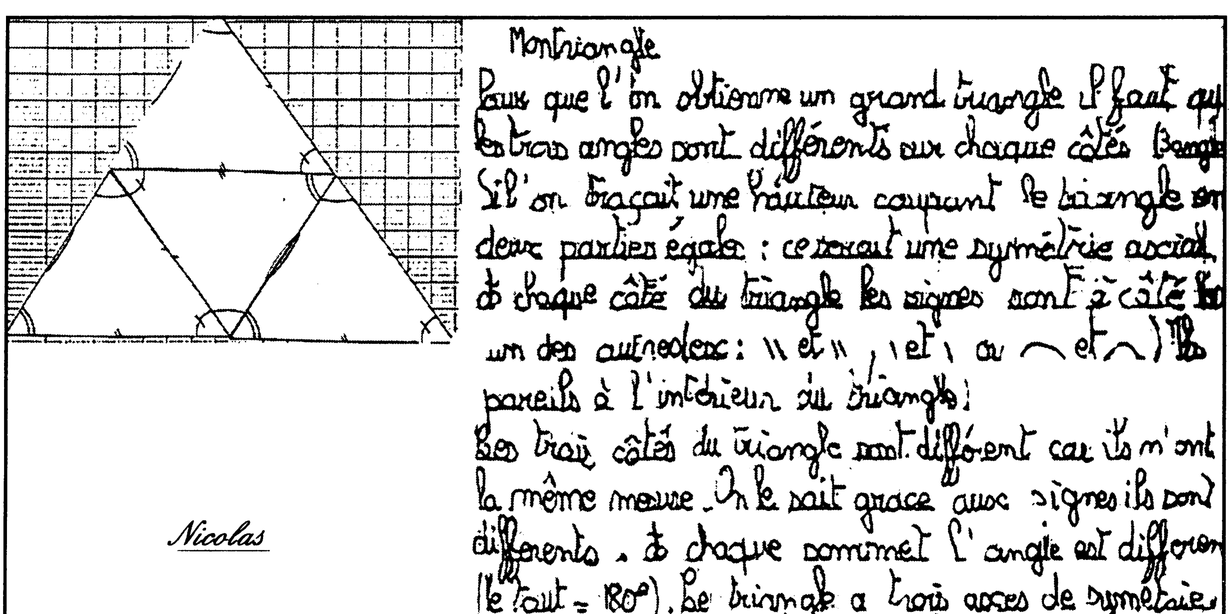
Chacun se concentre ensuite sur « l'observation » et « la formulation » qui lui sont demandés.

L'appréhension perceptive de la figure obtenue se traduit par ce genre de production :

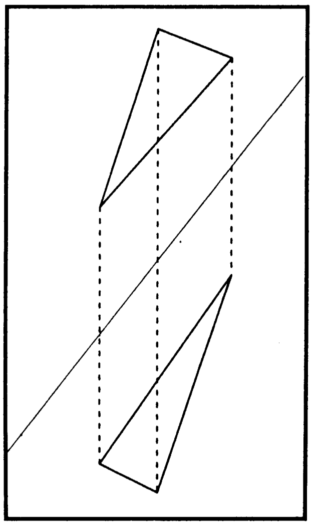


L'élève est fortement marqué par les triangles superposables fournis et le traduit par des égalités. Le fait d'écrire « ABC est un triangle quelconque » suppose sans doute qu'il s'attendait plutôt à un triangle particulier (« on ne fait pas tout ça pour se retrouver avec la même chose ! »)

Nicolas a eu des difficultés lors de la manipulation et cela l'a obligé à faire une analyse qui a porté sur les angles. Lui aussi regrette de ne pas obtenir de triangle particulier où la hauteur serait axe de symétrie (prégnance des figures particulières et/ou préférées).



La dernière phrase de Nicolas « *Le triangle a trois axes de symétrie* » montre la confusion qui existe au niveau du mot symétrie : les trois découpes intérieures sont assimilées à l'axe de symétrie. L'élève assimile la symétrie à la simple superposition de sous-figures et nous rappelle les nombreux tracés de $6^{ème}$ comme celui-ci :



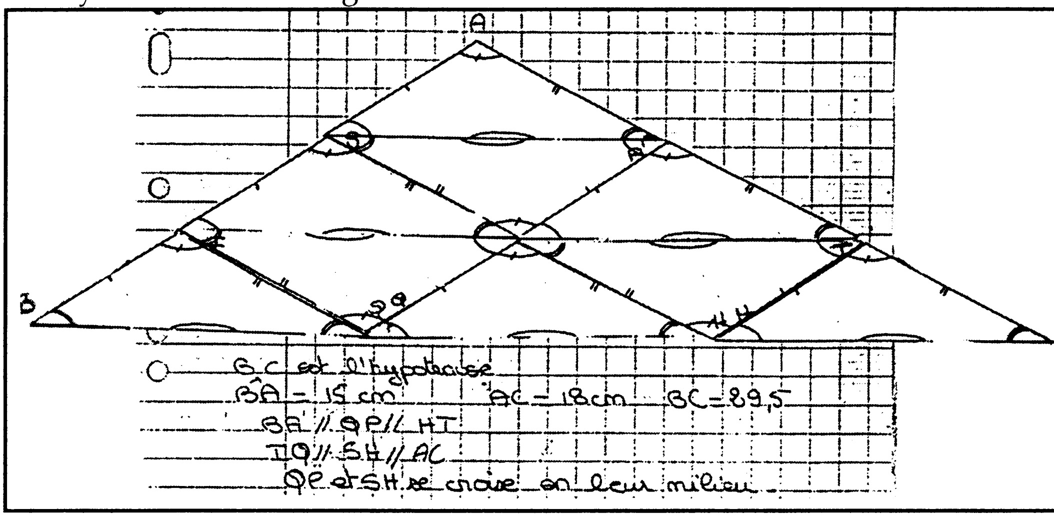
dans lequel la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie n'est pas prise en compte.

Sur ces deux exemples, on constate que Michel a suivi la consigne et construit sa figure de référence alors que Nicolas travaille sur son collage ; ce sera ce deuxième cas le plus fréquent. Remarquons aussi la façon qu'a Michel sur sa construction, et Nicolas dans son texte, de s'approprier la moitié du codage ! Nous en parlerons plus loin.

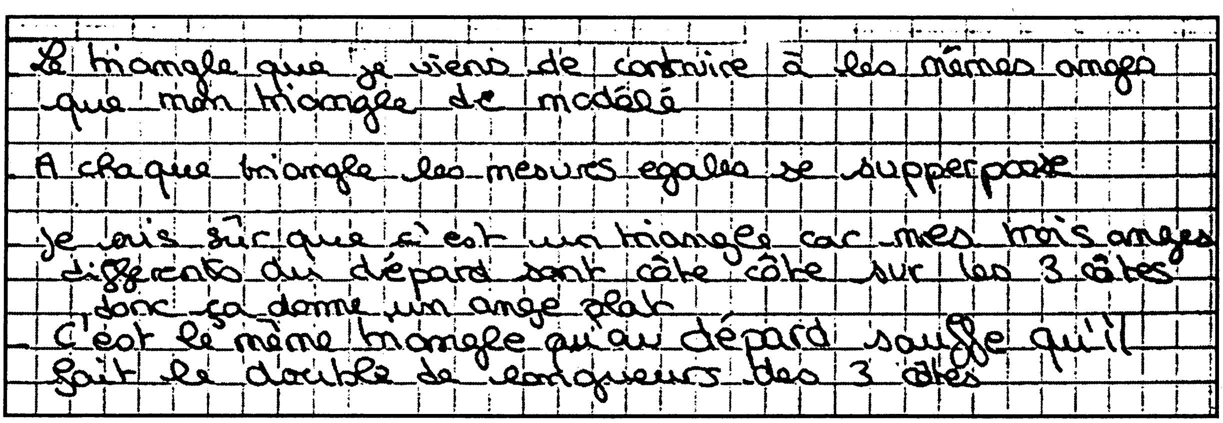
L'obligation de construire sera rappelée lors de la production du travail de groupe à la fin de cette première séquence de deux heures.

Mais revenons aux productions individuelles.

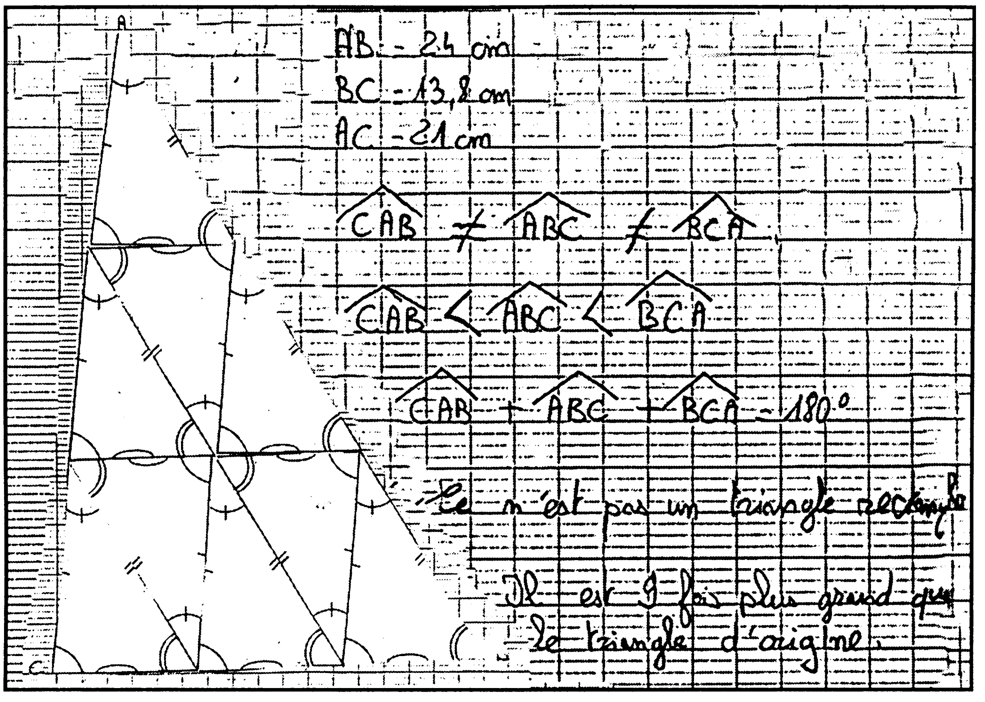
Audrey a obtenu la configuration T9.



Audrey a une première approche plutôt chaotique. L'hypoténuse est l'effet du chapitre travaillé juste avant (triangle rectangle inscrit dans un cercle). Elle tente le confort du travail sur les mesures et l'abandonne. Ces tâtonnements divers la mènent à envisager le parallélisme (perception visuelle). La relance est évidente : « es-tu sûre que tu as des parallèles ? Comment peux-tu le prouver ? ». La dernière phrase sera l'occasion de demander s'il suffit de deux longueurs égales pour avoir un milieu : très fréquemment, les élèves oublient de vérifier l'alignement des points.

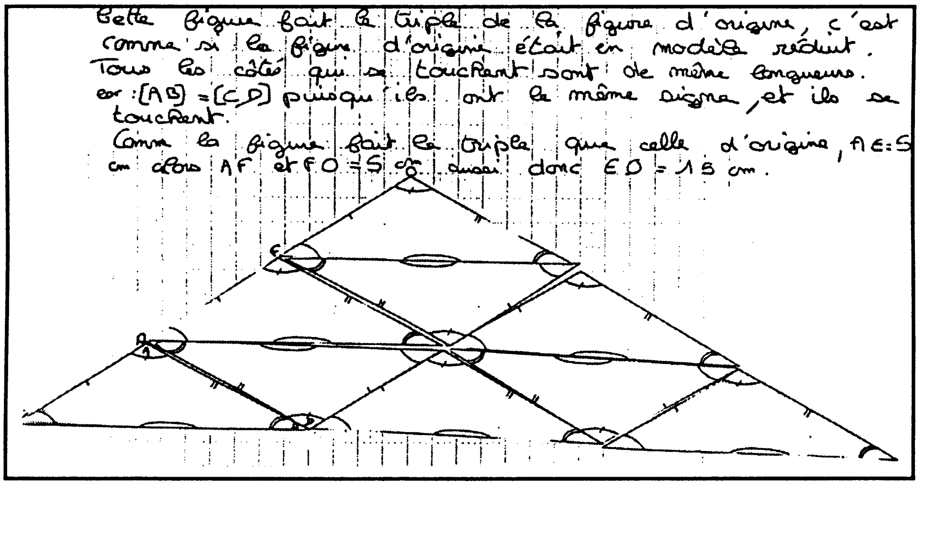

Le triangle que je viens de construire à les mêmes anges
que mon triangle de modelé
A chaque triangle les mesures egales se supperpose
je suis sûr que c'est un triangle car mes trois anges
differents du départ sont côte côte sur les 3 côtes
donc ça donne un ange plat
C'est le même triangle qu'au départ sauf qu'il
fait le double de longueurs des 3 côtes

Jonathan se fixe sur les angles et, connaissant bien les exigences de son professeur, établit sa preuve … qui réjouit son enseignant(e) ! On perdra la poésie du « *modelé des anges* » par une mise en forme plus rigoureuse. La notion d'agrandissement avec coefficient 2 est parfaitement perçue.



Loïc, lui aussi , a organisé sa réflexion sur les angles : ils sont différents, ils sont rangés, ils se combinent pour donner 180°. On peut supposer que ce 180° représente la somme des angles d'un triangle, ce qui permet à Loïc de conclure sur la nature du polygone obtenu … en disant ce qu'il n'est pas !

La dernière phrase de Loïc est une ouverture sur la proportionnalité des longueurs et des aires d'un triangle agrandi que nous réutilisons ultérieurement en cours. Confronté à la production suivante :



cela permet d'installer efficacement, car en acte, le lien entre rapport d'agrandissement sur les longueurs et rapport d'agrandissement sur les aires.

Cet autre travail soulève le problème du concept :

C'est un triangle quelquonque
E est le milieu de AB
D est le milieu de A.C
F est le milieu de BC
AE = EB
AD = DC
BF = FC
ED // BF ; ED//FC ; EB//DF ; EF//DC

Lorsqu'elle écrit « E est le milieu de AB » Audrey semble traduire une réalité physique observée ; mais lorsqu'elle écrit ensuite « AE = EB » traduit-elle une autre réalité physique observée ou bien est-ce une déduction « il y a un milieu donc il y a deux longueurs égales », ou encore une interprétation du codage ?

Il y a là une double instabilité : instabilité entre le perçu visuellement et l'interprétation discursive et, au niveau de cette interprétation discursive, une autre instabilité entre les informations données et les informations déduites. C'est en clarifiant chacune des étapes qu'on aidera les élèves à franchir tous ces obstacles et qu'on l'amènera ainsi à percevoir et à formuler plus clairement une démonstration.

Le codage joue ici un rôle déterminant. Il contribue à modifier le rapport de l'élève au dessin et ainsi lui permet d'accéder au concept de figure géométrique.

En ne considérant comme vraies que les informations codées sur son collage, l'élève est contraint de prendre de la distance par rapport à ce qu'il voit (appréhension perceptive) pour aller vers ce qu'il sait (appréhension discursive). Construire ensuite la figure exige un traitement pertinent de ces informations (appréhension séquentielle).

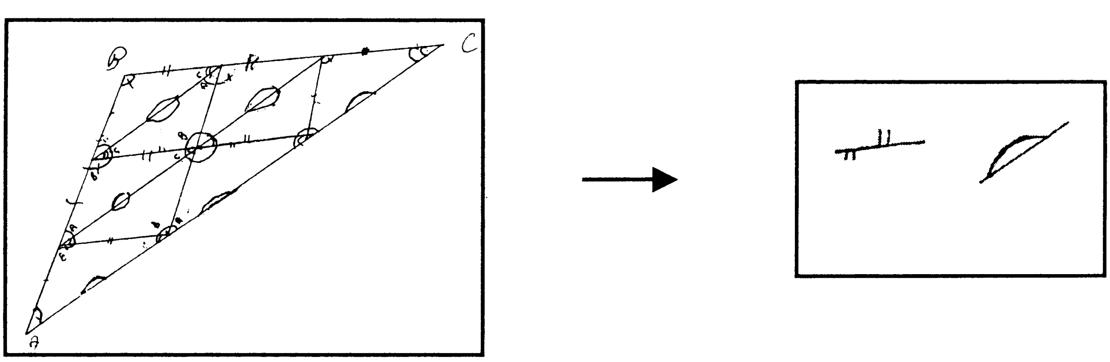
D’une façon plus générale, poser un problème sous forme d’un texte seul, d’une figure seule, ou proposer texte et figure, constitue un véritable choix didactique pour l’enseignant(e). Pour notre part, dans les évaluations, nous proposons souvent l’énoncé sous forme d’un texte accompagné d’une figure réduite (codée ou non), ou réalisée à main levée, et demandons de la construire « en vraie grandeur » : nous sollicitons ainsi les différentes appréhensions de la figure, sans perdre de vue que construire sa figure est une façon de se l’approprier.

Un apprentissage explicite des codages est indispensable et doit permettre de mieux dominer cet autre langage et accéder à une géométrie de traitement.

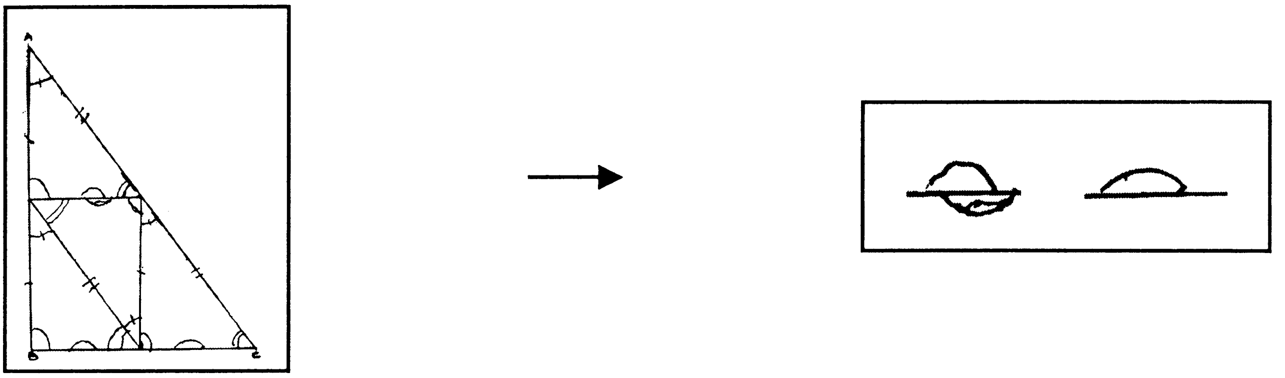
Au début de cette activité, nous rencontrons systématiquement des élèves qui découpent les triangles en suivant les contours des codages. Nous sommes toujours contraints de préciser oralement : « *Découper les triangles en suivant les côtés !* ». Souvent, pour ces élèves, le codage n'est pas perçu comme un signe ajouté mais plutôt comme une partie intégrante du dessin au même titre qu'un trait représentant un côté. On retrouve d'ailleurs cette perception des codages à travers certaines figures réalisées par les élèves.

Rappelons ce que nous avons signalé à propos des productions de Michel et Nicolas.

Sur la figure représentant la configuration T9, Etienne a reproduit à l'identique les marques apparaissant sur son collage (marques décalées ou incomplètes).



Elise a éprouvé le même type de difficultés, avec T4, et a produit la figure (particulière) ci-dessous :



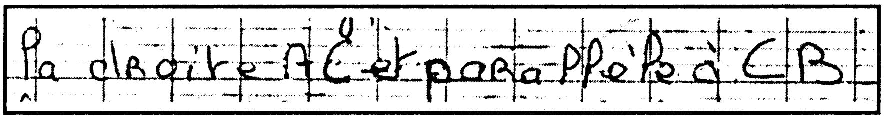
Ce type d'erreurs illustre parfaitement la difficulté de rompre avec le perceptif.

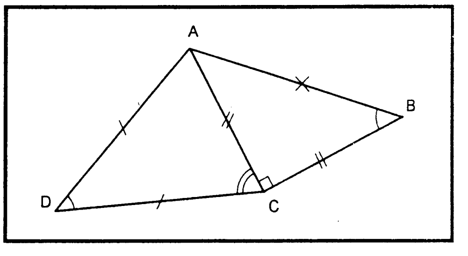
Le codage est un langage, avec ses signes et ses règles de fonctionnement, et l'enseignant(e) de mathématiques est responsable de cet apprentissage.

Voici quelques exemples, sortis du contexte de cette activité, qui illustrent notre propos.

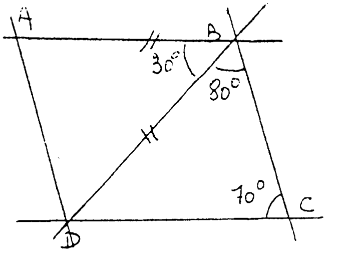
La signification des codages n'est pas toujours maîtrisée : la marque *//* utilisée fréquemment pour coder des longueurs égales est parfois confondue avec le symbole de parallélisme « // » comme en témoignent les productions suivantes.

Sur cette figure, pour Anaïs (4ème) :





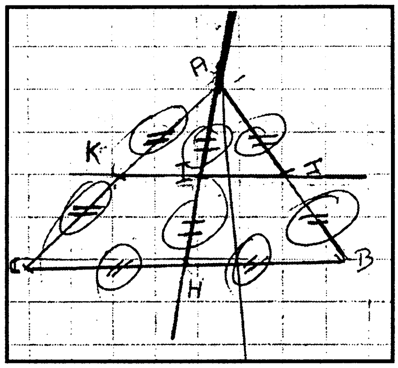
Même de confusion pour Romain (5ème) :



Les droites (AB) et (DC) sont-elles parallèles ?Justifier.
oui parce que il y a le signe //

La figure est volontairement fausse. 4

Fabien code des égalités de longueur différentes avec la même marque // qu'il interprète comme un signe « = ».

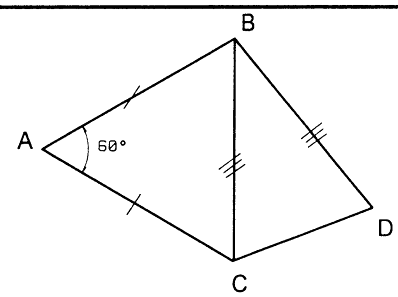


Chaque fois qu'il veut traduire une égalité de longueurs, il place le signe « = ». Il est dans l'action. Mais ensuite son codage n'est pas utilisable.

Les règles de fonctionnement sont donc également à préciser. Par exemple, un même signe indique une égalité de mesures mais des signes différents n'indiquent pas que les mesures sont différentes.

Devant cet exercice :

Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.



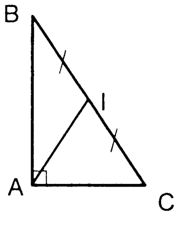
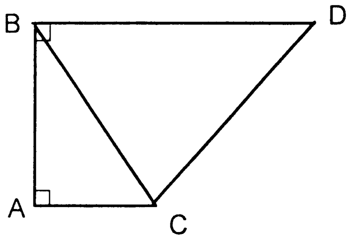
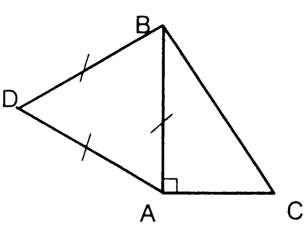
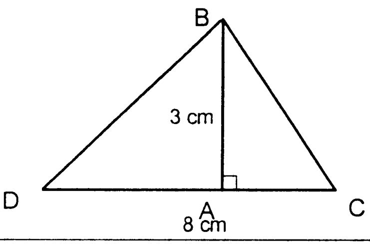
beaucoup d'élèves répondent : « *Le triangle ABC n'est pas équilatéral car la longueur BC n'est pas égale aux longueurs AB et AC, c'est marqué !* ». Des codages différents sur AB et BC n'indiquent pas que les longueurs sont différentes. Ici un traitement de l'ensemble des informations est nécessaire pour conclure sur l'égalité AB = BC. Le codage traduit les informations connues à un moment donné. Il faut juxtaposer les données des deux triangles, plonger dans le bagage de connaissances et modifier alors la perception ! C'est là l'essentiel du travail mathématique.

On retrouve ce théorème-élève dans la production de Loïc présentée précédemment :

> Les trois côtés du triangle sont différent car ils n'ont la même mesure. On le sait grace aux signes ils sont différents.

La lecture d'un même codage n'est pas toujours unique : elle peut dépendre de la question posée. Etre capable d'interpréter un codage de différentes façons peut permettre à l'élève de s'engager dans une démarche de résolution.

Voici différentes lectures du codage de l'angle droit en fonction de la question posée :

Figure	***Question***	**Lecture du codage**
	*Quelle est la nature du triangle AIC ?*	**ABC triangle rectangle en C.**
	*Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?*	**(AB) $\perp$ (AC)**
	*Quelle est la mesure de l'angle* $\widehat{DAC}$ *?*	$\widehat{BAC} = 90°$
	*Quelle est l'aire du triangle BCD ?*	**(BA) hauteur du triangle BCD.**

Le codage est donc bien un objet à enseigner au collège pour permettre d'accéder à l'appréhension discursive d'une figure, et il est un outil pour faciliter l'accès au raisonnement déductif.

Mais revenons maintenant à l'activité.

Ayant laissé le temps nécessaire à une bonne appropriation individuelle (une heure pendant laquelle le professeur guide et relance les observations), on passe au travail de groupe. Les élèves sont mis par quatre afin de confronter puis approfondir leurs réflexions et proposer un bilan sur transparent au groupe classe. Voici la consigne :

> ***Faire sur le transparent une figure qui correspond à la situation mais avec des dimensions quelconques.***
> ***Se mettre d'accord sur ce qui est vrai et essayer de justifier ces remarques.***

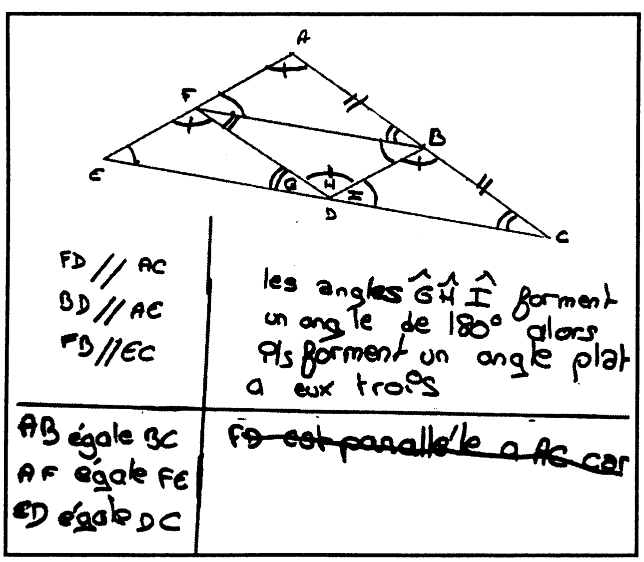
Lors de la construction sur transparent on observe les deux démarches suivantes :

-tracé d'un triangle quelconque, repérage des milieux des côtés et tracé des sous-figures ;

-tracé d'un petit triangle initial et, de proche en proche, on obtient les quatre triangles de la configuration.

Il y a ceux qui sont sortis de la manipulation pour passer à l'abstraction et ceux qui n'ont pas encore pu (il leur reste du temps pour cela).

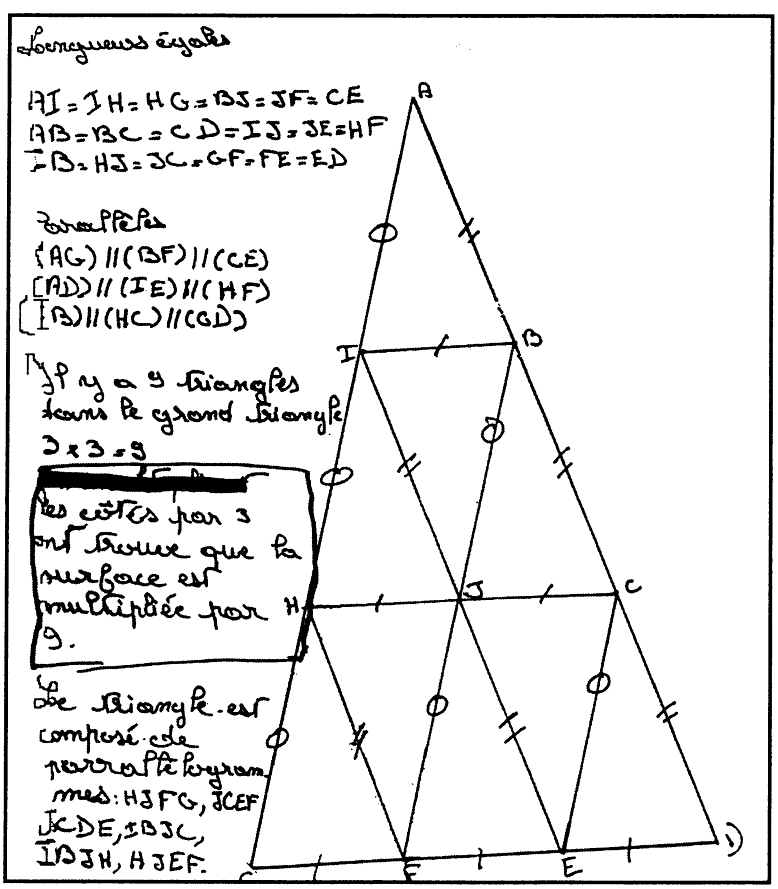
La mise en commun des observations et preuves - ou tentatives de preuve - s'organise différemment au sein des groupes.



Seules les égalités des longueurs issues de l'appréhension perceptive des milieux des côtés ont été repérées. Le non-report de certains codages a une conséquence directe sur les remarques formulées. Le codage « AB = BC » entraîne l'égalité relevée sur les autres côtés (transfert). Par contre, l'absence de codages sur le triangle BDF ne permet pas de produire l'intégralité des égalités.

Le codage donné et compris des angles du triangle initial et la connaissance de la propriété attachée sont implicites. Le parallélisme est repéré mais la tentative de preuve n'a pas abouti dans le temps imparti. Cela dit, ils sont prêts à recevoir cette preuve qui sera apportée par une autre équipe, même si eux-mêmes n'ont pas dépassé le stade des conjectures.

Ce groupe est resté aussi au stade des conjectures mais les pôles d'observation ont été plus nombreux, la figure étant elle-même plus riche (en particulier la vision des parallélogrammes).



Les groupes de segments de même longueur et les parallèles ont été repérés. Les parallélogrammes n'ont pas été tous nommés et l'un d'entre eux est mal identifié ; mais le travail avec T9 est plus lourd.

La remarque sur « côté multiplié par 3, surface multipliée par 9 » permettra d'installer, lors du débat de classe, la règle évoquée précédemment.

Cette première partie se termine avec la projection des transparents. Cela permet de mettre en commun tout ce qui a été découvert, de compléter des ébauches de démonstrations, de valider les apports divers.

Le travail avec 9 triangles est pris en compte mais la synthèse se fait sur T4.

Pour démontrer que la figure obtenue est bien un triangle, il faut d'abord prouver l'alignement des points sur les côtés. Voici deux exemples de production qui permettent d'installer la démonstration :

La somme de chaque angles des triangles fait 180
CHI + JKB + JKI = 180°
Donc CKB ~~est~~ sont aligné.

La formulation est très maladroite mais la notion d'angle est souvent encore mal assimilée en 4ème (confusion entre angle, triangle et points alignés).

Certaines preuves sont établies plus efficacement :

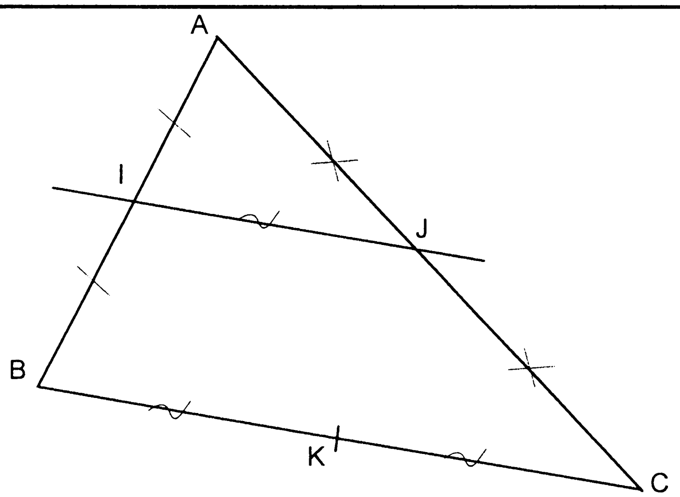
$\widehat{BFE} + \widehat{EFD} + \widehat{CFD} = \widehat{BEF} + \widehat{FED} + \widehat{AED} = \widehat{CDF} + \widehat{FDE} + \widehat{EDA} = 180°$

Les longueurs égales sont reprises directement à partir des codages figurant sur les triangles donnés. L'alignement démontré permet de conclure sur l'existence des milieux des côtés du triangle de référence.

On peut établir le parallélisme à partir de productions de ce type :

$\widehat{AFB}$ et $\widehat{FBD}$ sont alternes-internes, donc (BD) et (AF) sont parallèles.
$\widehat{FBA}$ et $\widehat{BFD}$ sont alternes-internes, donc (FD) et (AB) sont parallèles.
$\widehat{FDE}$, $\widehat{FDB}$, $\widehat{BDC}$ forment un angle de 180°.

Voici la synthèse écrite de cette première partie :



ABC est un triangle
I est le milieu de [AB]
J est le milieu de [AC]
(IJ) // (BC)

$$IJ = \frac{BC}{2}$$

Cette synthèse exprime l'ensemble des caractéristiques de la figure finale, il reste à faire émerger les conditions nécessaires à l'obtention de cette figure qui permettront d'énoncer les propriétés. C'est l'objet de la deuxième partie.

Dans cette séquence, nous sommes passés par les trois temps qui structurent le savoir :

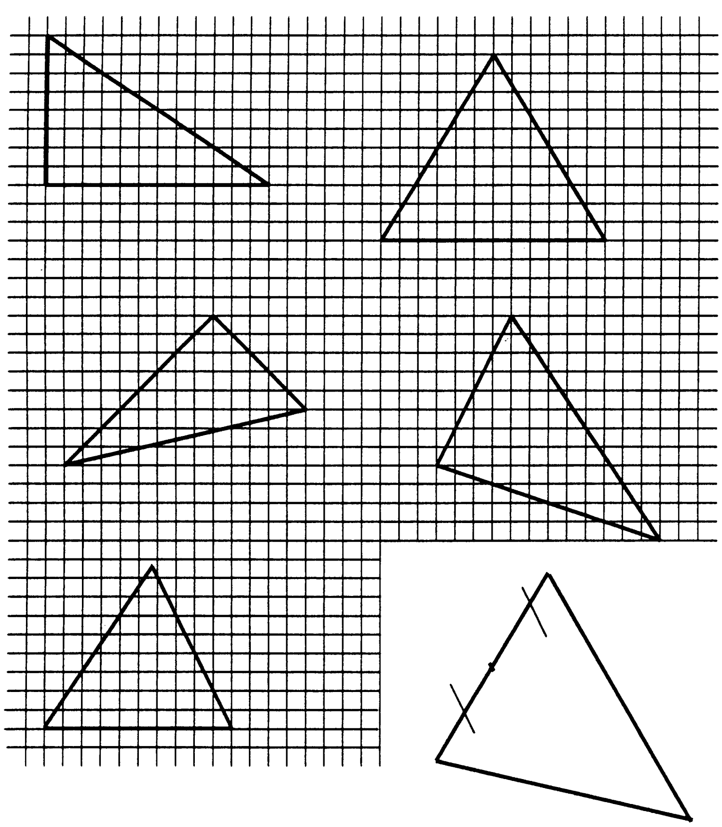
OBJET → **DESSIN** → **FIGURE**

<u>Soit</u>

Manipulation → *Reproduction* → *Généralisation*

La deuxième partie se fait en une heure. Chaque élève reçoit cette fiche (ici réduite) et travaille seul environ 20 minutes. Maintenant, on est uniquement sur la version T4.

<u>Consigne :</u>
Partager chaque triangle en quatre triangles superposables sans utiliser la règle graduée.
Expliquer la démarche pour chaque triangle.



La synthèse se fait classe entière, directement au rétroprojecteur, sur la fiche élève photocopiée sur transparent (prévoyez-en plusieurs). Les élèves sont invités à expliciter leur démarche de construction pour chaque cas . On ne passe au cas suivant qu'après avoir vu ensemble toutes les solutions abordées par les élèves ; certaines sont validées, d'autres rejetées après discussion.

De cette séquence on veut faire émerger les deux démarches possibles pour retrouver la figure de référence :

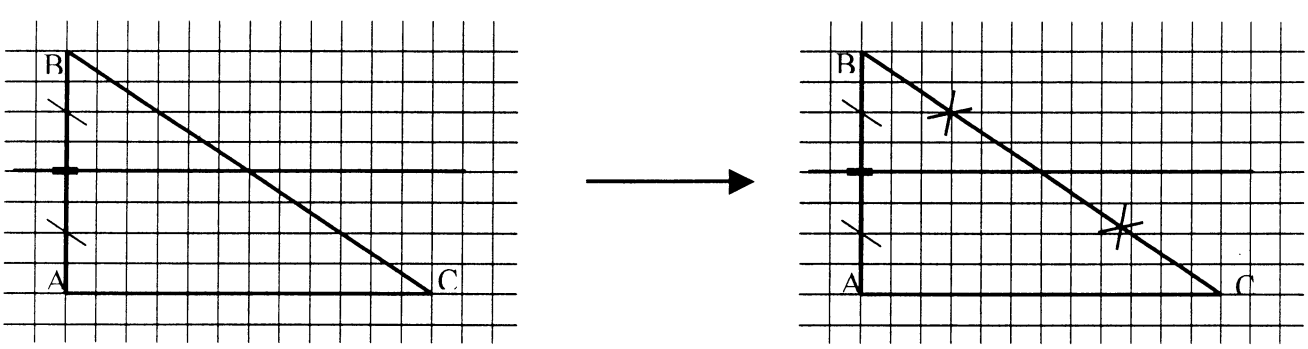
milieu (M 1) + **milieu (M 2)** → **parallèle (//)**

milieu (M 1) + **parallèle (//)** → **milieu (M 2)**

C'est dans ce but que l'éventail des triangles ABC a été construit, avec cet ordre lorsqu'il est sur le quadrillage, ensuite sans.

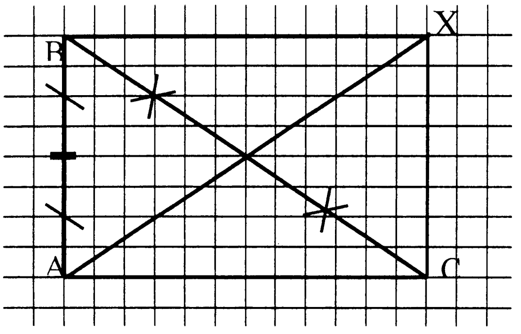
Dès la figure 1, deux démarches sont possibles pour trouver le milieu de [BC].

- Tracer la parallèle à (AC) passant par le milieu de [AB] ; on utilise alors « un milieu, puis la parallèle à un côté pour placer le deuxième milieu ».

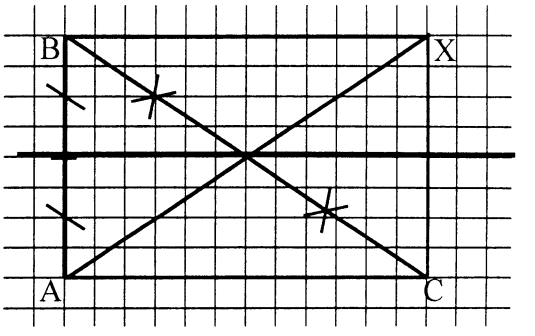


(M 1) + **//** → **(M 2)**

- Tracer la deuxième diagonale du rectangle ABXC construit à partir du triangle ; on utilise alors « le milieu de [AB], le milieu de [BC], et on obtient la parallèle à (AC).



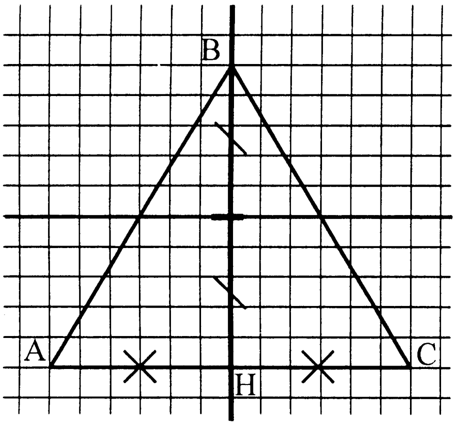
→



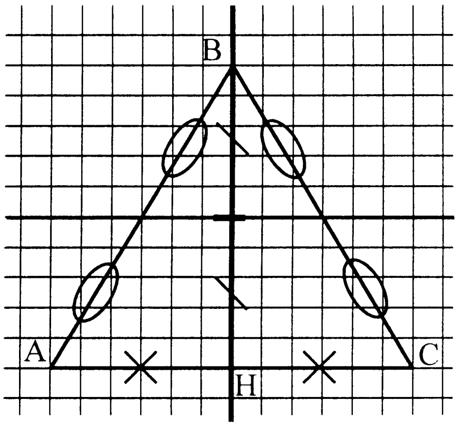
(M 1) + **(M 2)** → //

Le triangle 2 est isocèle. Par simple comptage de carreaux, on obtient le milieu de l'axe de symétrie [BH].Trois démarches sont possibles ensuite :

- tracer la parallèle à (AC) passant par ce milieu qui donne les milieux de [AB] et [BC] ;

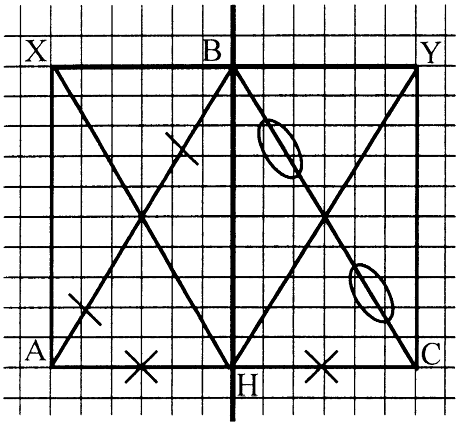


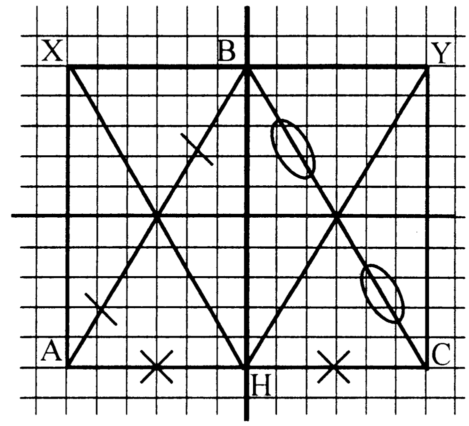
→



(M 1) + // → **(M 2)**

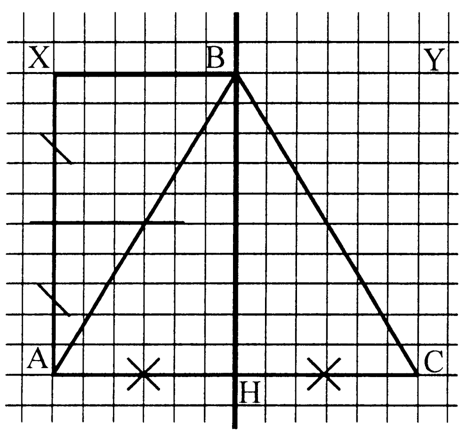
- tracer les rectangles AXBH et HBYC dont les diagonales donnent les milieux de [AB] et [BC] ;

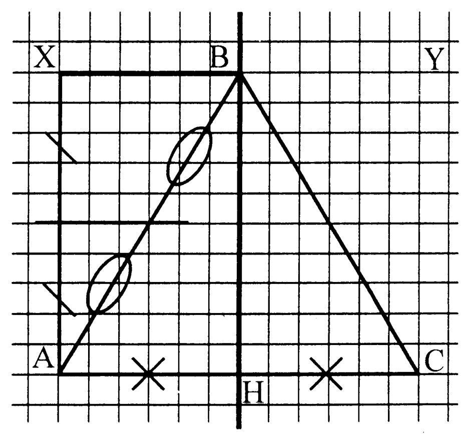




(M 1) + **(M 2)** ⟶ //

- tracer le triangle rectangle AXB, placer le milieu de [AX], tracer la parallèle à (XB) passant par ce milieu pour obtenir le milieu de [AB] ; de même pour le milieu de [BC].



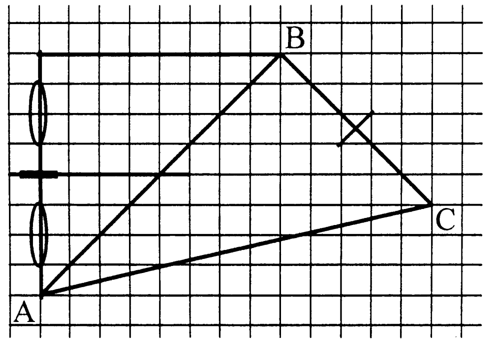


(M 1) + // ⟶ **(M 2)**

Le triangle 3 n'offre plus le même confort de comptage de carreaux.

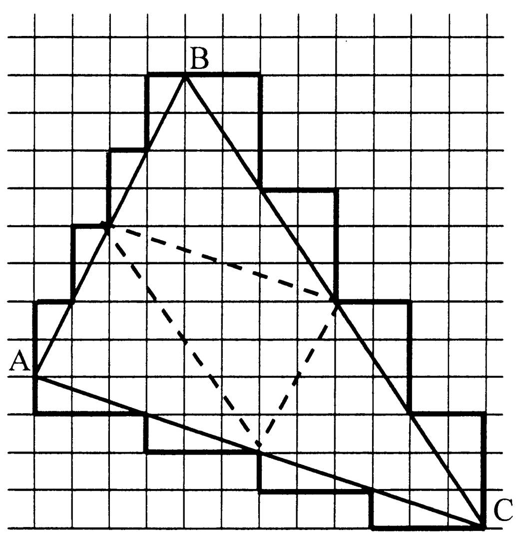
Les trois milieux peuvent être construits en utilisant la même méthode sur les trois côtés. [AB] est la diagonale d'un rectangle construit sur le quadrillage, la deuxième diagonale le coupe en son milieu. De même avec le côté [BC] puis avec [AC]. Les milieux donnent les parallèles.

Si cette démarche n'a pas été encore découverte dans la recherche individuelle, il reste d'autres possibilités. La méthode du triangle rectangle construit sur le quadrillage et qui admet [AB] comme hypoténuse ne peut être reproduite sur [BC] et [AC] parce qu'on a choisi un nombre impair de carreaux à la construction. Ce qui ne démonte pas les plus dégourdis qui tracent la diagonale du « carré quadrillage » du milieu de [BC] ... mais ne peuvent le reproduire sur [AC].



L'utilisation des diagonales des rectangles ou carrés peut être l'unique démarche sur les triangles 1,2,3 et 4 dès lors que le simple comptage de carreaux n'est pas possible.

On trouve cependant une remarquable adaptation de certains :

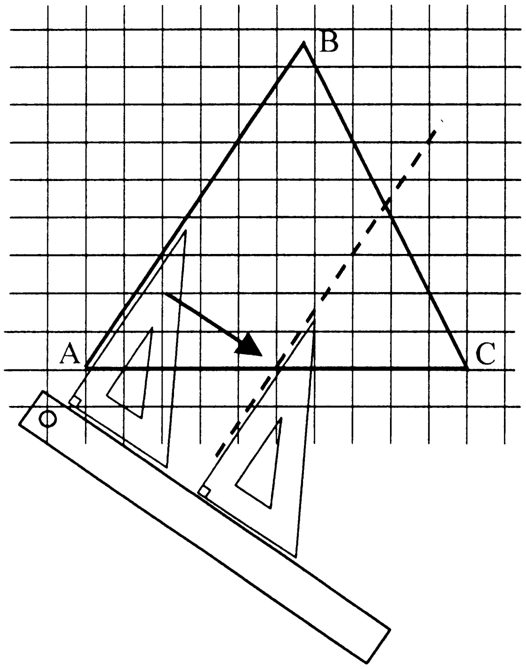


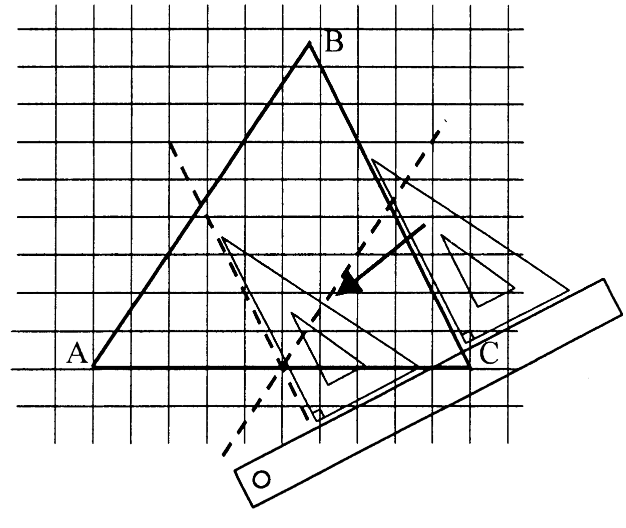
Cette méthode pour trouver les milieux des segments tient-elle au fait qu'il y a un nombre pair de petits rectangles superposables construits sur ces côtés ? Sans doute ces élèves utiliseraient enfin la propriété des diagonales sur le rectangle du milieu si ce nombre était impair...

Pour aller plus loin et sortir du quadrillage, nous proposons les triangles 5 et 6.

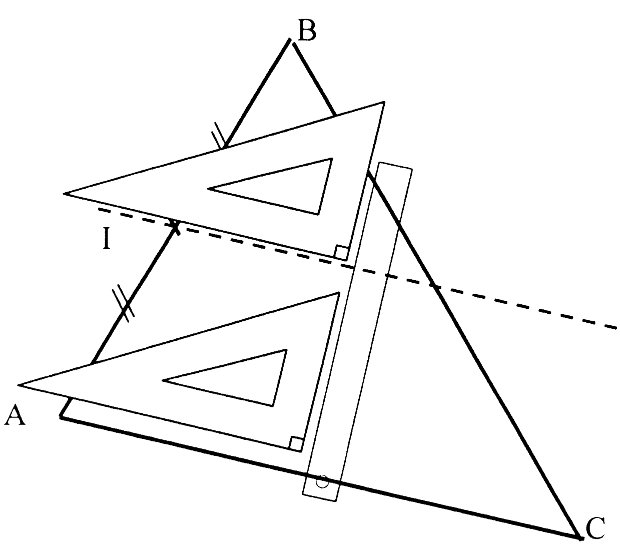
En 5, malgré le quadrillage, le positionnement de B ne permet plus ni le comptage, ni l'utilisation des rectangles sur [AB] et [BC]. Il y a maintenant obligation de construire des parallèles avec les instruments usuels et la démarche :

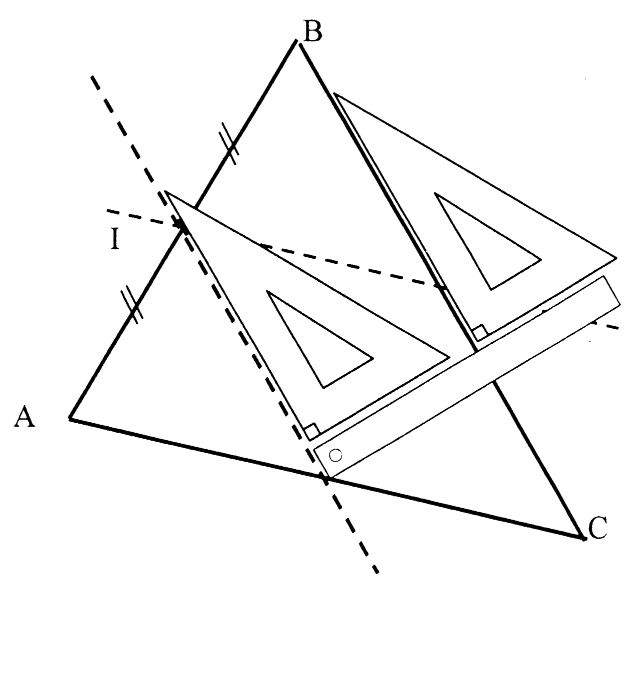
(M 1) + // $\longrightarrow$ **(M 2)** est obligatoire.





Pour le triangle 6 :



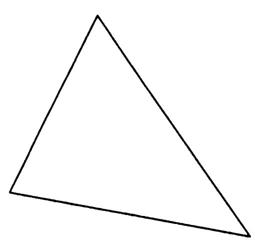


On clôt la séquence en installant les deux propriétés correspondantes.

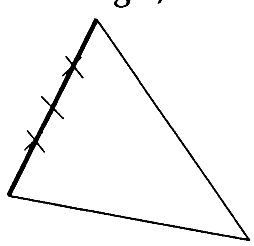
> ***Si, dans un triangle, une droite passe par les milieux de deux côtés***
> ***alors cette droite est parallèle au troisième côté de ce triangle.***
>
> ***Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un deuxième côté,***
> ***alors cette droite passe par le milieu du troisième côté.***

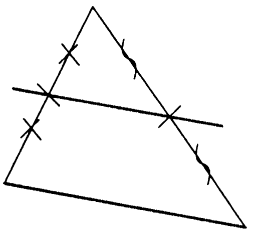
Cette activité a l'avantage de ne faire appel qu'à deux registres :celui de la langue usuelle et celui des figures. Pour ne pas que les figures codées soient un obstacle supplémentaire à la résolution des problèmes de géométrie, il nous semble intéressant, chaque fois que c'est possible, de mettre en parallèle ces deux langages :

Si,

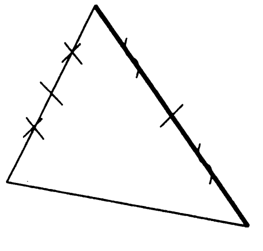


dans un triangle,





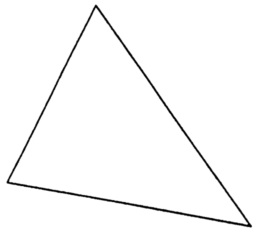
un point est milieu d'un côté **alors** **la droite passant par ces deux points est parallèle au troisième côté.**



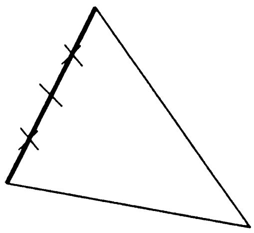
et un autre point est milieu

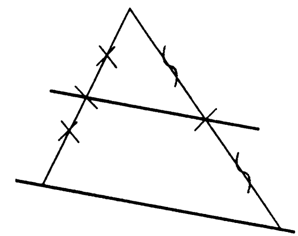
d'un deuxième côté,

Si,

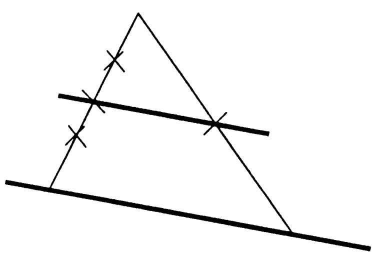


dans un triangle,





un point est milieu d'un côté **alors** **cette droite coupe le troisième côté en son milieu.**



et une droite passe par ce point en étant parallèle à un deuxième côté

Ces deux séquences autour de la droite des milieux s'enchaînent avec une logique que nous affectionnons :

- dans la première nous partons des sous-figures (petits triangles reproduits à l'identique et découpés) pour aboutir au grand triangle, figure de référence ;

- dans la deuxième nous partons du grand triangle dans lequel il faut reconstruire les sous-figures pour avoir la figure de référence.

Cette double étude sur le triangle de référence : « **1-** *je construis mon ouvrage pierre par pierre ;* **2-** *dans cet ouvrage construit, je retrouve chacune des pierres* » favorise la connaissance de l'objet étudié.

Nous appliquons cette démarche lorsque nous travaillons les objets de l'espace : construire des patrons mais en même temps développer des volumes existants. « *monter et démonter* » c'est à dire passer du plan à l'espace **et** de l'espace au plan favorise la compréhension des objets en 3D.

L'activité « de l'aire » décrite précédemment permet également ce travail « *dans les deux sens* » : transformer un rectangle en un triangle de même aire, puis partir d'un triangle pour obtenir un rectangle de même aire.

Cette double manipulation est présente dans beaucoup de notions du cadre géométrique mais aussi du cadre numérique (développer - factoriser, simplifier une fraction - réduire au même dénominateur, ...). Travailler en parallèle ces transformations est, à notre avis, la garantie d'une meilleure compréhension.

Pythagore

Les manuels et brochures de mathématiques proposent de nombreuses activités pour faire découvrir la propriété directe de Pythagore à nos élèves. Alors, pourquoi vouloir en proposer une nouvelle ici ?

Nous souhaitions pouvoir disposer d'une situation permettant :

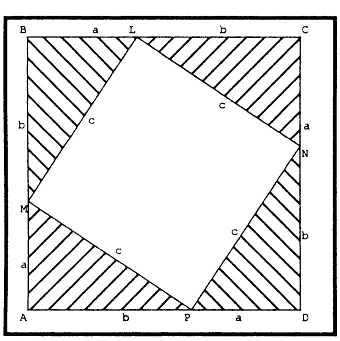
- de travailler différentes appréhensions d'une figure ;

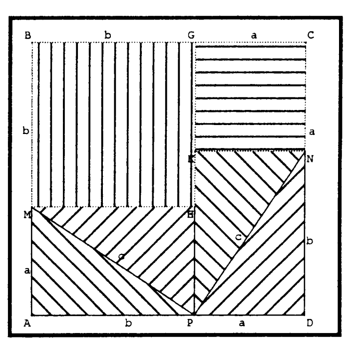
- d'introduire la propriété directe de Pythagore en termes de relation d'égalité sur des grandeurs.

Certes, l'activité puzzle habituellement utilisée répond à ces contraintes, mais, pour l'avoir pratiquée plusieurs fois dans nos classes, elle ne semble pas convaincante pour les élèves. Elle s'appuie sur des figures chinoises et hindoues et consiste à retrouver deux surfaces égales en utilisant :

- d'une part, quatre triangles rectangles superposables et un carré dont le côté est de même longueur que l'hypoténuse de ces triangles ;

- d'autre part, les quatre mêmes triangles et deux carrés dont les côtés ont même longueur que les côtés de l'angle droit du triangle.



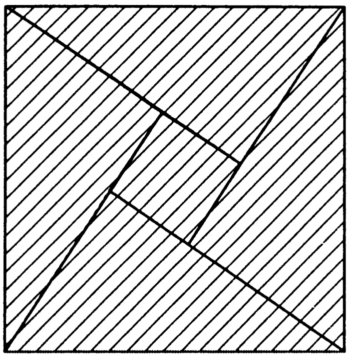


Cette situation, séduisante à première vue, pose problème aux élèves pour conclure car elle n'aboutit pas à une comparaison directe de l'aire du carré de côté c (notée C) avec la somme des aires des carrés de côtés a et b (notées A et B)[1].

[1] Nous conserverons les mêmes notations dans la suite de ce chapitre pour désigner aussi bien les aires que les surfaces.

En effet, on compare d'abord l'aire d'un carré de côté (a + b) avec C + 4T (T désignant l'aire d'un triangle) puis l'aire du même carré de côté (a + b) avec A + B + 4T. Le passage de A + B + 4T = C + 4T à A + B = C n'est pas évident pour les élèves.

C'est encore en cheminant dans l'histoire des mathématiques, en particulier dans les nombreuses démonstrations de cette propriété, que nous avons eu l'idée de construire cette nouvelle situation qui répond aux objectifs fixés. La figure du mathématicien hindou Bhâskara (XIIè siècle) nous a servi de point de départ.



Il écrit l'aire du carré ci-contre de deux façons différentes.

Avec notre langage actuel, on a donc :

$$c^2 = (b - a)^2 + 4 \times \frac{ab}{2}$$

c'est-à-dire : $c^2 = a^2 + b^2$.

Pour obtenir une démonstration géométrique (et non littérale), il suffit de comparer cette surface carrée d'aire c^2 à une surface d'aire $a^2 + b^2$.

Notre situation s'appuie donc sur cette figure de Bhâskara et fait appel à la reconfiguration pour aboutir à la comparaison d'aires demandée.

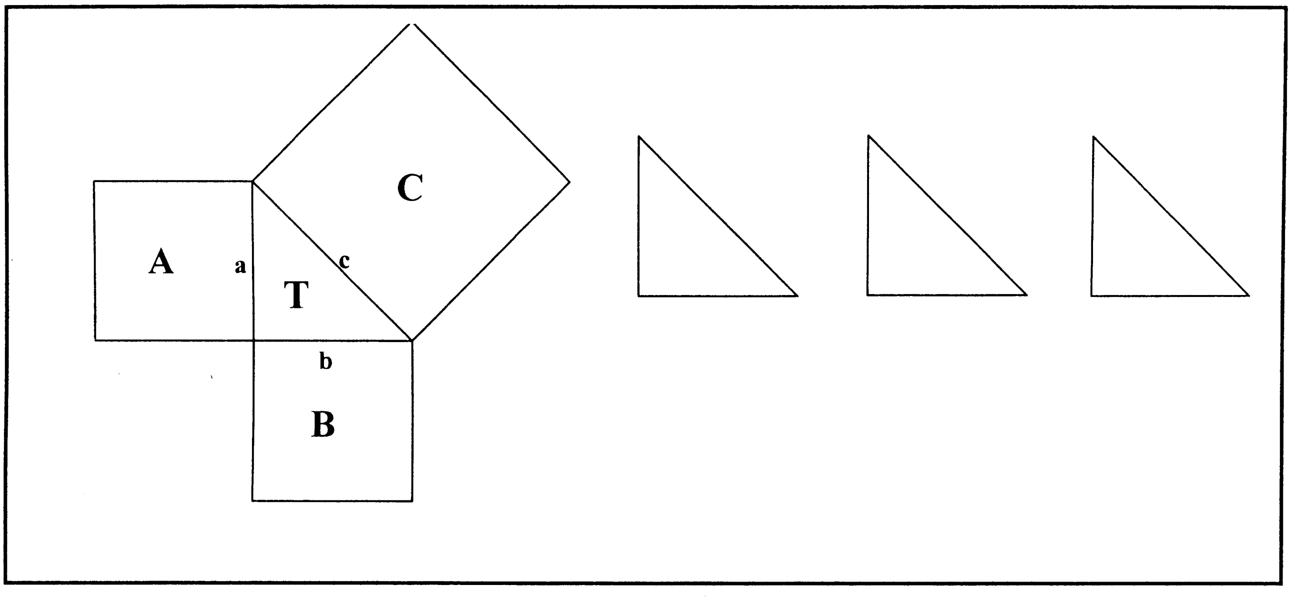
Nous proposons donc à nos élèves de 4ème la consigne suivante :

Voici un triangle rectangle T sur les côtés duquel on a construit des carrés A, B et C.
Les mesures des côtés du triangle sont a, b et c.
Les quatre triangles de la feuille sont superposables.

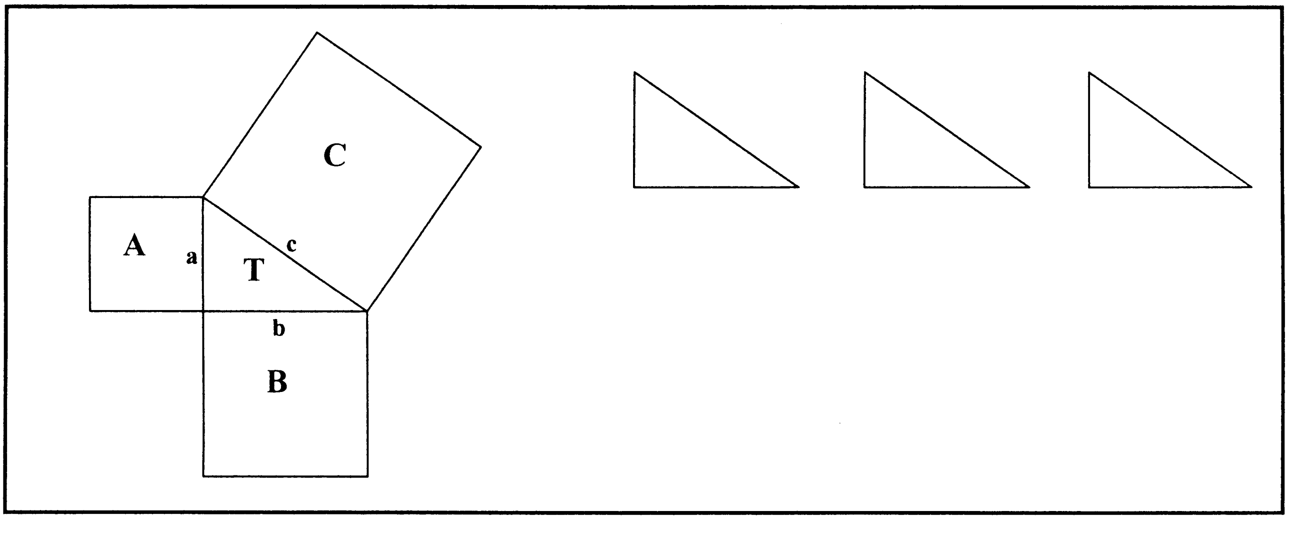
Notre but est de comparer l'aire du carré C avec l'aire des deux carrés A et B réunis.
♦ Pour cela, comparez d'abord l'aire totale des quatre triangles rectangles avec l'aire du carré C.
♦ Ensuite, comparez l'aire totale des quatre triangles rectangles avec l'aire totale des deux carrés A et B réunis.
Concluez.

Ici encore, l'hétérogénéité des classes est gérée en proposant aux élèves des triangles rectangles T différents.

Dans une première consigne (*C1*), destinée aux élèves plus faibles, les triangles T joints sont iso rectangles.



La deuxième consigne (*C2*) est accompagnée d'un triangle rectangle T non isocèle.



Les élèves les plus autonomes reçoivent la troisième consigne (*C3*). Ils doivent construire quatre triangles rectangles isométriques et les carrés associés à partir du programme de construction suivant :

Construire un triangle rectangle T.
On appelle : * c, la mesure de longueur de l'hypoténuse,
**** b, la mesure de longueur du plus grand côté de l'angle droit,***
**** a, la mesure de longueur du plus petit côté de l'angle droit.***

Sur chacun des côtés du triangle, construire un carré (à l'extérieur du triangle).
On appelle : * C, le grand carré,
**** B, le carré moyen,***
**** A, le petit carré.***

Construire ensuite trois autres triangles rectangles superposables au triangle T.

Cette activité est prévue sur deux heures.

La première heure débute par un travail individuel permettant une appropriation de la situation. Puis les élèves sont mis en groupes de façon à ce que les trois consignes soient représentées dans chaque groupe (généralement un élève avec la consigne *C1*, deux avec la consigne *C2* et un élève partant d'un triangle rectangle qu'il aura choisi).

La diversité des consignes dans la classe permet à chaque élève de s'investir quelles que soient ses capacités. Cette diversité à l'intérieur de chaque groupe répond également à un autre objectif tout aussi important : les élèves disposent du matériel nécessaire à une véritable recherche mathématique. En effet, ils doivent explorer la situation sur un triangle rectangle particulier, sur un triangle rectangle non isocèle (ce triangle est cependant imposé par l'enseignant(e), il n'est donc pas « quelconque » aux yeux de l'élève) et un triangle rectangle générique construit « au hasard » (nous reviendrons plus loin sur cette notion de cas particulier et de cas général à travers certains travaux d'élèves). Il s'agit là d'une véritable démarche scientifique qui doit évidemment se prolonger par une justification mathématique.

La deuxième heure est consacrée à la rédaction sur transparents, la présentation des productions en débat de classe et la synthèse.

L'institutionnalisation, qui termine la séance, permet de reprendre la figure de base et d'énoncer la propriété en termes d'égalité d'aires.

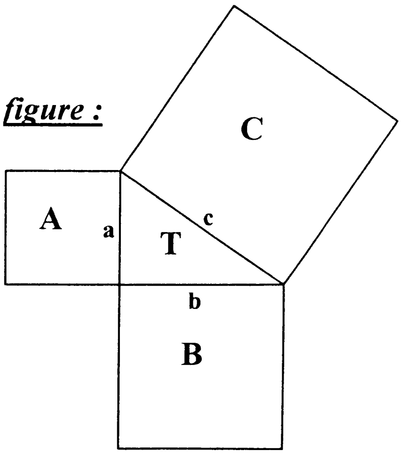
énoncé :

Si le triangle est rectangle alors l'aire du carré construit sur l'hypoténuse est égale à la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit.

$C = A + B$

$c^2 = a^2 + b^2$

figure :



Mais que font réellement nos élèves face à la consigne proposée ?

Dans un premier temps, certains élèves font appel aux formules en calculant les aires A, B, C et T après mesurage sur les dessins.

Virginia Padilla Sanchez, dans sa thèse[2] en 1992, a souligné cette perte de spontanéité des élèves de 5ème, 4ème, dans l'exploitation des possibilités heuristiques offertes par une figure :

- les élèves de 6ème réussissent mieux et plus vite dans des problèmes résolubles par des opérations de reconfiguration ;

- en 5ème, on note déjà une régression, voire un blocage, dans la résolution de ce type de problème.

On remarque que les élèves ayant le moins de connaissance de formules exploitent plus librement les possibilités heuristiques d'une figure. Il y a donc une séparation totale entre les traitements qui relèvent de deux registres de représentations : celui des figures et celui des formules. Cette séparation des registres (géométrique, numérique, des formules) se retrouve par exemple dans le travail de Cécile et de son groupe.

[2] L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques. Thèse en didactique des mathématiques de V. Padilla Sanchez (1992).

Consigne n°1

Carré C

$\frac{5,9 \times 5,9}{2}$

$= 17,405$

Aire du carré A :

$\frac{4,2 \times 4,2}{2}$

$= 8,82$

Aire du carré B :

$\frac{4,2 \times 4,2}{2}$

$= 8,82$

comparaison :
$C = 17,405$
$A + B = 17,64$

Les aires des carrés A et B sont plus grands que celle du carré C.

conclusion :
Les aires des carrés A et B sont plus grands que celle du carré C.

Cécile emploie une formule fausse pour calculer les aires des carrés, formule fausse issue de calculs précédents qu'elle a effectués pour obtenir l'aire des triangles. Cette erreur habituelle (on divise par 2 ou non dans ce type de formules) peut s'expliquer par une séparation entre le registre des formules et celui des figures : il faut donc recréer le lien entre ces deux registres, c'est-à-dire leur apprendre à avoir un double regard et un œil critique sur le travail effectué.

La suite du travail de groupe confirme cette difficulté à faire le lien entre différents cadres. En effet, les élèves reprennent, sur le transparent, les calculs de Cécile, effectuent de la même façon les calculs liés à leurs consignes mais complètent le transparent avec, pour la consigne 1 :

1°) Si on ajoute les aires des 4 triangles, on retrouve la même aire du carré C.

2°) Si on forme avec les 4 triangles un rectangle, on retrouve la même forme et la même aire des carrés B et C.

→ Ils sont égaux.

Il y a ici contradiction entre les résultats trouvés par le calcul et les reconfigurations effectuées. Cette contradiction n'est absolument pas relevée par les élèves du groupe : ils n'établissent pas de lien entre les travaux réalisés.

Nous avons expérimenté cette situation sur plus de cinq cents élèves. La moitié environ des élèves observés s'engage dans un mesurage sur les dessins pour effectuer des calculs. Cette démarche expérimentale, qui constitue une première approche de la situation, n'est pas à négliger. Elle leur permet d'effectuer des calculs semblables à ceux parfois proposés pour introduire la propriété directe de Pythagore. Ils construisent ainsi des tableaux de ce type :

a	b	c	a^2	b^2	$a^2 + b^2$	c^2
3	4	5	...	...	...	...

Les résultats trouvés sont des grandeurs (aires) en liaison directe avec le problème posé. Les tableaux de nombres habituellement donnés ne permettent pas toujours aux élèves de donner sens à la propriété visée. L'identité $a^2 + b^2 = c^2$ obtenue dans le cadre numérique n'est pas toujours reliée à la situation géométrique qui lui a donné naissance.

Pourquoi nombre d'élèves s 'interdisent-ils le découpage et la manipulation des triangles et carrés obtenus ? Et se l'interdisent-ils ou bien n'envisagent-ils pas du tout cette possibilité ?

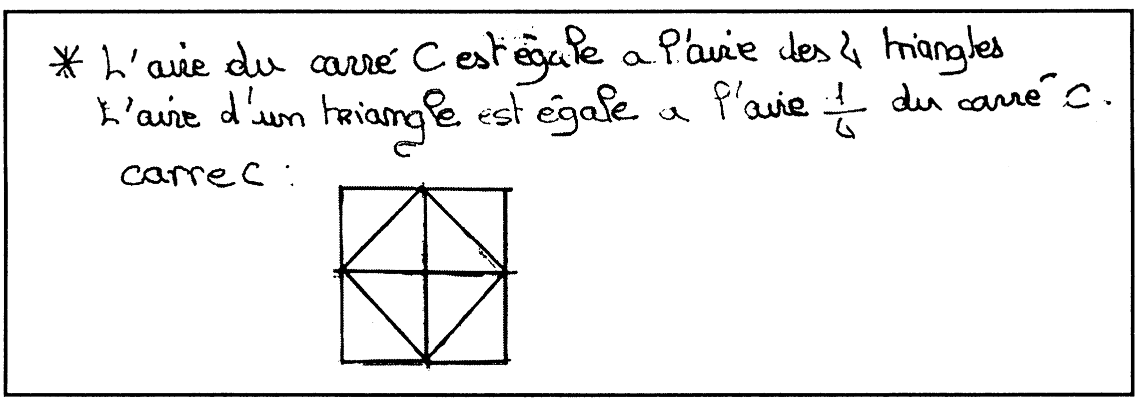
D'une part, pour eux, l'emploi de formules est une méthode noble comparée au « bricolage » papier ou tout au moins, ils pensent que c'est ce qu'on attend d'eux à l'école. Mais ne sommes-nous pas parfois responsables de cette perte de spontanéité et d'imagination de nos élèves ? Ne leur interdisons-nous pas parfois d'utiliser certaines procédures (découpage, essais et corrections successifs ...) afin de les obliger à appliquer la propriété, la formule qui est l'objet direct de l'apprentissage ? Si les élèves ne donnent pas sens à ce qu'ils font, l'apprentissage se résume alors en une série de « recettes », de formules à appliquer.

D'autre part, certains mots déclencheurs de la consigne (mesures, comparer, aire totale ...) peuvent les conduire davantage vers le cadre numérique que vers celui des figures.

Nous avons constaté que les élèves les plus faibles, disposant de la consigne *C1*, sont les plus nombreux à utiliser la reconfiguration pour comparer les aires. Ils ne sont pas enfermés dans des connaissances mathématiques trop cloisonnées et sont plus libres de s'engager dans ce type de recherche.

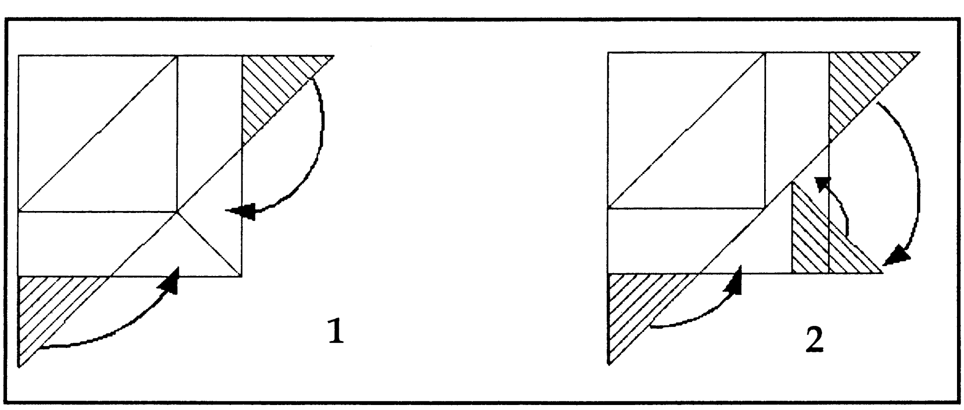
Cette liberté se retrouve dans la richesse des techniques employées pour obtenir le carré C à partir des quatre triangles T.

Les trois exemples suivants illustrent l'existence de deux obstacles importants dans l'opération de reconfiguration attendue : la prégnance de l'angle droit et l'hétérogénéité des objets manipulés (triangles et carrés). En effet, les élèves positionnent automatiquement l'angle droit du premier triangle T sur un angle droit du carré. Cette non-homogénéité dans le positionnement des angles droits fait obstacle à la vision de la reconfiguration pertinente. En voici un exemple :

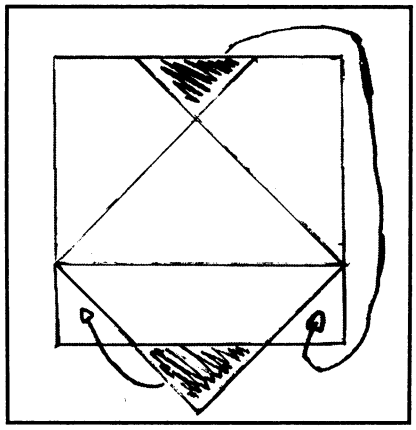


Florian découpe ici un triangle T suivant sa médiane relative à l'hypoténuse. Les deux triangles ainsi obtenus lui permettent de former un carré : il constate donc que « *l'aire du triangle donné est égale au* $\frac{1}{4}$ *de l'aire du carré* ». Il travaille à rendre les figures homogènes pour pouvoir réaliser la reconfiguration.

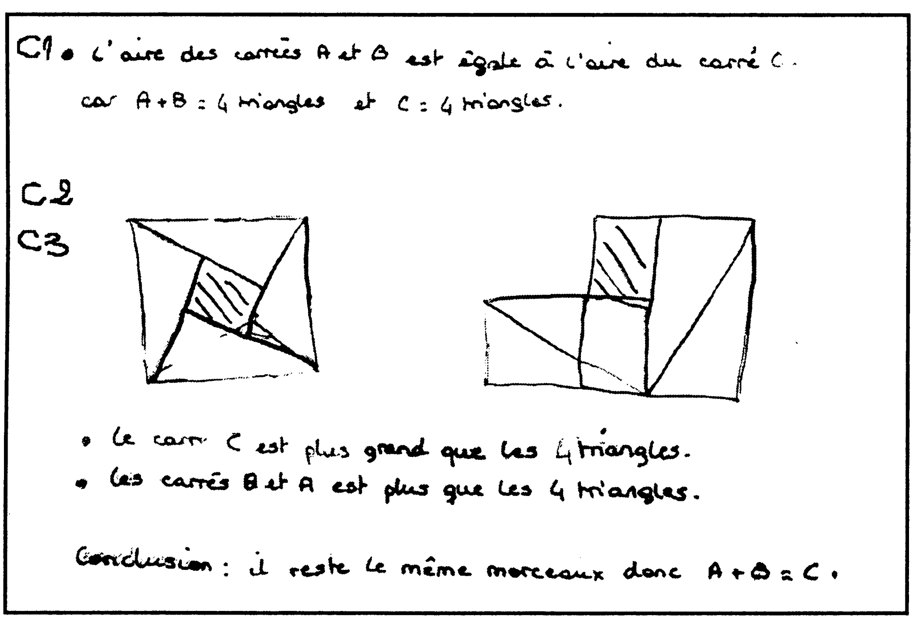
D'autres découpages également rencontrés lors de nos expérimentations sont illustrés ci-dessous.



Cette même difficulté à positionner l'angle droit conduit Delphine à superposer partiellement les triangles pour comparer l'aire totale à celle du carré : la sommation de surfaces n'est pas acquise pour cette élève. Mais le travail de groupe lui permet de faire évoluer sa reconfiguration. En voici la production finale pour la consigne *C1* :



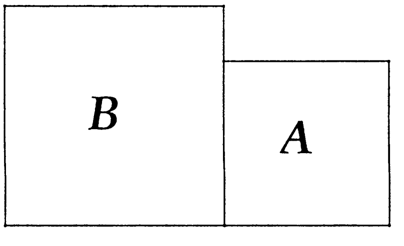
Le travail initial de Delphine, avec ses erreurs de recouvrement et dépassement, a cependant permis de fructueux échanges qui ont abouti aux reconfigurations pertinentes pour les consignes *C2* et *C3* :



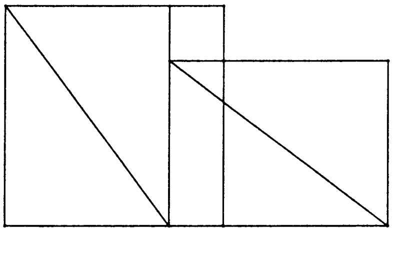
La comparaison de 4T et A + B ne pose pas de problème avec *C1* : les élèves comparent généralement l'aire de deux triangles T avec l'aire du carré A, puis l'aire du carré B.

Pour les consignes 2 et 3, deux obstacles rendent plus difficile cette comparaison d'aires :

- l'aire des carrés A et B réunis doit être visualisée en rapprochant, juxtaposant, physiquement les surfaces des deux carrés pour obtenir un hexagone non convexe ;

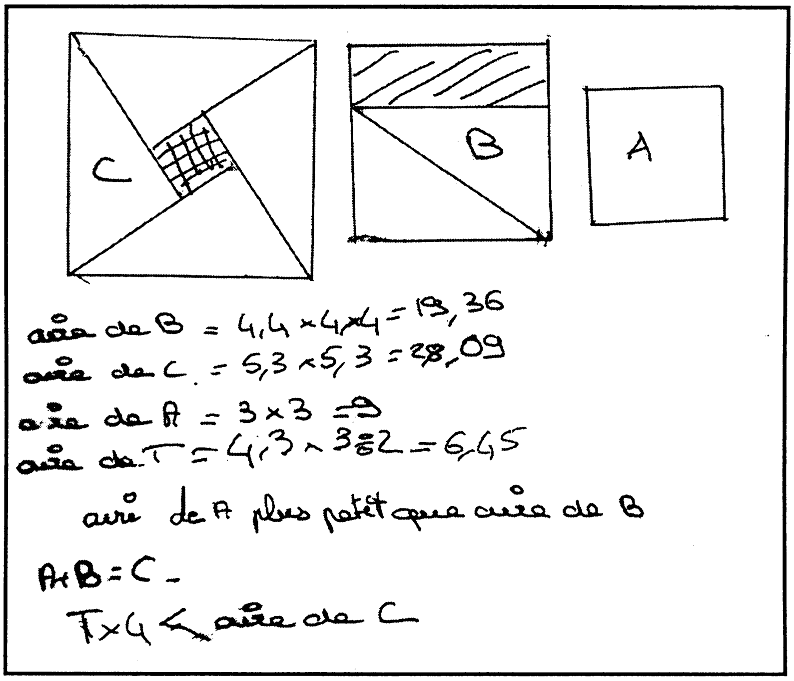


- l'élève doit sortir des contours d'origine du carré A en superposant deux triangles T :

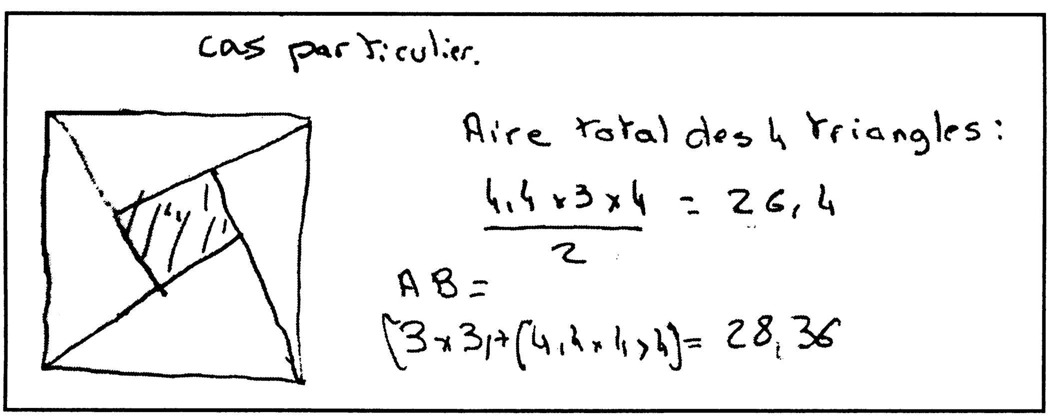


Et ils sont très gênés par le recouvrement non complet. Le terme « comparer » employé dans la consigne évoque trop souvent, pour eux, uniquement l'égalité. Les trois possibilités de la comparaison « plus grand », « plus petit » ou « égal », sont à rappeler très souvent avant qu'elles ne s'inscrivent vraiment dans leurs connaissances.

La production du groupe de Laura illustre parfaitement ces difficultés : les élèves retournent aux mesures et aux calculs pour contourner le blocage sur la reconfiguration de 4T avec A + B :



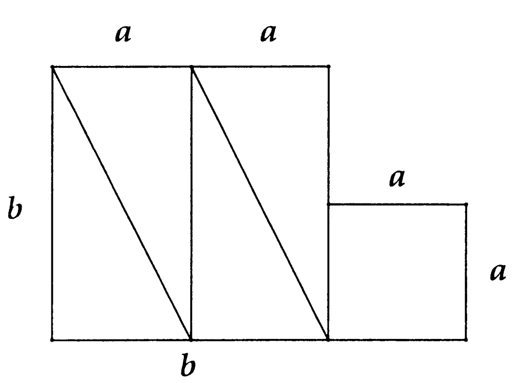
Emilie et ses camarades sont confrontées aux mêmes obstacles et utilisent également les calculs pour comparer l'aire des quatre triangles avec l'aire du carré C.



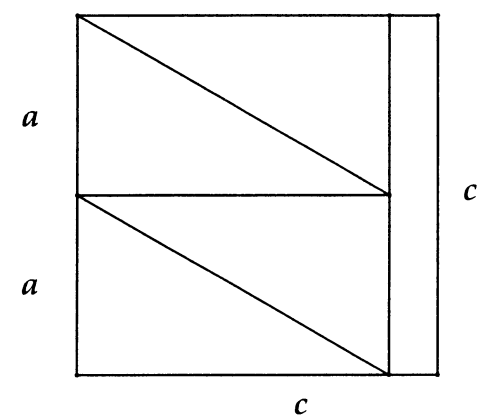
On peut noter ici l'utilisation de l'expression « *cas particulier* ». En effet, beaucoup d'élèves s'attendent à trouver les égalités A + B = 4T et C = 4T et certains concluent donc en disant : « *Ça tombe juste en général* » et « *c'est un cas particulier car il reste un trou* ». Ces élèves sont restés au niveau de l'observation et n'ont pas accédé au raisonnement qui est d'analyser la nature du « trou » avec *C2*, et les raisons des égalités avec la consigne *C1*.

D'autres cas, particuliers pour nous, apparaissent régulièrement dans nos classes grâce à la consigne ouverte C3. Ces cas induisent des possibilités de reconfigurations différentes.

Nous vous proposons ci-dessous deux cas déjà rencontrés :



$\underline{b = 2a}$



$\underline{c = 2a}$

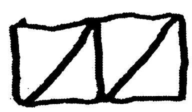
Dans ce 2ème cas, la reconfiguration obtenue ne permet pas de conclure sur la comparaison de A + B et C. Mais ce sont des productions très rares.

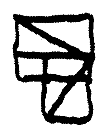
Dans cette activité, les élèves sont davantage dans l'action que dans la formulation. Les productions obtenues ne montrent pas tout le travail de recherche effectué, les différentes hésitations, l'angle droit du triangle rectangle qu'on pose et repose sur celui du carré C, les triangles qu'on tourne et retourne sans parvenir à la reconfiguration espérée. Cependant, le type de représentation choisi (avec des flèches) et/ou le vocabulaire employé soulignent l'importance de cette phase d'action.

Pour le groupe de Marie-Laure, « *les triangles rentrent mais ne prennent pas …* » :

- C est plus grand que les 4 triangles car les 4 triangles rentrent dans C mais ne prennent pas toute sont aire. A et B sont plus grandd que les triangles.

Dans le groupe de Ninon, « *ça tombe bien* » ou « *ça ne tombe pas juste* » :

3) Quand les 4 triangles rectangles sont isocèle, pour l'aire des deux carré A et B reunis ça tombe bien. 

4) Quand les 4 triangles rectangles sont quelconque, pour l'aire des deux carré réunis, ça ne tombe pas juste. 

Ici, pour la consigne *C1*, « *les quatre triangles rentrent aussi bien …* » tandis que, pour les consignes *C2* et *C3*, « *une petite surface n'est pas comblée* » :

pour cécile :

les quatres triangles rectangles rentrent aussi biens dans le carré C que dans les carrés B et A

pour Marie, Loïc et Thomas :

On trouve la même chose sauf que, a chaque fois une petite surface n'est pas comblée. Cette surface non comblée est toujours la même.

Donc pour tous les cas

C = A + B.

mais cette « *petite surface* » est repérée déjà comme étant « *la même* ». Reste donc à réfléchir sur la question posée par l'enseignant(e) : « *Comment peut-on prouver que c'est la même ?* »

Pour Grégory :

Le carré n'est pas entièrement recouvert.

Etienne et ses camarades « *positionnent* » les triangles sur le carré C mais n'arrivent pas à la même conclusion pour *C1* et *C2* :

Conclusion : Sur le grand carré C on peut positionner les 4 triangles donc l'aire des 4 triangles et égale à l'aire du carré C	Conclusion : Sur le grand carré C on peut positionner les 4 triangles donc l'aire des 4 triangles est plus petite que l'aire du carré C.
<u>*C1 :*</u>	<u>*C2 :*</u>

Pour eux, les deux cas restent distincts, séparés : une étape reste à franchir.

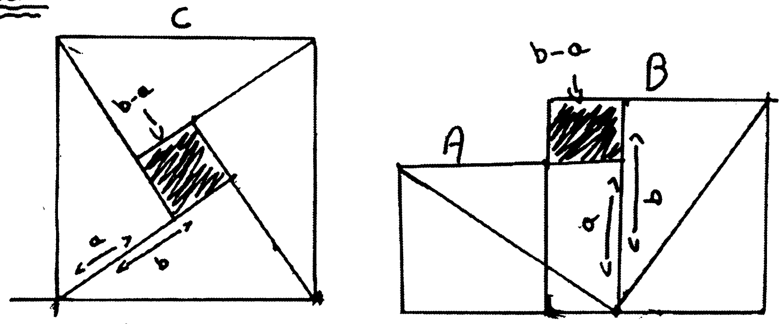
Ces écrits aux formes variées permettent une relance efficace des groupes ou, si on doit passer à la lecture des transparents, le dialogue classe - enseignant(e) afin d'approfondir et de prouver ce qui a été si bien « ressenti ».

La présentation des transparents se fait dans un ordre judicieusement choisi par l'enseignant(e) dans le but de valoriser chaque production et se termine généralement sur une production comme celle du groupe de Thomas :

C2! Consigne 1 et 2 :

Quand on supperpose les 4 triangles rectangles sur le carré C ensuite sur les deux carrées a et b réunis. On aperçoit que l'aire des 4 triangles est plus petite que l'aire du carré C et des deux carrés A et B réunis.

Car :



Conclusion : L'aire du carré C est égale à l'aire des deux carrés A et B réunis, car les petits carrés hachurés dans chacun de ces carrés sait b-a.

Peu d'élèves expliquent pourquoi les deux carrés restants ont même aire ; ils éprouvent quelques difficultés à évaluer le côté du « trou ». L'utilisation de lettres pour désigner des mesures de longueurs est encore une difficulté en 4ème. De plus, le dédoublement d'objet fait obstacle : en effet, le côté a du triangle s'ajuste partiellement au côté b d'un autre triangle.

Nous n'avons pas rencontré beaucoup d'élèves qui ressentaient le besoin de démontrer la nature carrée du « trou » ou la parfaite superposition des triangles sur les carrés. Le rôle de l'enseignant(e) est là encore essentiel : le bilan des productions d'élèves permet de formuler une conjecture : $a^2 + b^2 = c^2$ (ou $A + B = C$) qui doit être validée par une démonstration. Comme le rappellent les Instructions Officielles[3] : « *Le statut des résultats du cours, admis sur conjecture ou démontré, doit être clair.* ». La complémentarité des angles aigus d'un triangle rectangle, l'alignement des points ... sont les outils nécessaires à la validation de cette démonstration par transposition d'éléments.

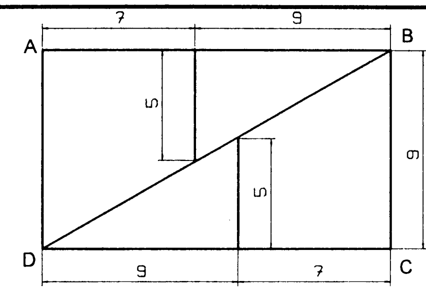
[3] Accompagnement des programmes de 5ème et 4ème – Livret 3, CNDP, 1997.

Des exercices de reconfigurations qui aboutissent à des égalités fausses du type « 143 = 144 » ou « 64 = 65 = 66 = 67 = 68 = 69 »[4] (la différence des aires est due à un parallélogramme long et fin né d'un non-alignement de points) peuvent être proposés pour montrer la nécessité d'effectuer cette démonstration. En voici un exemple :

ABCD est un rectangle.

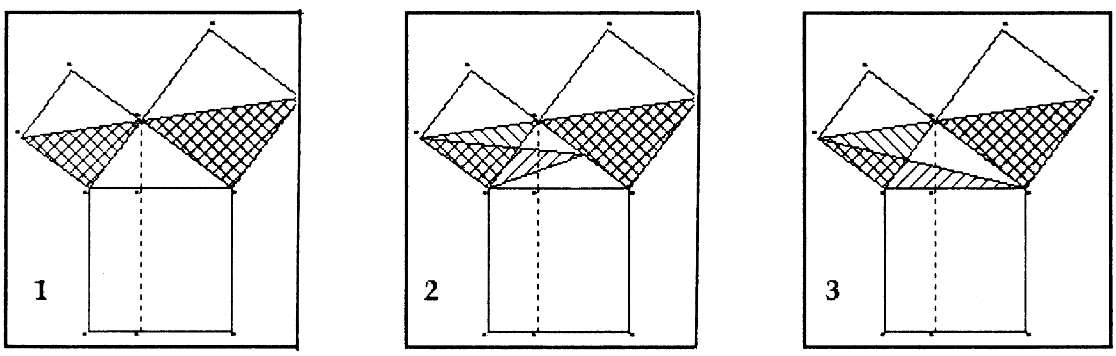
1- Quelle est son aire totale ?

2- Calculer aussi son aire par morceaux. Et alors ?

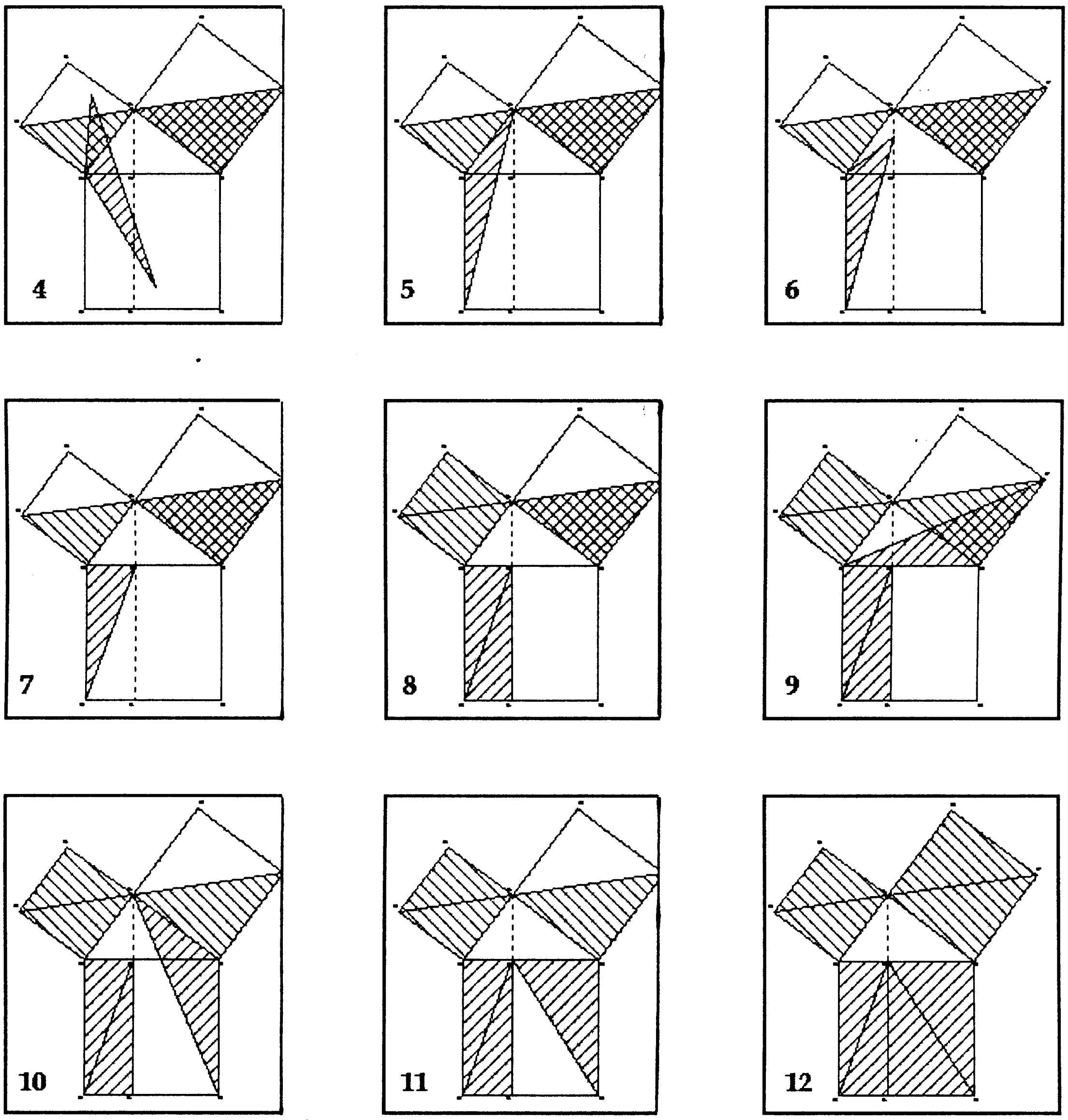


Une autre démonstration par transposition d'éléments nous semble incontournable : la démonstration d'Euclide. De nombreux fichiers informatiques existants permettent une visualisation très claire de la reconfiguration des carrés A et B en carré C.

En voici un exemple :



[4] Article de Jean BRETTE, numéro spécial de Maths & Malices, juin 1994.



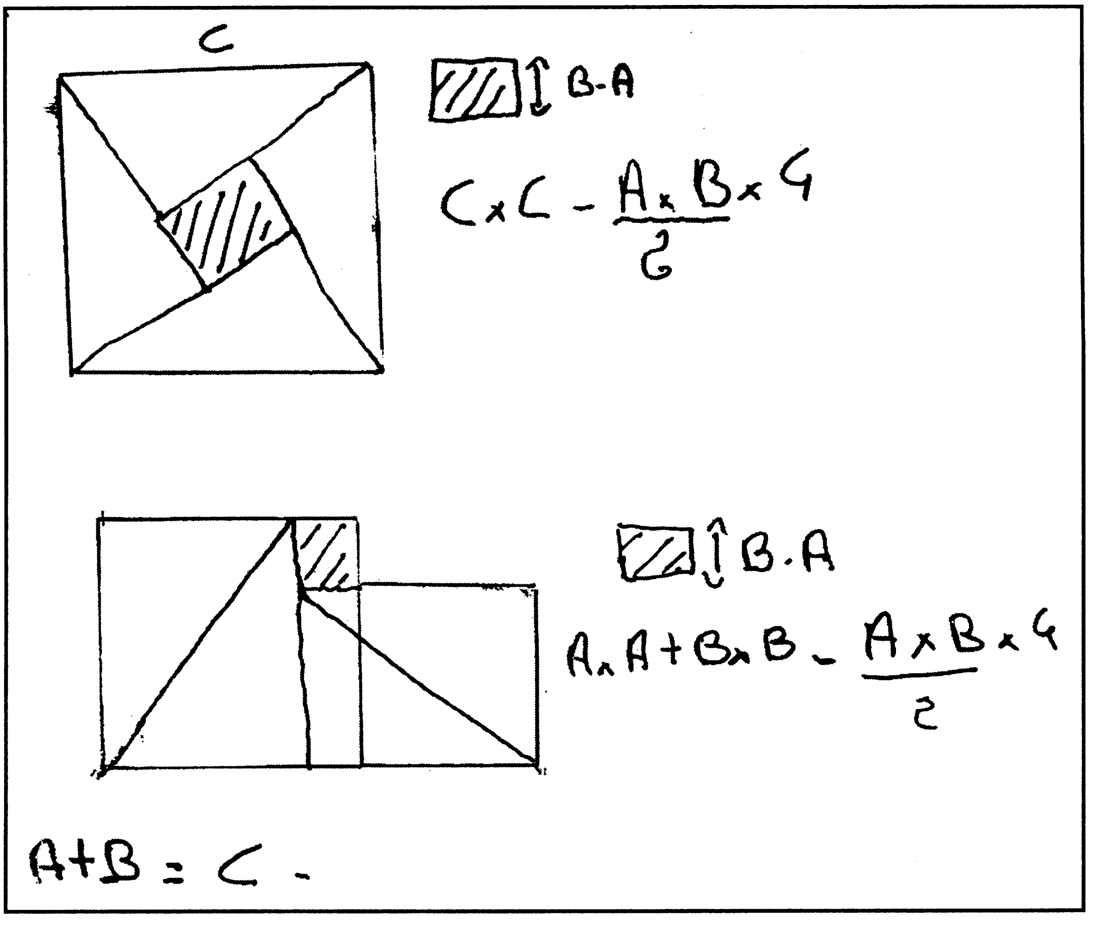
Suivant le niveau de la classe et la progression choisie sur l'année, d'autres démonstrations de cette propriété peuvent être effectuées :

- une démonstration géométrique basée sur le cosinus ;

- une démonstration littérale comme celle de Garfield ($20^{\text{ème}}$ président des Etats-Unis (1881)).[5].

[5] Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le Théorème de Pythagore sans jamais oser le demander. M.-F. Coste-Roy, P. Knerr, J.-C. Martzloff, R. Tran-Dang, IREM Paris Nord.

A partir d'un transparent comme celui d'Olivier et de son groupe, on peut compléter l'activité par la démonstration littérale de Bhâskara :



Cette production souligne une autre difficulté de la situation : les élèves sont confrontés à des grandeurs de natures différentes (longueurs et aires). Ils utilisent les lettres A, B et C aussi bien pour nommer les surfaces (comme l'indique la consigne) et les aires de ces surfaces, que pour désigner les mesures de longueurs des côtés (désignés par les lettres minuscules a, b et c dans l'énoncé). Ils sont généralement peu sensibles à la casse (minuscule, majuscule) des lettres utilisées, ce qui explique principalement ce glissement entre les notations d'aires et de longueurs.

Lors de la présentation des transparents, les élèves justifient souvent l'écriture « B – A » en précisant : « *C'est le carré B moins le carré A* » : le carré est identifié par la mesure du côté.

Notre objectif, dans cette activité, est d'introduire la propriété de Pythagore en termes d'égalité d'aires. Les exercices classiques que nous proposons ensuite à nos élèves exploitent cette égalité sur les grandeurs. Dans un premier temps, pour calculer par exemple la longueur de l'hypoténuse d'un triangle ABC rectangle en A dans lequel AB = 3 cm et AC = 4 cm, les élèves écrivent :

Aire du carré construit sur [AB] : 3 cm × 3 cm = 9 cm². *Aire du carré construit sur [AC] : 4 cm × 4 cm = 16 cm².* *Aire du carré construit sur [BC] : 9 cm² + 16 cm² = 25 cm².* *Longueur du côté [BC] : 5 cm.*

La propriété de Pythagore est une propriété sur les aires des carrés (ou de figures semblables) construits sur les côtés d'un triangle rectangle. Ici, elle est introduite et manipulée sous cette forme. C'est la prégnance de la formule de l'aire du carré qui donne du sens à l'écriture avec les longueurs. Cette prise de sens évite alors de nombreuses difficultés ultérieures.

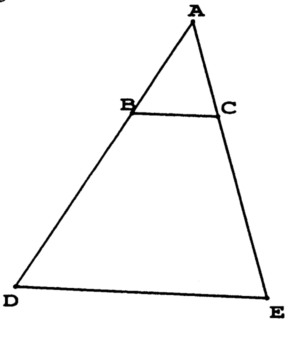
Depuis que nous proposons cette activité et ce type de rédaction (rédaction que nous faisons évoluer après quelques exercices de gamme), nous retrouvons beaucoup moins d'erreurs du type : $AB^2 = 9\ cm$ ou $BC^2 = 25$, *donc* $BC^2 = 5\ cm$. L'introduction de « $\sqrt{\ }$ » à ce moment en 4ème peut alors prendre sens à travers les deux notions travaillées dans cette séquence : l'aire d'un carré et la longueur de son côté. Les élèves connaissent et manipulent aisément la formule : « *côté × côté = aire du carré* » depuis la classe de 6ème. Maintenant ils ont la démarche dans l'autre sens : « *j'ai l'aire, je retrouve le côté* ».

« Thalès light »

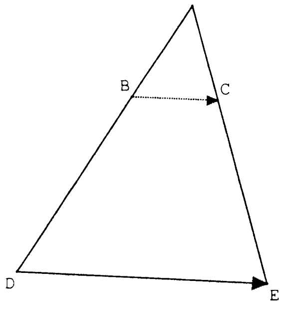
La dernière situation que nous proposons ici illustre, une nouvelle fois encore, notre volonté d'éviter la parcellarisation des connaissances chez nos élèves.

La propriété de proportionnalité des longueurs des côtés dans un triangle, objet de cette étude, doit s'intégrer dans un champ plus vaste de concepts. Dans le domaine géométrique, cette activité va permettre de travailler les notions de figures semblables, d'agrandissement réduction, d'angles et droites parallèles. Dans le cadre numérique, les notions de proportionnalité, d'échelle, d'inverse, de lien entre division et multiplication, de valeurs exactes et approchées vont être abordées.

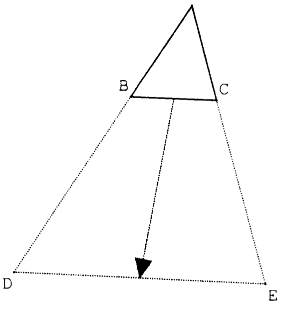
Comme l'a souligné Jean-Claude Duperret[1], « *Thalès apparaît trop rapidement pour les élèves comme une configuration statique*



qui cache les deux dynamiques qui ont pu le faire naître. »



aspect « projection »

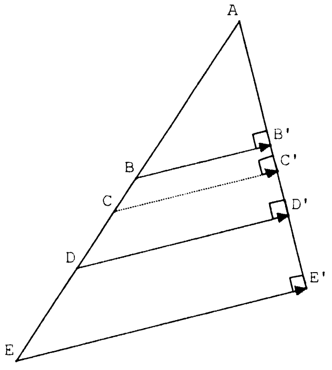


aspect « homothétie »

[1] Pour un Thalès dynamique, Jean-Claude Duperret, Bulletin Inter-IREM : *Autour de Thalès*, décembre 1995.

Deux autres notions, au programme de $4^{ème}$, vont permettre d'aborder l'un ou l'autre de ces deux aspects :

- d'une part, le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle situé exclusivement sur l'axe « projection » ;

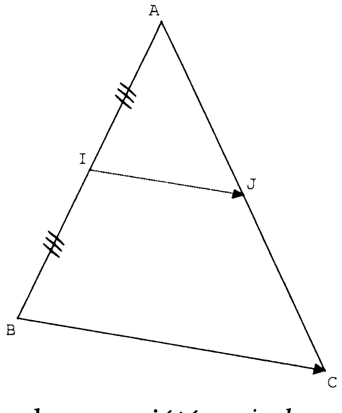


Égalité de rapports :

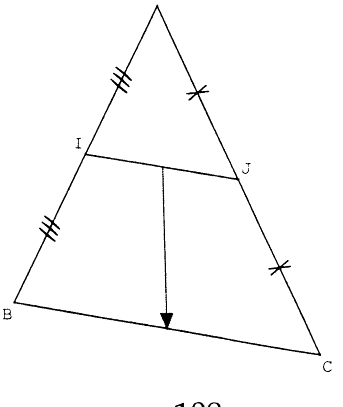
$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{AD'}{AD} = \frac{AE'}{AE} = \cos \widehat{A}$$

- d'autre part, les propriétés liées aux milieux des côtés dans un triangle qui associent à la fois l'optique projection et l'optique agrandissement réduction.

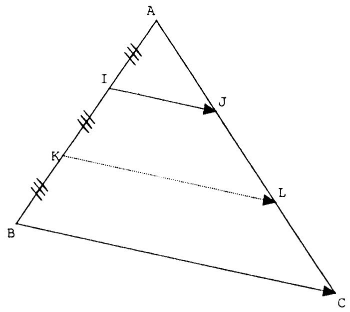
En effet, la propriété « *Si, dans un triangle, une droite passe par le milieu d'un côté en étant parallèle à un deuxième côté alors cette droite coupe le troisième côté en son milieu* » s'inscrit principalement dans la dynamique projection : le projeté d'un milieu est un milieu.



Par contre, la propriété « *si, dans un triangle, un segment joint les milieux de deux côtés alors sa longueur est égale à la moitié de celle du troisième côté* » propose une vision davantage axée sur l'homothétie.



Les Instructions Officielles et documents d'accompagnement des programmes du cycle central suggèrent une approche de la propriété de Thalès privilégiant la vision de la projection : « *On coupe un des côtés d'un triangle ABC en trois segments de même longueur : AI = IK = KB. Par I et K, on mène les parallèles au côté [BC], qui coupent [AC] en J et L respectivement. À l'aide des résultats sur les milieux de deux côtés d'un triangle, on souhaite établir que le côté [AC] se trouve lui aussi coupé en trois régulièrement : AJ = JL = LC.* »[2]



Cette démarche, que nous avons expérimentée dans nos classes, a soulevé plusieurs difficultés :

- difficulté pour passer de cas particuliers ($\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$) au cas général ;
- difficulté pour passer du point de vue projection au point de vue triangle ;

AM	AN
AB	AC

Point de vue « triangle »

Point de vue « projection »

- difficulté pour introduire ensuite le rapport sur les troisièmes côtés des triangles.

Nous avons donc construit la situation suivante qui privilégie la vision agrandissement réduction et s'appuie sur de simples configurations triangulaires, exemptes de tout habillage pseudo-concret. Elle s'inspire des activités type puzzle (agrandir ou réduire les différentes pièces afin d'obtenir un puzzle semblable) proposées en $5^{ème}$ pour travailler la proportionnalité.

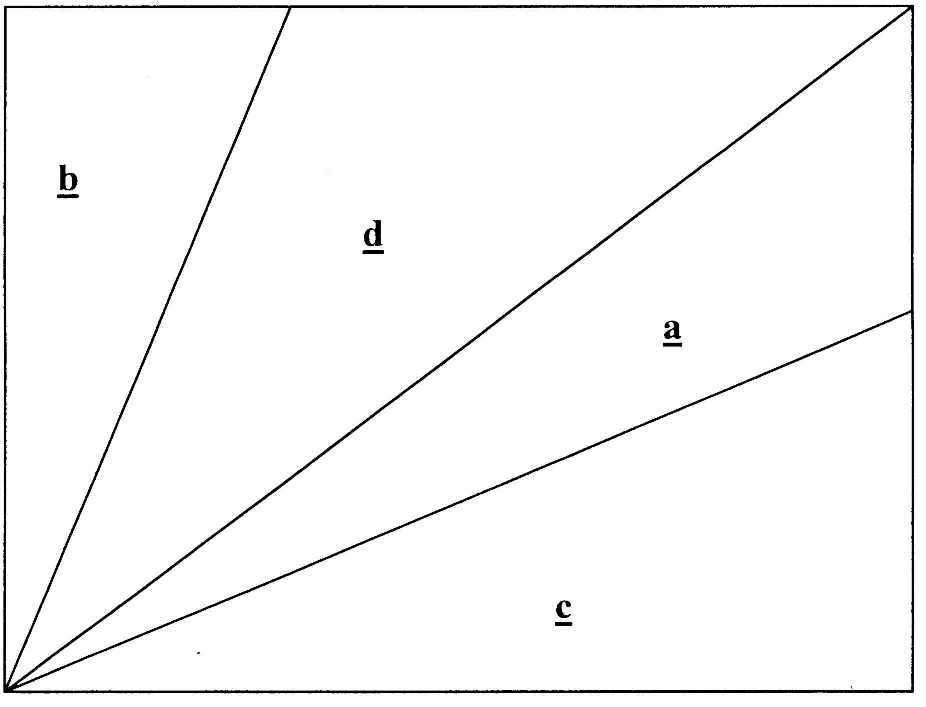
[2] Accompagnement des programmes de $5^{ème}$ et $4^{ème}$, 1997, Ministère de L'Éducation Nationale, Cndp.

Cette activité se déroule sur trois heures.

Des groupes homogènes de trois ou quatre élèves sont constitués dès le début de la première séance. Chaque élève d'un groupe reçoit un des quatre triangles **a**, **b**, **c**, **d** ci-dessous avec la consigne suivante :

Vous disposez de quatre pièces d'un puzzle rectangulaire que vous devez reconstituer.

Voici réduit (à l'échelle $\frac{1}{2}$) le puzzle à obtenir :



Quelques minutes leur suffisent pour obtenir le rectangle attendu.

Nous leur distribuons ensuite la deuxième partie de la consigne :

Vous devez ensuite produire un puzzle semblable de longueur ……… cm.

Les longueurs demandées, identiques pour les élèves d'un même groupe, mais différentes d'un groupe à l'autre pour gérer l'hétérogénéité de la classe, sont :

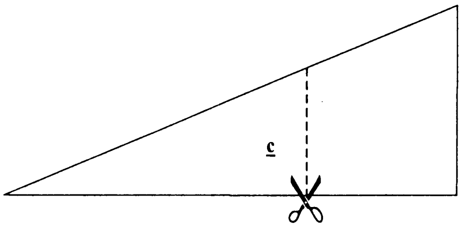
6 cm ; 8 cm ; 9,6 cm ; 12 cm ; 16 cm ; 18 cm ; 19,2 cm.

Le terme « ***produire*** » utilisé dans la consigne est plus ouvert et autorise des démarches plus nombreuses que « ***construire*** » qui imposerait une démarche raisonnée et un travail sur la figure. « ***Produire*** » permet aux élèves de travailler sur le dessin en effectuant des découpages, reproductions, mesurages …

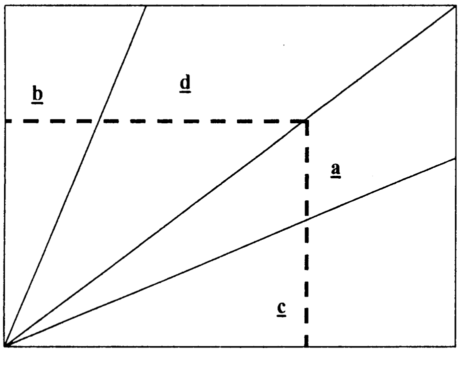
Les élèves sont surtout dans l'action et les méthodes utilisées varient suivant leur niveau et la longueur demandée. Le triangle ***c*** est l'élément de départ : c'est la seule pièce dont une longueur est indiquée dans la consigne.

Voici les démarches rencontrées lors de nos expérimentations :

- découpage des triangles donnés (c, puis a, d et b) ;



- reproduction du puzzle rectangulaire donné puis tracé du rectangle réduit et des différentes pièces par parallélisme ;



- construction du triangle réduit c à partir de la longueur donnée et du report de la grandeur de l'angle aigu adjacent et de l'angle droit (ou tracé après mesurage de cet angle) puis production de proche en proche des autres triangles par la même procédure (avec report ou mesurage de la longueur du côté commun) ;

- mesurage des longueurs des trois côtés de chaque triangle puis mise en œuvre de la proportionnalité.

Cette dernière méthode est utilisée par une minorité d'élèves. En effet, contrairement à l'activité Pythagore dans laquelle la consigne induit un changement de cadres (passage du cadre géométrique au cadre des grandeurs), il y a ici homogénéité entre les objets donnés et ceux à obtenir : les élèves disposent de triangles et doivent produire de nouveaux triangles. De plus, seule la pièce c permet le calcul du coefficient de réduction après mesurage, ce qui n'incite pas les autres camarades du groupe à se lancer dans ce type de démarche.

Une autre procédure est parfois utilisée après mesurage : « *Si on enlève (6 cm) à la longueur du rectangle alors on enlève (6 cm) à sa largeur…* ». Cette pseudo-proportionnalité est invalidée lorsque les élèves doivent juxtaposer leurs triangles pour reconstituer le puzzle rectangulaire.

Après environ 25 min de recherche, la consigne orale suivante est précisée :

Vous devez reproduire votre puzzle sur le transparent. Aucune explication ne doit apparaître.

Les transparents sont ensuite ramassés et l'enseignant superpose au rétroprojecteur les différents puzzles reconstitués.

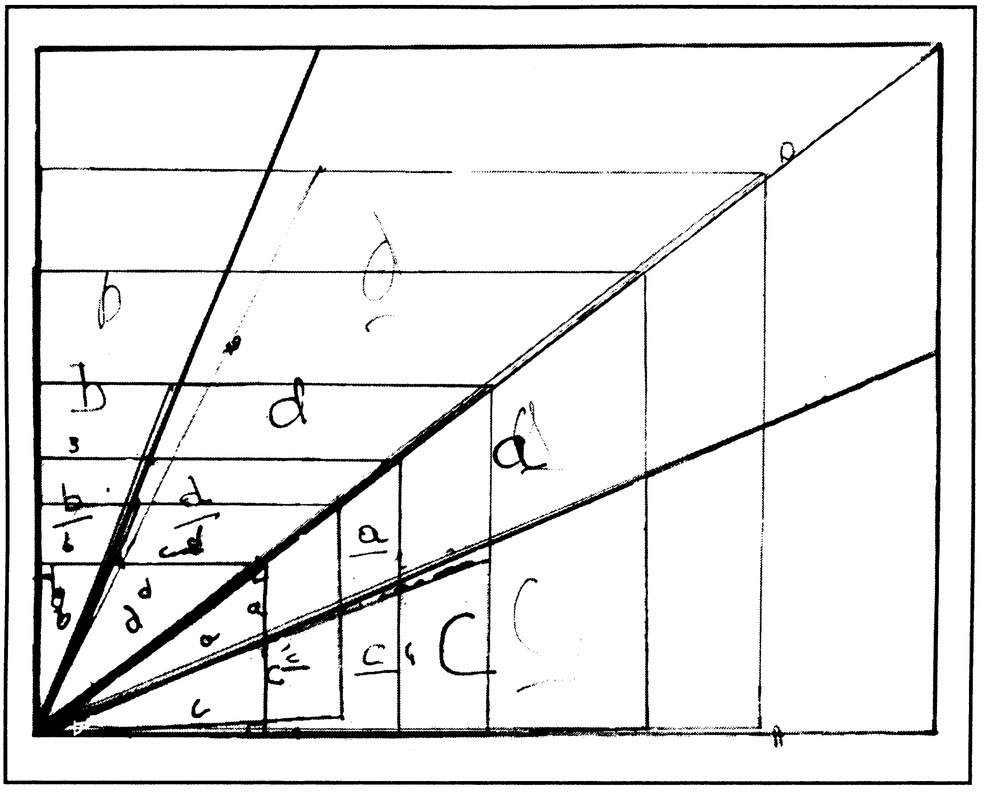
La production de « transparents muets » porte le débat sur la justesse des puzzles obtenus et non sur les démarches utilisées.

Les échanges permettent de corriger d'éventuelles erreurs ou imprécisions, d'éliminer les puzzles erronés et de faire constater :

1- l'alignement des points ;

2- le parallélisme des côtés.

Voici, toujours à l'échelle $\frac{1}{2}$, les réalisations d'une classe :



Cette première séance se termine sur les démonstrations des deux propriétés suivantes :

- *Si, dans un triangle ABC, M est un point de [AB], N est un point de [AC] et (MN) // (BC) alors le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.*

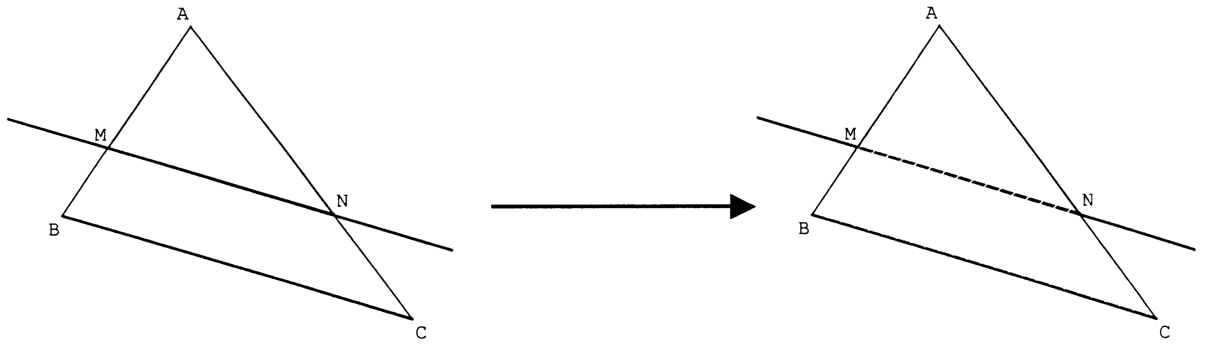
- Réciproquement, *si le triangle AMN est une réduction du triangle ABC alors on peut superposer les angles* $\widehat{AMN}$ *et* $\widehat{ABC}$ *avec M sur [AB], N sur [AC] et (MN) // (BC).*

Les outils utilisés ici sont :

- d'une part, les propriétés sur les angles et droites parallèles étudiées en 5ème ;
- d'autre part, l'égalité des mesures des angles de deux triangles semblables.

Cette propriété sur les figures semblables n'est pas au programme de collège mais est une notion intuitive pour les élèves. Comme le soulignait Émile Borel, au début du XXème siècle, dans ses travaux sur la théorie de la mesure : « *Il convient, dans l'enseignement élémentaire, de considérer la notion de similitude comme une notion première : c'est une notion des plus simples que chacun a sans faire de géométrie ; il suffit d'avoir constaté que l'idée de forme est indépendante de l'idée de grandeur* ».

La trace écrite de cette première séance se résume à :



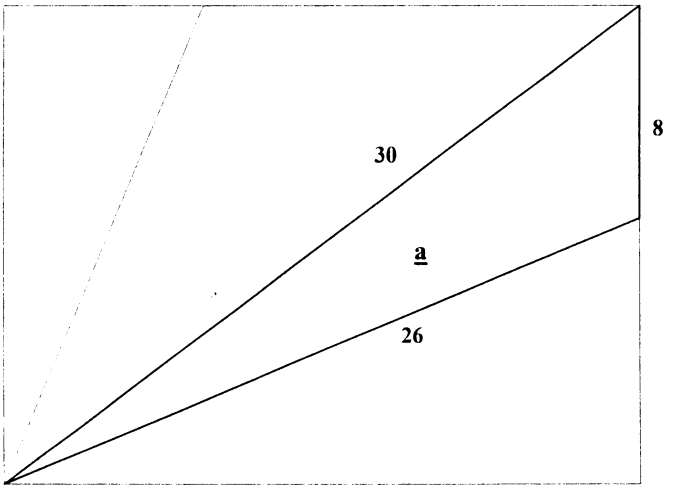
Si	*dans un triangle ABC, M est sur [AB], N est sur [AC] et (MN) // (BC)*	***alors***	*le triangle AMN est une réduction du triangle ABC.*

Cette première synthèse installe le parallélisme et l'alignement des points, conditions d'entrée de la propriété de Thalès visée.

La deuxième séance permet de passer aux mesures et de faire fonctionner la proportionnalité.

Chaque élève dispose d'une reproduction réduite du puzzle origine sur laquelle sont inscrites les mesures, en centimètres, des longueurs des côtés de son triangle.

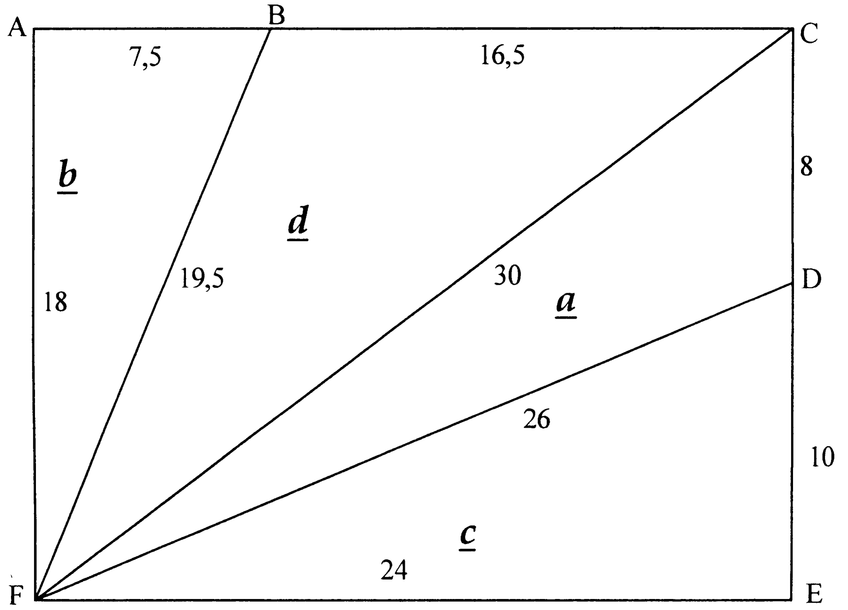
Voici la consigne concernant le triangle <u>*a*</u> :



Voici une représentation du puzzle sur laquelle sont inscrites les mesures exactes, exprimées en cm, des côtés du triangle d'origine.

<u>Calculez</u> les mesures des trois côtés du triangle réduit que vous avez obtenu.

Voici, sur un même puzzle, l'ensemble des mesures dont dispose chaque groupe :



La phase de recherche individuelle ne dure que quelques minutes : elle doit permettre aux élèves de s'approprier cette nouvelle consigne mais ne leur permet pas de s'engager réellement dans une démarche de résolution. En effet, seul l'élève possédant le triangle c dispose d'une mesure du triangle réduit et peut ainsi calculer ses deux autres mesures. Pour poursuivre, ses camarades doivent repérer l'ordre c - a - d - b, reprendre une des mesures trouvées par le précédent et faire agir la proportionnalité.

Après 30 min environ de travail de groupe, l'enseignant précise oralement :

Présentez clairement, sur la feuille de groupe, vos calculs et vos résultats.

Les techniques étudiées en 5ème, lors de travaux sur la proportionnalité et la notion d'échelle, ne sont pas automatiquement mises en œuvre pour calculer les mesures demandées. Les errements sont nombreux. Les premiers essais font souvent appel à l'addition et la soustraction.

Deux procédures erronées sont rencontrées :

	Triangle donné	*Triangle réduit*
1er côté	24	16
2ème côté	26	

+ 2

- 8

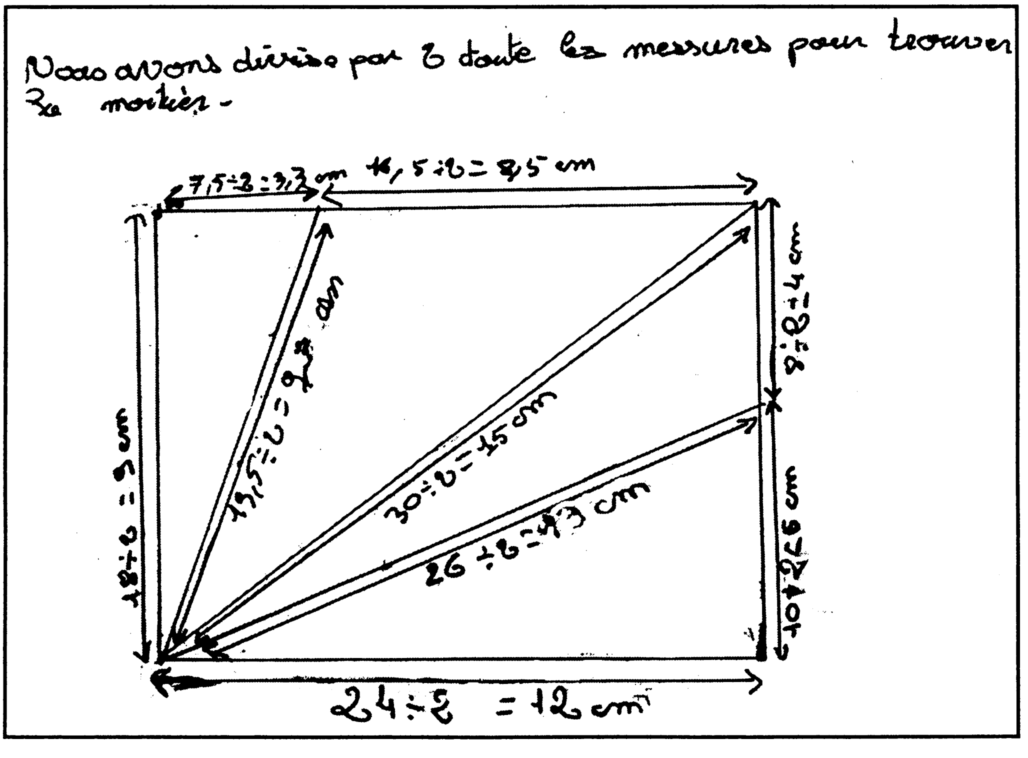
Les vérifications sur leur puzzle permettent d'invalider ces techniques.

La méthode correcte majoritairement utilisée s'appuie sur le calcul du rapport de réduction : les élèves divisent 24 par la mesure réduite demandée puis divisent les autres mesures données par ce quotient. Deux théorèmes élèves resurgissent à cette occasion :

- on ne peut diviser que si le dividende est plus grand que le diviseur ;

- la division produit un résultat plus petit que le dividende, la multiplication un résultat plus grand que les facteurs. Ici il y a réduction donc il faut diviser et non multiplier.

Pour ce groupe, la division par 2 a émergé après de nombreuses relances de l'enseignant.



Les échanges suivants (résumés ci-dessous) illustrent la non-maîtrise de la division par les élèves de ce groupe.

Les élèves passaient de 24 à 12 en faisant 24 – 12.
Enseignant (E) : « *Comment trouvez-vous 5 ?*
Groupe (G) : - *On fait 10 – 5 = 5.*
E : - *Oui ! Mais vous n'avez pas 5 ! Par quelle opération peut-on passer de 10 à 5 ?*
G : - *On divise …*
E : - *Par combien doit-on diviser ?*
G : - *Par 1 ! (on enlève une fois le nombre …)*
Par … (hésitation faisant suite à la réaction du professeur)
Par 0 !
Par 2. (Ouf !!!)

Malgré ce débat à l'intérieur du groupe et la mise en place d'une technique, certains élèves continuent à prélever, par mesurage, des informations sur leur dessin (peu juste car reproduit rapidement), ce qui explique les résultats du type *7,5 : 2 = 3,3* ou *16,5 : 2 = 8,5 …*

Pour cet autre groupe, le mesurage sur le dessin prévaut également sur la technique de calcul utilisée comme en témoignent les nombreuses erreurs dans les divisions :

Les Résultats donner sont diviser en 3 car :
Notre première mesure était 6 est quand. réalité
la Mesure est 24. donc ~~24~~ ÷ 3 = 6.
donc les autres mesures sont divisés aussi en 3.
ex : Fig A = 8 ÷ 3 = 2.
alors le côté de 8 devient 2 cm.

figure 1 : 8 ÷ 3 = 2 ; 30 ÷ 3 = 7,5, 26÷3 = 6,5

Malgré les nombreux résultats erronés, les productions de ces groupes témoignent d'un réel travail et doivent être valorisées : la technique a été trouvée.

Cette deuxième séance d'une heure se termine par la projection de quelques travaux de groupe permettant d'institutionnaliser la propriété de « Thalès light ».

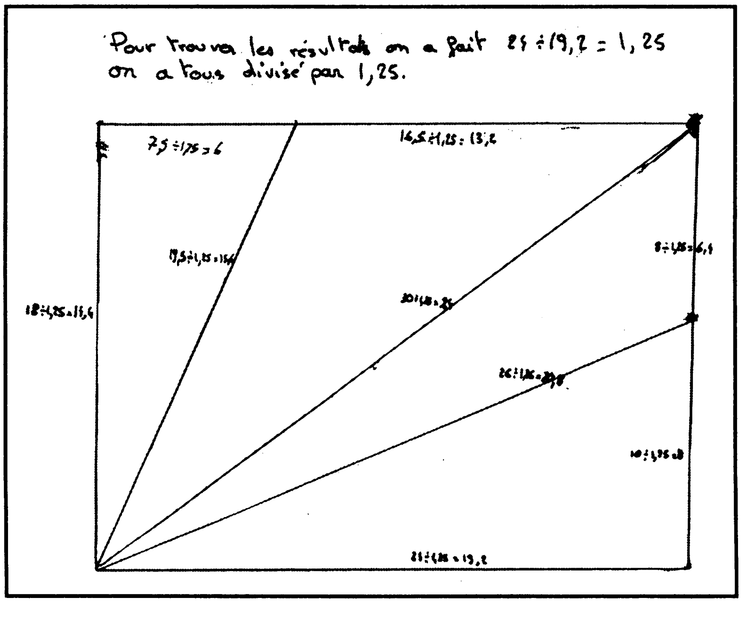
***Si**, dans un triangle ABC, M est un point de [AB], N est un point de [AC] et (MN) // (BC)* ***alors** les mesures AM, AN, MN et AB, AC, BC sont proportionnelles.*

Voici quelques extraits de travaux à sélectionner pour faire cette synthèse.

Pour ce groupe, les calculs sont exacts, mais la division par 2,5 n'est pas justifiée

Triangle C :	26 ÷ 2,5 = 10,4	10 ÷ 2,5 = 4	24 ÷ 2,5 = 9,6
Triangle A :	30 ÷ 2,5 = 12	26 ÷ 2,5 = 10,4	8 ÷ 2,5 = 3,2
Triangle B =	19,5 ÷ 2,5 = 7,8	18 ÷ 2,5 = 7,2	7,5 ÷ 2,5 = 3
Triangle D =	16,5 ÷ 2,5 = 6,6	19,5 ÷ 2,5 = 7,8	30 ÷ 2,5 = 12

Ces élèves expliquent succinctement leur démarche et présentent leurs résultats directement sur le puzzle réduit : ils éprouvent le besoin de confronter leurs résultats à la « réalité » du dessin réalisé.



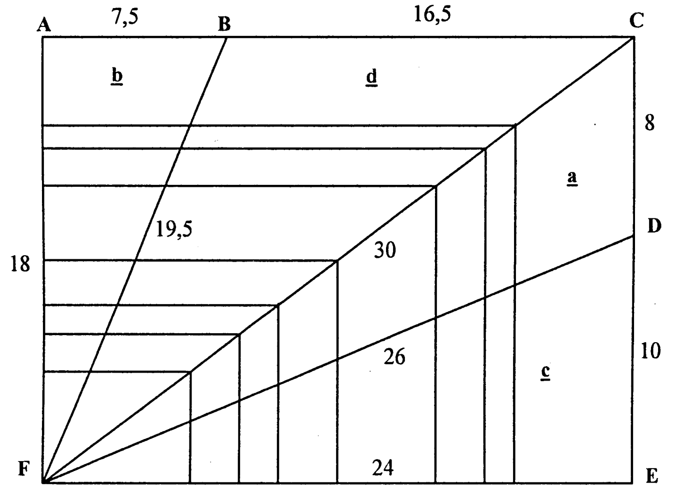
Ce type de production permet d'introduire la propriété visée :

Om fait 24 ÷ 8 = 3 donc on divise tous les cotés par 3
Il y a Proportionalité des triangle.

La troisième séance complète cette synthèse avec un travail plus spécifique dans le cadre numérique.

L'ensemble des productions des groupes est présenté en débat de classe. La feuille suivante (ici réduite) permet aux élèves d'en garder trace.

Différentes mesures dans le puzzle



	1							
AB	7,5							
BC	16,5							
CD	8							
DE	10							
EF	24	6	8	9,6	12	16	18	19,2
AF	18							
BF	19,5							
CF	30							
DF	26							

La première ligne de ce tableau induit un travail sur la notion d'échelle de réduction qui donne sens à la propriété étudiée : certains élèves réinvestissent spontanément ce calcul d'échelle dans les exercices d'application sur Thalès.

Les mesures réduites proposées permettent de mener une réflexion approfondie sur valeurs exactes et approchées.

Cette difficulté peut apparaître dès le calcul du coefficient de réduction :

A = Si on divise 24 par 18 le resultat et de 1,3. Alors on divise 30 par 1,3 = 23
8 par 1,3 = 6
26 par 1,3 = 20

B Si on divise 24 par 18 le resulta et de 1,3.
Alors on divise 18 par 1,3 = 13
7,5 par 1,3 = 5
19,5 par 1,3 = 15

ou lors de certains calculs de mesures :

On fait $\frac{24}{3} = 8$. Si on fait 24 : 3 ça fait 8.
on fait $\frac{26}{3} = 8,6$ Si on fait 26 : 3 ça fait 8
On fait $\frac{10}{3} = 3,3\overline{3}$
c'est parail pour toute les pièces ABCD.

La confrontation de l'écriture fractionnaire $\frac{10}{3}$ et de la valeur approchée 3,33 permet d'engager des échanges fructueux dans la classe.

D'autres écritures peuvent être également proposées :

figure b : 18 ÷ 3 = 6 cm
7,5 ÷ 3 = 2,5 cm
19,5 ÷ 3 = 6,5 cm

figure a : 30 ÷ 3 = 10 cm
26 ÷ 3 = $8,66\underline{6}$ cm
8 ÷ 3 = $2,66\underline{6}$

Là encore, l'écriture $8,66\underline{6}$ doit être rapprochée du résultat donné par certaines calculatrices (8,666666667).

Ce travail sur l'exact et l'approché doit prendre en compte le passage du dessin à la figure : le dessin d'un triangle est une représentation plus ou moins satisfaisante de l'idéalité mathématique triangle comme une valeur approchée peut être considérée comme une représentation plus ou moins précise (mais parfois suffisante suivant le contexte) d'un nombre exact. Il paraît donc vain d'exiger ici une valeur exacte lorsque les élèves en sont encore au stade du dessin et du mesurage.

Ce groupe, par exemple, ne produit que des résultats approchés au millimètre, résultats qui correspondent à la réalité de leur règle graduée et de leur dessin.

on a divisé par 1,5 pour trouver les mesures exacte pour le puzzle QUE MONSIEUR nous a donné.

$24 \div 16 = 1,5$

E : $24 \div 1,5 = 16$

$10 \div 1,5 = 6,6$

$26 \div 1,5 = 17,3$

Les coefficients de réduction choisis, variables didactiques de la situation, aboutissent à des mesures entières, décimales (d'ordres 1, 2 ou 3) ou rationnelles non décimales.

La diversité des méthodes de calcul possibles offre la possibilité d'obtenir différentes écritures pour un même nombre. Cette richesse permet également de réactiver ou découvrir la notion d'inverse et le lien entre multiplication et division comme l'a souligné ce groupe.

1) On divise le côté d'une figure par 3 puis on multiplie par 2 $\left(\times \frac{2}{3}\right)$

2) On divise par 1,5 $\left(\div \text{ par } \frac{3}{2}\right)$

et nous constatons que multiplier par $\frac{2}{3}$ revient à diviser par $\frac{3}{2}$. ($\frac{3}{2}$ est l'inverse de $\frac{2}{3}$)

<u>conclusion</u> : figure d : $16,5 \times \frac{2}{3} = 11.$

$30 \times \frac{2}{3} = 20$

$19,5 \times \frac{2}{3} = 13.$

Comme en témoigne l'ensemble des extraits de travaux d'élèves présentés ici, la procédure très majoritairement utilisée s'appuie sur le calcul du coefficient de réduction et la division.

Toutes les techniques liées à la proportionnalité sont envisageables, cependant certaines variables de l'activité ou contraintes de la consigne ne facilitent par leur utilisation. À titre d'exemples :

- les mesures choisies pour les longueurs des côtés des triangles font obstacle aux calculs des rapports liés à la projection (pour le triangle c, $\frac{24}{26}$ ou $\frac{24}{10}$) ;

- le nombre de données (trois pour le triangle origine et une pour le triangle réduit) n'incitent pas à l'utilisation de la procédure des « produits en croix » pour calculer une quatrième proportionnelle.

Cette synthèse peut se faire en utilisant un tableur et ainsi (re)travailler la notion de formule.

ET = =C3/4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			1								
3		AB	7,5	=C3/4							
4		BC	16,5								
5		CD	8								
6		DE	10								
7		EF	24	6	8	9,6	12	16	18	19,2	
8		AF	18								
9		BF	19,5								
10		CF	30								
11		DF	26								
12											

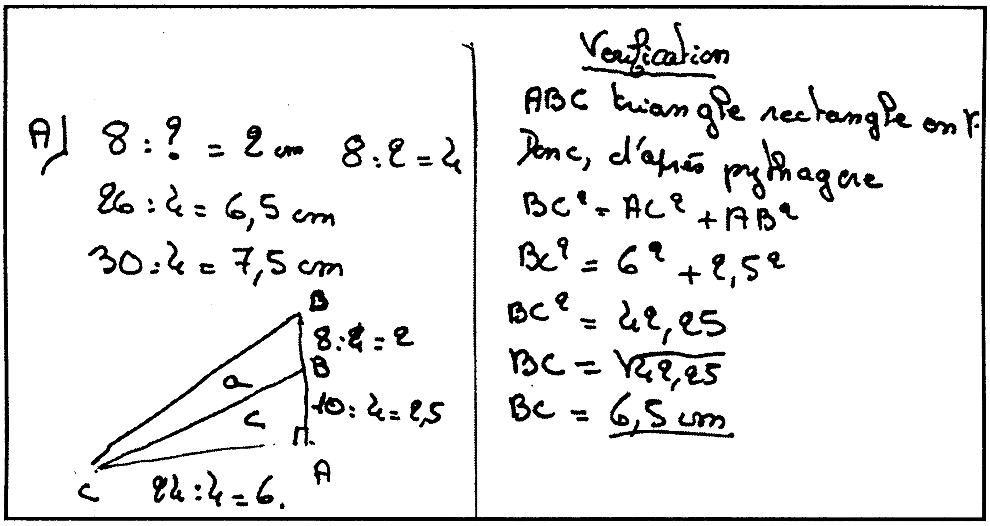
D3 = =C3/4

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2			1								
3		AB	7,5	1,875							
4		BC	16,5	4,125							
5		CD	8	2							
6		DE	10	2,5							
7		EF	24	6	8	9,6	12	16	18	19,2	
8		AF	18	4,5							
9		BF	19,5	4,875							
10		CF	30	7,5							
11		DF	26	6,5							
12											

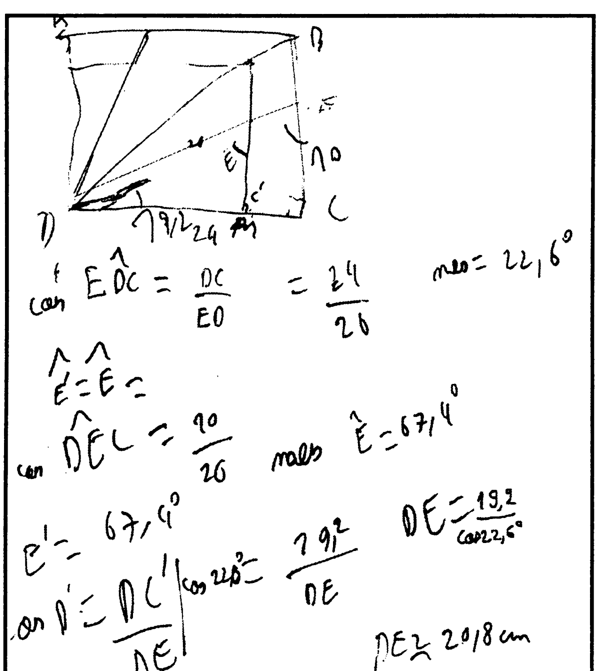
Le recours aux outils *format de cellule* et *largeur de colonne* » apporte une autre vision des notions de valeurs exactes et approchées.

Cette activité a été expérimentée, une année, après avoir traité la notion de cosinus et les propriétés de Pythagore. Nous avons obtenu certaines productions différentes de celles obtenues habituellement lorsque cette situation est proposée tôt dans l'année scolaire. Les élèves cherchent absolument à réutiliser les propriétés liées aux triangles rectangles.

Ce groupe a calculé le coefficient de réduction, puis les mesures réduites mais a ressenti la nécessité de vérifier la cohérence de leurs réponses en utilisant la propriété directe de Pythagore.



Cet autre groupe n'a pas perçu spontanément la proportionnalité des longueurs mais a produit un travail intense qui lui a permis de calculer la longueur DE en utilisant leurs connaissances. Cette production permet à l'enseignant de proposer une démonstration de Thalès s'appuyant sur le cosinus.



Il n'est pas question ici de relancer le débat de « l'œuf et de la poule » : faut-il étudier Thalès avant cosinus ou travailler la notion de cosinus avant d'introduire la propriété de Thalès ? Jean-Claude Duperret[3] a souligné ce problème d'enseignant(e) de collège : « *... à la recherche d'un fragile équilibre entre le « matheux » et le « pédago » qui vivent en [lui/elle]. Si l'un privilégie une construction rigoureuse, l'autre se préoccupe de la communication qu'il peut en faire...* ».

Les programmes précédents imposaient un ordre d'étude : le cosinus en 4ème, la propriété de Thalès en 3ème. Les programmes actuels laissent le choix entre les deux possibilités. Les Instructions Officielles rappellent d'ailleurs cette liberté pédagogique de l'enseignant de choisir sa progression sur l'année ainsi que les propriétés qu'il démontrera et celles qu'il demandera d'admettre (en le précisant clairement à ses élèves).

On peut donc imaginer introduire d'abord le cosinus (comme propriété admise) puis la propriété de proportionnalité des longueurs en la démontrant à partir du cosinus. Mais pourquoi opposer le « matheux » au « pédago » ?

L'activité, proposée ici, s'appuie sur les connaissances des élèves, tient compte de leurs représentations et permet d'introduire cette propriété « light » de Thalès très tôt en 4ème, après avoir étudié les propriétés des milieux dans un triangle[4].

---

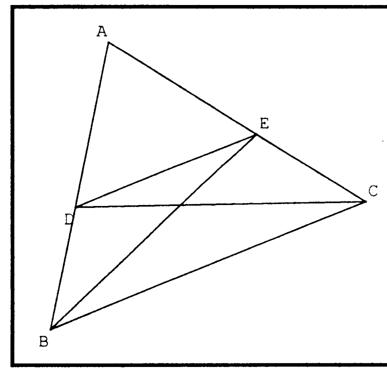
[3] « *Pour un Thalès dynamique* », Jean-Claude Duperret, Repères IREM n° 20, juillet 1995.
[4] Voir activité « *du triangle au triangle* ».

Cette propriété peut également être démontrée à partir de la démonstration proposée par Euclide. L'outil informatique permet une animation qui facilite la visualisation des sous-figures pertinentes.

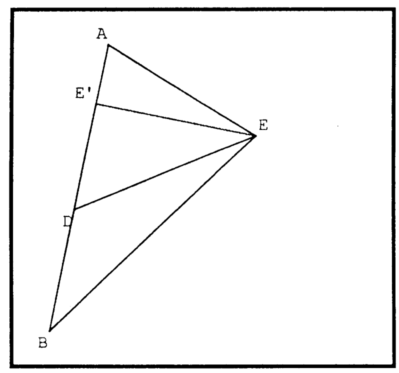
On sait que : *Dans le triangle ABC,*
D est un point de [AB],
E est un point de [AC],
(DE) // (BC)

On veut démontrer que :

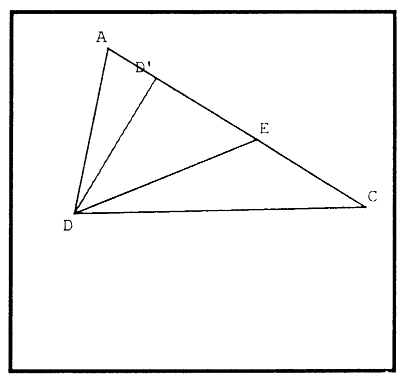
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$$



$$\frac{Aire\ de\ ADE}{Aire\ de\ ABE} = \frac{AD \times EE'/2}{AB \times EE'/2} = \frac{AD}{AB}$$



$$\frac{Aire\ de\ ADE}{Aire\ de\ ADC} = \frac{AE \times DD'/2}{AC \times DD'/2} = \frac{AE}{AC}$$

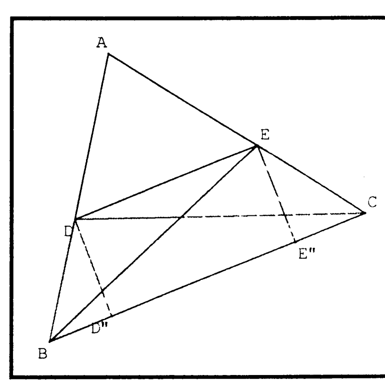


$Aire\ de\ BCD = \dfrac{BC \times DD''}{2}$ $\qquad$ $Aire\ de\ BCE = \dfrac{BC \times EE''}{2}$

Or, DD" = EE" car (DE) // (BC)
Donc, Aire de BCD = Aire de BCE
Or, Aire de ABE = Aire de ABC – Aire de BCE
et Aire de ADC = Aire de ABC – Aire de BCD
Donc, Aire de ABE = aire de ADC

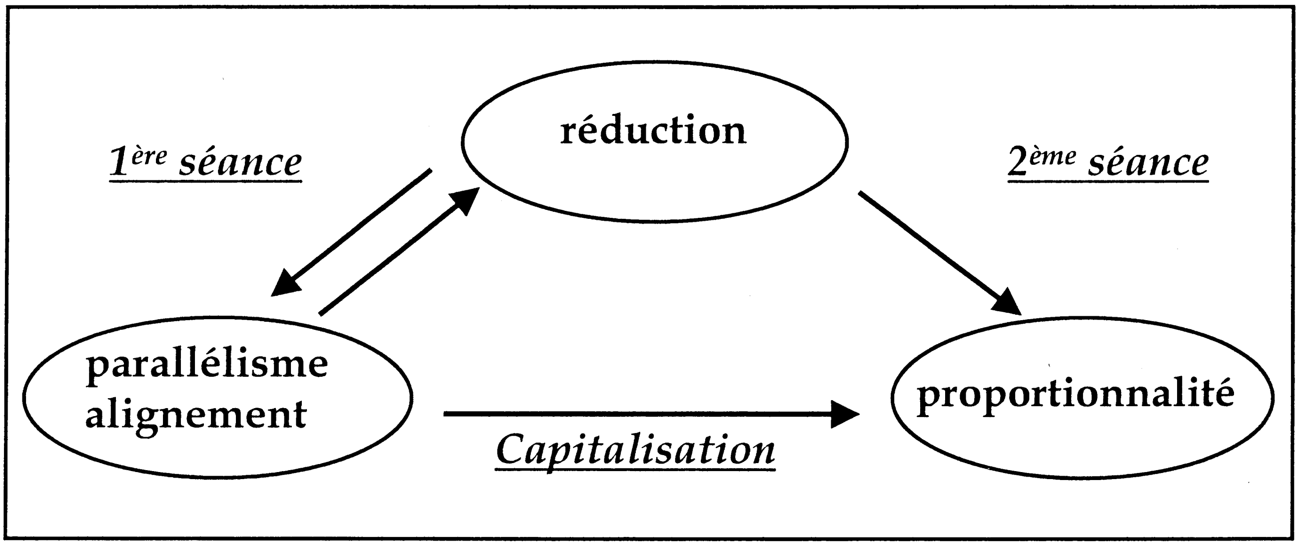
et $\dfrac{Aire\ de\ ADE}{Aire\ de\ ABE} = \dfrac{Aire\ de\ ADE}{Aire\ de\ ADC}$

et $\boxed{\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{AE}{AC}}$



Plus tard dans l'année, le cosinus pourra être introduit puis défini en appliquant la propriété de proportionnalité des longueurs. Nous avons déjà décrit, dans une précédente brochure[5], un exemple de situation de découverte du cosinus qui reprend cette vision réduction agrandissement. Cette progression allie ainsi la construction rigoureuse des savoirs mathématiques et son intégration dans le champ de connaissances des élèves.

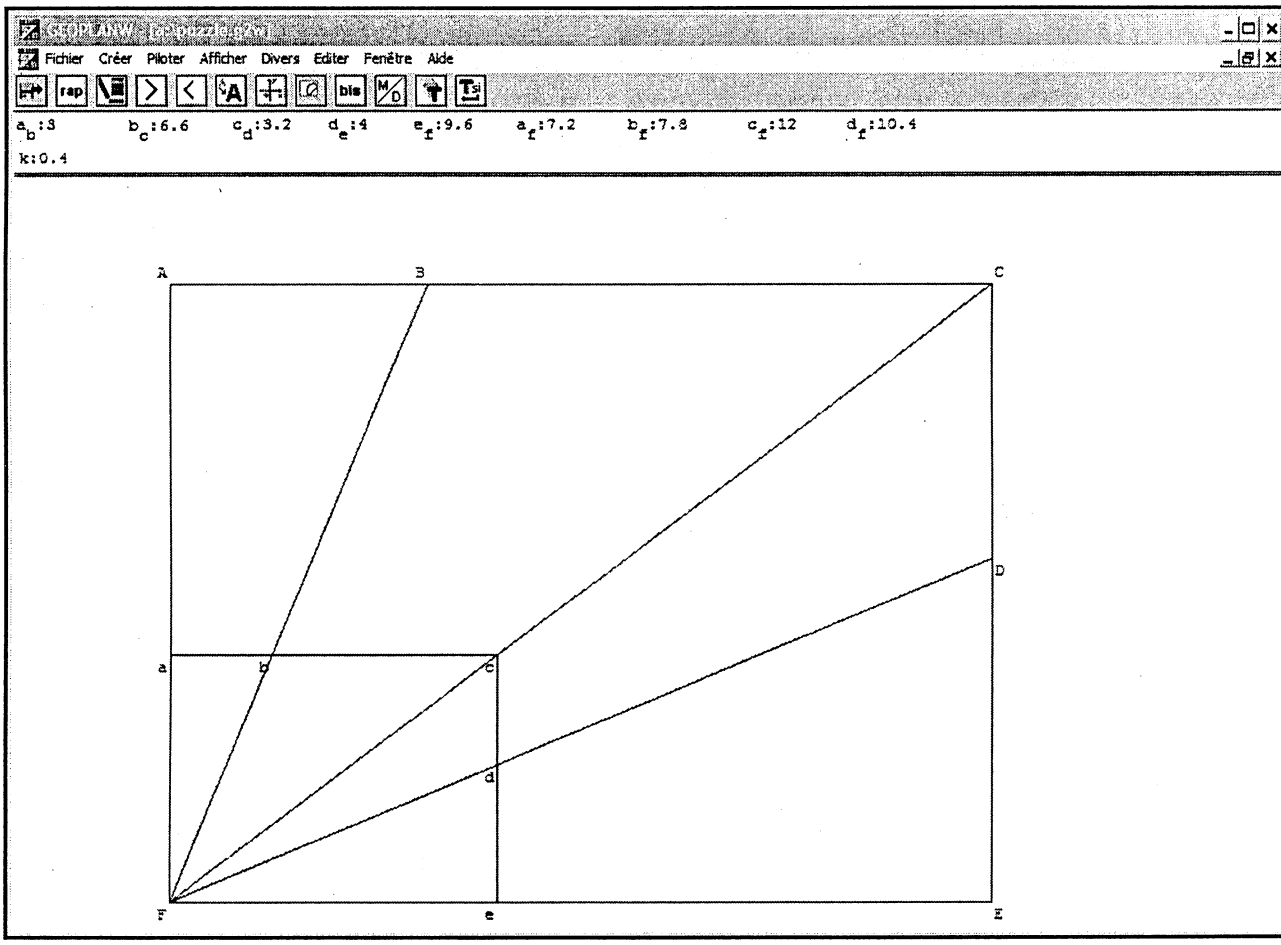
Cette activité, qui se déroule en trois temps, permet de créer une image mentale forte de la propriété de Thalès. Les deux premières séances permettent d'installer la propriété :



La troisième séance permet de travailler la proportionnalité dans le cadre numérique.

5 *Autour de la notion d'activité*, IREM de Rouen, Danielle BERGUE, Jacqueline BORRÉANI, Michel CHEVALLIER, Hélène COLONNA, juillet 1995.

La vision dynamique de cette propriété est renforcée par l'utilisation, lors de la synthèse, d'un logiciel de construction géométrique comme Geoplanw.



Apprendre à voir.

Chacune des situations décrites offre aux élèves le **TEMPS** de **VOIR**, voir pour percevoir, voir pour concevoir.

« Laisser du temps au **TEMPS** », c'est prendre chaque élève là où il en est. Quel que soit le sujet abordé, il a déjà un vécu scolaire et un vécu en tant que personne. Les situations proposées lui permettent de partir de ce vécu pour construire de nouvelles connaissances. Cela se fait d'abord à travers un temps et un processus personnels d'apprentissage puis se poursuit lors de la confrontation dans le travail de groupe et/ou le débat de classe. Un temps de synthèse permet, en fin d'activité, de rythmer, d'homogénéiser les acquisitions communes et d'installer le savoir voulu et détenu par l'enseignant(e).

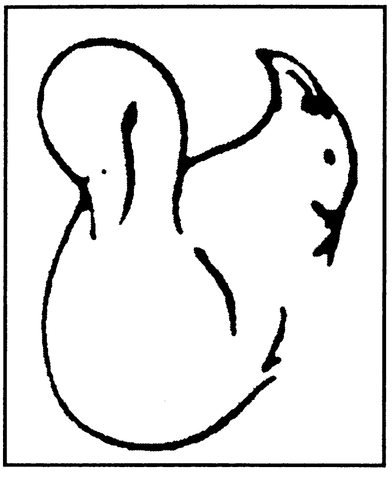
Ces situations, qui demandent de l'initiative de la part des élèves et un engagement réel, contribuent à leur formation scientifique. Elles répondent aux recommandations formulées dans la présentation des programmes du cycle central : « *La démarche suivie dans l'enseignement des mathématiques renforce la formation intellectuelle des élèves et concourt à celle de citoyen, en développant leur aptitude à chercher, leur capacité à critiquer, justifier ou infirmer une affirmation, en les habituant à s'exprimer clairement aussi bien à l'oral qu'à l'écrit.* ». Elles concourent également à donner davantage de cohérence à l'ensemble des notions abordées au collège.

« Apprendre à **VOIR** », c'est d'abord apprendre à analyser, avec les yeux, les images et le monde qui nous entourent.

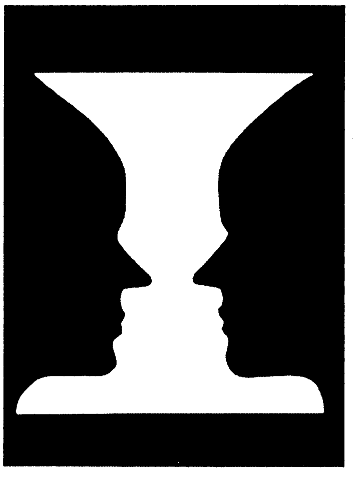
Un apprentissage sur le traitement descriptif du dessin géométrique est effectué dès l'école élémentaire et prolongé en 6$^{\text{ème}}$. Ce travail sur l'appréhension perceptive des images (dans l'ensemble des disciplines) et leur analyse doit être poursuivi au cycle central, avec l'objectif supplémentaire d'aller au delà du perceptif.

Cette appréhension perceptive est fortement influencée par le vécu de chaque élève : il faut donc l'habituer continuellement à changer de point de vue (au sens propre de l'expression).

Que voyez-vous ?



Un canard ou un écureuil ?



Deux visages ou un vase ?

Et maintenant ?

Une jeune ou une vieille femme[1] *?*

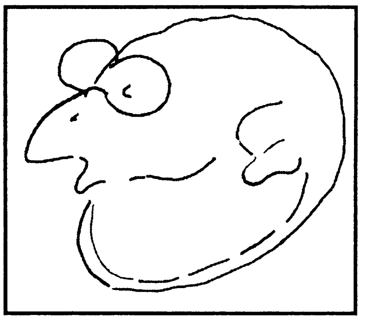
Une fille, une mère ou un père[2] *?*

---

[1] « *Ma femme et ma belle-mère* », Hill, 1915.

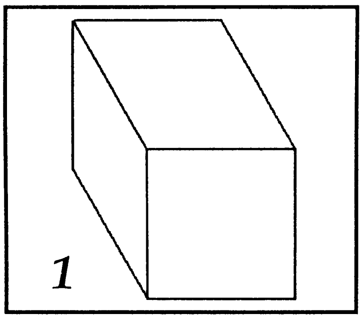
[2] « *Mère, père et fille* », Fischer, 1968.

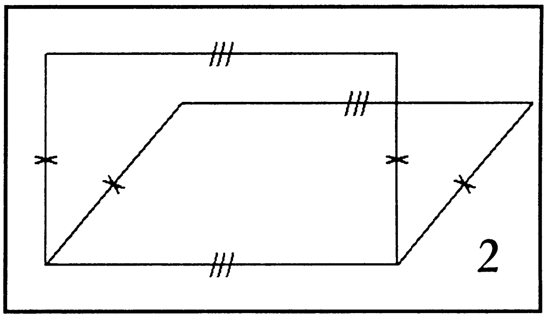
La vision première, préférée, voire même parfois unique, pour chaque illustration dépend du vécu de chaque personne, de sa disponibilité d'esprit et de ses attentes, souvent liées au contexte dans lequel est présentée l'image.



Placée dans une série sur les animaux, l'image ci-contre[3] représentera un rat. Par contre, dans une galerie de portraits, on verra le visage d'un homme avec des lunettes.

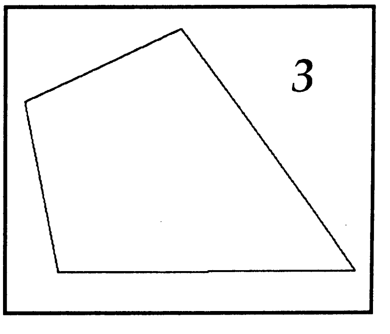
Cette influence de l'attente se retrouve dans les deux figures ci-dessous proposées, lors d'un test, avec la même question : « *Que voyez-vous ?* ».





Une majorité d'élèves propose des réponses liées à une vision d'un objet de l'espace : un pavé droit pour la figure 1, un « *livre ouvert* » pour la figure 2.

Cette perception du dessin 2 peut expliquer pourquoi beaucoup d'élèves pensent que le parallélogramme et le rectangle ont la même aire.



La figure ci-contre, rétroprojetée, a été parfois analysée comme étant un trapèze : les élèves justifient leur réponse par le parallélisme des deux « fuyantes ». Nous supposons qu'il peut s'agir là de l'effet de l'utilisation du rétroprojecteur : le plan du transparent est horizontal et le plan de projection est vertical. Ces élèves effectuent mentalement et inconsciemment ce changement de plan.

[3] Bugelski et Alampray, 1961.

L'appréhension perceptive d'une figure doit aussi s'accompagner d'une appréhension opératoire : il ne s'agit pas uniquement de la regarder « avec les yeux », il faut également agir mentalement ou physiquement sur elle : la tourner, l'agrandir, supprimer ou ajouter certains éléments ...

L'orientation de l'image influence son interprétation.

L'agent de police jovial[4] et l'orateur faisant un discours à son pupitre se transforment ...

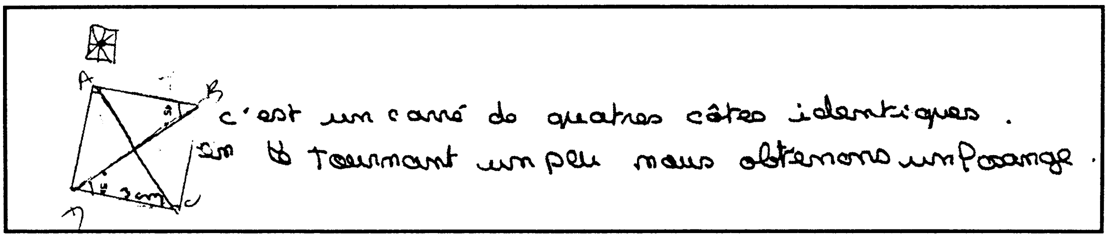
en un proviseur en colère et en portrait d'Abraham Lincoln, après une rotation de 180°.

Notre image préférée : le visage de ce clown[5] se transforme en un cirque et toutes ses attractions après une rotation de 90° horaire.

[4] Frisby, 1980.
[5] Kettlekamp, 1974.

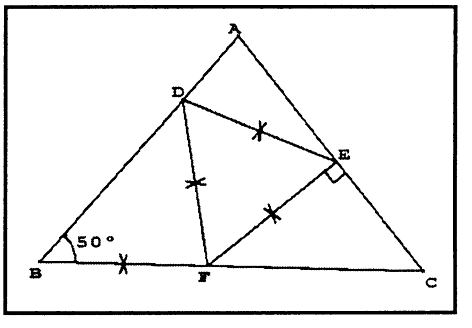
Les exemples illustrant l'influence de l'orientation d'une figure sur son interprétation sont nombreux en géométrie.

Voici un extrait de la production d'Aurélie, dans l'activité « Du triangle aux polygones » :



La reconnaissance des configurations de base est souvent liée à une position particulière privilégiée car plus confortable, plus stable : carré et losange, droites perpendiculaires « horizontales » et « verticales », triangle isocèle posé sur sa base …

Dans cet exercice de 5ème, il faut démontrer que le triangle ABC est isocèle. Les natures particulières des triangles EDF et CEF sont rapidement repérées. Par contre, la position du triangle BDF fait obstacle à son identification.



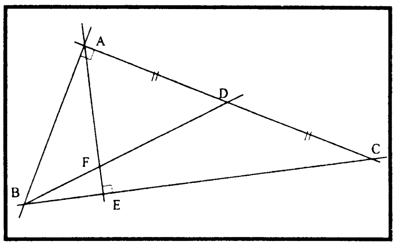
Les activités « Du triangle au triangle », « Du triangle aux polygones », « Pythagore », dans lesquelles les élèves doivent tourner et retourner leurs triangles pour aboutir à la reconfiguration attendue, contribuent à les habituer à identifier les formes usuelles, quelles que soient leurs positions.

Avec la situation « De l'aire », elles permettent également de travailler un autre aspect de l'appréhension opératoire : l'extraction de sous-figures. Apprendre à repérer la sous-figure pertinente, dans une figure complexe, constitue un préalable à l'apprentissage et à la mise en place du raisonnement déductif en géométrie.

En complément des activités décrites, on propose aux élèves des exercices de ce type :

1- Combien y a-t-il de triangles dans cette figure ?

2- Combien y a-t-il de triangles rectangles dans cette figure ?



Environ 25 % des élèves testés ont dénombré ici les huit triangles attendus et à peine 10 % ont bien visualisé les cinq triangles rectangles.

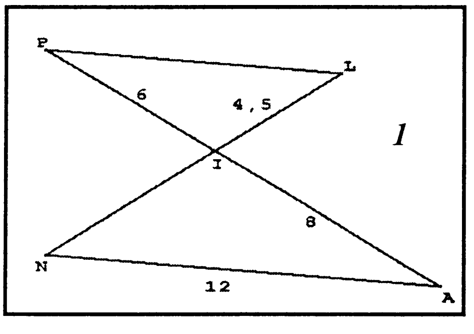
Or on sait que, pour résoudre un problème de géométrie il faut, bien sûr, connaître et savoir appliquer les propriétés et relations métriques étudiées, mais être **d'abord** capable de repérer les configurations de base sur lesquelles pouvoir les utiliser.

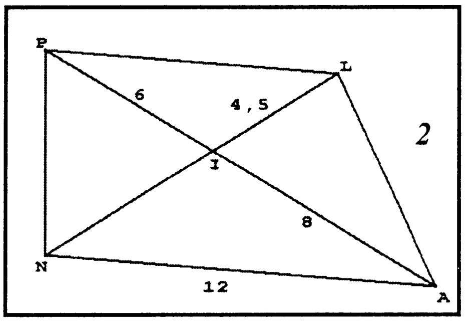
Certains facteurs facilitent ou freinent cette vision des unités de base : loi de clôture, homogénéité ou non des figures, dédoublement d'un objet …

Dans l'activité « Pythagore », la nécessité de sortir du carré A pour placer les deux triangles T est un réel obstacle.

L'exercice suivant, donné dans une classe de 3ème, où le taux de réussite a été de 75 % avec la figure **1** et est tombé à moins de 40 % avec la figure **2,** illustre bien notre propos :

Sachant que les droites (PL) et (AN) sont parallèles, calculer IN et PL.





Dans la figure **2**, la forme fermée du trapèze PLAN prévaut et empêche le repérage de la configuration croisée de Thalès.

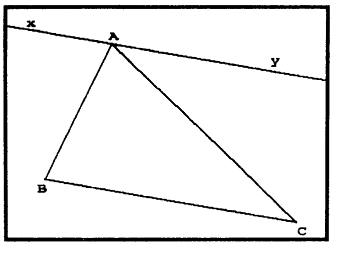
Une autre difficulté est également à travailler : l'homogénéité ou non des éléments de base avec la figure initiale.

Dans l'activité « Pythagore », la prégnance des angles droits des triangles T et du carré C fait obstacle à la vision de la reconfiguration attendue.

Dans l'activité « Du triangle au triangle », les éléments de base et la figure globale sont des triangles ; mais les élèves repèrent difficilement les parallélogrammes formés par les triangles associés deux à deux.

Dans une figure complexe, un même élément peut appartenir à deux sous-figures. Ce dédoublement d'objet a été signalé dans l'activité « Pythagore » : le côté du petit carré mesure $b - a$, avec le côté a se superposant partiellement au côté b.

Pour démontrer que la somme des angles d'un triangle est égale à 180°, on utilise souvent la figure ci-contre dans laquelle l'angle $\widehat{BAC}$ est à la fois un angle du triangle et l'un des trois angles formant l'angle plat $\widehat{xAy}$.

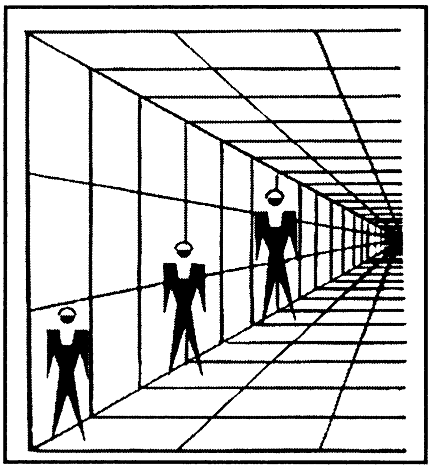


Dans la plupart des situations présentées, l'élève doit, dans un premier temps, observer et formuler des remarques et conjectures : les appréhensions perceptive et opératoire du (ou des) dessin(s) sont sollicitées. Dans un deuxième temps, il doit valider ou non ses conjectures par une démonstration : il doit alors se détacher de ce *« qu'il voit »* pour ne se fier qu'à ce *« qu'il sait »*. Il doit accéder alors à l'appréhension discursive de la situation.

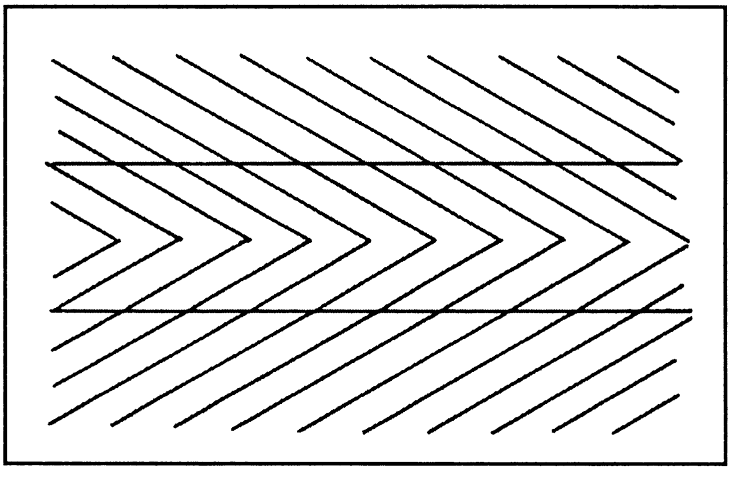
Le dessin géométrique occupe une place particulière dans le registre des images. En effet, il est associé à des informations fournies par un texte ou des codages. Ainsi, le même dessin peut représenter des situations différentes : c'est généralement le cas lorsqu'on illustre une propriété ou sa réciproque.

Il faut donc habituer l'élève à prendre de la distance par rapport au dessin. Pour cela, nous proposons un travail, en débat de classe, à partir d'illusions optiques. Les échanges sont toujours très intéressants et demeurent dans la mémoire de classe : nous entendons ensuite souvent : « *Tu ne peux pas en être sûr, souviens-toi des illusions optiques !* ».

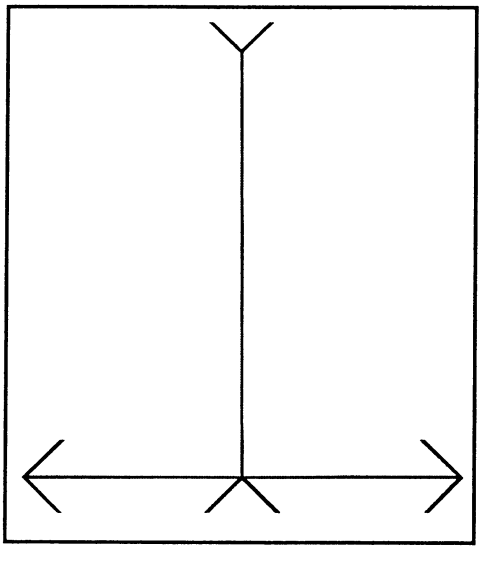
Pour le plaisir !



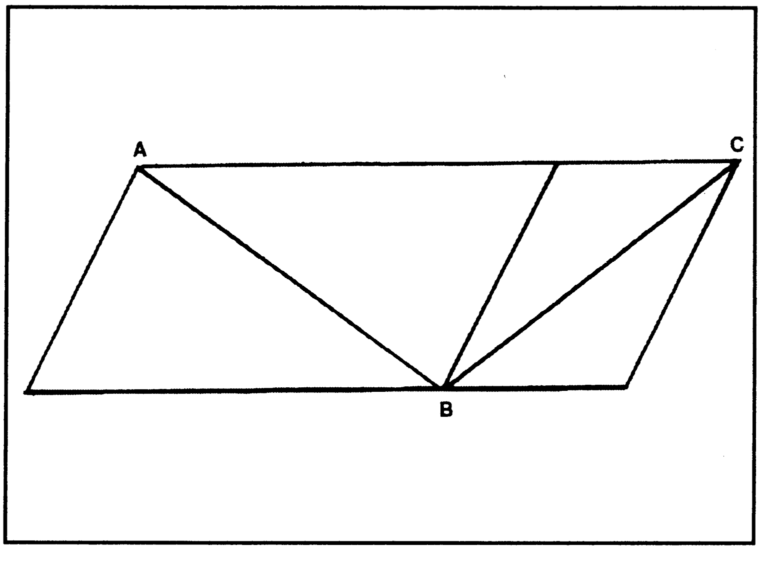
Quel le plus grand personnage ?



Les droites sont-elles parallèles ?



Quel est le plus long segment ?



Comparer AB et BC.

Nous reprenons ensuite ces dessins en y associant (ou non) des codages et/ou du texte et interrogeons les élèves sur la valeur de vérité de certains énoncés.

A titre d'exemples :

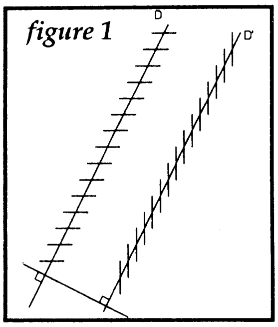


figure 1

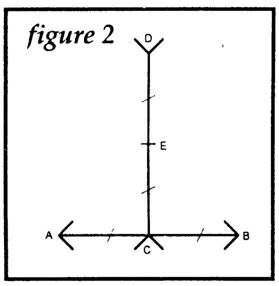


figure 2

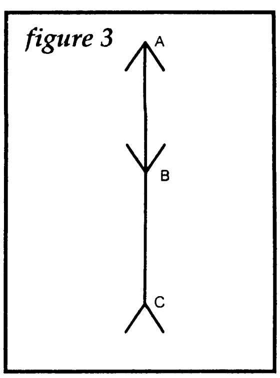


figure 3

Figure	**Affirmation**	**OUI**	**NON**	**On ne peut pas répondre**
1	D // D′			
2	E est le milieu de [CD]. AB = CD (AB) ⊥ (CD)			
3	AB = BC			

Nous intégrons également à ce test des figures géométriques plus traditionnelles :

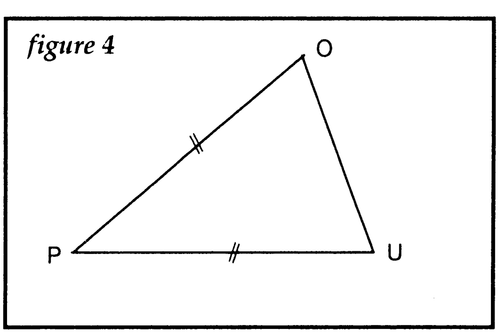


figure 4

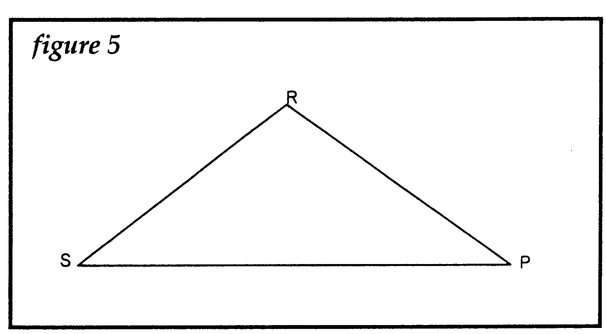


figure 5

avec la question « *Le triangle est-il isocèle ?* »

A travers toutes les figures géométriques travaillées, nous souhaitons faire prendre conscience du nouveau statut de la géométrie au cycle central. Les élèves doivent passer d'une géométrie descriptive à une géométrie de traitement. Les figures choisies doivent permettre de confronter le perceptif au discursif : y a-t-il cohérence ou opposition entre le « *vu* » et le « *su* » ?

- Le triangle PRS (*figure 5*) paraît isocèle et les droites (AB) et (CD) (*figure 2*) semblent perpendiculaires mais les informations données sont insuffisantes pour conclure.

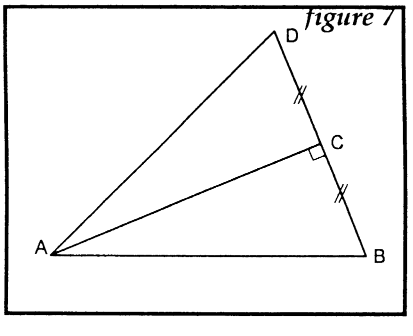
- Les segments [AB] et [BC] (*figure 3*) ont été construits de la même longueur, ce qui s'oppose à l'appréhension perceptive : on ne peut cependant pas déterminer la valeur de vérité de l'affirmation, aucune donnée n'étant indiquée.

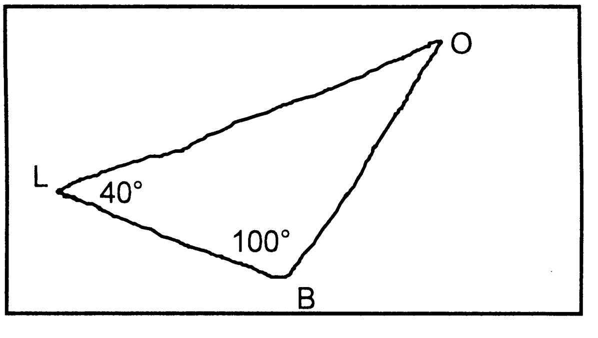
- Les droites D et D' (*figure 1*) ne semblent pas parallèles et le segment [CD] apparaît plus long que [AB] (*figure 2*) mais les codages contredisent cette vision spontanée.

- Les informations données confirment la perception : E est milieu de [CD] (*figure 2*) et le triangle POU (*figure 4*) est bien isocèle.

Dans tous les cas, l'appréhension discursive de la figure doit prévaloir sur l'appréhension perceptive.

Toujours dans le but de travailler l'appréhension discursive, nous proposons également des situations comme celles-ci :





avec la question « *Les triangles ABD et BOL sont-ils isocèles ?* ». Ici, les réponses attendues ne sont pas immédiates : les élèves doivent traiter les informations données et mettre en place un raisonnement déductif.

Certaines figures géométriques sont rétroprojetées, d'autres sont photocopiées et distribuées aux élèves. Nous n'avons relevé aucune différence significative entre les deux façons de faire : généralement, les élèves n'utilisent pas leurs règles et équerres pour vérifier sur les dessins la réalité des affirmations.

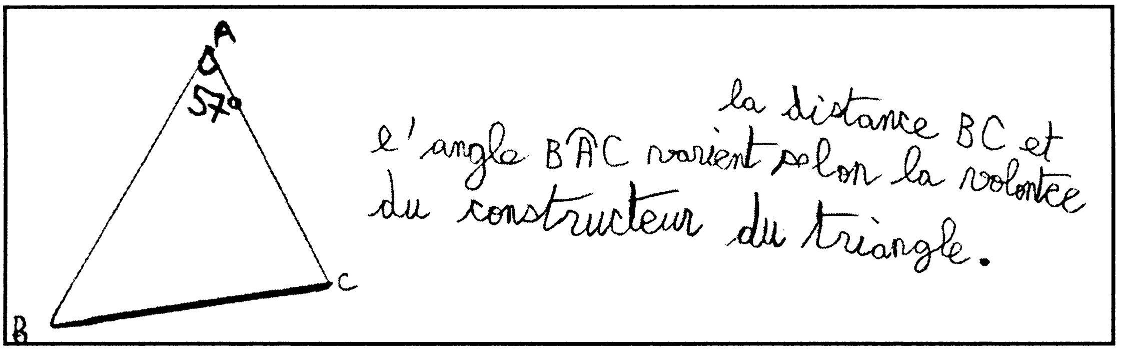
Nous avons également voulu évaluer si ce travail sur les illusions optiques forçait l'accès des élèves à l'appréhension discursive d'une figure. Nous avons proposé un test avec vingt figures (dont les sept présentées précédemment) dans des classes ayant ou non travaillé les illusions d'optique. Là, les résultats sont très significatifs : les élèves se détachent plus nettement du dessin et recourent plus systématiquement aux informations données lorsqu'ils ont été confrontés, au préalable, à ces images qui « trompent l'œil ».

Un dessin géométrique ne peut « donner que ce qu'il a ». En effet, nous ne manquons jamais l'occasion de rappeler à nos élèves que les objets mathématiques sont abstraits. Pour travailler avec ces objets idéaux, nous utilisons des représentations : le dessin d'une droite donne une image plus ou moins parfaite de la droite mathématique. Pour renforcer ce discours, nous leur présentons également des images issues d'autres domaines : l'œuvre de Magritte, par exemple, est très riche pour faire débattre les collégiens sur la différence entre un objet, son nom et sa représentation (La Trahison des images – La Clef des songes - La Table, l'océan et le fruit – Ceci n'est pas une pipe ...).

Les différents travaux présentés favorisent le passage du dessin géométrique à la figure. Lorsqu'un élève construit une figure, il doit respecter les contraintes imposées par l'énoncé (données du problème). Au cours de cette construction, d'autres contraintes apparaissent : ces contraintes incontournables sont les conséquences de la situation proposée (généralement, questions du problème). Il doit également faire des choix (positions, grandeurs ...) qui n'ont aucune incidence sur la figure mais qui peuvent modifier fondamentalement le dessin obtenu et ainsi la perception qu'il a de la situation.

Confronter chaque élève à l'ensemble des dessins obtenus dans la classe à partir du même énoncé lui permet de comprendre l'importance de ces choix initiaux arbitraires : certaines propriétés semblent toujours visuellement vraies, d'autres n'apparaissent que sur quelques dessins[6] appelés habituellement figures particulières (mais qu'est-ce qu'une figure quelconque ?).

C'est un des objectifs de l'activité « Le triangle 5 - 6 » que de favoriser ce passage à la figure : le dessin géométrique obtenu dépend de la valeur attribuée à certaine(s) variable(s) (ici la longueur BC) comme le souligne cette production déjà présentée :



Les logiciels de construction géométrique créant des représentations dynamiques apportent une aide précieuse. En modifiant les valeurs initiales des variables, « *selon la volonté du constructeur* », la trace graphique première se trouve ainsi plongée dans l'ensemble des dessins possibles.

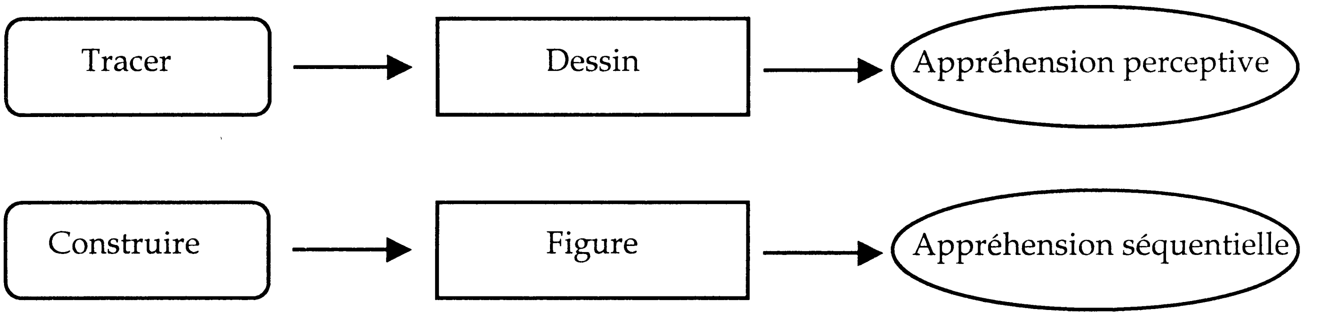
L'outil informatique permet également de travailler différemment l'appréhension séquentielle d'une figure (appréhension des données fournies pour réaliser le dessin).

Lors de la construction d'une figure dans l'environnement informatique, les élèves utilisent des primitives géométriques (droite, droites perpendiculaires, cercle ...) et non des primitives de dessin (règle, équerre, compas ...). Le recours au déplacement permet ensuite de valider ou non la construction : les contraintes imposées par l'énoncé résistent-elles lors de la modification des valeurs des variables ?

[6] Voir « *Quelques outils et quelques activités pour l'apprentissage de la démonstration* », Annick Massot et Michel Jaffrot, IREM de Nantes, Repères - IREM n° 12, juillet 1993.

Un exemple classique consiste à demander aux élèves du cycle central de construire un cercle tangent à deux droites sécantes.

Le dessin papier crayon est généralement obtenu par tâtonnement. Cette production, jugée satisfaisante par l'élève, est pourtant réfutée par l'enseignant(e). La réalisation dans l'environnement informatique permet de justifier ce refus et d'invalider la démarche employée : il suffit de déplacer les objets variables et le cercle n'est plus tangent aux droites. L'aspect dynamique des logiciels utilisés donne ici sens au terme « construire » :



De plus, dans cet exercice, le tracé de la bissectrice n'est pas suffisant : le projeté orthogonal du centre du cercle sur l'une des droites est indispensable. Là encore, ce qui ne semble pas utile avec le papier crayon devient indispensable avec l'outil informatique pour que la propriété attendue demeure lors de la modification des éléments variables.

Apprendre à voir, c'est travailler ces différentes appréhensions en utilisant tous les outils disponibles (papier crayon, rétroprojecteur, informatique ...) sur des figures géométriques mais aussi sur des images issues d'autres domaines.

Conclusion.

Il ne suffit pas de proposer une image pour que les élèves voient ce qu'il faut en tirer. Nos collègues enseignant la géographie font le même constat que nous ...

L'appréhension perceptive d'une figure, liée à l'affectif, au vécu de chacun, prend souvent le pas sur l'appréhension discursive. En effet, plonger la figure dans le réseau sémantique de définitions et propriétés qui la concerne est une démarche réfléchie, contrôlée, qui relève d'un apprentissage. La figure passe alors par tout ce qui lui est attaché en terme de connaissances et cela ne s'apprend pas dans le non-dit !

L'appréhension opératoire, qui permet de repérer la sous-figure ou bien la reconfiguration pertinente pour le problème est travaillée dès l'école élémentaire. A nous donc, au collège, de poursuivre cet apprentissage.

Ces trois appréhensions de la figure géométrique sont indépendantes des activités de raisonnement... mais elles facilitent, oh combien, son installation ! Ces situations que nous venons de vous proposer, et que nous pratiquons régulièrement en classe, nous confortent dans cette idée. Beaucoup d'autres situations restent à créer dans ce but, et notamment dès la 6^e.

Il s'agit bien d'apprendre à voir et nous nous devons d'y participer activement. Un travail sur le codage, pratiqué très régulièrement au long des années collège fait également partie de cet apprentissage.

Il s'agit aussi d'avoir un regard différent sur les difficultés de nos élèves afin de repérer celles qui sont liées à une mauvaise lecture de l'image, ce qui trop souvent bloque la possibilité de raisonnement.

Le travail sur les grandeurs a été créé en réponse aux difficultés constatées au collège dans la résolution de problèmes mettant en œuvre les calculs de périmètres et d'aires. Un passage trop rapide aux formules favorise les calculs dénués de sens qui nous effarent régulièrement dans les copies que nous corrigeons. Là encore, d'autres activités sont à mettre en œuvre.

Mais revenons à notre histoire personnelle ...

Dès que notre recherche sur ce thème de la géométrie a pris forme, nous avons ressenti le besoin de démarrer une nouvelle recherche sur **le littéral au collège**. Quelle ne fût pas notre surprise de sentir s'établir un parallèle entre ces deux thèmes !

Le travail proposé dans cette brochure doit faciliter l'apprentissage du raisonnement déductif et la mise en place de la démonstration. **Un travail semblable doit être effectué dans le cadre algébrique pour faciliter le passage du numérique au littéral.**

Certains travaux présentés s'appuient sur des dessins géométriques mais permettent à l'élève de s'en détacher progressivement pour accéder au concept de figure. **De la même façon, des situations d'apprentissage, prenant appui sur le cadre numérique, doivent lui être proposées afin qu'il donne sens et s'approprie la notion de lettre et d'expression littérale.**

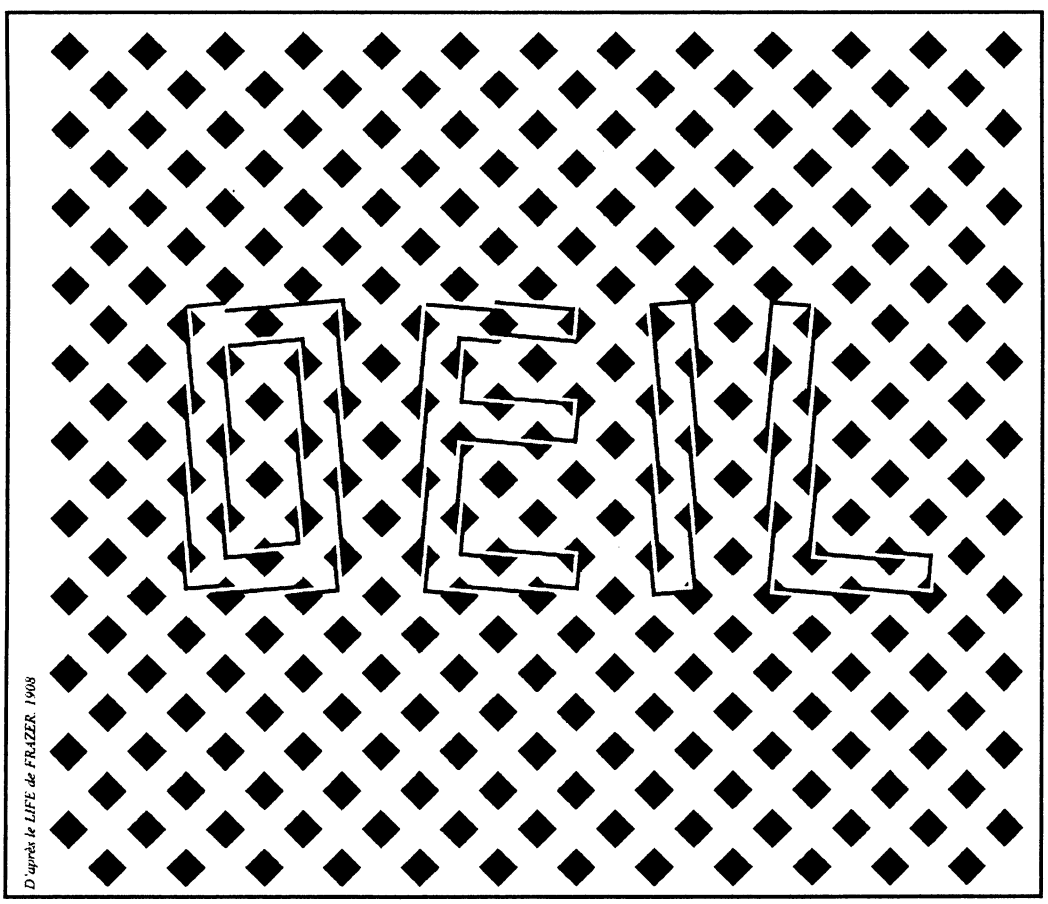
Comme il doit comprendre le langage associé à la figure (codage), **il doit également travailler les règles d'écriture et de syntaxe des expressions littérales.**

Connaître les propriétés géométriques n'est pas suffisant pour résoudre un problème, il faut aussi savoir repérer la sous-figure pertinente. **La connaissance des identités remarquables, de la distributivité, est nécessaire pour factoriser ou développer les expressions littérales mais ne suffit pas non plus : l'élève doit apprendre à reconnaître les différentes formes dans une expression complexe.**

Des activités doivent être proposées pour « *faire naître et grandir* » la lettre au collège. C'est une autre histoire ... et peut-être une autre brochure !

Apprendre à voir en géométrie ... Apprendre à voir en algèbre ...

Pour exercer l'  une dernière fois, redressez le mot suivant :



Bibliographie :

[ARTIGUE 1994] « *Vingt ans de didactique des mathématiques en France* », M. Artigue, R. Gras, C. Laborde, P. Tavignot, R.D.M., Editions "La Pensée Sauvage", 1994.

[BLOCK 1994] « *Vous n'en croirez pas vos yeux.* », J.-R. Block, H.-E. Yuker, Editions Solar Paris, 1994.

[CARRAL 1995] « *Géométrie* », Michel Carral, Editions Ellipses, mars 1995.

[COLLETTE 1972] « *Histoire des mathématiques* », J.-P. Colette, Librairie Vuibert, 1972.

[DAHAN-DALMEDICO 1986] « *Une histoire des mathématiques* », A. Dahan-Dalmedico, J. Peiffer, Collection Points Sciences, Editions du Seuil, 1986.

[DEDRON 1972] « *Mathématiques et mathématiciens* », P. Dedron, J. Itard, Editions Magnard.

[DELEDICQ 1996] « *Encyclopédie Kangourou des mathématiques au collège.* », A. Deledicq, C. Missenard, ACL Editions - Les malices du Kangourou, 1996.

[DELEDICQ 1996] « *Jeux et découvertes mathématiques.* », A. Deledicq, J.-C. Deledicq, F. Casiro, ACL Editions - Les malices du Kangourou, 1996.

[FOURREY 1907] « *Curiosités géométriques.* », Emile Fourrey, Paris (1907), Librairie Vuibert, 1994.

[HAUCHECORNE 1996] « *Des mathématiciens de A à Z* », B. Hauchecorne, D. Suratteau, Editions Ellipses, 1996.

[IREM 1988] « *Annales de didactique et de sciences cognitives* », IREM de Strasbourg, Volume 1, 1988.

[IREM 1989] « *Annales de didactique et de sciences cognitives* », IREM de Strasbourg, Volume 2, 1989.

[IREM 1993] « *Histoire de problèmes, histoires des mathématiques* », Commission Inter-IREM, Editions Ellipses, 1993.

[IREM 1993] « *La figure et l'espace : actes du 8ème colloque Inter-IREM épistémologie et histoire des mathématiques* », Commission Inter-IREM Histoire et Epistémologie des mathématiques, IREM de Lyon, 1993.

[IREM 1993] « *Repères IREM* », n° 12, juillet 1993.

[IREM 1994] « *Repères IREM* », n° 17, octobre 1994.

[IREM 1995] « *Autour de Thalès.* », Commission Inter-IREM Premier Cycle, 1995.

[IREM 1996] « *Mesurer - compter - modéliser. Enjeux d'une formation et d'une culture mathématique.* », actes du colloque commission Inter-IREM premier cycle, IREM de Rouen, 1996.

[IREM 1996] « *Problèmes de géométrie, rôle de la figure.* », actes du Colloque Commission Inter-IREM de géométrie, Bayonne, 1996.

[IREM] « *Le codage des figures. Comment ? Quand ? Pourquoi ?* », IREM de Montpellier.

[IREM] « *Tout (ou presque) ce que vous avez toujours voulu savoir sur le Théorème de Pythagore sans jamais oser le demander.* », M.-F. Coste-Roy, P. Knerr, J.-C. Martzloff, R. Tran-Dang, IREM Paris Nord.

[IREM] «*Images et maths* », Commission Inter-IREM Images et Mathématiques.

[JEDRZEJEWSKI 2002] « *Histoire universelle de la mesure* », F. Jedrzejewski, Editions Ellipses, 2002.

[MANKIEWICZ 2000] « *L'histoire des mathématiques* », R. Mankiewicz, Editions du Seuil, 2000.

[NOEL 1985] « *Le matin des mathématiciens : entretiens sur l'histoire des mathématiques* », E. Noël, Editions Belin, 1985.

[POUR LA SCIENCE 2003] « *Les illusions des sens.* », Dossier hors série, Pour la Science, avril/juin 2003.

[PRACHE 2001] « *Les plus belles illusions optiques* », Denys Prache, Illustrations de Claude Lapointe, Circonflexe, 2001.

[ROUCHE 1992] « *Le sens de la mesure* », Nicolas Rouche, Editions Didier Hatier, Bruxelles, 1992.

[SANCHEZ 1992] « *L'influence d'une acquisition de traitements purement figuraux pour l'apprentissage des mathématiques.* » Thèse en didactique des mathématiques de V. Padilla Sanchez, 1992.

[SORTAIS 1987] « *La géométrie du triangle* », Yvonne et René Sortais, Hermann, 1987.

[STEWART 1994] « *Visions géométriques* », Ian Stewart, Bibliothèque Pour la Science, Diffusion Belin, août 1994.

[TANGENTE 2000] « *Mille ans d'histoire des mathématiques* », Tangente H.S. n° 10, Editions Archimède, 2000.

Réf : **R 133**

Titre : **Figures et sens.** Voir pour comprendre, comprendre pour démontrer.

Auteurs : Michel CHEVALLIER, Hélène COLONNA.

Public visé : Professeurs d'école, de COLLÈGE et de lycée.

Niveau : Collège.

Résumé : Des situations géométriques à vivre en classe de 5ème et 4ème pour apprendre à voir et agir sur l'image, accéder au concept de figure et ainsi mettre en place le raisonnement déductif.

Mots clés : Dessin - Figure - Grandeur - Mesure - Codage - Perception visuelle - Sens (orientation) et sens (compréhension) - Manipulation - Reconfiguration - Outil informatique - Motivation - Plaisir

Date : Juin 2003.

Nombre de pages : 150 pages.

Prix : 10 €

N° ISBN : **2 - 86239 - 087 - 9**

Publication : **IREM, Université de Haute-Normandie**
Bâtiment de mathématiques
Avenue de Broglie
B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

Bon de commande à retourner à IREM de ROUEN
Bâtiment de mathématiques
Avenue de Broglie
B.P. 138
76821 Mont-Saint-Aignan Cedex

M, Mme : ....
Adresse : ....
....
....

Quantité : ....

Prix à payer : nombre d'exemplaires ... × 10 €+ frais de port : 2,40 € + 0,80 € par livre supplémentaire.

Date : .... Signature :

Chèque libellé à l'ordre de l'Agent comptable de l'université de ROUEN.