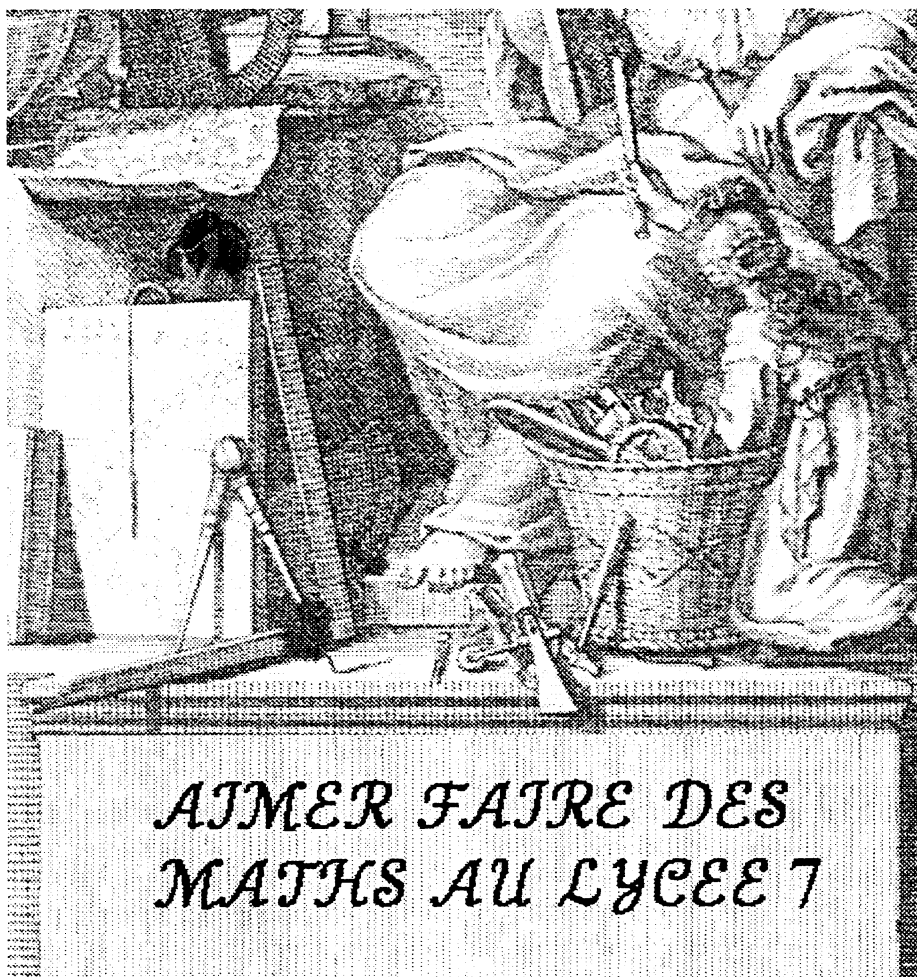




*AIMER FAIRE DES
MATHS AU LYCEE 7*

*I.R.E.M de ROUEN
Bât de maths Av.de Broglie BP138 76821 Mt St Aignan tel.-fax :02-35-14-61-41*



AIMER FAIRE DES MATHS AU LYCEE 7

*I.R.E.M de ROUEN
Bât de maths Av.de Broglie BP138 76821 Mt St Aignan tel.-fax :02-35-14-61-41*

SOMMAIRE

page

1 *L'Homographie.*

Luc Sinègre (Rouen)

14 *Quelques applications des nombres complexes à la physique*

Frédéric Vivien (Rouen)

22 *Courbes de Poursuites.*

Frédéric Vivien (Rouen)

26 *Extremum d'une fonction, annulation de sa dérivée,
illustration par des modèles de l'optique.*

Daniel Lecouturier (Rouen)

37 *Réflexion à partir d'un exercice de géométrie posé en Première S.*

Gildas Le Hir (Pont-Audemer)

40 *L'algorithme du nombre d'or.*

Yves Suprin (Rouen - APM)

L'HOMOGRAPHIE.

I. Division harmonique.

1. Définition

Définition: Quatre points alignés A, B, C, D donnés dans cet ordre forment une division harmonique si et seulement si

$$\overline{CA} \cdot \overline{DB} + \overline{CB} \cdot \overline{DA} = 0.$$

Cette définition équivaut, quand les points sont distincts à l'égalité

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = - \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$$

(on dit alors que C et D divisent $[AB]$ dans des rapports opposés)

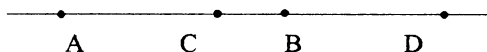
soit encore à

$$\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}} = -1$$

(le scalaire $\frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} \div \frac{\overline{DA}}{\overline{DB}}$ est appelé le rapport anharmonique du quadruplet (A, B, C, D))

Remarques:

1. La définition ne dépend pas du repère affine choisi pour définir les mesures algébriques.



2. Si $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont les abscisses des points A, B, C, D d'origine O :

$$(A, B, C, D) = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\alpha - \delta}{\beta - \delta} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \cdot \frac{\beta - \delta}{\alpha - \delta}$$

Si A, B, C désignent trois points distincts fixés d'une droite munie d'un repère affine, l'application qui à tout réel x abscisse d'un point M courant de (AB) associe le rapport anharmonique (A, B, C, M) est une application *homographique* du corps $\mathbb{R}$, c'est-à-dire une application $\phi: x \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}$ telle que $ad - bc \neq 0$. En effet si $\Delta = ad - bc$ était nul, l'application

homographique serait constante (effectuez par exemple une décomposition en éléments simples¹ de la fraction rationnelle) ce qui est exclu.

3. On déduit de 2 que la division (A,B,C,D) est harmonique si et seulement si

$$(\alpha + b)(\gamma + \delta) = 2(\alpha\beta + \gamma\delta)$$

(Relation dite de Mersenne).

2. Formules classiques.

On a $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \frac{\beta}{\alpha} = -1$ si l'on choisit D au centre du repère, et donc

$$\frac{2}{\gamma} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$$

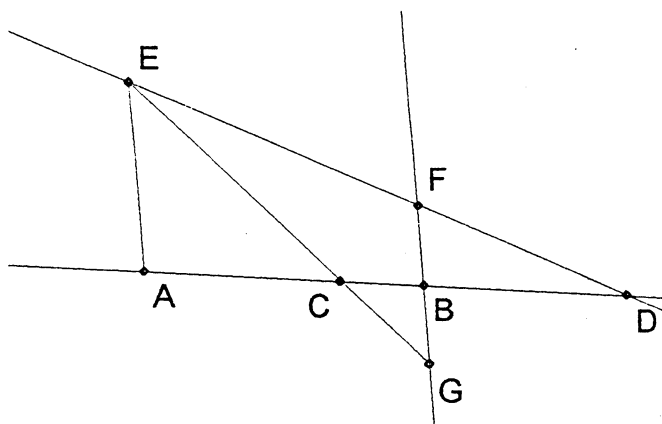
(Relation dite de Descartes).

On obtient une relation classique en introduisant le point O milieu du segment $[CD]$. Dans ce cas la relation principale devient $\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \gamma} \frac{\beta + \gamma}{\alpha + \gamma} = -1$ ou encore $\gamma^2 = \alpha\beta$. Cette relation dite de *Newton* est utilisée en optique géométrique.

3. Lien avec les barycentres.

Etant donnés (A,B,C,D) quatre points alignés, il est toujours possible de considérer et que C et D , quand ils sont différents de A , sont barycentres de A et B affectés des coefficients respectifs u et -1 et u' et -1 . Dans ce cas $(A,B,C,D) = u' \div u$.

Application : ceci permet, pour former des divisions harmoniques, d'utiliser la construction classique du barycentre de deux points. Pour construire le barycentre de A et B affectés des coefficients a et b , il est d'usage de reporter ces nombres sur deux axes parallèles menés par A et B (en inversant et les signes et les places). On place ainsi deux points E et G . Le point C est à l'intersection de (EG) avec (AB) . Si maintenant on construit le symétrique F de G par rapport à B on obtient par la même méthode un second point D (sauf si $a=b$) qui est barycentre de A et B affectés des coefficients a et $-b$. La division (A,B,C,D) est alors harmonique.



¹ On a aussi $\phi'(x) = \frac{\Delta}{(cx+d)^2}$

4. Compléter la droite.

Etant donnés trois points alignés A, B, C le quatrième point D tel que la division (A, B, C, D) soit harmonique est déterminé si et seulement si C n'est pas le milieu de $[AB]$. On remarque toutefois que lorsque C se rapproche du milieu de $[AB]$ la droite (EF') tend à devenir parallèle à (AB) . On convient par conséquent de rajouter à la droite (AB) un point $\infty_{(AB)}$ appelé *point à l'infini* de la droite (AB) et défini comme le conjugué harmonique du milieu de $[AB]$.

Si Ω désigne le milieu de $[AB]$, on a donc $(A, B, \Omega, \infty_{(AB)}) = -1$.

On a par définition, si l'on note α, β, ω les abscisses de A, B, Ω et symboliquement par ∞ l'abscisse de ∞_{AB}

$$\frac{\infty - \alpha}{\infty - \beta} = -\frac{\gamma - \alpha}{\gamma - \beta} = 1$$

Le point $\infty_{(AB)}$ est aussi considéré comme le barycentre de A et B affectés de coefficients opposés.

Remarque:

L'application homographique ϕ de 1.a réalise une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\}$. Si $\bar{\mathbb{R}}$ désigne le complété du corps des réels, on peut donc prolonger ϕ en une bijection Φ de $\bar{\mathbb{R}} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ en posant $\Phi(\infty) = \frac{a}{c}$ et $\Phi(-\frac{d}{c}) = \infty$.

II. Homographies.

1. Premiers pas.

a. Définitions.

Définition: On appelle homographie d'une droite Δ (complétée par un point à l'infini) sur une droite Δ' toute application $\mathbb{H}$ de Δ dans Δ' , telle que si $\mathbb{R}$ (resp $\mathbb{R}'$) désigne un repère de Δ (resp Δ') l'application qui à x abscisse de M associe $\phi(x)$ l'abscisse de $\mathbb{H}(M)$ soit une application homographique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On remarque que cette définition ne dépend pas du choix du repère puisque après un changement de repère affine, une homographie reste une homographie.

Comme la définition de ϕ équivaut d'autre part à l'identité (avec les notations précédentes).

$$(\phi(x) - \frac{a}{c})(x + \frac{d}{c}) = -\frac{\Delta}{c^2}.$$

La définition se traduit géométriquement, si l'on appelle $\mathcal{J}$ l'image du point à l'infini de Δ , ∞_{Δ} et I l'antécédent de $\infty_{\Delta'}$ par la relation :

$$IM \mathcal{J} M' = -\frac{\Delta}{c^2}.$$

Proposition:

Toute homographie de la droite Δ complétée vers Δ' , conserve les birapports. Plus exactement, une application de Δ dans Δ' est une homographie si et seulement si elle conserve les birapports.

Pour montrer le sens direct, il suffit de remarquer qu'une homographie est la composée de similitudes $x \rightarrow ax+b$ et de l'application $x \rightarrow \frac{1}{x}$. Les similitudes conservent les rapports et donc le birapport. Un simple calcul (laissé au lecteur) montre que la seconde application conserve les birapports.

Pour montrer le sens réciproque on désigne par ABC trois points distincts de la droite Δ et leurs images $A'B'C'$ par une application ponctuelle T qui conserve les birapports. Nous avons vu précédemment que dans ce cas les applications ϕ_{ABC} et $\phi_{A'B'C'}$ qui associaient aux abscisses de M et M' les birapports (A,B,C,M) et (A',B',C',M') étaient deux homographies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. L'application $\phi_{A'B'C'}^{-1} \circ \phi_{ABC}$ est donc une homographie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et par suite T est donc une homographie de Δ dans Δ' .

Conséquence : Une homographie est donc déterminée par la donnée de trois points et de leurs images.

b. Faisceau harmonique.

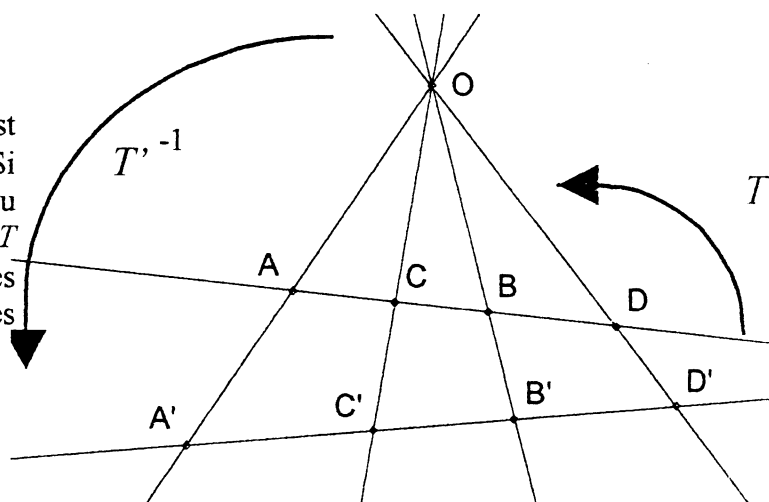
On choisit pour Δ une droite donnée du plan (ou de l'espace) et l'on fixe, à l'extérieur de Δ , un point O dans ce plan (ou dans l'espace). A chaque point M de Δ on associe la droite (OM) notée M' . L'application qui associe à l'abscisse de M , un coefficient directeur de la droite M' est homographique. En effet si l'on fixe un repère de centre O dont l'axe des abscisses est parallèle à Δ (d'équation $y = b$), l'application devient $M(x,b) \rightarrow \frac{b}{x}$.

On obtient donc une homographie de Δ sur l'espace affine de dimension 1 constitué par l'ensemble des droites qui concourent en O (faisceau de droites).

L'application réciproque de cette homographie est l'application qui à toute droite du faisceau associe son intersection avec une sécante donnée du plan. Elle est évidemment aussi une homographie.

Conséquence :

Si un faisceau de droites de sommet O est coupé par deux transversales Δ et Δ' Si l'on note encore T l'homographie du paragraphe précédent, l'application $T^{-1} \circ T$ est une homographie de Δ dans Δ' . Les birapports (A,B,C,D) et (A',B',C',D') des intersections sont donc égaux.



Définition : Si le faisceau s'appuie sur une division harmonique, alors le birapport qu'il forme sur toute autre sécante est encore harmonique (comme celui des coefficients directeurs des droites). On appelle faisceau harmonique un faisceau de telles droites.

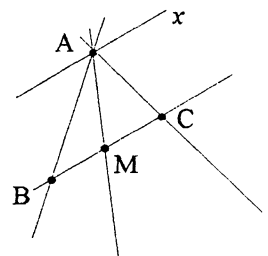
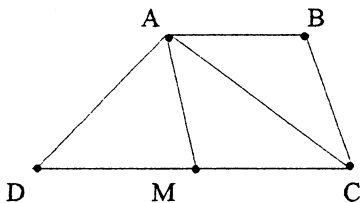
Remarque :

On peut déterminer l'harmonicité du faisceau en utilisant le point à l'infini de la sécante, c'est-à-dire en la choisissant parallèle à l'une des droites du faisceau. On obtient alors l'énoncé suivant :

Un faisceau de droites concourantes est harmonique si et seulement si trois des droites déterminent sur une sécante parallèle à la quatrième deux segments égaux.

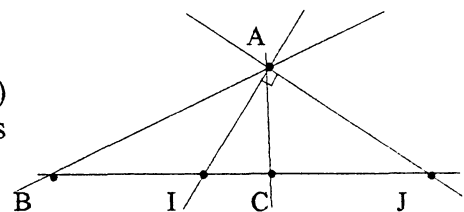
c) Exemples:

Dans un triangle ABC , les droites (AB) , (AC) la médiane (AM) et la parallèle (Ax) à (BC) forment un faisceau harmonique.



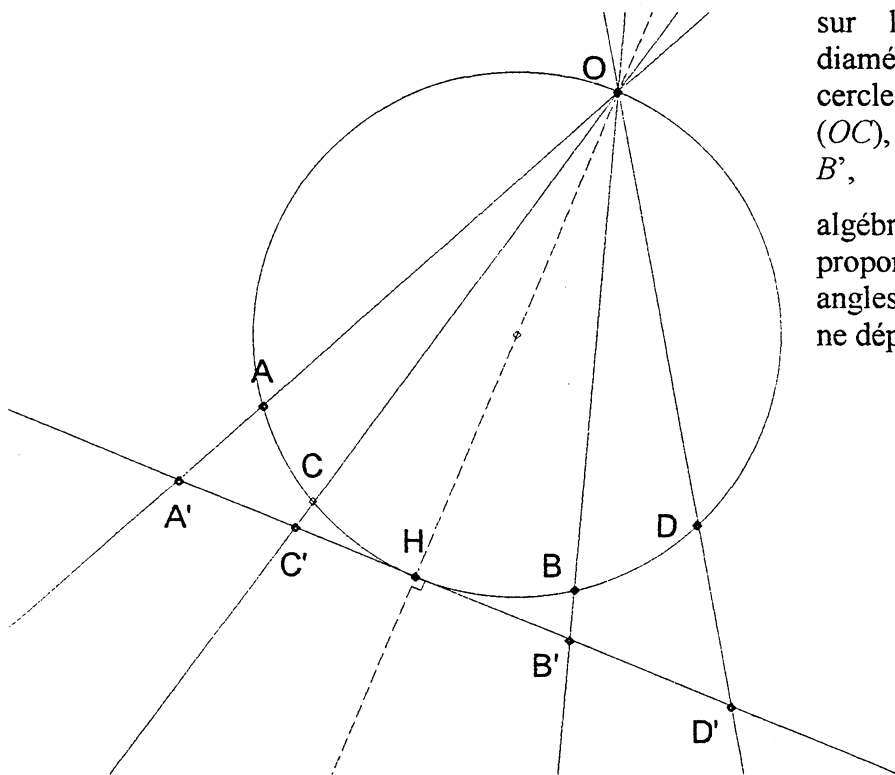
Dans un trapèze $ABCD$ où M est le milieu de $[CD]$, les droites (AB) , (AC) , (AM) et (AD) forment un faisceau harmonique.

Avec les bissectrices de l'angle $\hat{A}$, les côtés (AB) et (AC) d'un triangle ABC forment un faisceau harmonique. Dans ce cas deux des rayons conjugués sont orthogonaux.²



² Réciproquement si dans un faisceau harmonique deux rayons conjugués sont orthogonaux, alors ils sont les bissectrices des angles formés par les autres rayons.

Remarque : Si l'on prend O, A, B, C, D sur un même cercle, le birapport du faisceau de sommet O qui contient A, B, C, D ne dépend pas de O .

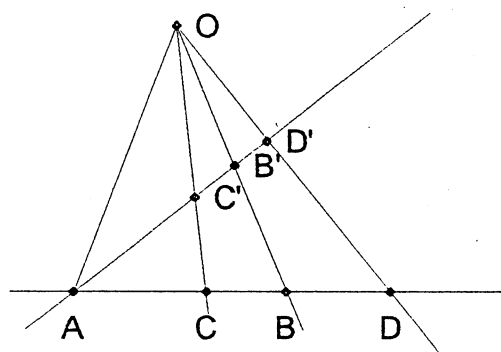


En effet on peut lire ce birapport sur la tangente en H point diamétralement opposé sur le cercle à O . Les droites $(OA), (OB), (OC), (OD)$ la rencontrent en A', B', C', D' . Les mesures algébriques $\overline{HA'}$, etc. sont proportionnelles aux sinus des angles $((OH), (OA))$ etc les rapports ne dépendent pas donc pas de O .

2. Axe d'une homographie.

a. Deux théorèmes préparatoires.

Proposition : Si deux divisions de quatre points (A, B, C, D) et (A, B', C', D') ont des birapports égaux, alors les droites $(BB'), (CC'), (DD')$ sont concourantes ou parallèles.

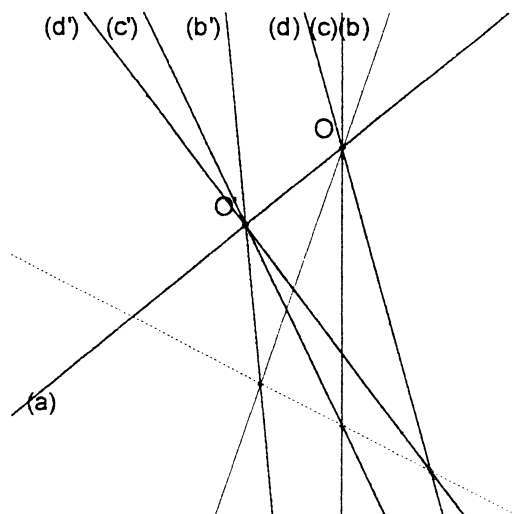


Démonstration :

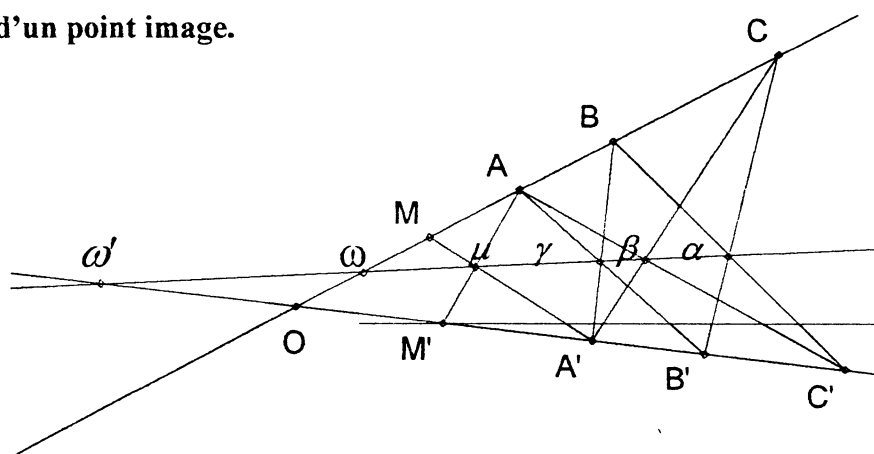
Si par exemple (BB') , et (CC') sont sécantes en O , la droite (OD) , est sécante à (AC') au point D_0 tel que le birapport $(A, B, C, D) = (A, B', C', D_0) = (A, B', C', D')$.

Donc $D_0 = D'$.

Proposition : Si deux faisceaux de quatre droites (a,b,c,d) et (a',b',c',d') de sommets O et O' (dans un même plan) ont des birapports égaux, alors les intersections $(Ob) \cap (O'b')$, $(Oc) \cap (O'c')$, $(Od) \cap (O'd')$ sont alignées.



b. Construction d'un point image.



On considère trois points fixés A, B, C d'une droite Δ et leurs images par une homographie, A', B', C' sur Δ' (que l'on prend coplanaires). Tout point M de Δ est déterminé par son birapport qu'il faut reporter sur Δ' pour obtenir son image M' . On suppose que les droites (AB') et $(A'B)$, (AC') et $(A'C)$, (AM') et $(A'M)$ se coupent en β, γ, μ .

La proposition du paragraphe précédent, puisque les deux faisceaux de sommets A et A' , $((AA'), (AB'), (AC'), (AM'))$ et $((A'A), (A'B), (A'C), (A'M))$ ont des birapports égaux, et une droite en commun, démontre l'alignement des intersections β, γ , et μ . Pour construire M' , on cherche donc l'intersection de $(A\mu)$ avec Δ' . Tout point μ correspond ainsi à un couple $(M; M')$ et le lieu du point μ lorsque M varie est donc la droite $(\beta\gamma)$ appelé encore l'axe de l'homographie.

Si Δ et Δ' sont sécantes en O on note ω et ω' l'antécédent et l'image par l'homographie du point O . La construction précédente nous indique que les points ω et ω' sont aussi les intersections de l'axe de l'homographie avec les droites Δ et Δ' .

Remarque : au passage nous avons démontré l'alignement des intersections de *trois croix* tracées en choisissant deux triplets sur deux droites quelconques. Ce théorème est appelé le *théorème de Pappus*.

3. Homographie d'une droite sur elle même.

Si les ensembles de départ et d'arrivée coïncident, on peut rechercher les points fixes de l'homographie, ce qui conduit à résoudre l'équation du second degré

$$cx^2 + (d-a)x - b = 0$$

dont le discriminant vaut $(a+d)^2 - 4\Delta$.

Remarque : On vérifie que l'ensemble des homographies de la droite qui fixent le point à l'infini coïncide avec l'ensemble des similitudes. Parmi ces dernières, les transformations qui possèdent l'infini comme point double sont les translations.

Si l'on appelle H et K les deux points doubles distincts (réels ou imaginaires) d'abscisses h et k d'une homographie $\mathbb{H}$ donnée, on a

$$H \rightarrow H$$

$$K \rightarrow K$$

$$\infty \rightarrow J$$

$$I \rightarrow \infty$$

Si l'on introduit l'homographie $\mathbb{P}$ qui est définie (de façon unique) par

$$H \rightarrow \infty$$

$$K \rightarrow 0$$

$$\infty \rightarrow 1$$

L'homographie $\mathbb{P}$ est donc définie analytiquement par $x' = \frac{x-k}{x-h}$. L'application composée $\mathbb{P} \circ \mathbb{H} \circ \mathbb{P}^{-1}$ envoie l'infini sur l'infini et l'origine sur l'origine. C'est donc une similitude de la forme $z \rightarrow \alpha z$.

Comme on a pour tout réel x $(\mathbb{P} \circ \mathbb{H})(x) = \alpha \mathbb{P}(x)$ on en tire la relation classique :

$$\frac{x'-k}{x'-h} = \alpha \frac{x-k}{x-h}$$

4. Application aux suites homographiques :

Les suites homographiques sont définies par leur premier terme et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{au_n + b}{cu_n + d}$$

Si l'homographie qui est sous-jacente n'a pas ses points doubles confondus, on peut effectuer le changement de variable défini précédemment, en définissant $v_n = \frac{u_n - k}{u_n - h}$. La suite (v_n) est alors géométrique de raison α ce qui achève le problème.

Si les points doubles sont confondus, on a en appelant Ω le milieu de $[IJ]$:

$$H\Omega^2 - \frac{IJ^2}{4} = IH \cdot JH = -\frac{\Delta}{c^2} = -\frac{(a+d)^2}{4c^2} = -\frac{IJ^2}{4}$$

Donc dans ce cas le point double est le milieu Ω du segment $[IJ]$. et si l'on introduit une des homographies $\mathcal{P}$ qui envoie

$$\begin{aligned}\Omega &\rightarrow \infty \\ \infty &\rightarrow 0\end{aligned}$$

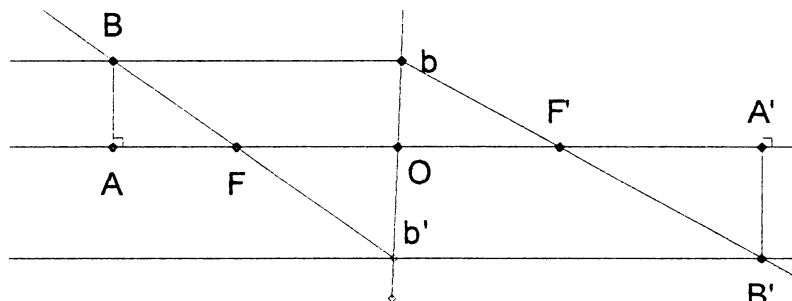
et qui est définie analytiquement par $x' = \frac{1}{x - \frac{a-d}{2c}}$, $\mathcal{P}$ fixe l'infini comme point double et

correspond donc à une translation. On a donc : $\frac{1}{x' - \frac{a-d}{2c}} = \frac{1}{x - \frac{a-d}{2c}} + \tau$.

Cette formule s'applique encore aux suites homographiques dans les cas où $4\Delta = (a+d)^2$, mais aussi à l'Optique.

5. Une application à l'Optique.

Dans le cours d'Optique géométrique, dans les conditions de l'*approximation de Gauss* qui assurent le stigmatisme et l'aplanétisme approchés, on montre comment construire l'image, à travers une lentille plane, d'un objet AB perpendiculaire à l'axe de la lentille.



Les foyers F et F' sont symétriques par rapport à la lentille (O leur milieu). On nous apprend que l'image d'un rayon (Bb) parallèle à l'axe passe par F' et vice versa.

Si l'on admet que sur la droite (OA) l'application qui à un point associe son image est une homographie $\mathcal{P}$ on a (d'après la règle précédente)

$$\begin{aligned}\infty &\rightarrow F' \\ F &\rightarrow \infty \\ O &\rightarrow O \text{ est l'unique point double} \\ A &\rightarrow A'\end{aligned}$$

Nous sommes replacé dans la situation précédente qui s'écrit désormais

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \tau = \frac{1}{OF} = \frac{1}{f}$$

(Relation de Descartes).

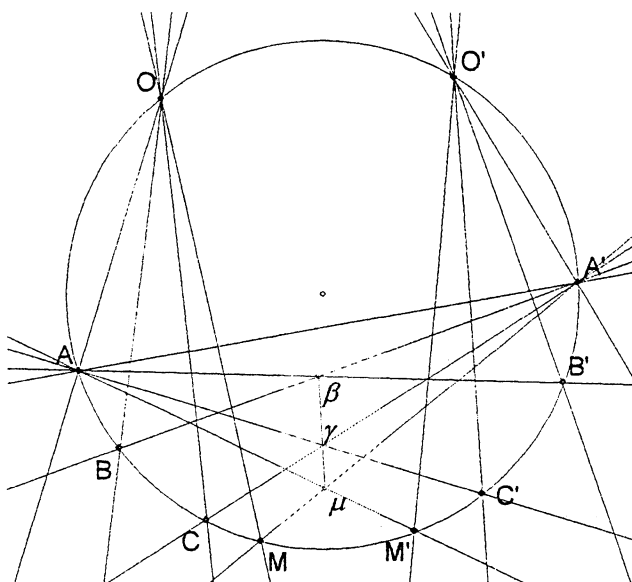
La conservation du birapport $(AOF\infty) = (A'O\infty F')$ permet directement d'obtenir la relation de Newton

$$\overline{FA} \overline{FA'} = f^2$$

6. Axe d'un faisceau (hexagramme de *Pascal*)

Si l'on prend comme ensemble de départ (et d'arrivée) un faisceau de droites, et si une application homographique applique une droite m du premier faisceau de sommet O , sur une droite m' du second de sommet O' , on peut chercher une construction géométrique de l'image de m , connaissant les images a', b', c' , de trois droites a, b, c fixées du premier faisceau. On trace un cercle fixe contenant les deux sommets O et O' . Ce cercle rencontre les droites a', b', c', m' et a, b, c, m en A', B', C', M' et A, B, C, M .

Les birapports des deux faisceaux de sommets A' et A , $(A'A, A'B, A'C, A'M)$ et (AA', AB', AC', AM') coïncident avec ceux des faisceaux de sommets O et O' , (OA, OB, OC, OM) et $(O'A', O'B', O'C', O'M')$. Ils sont donc égaux. Les deux faisceaux ayant une droite en commun, on déduit de la proposition liminaire 2.a que les intersections β, γ et μ de (AB') et $(A'B)$, (AC') et $(A'C)$ et (AM') et $(A'M)$, sont alignées. Pour construire M' et donc m' , il suffit de marquer l'intersection μ de $(\beta\gamma)$ avec $(A'M)$, puis de trouver où $(A\mu)$ recoupe le cercle de départ.



Un cas particulier intéressant :

Si les deux sommets coïncident, on travaille avec le même ensemble au départ ou à l'arrivée. On peut donc calculer les points doubles (ici ce sont des droites). Un point M est fixe si et seulement si il est confondu avec μ . Les points doubles sont donc les intersections (si elles existent) de la droite $(\beta\gamma)$ avec le cercle de départ. Comme ce raisonnement prouve l'invariance de cette droite (appelée axe de l'homographie) lorsqu'on ne privilégie plus le point A par exemple. Toutes les croix formées à partir de l'hexagramme A, B, C, A', B', C' sont donc alignées, c'est le théorème de *Pascal* appliqué dans le cercle.

III. Point de vue linéaire.

Le cadre convenable pour traiter de l'homographie est celui de la géométrie projective et sort naturellement de ce court exposé. Toutefois pour mieux comprendre les petits miracles que nous avons vu apparaître pour les suites et en Optique, on va introduire (aussi bien que faire se peut) quelques outils supplémentaires.

On commence par construire une application de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans Δ (une droite complétée par un point à l'infini et munie d'un repère) de la façon suivante :

A tout couple (x,y) on associe si y n'est pas nul le point d'abscisse $\frac{x}{y}$. A tout couple $(x,0)$ on associe le point à l'infini de Δ . Cette application est bien définie, surjective. Elle permet de représenter chaque point de la droite complétée par un système de coordonnées (défini à une constante de proportionnalité près) qu'on appelle coordonnées homogènes.

On peut maintenant rechercher par quelle application une homographie de la droite est représentée dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Pour ce faire il suffit de remplacer les abscisses x et x' dans la définition par des quotients $\frac{x}{y}$ et

$$\frac{x'}{y'}. \text{ On a } \frac{x'}{y'} = \frac{\frac{ax+by}{c\frac{x}{y}+d}}{\frac{x}{y}}, \text{ et donc } \begin{cases} x' = ax+by \\ y' = cx+dy \end{cases}$$

L'homographie est ainsi associée dans l'espace vectoriel des coordonnées homogènes à une application linéaire (non unique) qui possède donc des représentations matricielles.

1. Exemple des suites.

Si la suite (u_n) vérifie la relation $u_{n+1} = \frac{au_n+b}{cu_n+d}$; on lui associe la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est $P(X) = X^2 - (a+d)X + \Delta$.

On retrouve pour son discriminant $(a+d)^2 - 4\Delta$.

Supposons que ce trinôme possède dans $\mathbb{R}$ ou peut-être dans $\mathbb{C}$ deux racines distinctes (ie le discriminant est non nul). La matrice A est diagonalisable. Il existe une matrice P inversible

telles que $A' = P^{-1} A P$ soit diagonale. $A' = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. Prenons par exemple $P = \begin{pmatrix} -h & k \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -k \\ 1 & -h \end{pmatrix}.$$

Le vecteur U_n qui représente les coordonnées homogènes associées à u_n vérifie $U_n = A U_{n-1}$ et donc $P^{-1} U_n = A' P^{-1} U_{n-1}$ ce qui démontre à nouveau si α représente le quotient des valeurs

propres que $\frac{u_n - k}{u_n - h} = \alpha \frac{u_{n-1} - k}{u_{n-1} - h}$.

Le cas de la présence d'une valeur propre double est laissé en exercice.

2. Composition.

On démontre facilement que pour composer deux homographies il suffit de multiplier les matrices qui leurs correspondent.

3. Retour sur l'Optique.

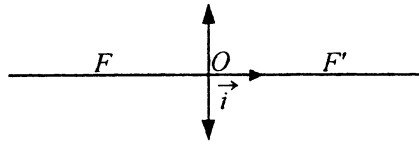
Nous avons vu que trouver l'image A' d'un objet A de l'axe Δ à travers une lentille mince de centre O , de foyers objet et image F et F' correspond à appliquer à A l'homographie $\mathbb{H}$ de Δ définie par les conditions suivantes :

$$\begin{aligned} \infty &\rightarrow F' \\ F &\rightarrow \infty \\ O &\rightarrow O \text{ (unique point double).} \end{aligned}$$

Dans un repère Δ centré en O , la représentation analytique de $\mathbb{H}$ est

$$\mathbb{H} : x \rightarrow \frac{f x}{x + f}$$

si l'on note f l'abscisse de F' .



Cette homographie est associée à la matrice $M = \begin{pmatrix} f & 1 \\ 0 & f \end{pmatrix}$.

Composer les effets de deux lentilles sur un même axe correspond donc, d'après la relation du paragraphe précédent à multiplier les matrices des deux systèmes optiques. La seule précaution à prendre concerne les éventuels changement de repère. Une translation $x \rightarrow x + t$

est une homographie associée à la matrice $\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. donc dans le repère centré en Ω (ω) la matrice de l'homographie $\mathbb{H}$ est $\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f & 1 \\ 0 & f \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exemple :

Deux³ lentilles convergentes (L_1) et (L_2) de distances focales images f_1 et f_2 forment un système *afocal* (ie $F'_1 = F_2$). Soit un objet AB repéré par la distance algébrique $\overline{F_1 A} = x_1$ et soit son image $A'B'$ à travers le doublet repéré par la distance algébrique $\overline{F_2 A'} = x_2$. Déterminer les relations de conjugaison du doublet.

Application numérique: $f_1 = 20\text{cm}$, $f_2 = 2\text{cm}$: déterminer le point de l'axe qui est à lui-même sa propre image.

Solution (sous Maple).

```
> restart:with(linalg):
```

On écrit les matrices des deux lentilles avant d'effectuer un changement de repère pour retrouver la seconde homographie dans le repère centré sur la première.

```
> V:=matrix(2,1,[[e],[1]]);
>
```

$$V := \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}$$

```
> M1:=matrix(2,2,[[f1,0],[1,f1]]);
```

$$M1 := \begin{bmatrix} f1 & 0 \\ 1 & f1 \end{bmatrix}$$

```
> M2.b:=matrix(2,2,[[f2,0],[1,f2]]);
```

$$M2b := \begin{bmatrix} f2 & 0 \\ 1 & f2 \end{bmatrix}$$

³ Exercice de taupe dont l'énoncé est tiré du précis Breal *cours et exercices résolus*, Optique 5 prépa.

[changement de base

> **P:=matrix(2,2,[[1,e],[0,1]]);**

$$P := \begin{bmatrix} 1 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

> **M2:=evalm(P&*M2.b&*inverse(P));**

$$M2 := \begin{bmatrix} f2 + e & -(f2 + e)e + ef2 \\ 1 & -e + f2 \end{bmatrix}$$

[On vérifie les calculs en remarquant que le pied de la seconde lentille est fixe

> **evalm(M2&*V);**

$$\begin{bmatrix} ef2 \\ f2 \end{bmatrix}$$

[Voici la matrice de la composée des homographies.

> **M:=map(expand,evalm(M2&*M1));**

$$M := \begin{bmatrix} f1f2 + f1e - e^2 & -f1e^2 \\ f1 - e + f2 & -f1e + f1f2 \end{bmatrix}$$

[On écrit que le système est afocal.

> **e:=f1+f2;**

$$e := f1 + f2$$

> **M:=map(expand,evalm(M2&*M1));**

$$M := \begin{bmatrix} -f2^2 & -2f1^2f2 - f1f2^2 - f1^3 \\ 0 & -f1^2 \end{bmatrix}$$

[On peut enfin repasser de la matrice à l'homographie composée:

> **H:=x->(M[1,1]*x+M[1,2])/(M[2,1]*x+M[2,2]);**

$$H := x \rightarrow \frac{M_{1,1}x + M_{1,2}}{M_{2,1}x + M_{2,2}}$$

> **f1:=20:f2:=2:H(x);**

$$\frac{1}{100}x + \frac{121}{5}$$

[L'agrandissement est de 1/100

> **c:=solve(H(x)=x,x);**

$$c := \frac{220}{9}$$

[On cherche enfin le point invariant...

> **evalf(c+f1);**

$$44.44444444$$

>

Quelques applications des nombres complexes à la physique

Partie A La représentation vectorielle de Fresnel

Les principes de la construction de Fresnel sont exposés dans le *Mémoire sur la diffraction de la lumière* de 1819, mémoire couronné par l'Académie des Science".

Il existe plusieurs façons de représenter une grandeur sinusoïdale, selon l'élément variable sur lequel on désire fixer son attention, le plus naturel étant d'étudier ses variations en fonction du temps. Dans cette optique, toute grandeur sinusoïdale s'écrit :

$$y = A \sin(\omega t + \varphi) \text{ ou } y = A \cos(\omega t + \varphi') \text{ (Il suffit de remplacer } \varphi \text{ par } \varphi' + \frac{\pi}{2})$$

Nous prendrons le sinus et les physiciens choisissent généralement pour A le nombre $Y\sqrt{2}$ où Y est la valeur efficace (valeur du courant continu qui produirait la même puissance thermique dans un conducteur ohmique). $Y\sqrt{2}$ est lui-même noté $\hat{Y}$; c'est la valeur maximale.

On appelle intensité efficace I d'un courant alternatif, l'intensité I d'un courant continu, qui, traversant un conducteur ohmique de résistance R pendant la même durée, y produirait le même dégagement de chaleur.

Si la période du courant alternatif est T , on a $\int_0^T R(i(t))^2 dt = \int_0^T R.I^2 dt$, exprimée en joules.

On montre alors que $I^2 = \int_0^T (i(t))^2 dt$ et I^2 est la valeur moyenne de i^2 sur une période.

On a dans ce cas, $i(t) = \sqrt{2}I \cos(\omega t + \varphi)$

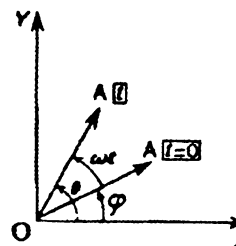
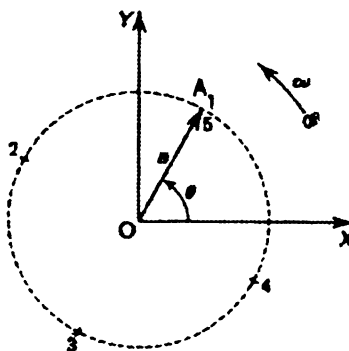
Une tension s'écrit donc : $u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$

Et une intensité $i = I\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$ où ω est la pulsation ($\omega = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période et $T = \frac{1}{f}$)

φ est la phase à l'origine (pour $t = 0$) et vérifie $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$

La représentation vectorielle de Fresnel

Considérons un vecteur $\vec{OA}$, dont le module est, selon une échelle donnée, proportionnel à l'amplitude a . Le vecteur tourne dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ autour de son origine O , à vitesse angulaire constante ω (rad/s) dans le sens trigonométrique.



L'extrémité A du vecteur décrit une circonférence entre les instants t et $t + \frac{\omega}{2\pi} = t + T$.

Si à l'instant 0, l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{OA})$ a la valeur φ , il a, à l'instant t , la valeur $\theta = \omega t + \varphi$.

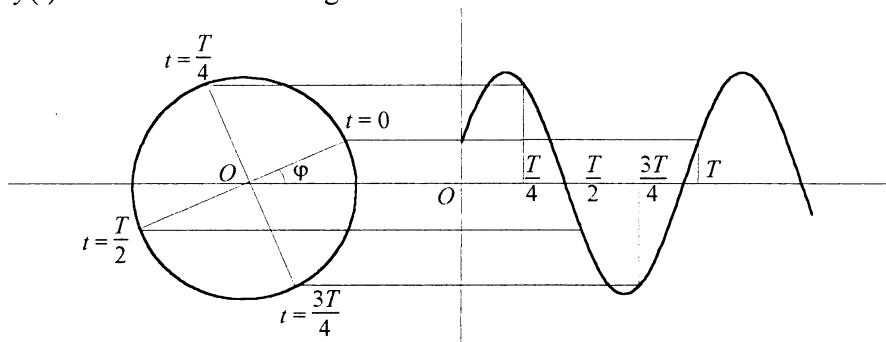
Projetons le vecteur $\vec{OA}$ sur l'axe $(O, \vec{j})$. La valeur algébrique de sa projection est, à l'instant t :

$$y = a \sin \theta = a \sin(\omega t + \varphi)$$

Ainsi

- le mouvement de la projection sur l'axe $(O, \vec{j})$ de l'extrémité du vecteur tournant est un mouvement sinusoïdal, d'amplitude égale au module du vecteur, proportionnelle à a ;
- la pulsation ω du mouvement sinusoïdal est numériquement égale à la vitesse angulaire du vecteur tournant.
- la phase φ est égale à l'angle que fait le vecteur tournant avec l'axe $(O, \vec{j})$ à l'instant initial $t = 0$.

La considération de ce vecteur tournant permet d'ailleurs une construction de la représentation cartésienne de $y(t)$ comme le montre la figure ci-dessous.



Réciproquement, à toute fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ on peut faire correspondre un vecteur tournant : c'est la représentation vectorielle dite de Fresnel.

On représente la fonction y par le vecteur $\vec{OA}$ dans la position qu'il occupe à l'instant initial $t = 0$. La connaissance du module a du vecteur, de l'angle φ et de la vitesse de rotation ω suffisent en effet à définir parfaitement la fonction y .

L'axe $(O, \vec{i})$ est l'axe de référence des phases.

L'axe $(O, \vec{j})$ ne sert donc que si l'on désire, par projection de $\vec{OA}$, atteindre la valeur instantanée de y .

Il est important de remarquer que la représentation de Fresnel correspond à une fonction sinusoïdale écrite sous la forme $y = a \sin(\omega t + \varphi)$ dans laquelle a et φ sont positifs et les angles exprimés en radians. Si l'expression de y est différente, il faut, par un changement de variables, se ramener à cette forme.

La représentation cartésienne

Soit deux fonctions sinusoïdales :

$$y_1 = a_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \text{ et } y_2 = a_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

caractérisant deux mouvements sinusoïdaux produits séparément par deux causes de même nature C_1 et C_2 .

Lorsque les deux causes agissent simultanément, les deux mouvements ayant la même direction, le mouvement résultant a la même direction que les mouvements composés et la fonction résultante y

décrivant le mouvement résultant est égale, à chaque instant à la somme algébrique des fonctions y_1 et y_2 .

Donc: $y = y_1 + y_2$.

Ainsi, la somme de deux fonctions sinusoïdales de même fréquence f est aussi une fonction sinusoïdale de fréquence f .

La construction de Fresnel

Aux deux fonctions y_1 et y_2 sont associés des vecteurs tournants $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$. Leurs projections sur l'axe $(O, \vec{j})$ sont les fonctions sinusoïdales y_1 et y_2 dont nous cherchons la somme. Soit le vecteur somme géométrique des deux vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$: $\vec{OA} = \vec{OA}_1 + \vec{OA}_2$

Comme le parallélogramme OA_1AA_2 tourne sans se déformer (y_1 et y_2 ont même vitesse angulaire), le vecteur $\vec{OA}$ tourne aussi avec la même vitesse angulaire, en gardant un module a constant.

La projection de ce vecteur $\vec{OA}$ sur l'axe $(O, \vec{j})$ est la fonction sinusoïdale $y = a \sin(\omega t + \varphi)$. Cette fonction représente la somme algébrique cherchée puisque, d'après le théorème des projections :
 $y = y_1 + y_2$.

Si, dans une représentation de Fresnel ($t = 0$), nous traçons les vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$, le parallélogramme construit sur ces vecteurs donne graphiquement l'amplitude a et la phase φ de la fonction y . Il suffit en effet de mesurer la longueur a égale à OA et l'angle $\varphi = (\vec{i}, \vec{OA})$. Cette construction est la *construction de Fresnel*.

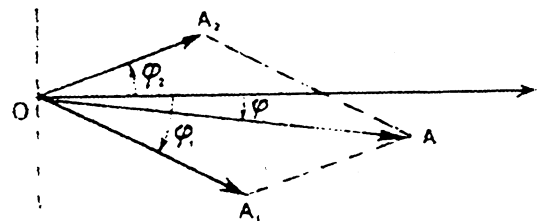
Formule de Fresnel

La somme des affixes des vecteurs $\vec{OA}_1$ et $\vec{OA}_2$ est $z_{\vec{OA}} = a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}$

Pour déterminer l'intensité résultante, calculons $z_{\vec{OA}} \bar{z}_{\vec{OA}}$

$$\begin{aligned} z_{\vec{OA}} \bar{z}_{\vec{OA}} &= (a_1 e^{i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{i(\omega t + \varphi_2)}) (a_1 e^{-i(\omega t + \varphi_1)} + a_2 e^{-i(\omega t + \varphi_2)}) \\ &= a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned}$$

On obtient ainsi $OA = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}$ (formule de Fresnel)



Remarque

Comme la dérivée de la fonction $x \rightarrow a \sin(\omega t + \varphi)$ est la fonction $x \rightarrow \omega a \cos(\omega t + \varphi) = \omega a \sin(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2})$, la grandeur sinusoïdale (ou action ou mouvement) dérivée par rapport à t est une grandeur sinusoïdale de même centre, même pulsation ω , et dont le vecteur tournant se déduit de celui de l'initial par une similitude de centre O , d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport ω .

Nous venons de composer deux mouvements rectilignes sinusoïdaux de même centre, de même période, et dont les trajectoires sont portées par une même droite.

On peut envisager le cas où les deux trajectoires sont portées par deux axes distincts.

Trajectoire d'une particule soumise à une force centrale "élastique"

Considérons une particule M de masse m soumise à une force $f = -kr$ (où $r = OM$ et $k > 0$) dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique, nous avons $m\Gamma = -kr$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$. En projetant sur chacun des axes nous obtenons : $m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$ et $m\frac{d^2y}{dt^2} = -ky$

Ces équations peuvent également s'écrire $\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \\ \frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \end{cases}$ en ayant posé $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Les solutions sont $\begin{cases} x(t) = A_1 \cos \omega t + B_1 \sin \omega t \\ y(t) = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t \end{cases}$

En supposant $\frac{dx}{dt} = 0$ comme seule condition initiale, on obtient $B_1 \omega = 0$, nous pouvons alors écrire :

$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos \omega t = A \cos \omega t \\ y(t) = A_2 \cos \omega t + B_2 \sin \omega t = B \cos(\omega t - \varphi) \end{cases}$$

Déterminons ensuite l'allure de la trajectoire du point M pour chaque déphasage φ entre x et y .

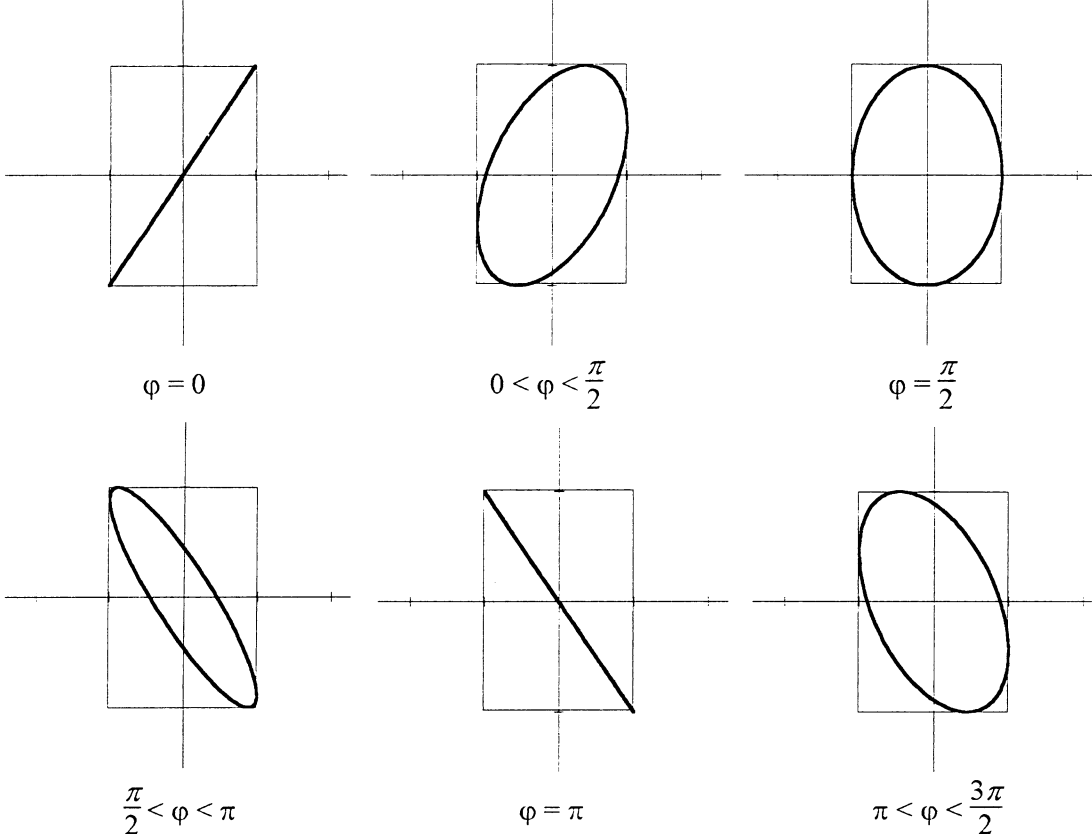
→ Ces trajectoires sont périodiques de période $T = \frac{2\pi}{\omega}$

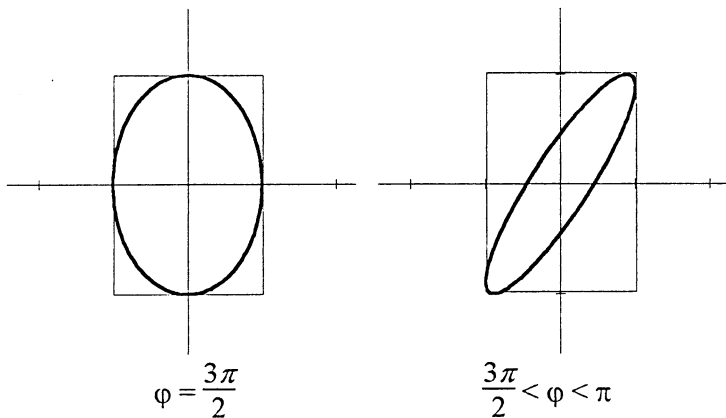
→ Pour tout t , $-A \leq x(t) \leq A$ et $-B \leq y(t) \leq B$ (en choisissant $A > 0$ et $B > 0$)
donc les trajectoires se trouvent dans un rectangle.

- Si $\varphi = 0 [\pi]$, $y = \pm \frac{B}{A} x$ et la trajectoire est un segment de droite.

- Si $\varphi = \frac{\pi}{2} [\pi]$, $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$ et la trajectoire est une ellipse centrée en l'origine.

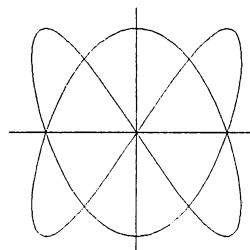
- Pour toute autre valeur de φ , la trajectoire est une ellipse d'axe incliné par rapport à $(O, \vec{i})$.





Ces diverses ellipses sont visualisées à l'oscilloscope lorsque les fonctions x et y sont des tensions sinusoïdales orthogonales de même pulsation ω mais déphasées de φ .

Lorsque l'on compose deux tensions sinusoïdales orthogonales de pulsations différentes, on obtient des courbes de Lissajous.



Partie B : Les circuits RLC

Dans l'étude du courant sinusoïdal, on peut représenter le lien entre les intensité et les tensions instantanées par les vecteurs de Fresnel mais aussi par des nombres complexes.

Le problème est de déterminer une relation entre u et i dans un circuit électrique

Lorsque le circuit comprend :

- uniquement une résistance la loi d'Ohm donne $u = Ri$.
- uniquement un condensateur de capacité C , la relation devient $i = C \frac{du}{dt}$
(on dit que i est en quadrature avance sur u)
- uniquement une bobine d'inductance L , on a $u = L \frac{di}{dt}$
(u est en quadrature avance sur i)

Pour un courant continu, on a : en série $R = \sum R_i$ et en parallèle $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$

Pour un courant alternatif, la quadrature avance correspond à une rotation de $\frac{\pi}{2}$ pour le vecteur de Fresnel correspondant soit à une multiplication de ce vecteur par le complexe $i = \sqrt{-1}$. Pour ne pas confondre avec le symbole des intensités, on notera j , comme les physiciens ce nombre. On note, de plus, par des majuscules soulignées les autres grandeurs complexes.

A $u = U\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_u)$ et $i = I\sqrt{2}\sin(\omega t + \varphi_i)$ (avec la notation $\hat{U} = U\sqrt{2}$ et $\hat{I} = I\sqrt{2}$ pour les valeurs maximales et U et I les valeurs efficaces), on associe les nombres complexes $\underline{U}$ et $\underline{I}$ définies par leur

expression (dite polaire) $[\underline{\dot{U}}; \varphi_u]$ et $[\underline{\dot{I}}; \varphi_i]$ donnant module et argument du vecteur de Fresnel correspondant.

Dans ce cas, $i = C \frac{du}{dt}$ s'écrit $\underline{I} = jC\omega \underline{U}$ ou $\underline{U} = \frac{1}{jC\omega} \underline{I} = -j \frac{1}{C\omega} \underline{I}$

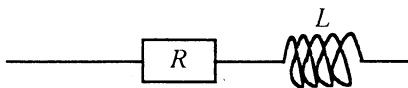
$u = L \frac{di}{dt}$ s'écrit $\underline{U} = jL\omega \underline{I}$

On peut alors généraliser la loi d'Ohm aux courants sinusoïdaux sous la forme $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I}$ où $\underline{Z}$ est l'impédance complexe, laquelle vérifie les mêmes lois que dans le cas continu :

$$\text{en série } \underline{Z} = \sum \underline{Z}_i \text{ et en parallèle } \frac{1}{\underline{Z}} = \sum \frac{1}{\underline{Z}_i}$$

(Pour une résistance, $\underline{Z} = R$, un condensateur $\underline{Z} = -j \frac{1}{C\omega}$, une bobine $\underline{Z} = jL\omega$)

Exemple 1 :

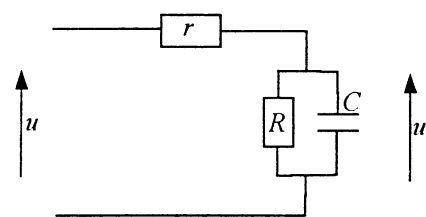


Pour la résistance seule $\underline{U} = R \underline{I}$

Pour la bobine seule $\underline{U} = jL\omega \underline{I}$

Pour le circuit complet, puisque les éléments sont en série,
 $\underline{U} = (R + jL\omega) \underline{I}$

Exemple 2



Le groupement (R, C) est constitué de R et de C en parallèle, son impédance est $\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega}}$ soit $\underline{Z}_p = \frac{R}{1 + jCR\omega}$

Le dipôle complet a pour impédance
 $\underline{Z} = r + \underline{Z}_p + r + \frac{R}{1 + jCR\omega}$

Ainsi, si on applique la tension $u = U\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi_u)$, on peut déterminer le courant i correspondant :

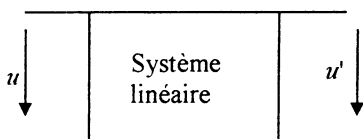
$$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} \text{ avec } \underline{U} = [U; \varphi_u]$$

$$\text{donc } I = \frac{U}{|\underline{Z}|} \text{ et } \arg \underline{I} = \arg \underline{U} - \arg \underline{Z}$$

Partie C : Diagramme de Bode

Pour les systèmes linéaires, les diagrammes de Bode permettent de connaître la réponse du système à une excitation sinusoïdale, à différentes fréquences (analyse harmonique) :

- On impose en entrée du système à étudier une tension sinusoïdale, de fréquence fixée.
- On attend que le régime soit stabilisé. (régime sinusoïdal établi)



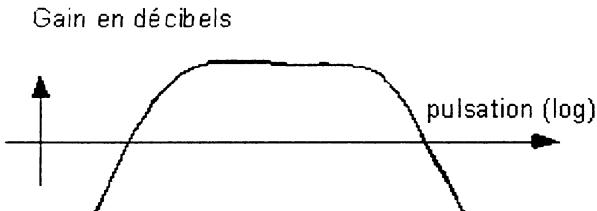
Tension d'entrée $u(t) = U\sqrt{2} \sin(\omega t)$

Tension de sortie $u'(t) = U'\sqrt{2} \sin(\omega t + \varphi)$

On relève φ déphasage entrée-sortie et le quotient $\frac{U'}{U}$, le gain en amplitude pour plusieurs fréquences ou pulsations de la tension d'entrée.

Le résultat de ce type de mesure est un ensemble de deux graphes : gain-pulsation et déphasage-pulsation. On parle de diagramme de Bode lorsqu'on en fait une représentation en échelle logarithmique pour les pulsations.

La représentation courante en électronique est donnée sous forme de diagrammes de Bode, où l'on montre l'évolution du gain en décibels ($20\log U$) et du déphasage en fonction de la pulsation de travail, placée elle aussi en échelle logarithmique.



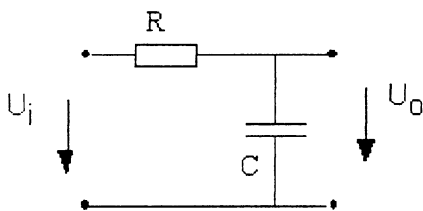
L'intérêt de l'échelle logarithmique est de faire intervenir un grand domaine de variation de ω .

Utilisons la représentation des signaux à l'aide des nombres complexes. Le signal d'entrée sera noté $\underline{U}$ et de sortie $\underline{U}'$.

Le gain complexe sera alors $\underline{G} = \frac{\underline{U}'}{\underline{U}}$ tel que $|\underline{G}|$ est le gain en amplitude et $\text{Arg}(\underline{G})$ le déphasage.

Exemple : Circuit RC dit "passe bas"

$$\underline{G} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \text{ où } \tau = CR \text{ (constante de temps) avec } \omega_c = \frac{1}{\tau} \text{ appelé pulsation de coupure.}$$

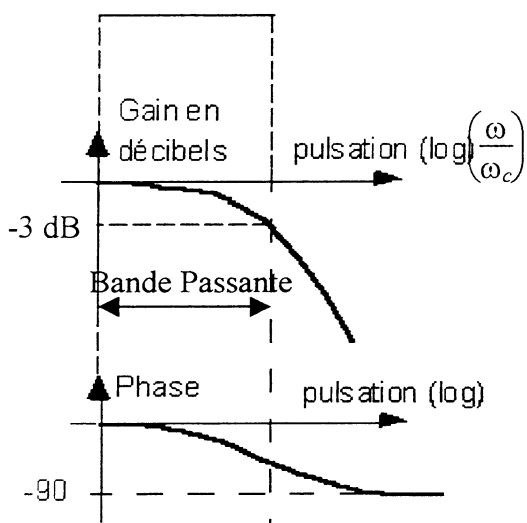


$$\text{On trouve } |\underline{G}| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \text{ et } \arg(\underline{G}) = -\arctan(\omega\tau)$$

$$\text{On a } \underline{G} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Si $\omega \gg \omega_c$ alors $\underline{G} \approx 0$ et le système ne laisse pas passer les signaux de haute fréquence

Si $\omega \ll \omega_c$ alors $\underline{G} \approx 1$, le filtre est "passe-bas"



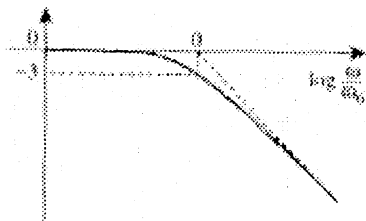
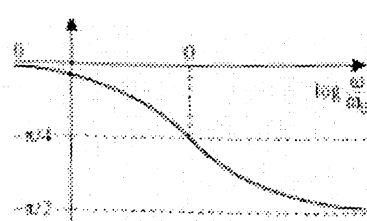
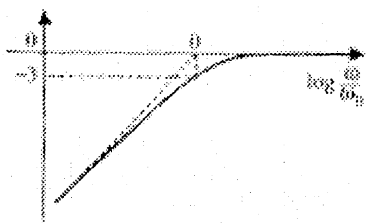
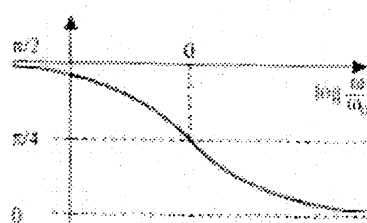
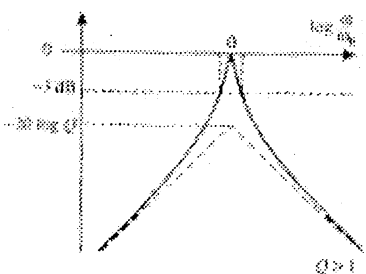
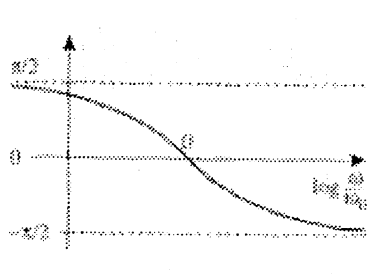
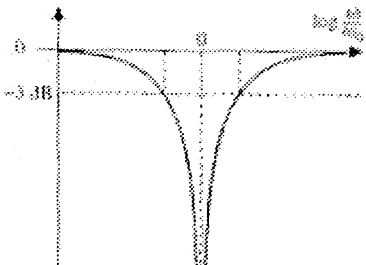
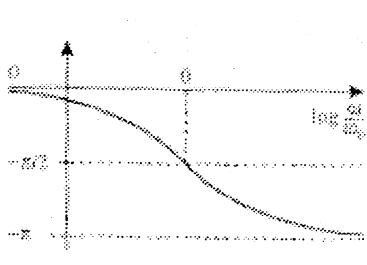
La pulsation de coupure ω_c est définie comme la pulsation telle que $G = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$

Si $G \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ les fréquences passent (bande passante)

$$\text{alors } 20\log G \geq 20\log G_{\max} - 20\log\sqrt{2}$$

soit $G_{dB} \geq G_{\max\text{ dB}} - 3\text{dB}$ sur le diagramme de Bode.

DIAGRAMMES DE BODE DES PRINCIPAUX TYPES DE FILTRES

Type	G	Diagramme en amplitude $G_{dB}(\frac{\omega}{\omega_c})$	Diagramme en phase $\varphi(\omega)$
Passe-Bas	$\frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$		
Passe-Haut	$\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$		
Passe-Bande	$\frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$		
Coupe-Bande	$\frac{jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$		

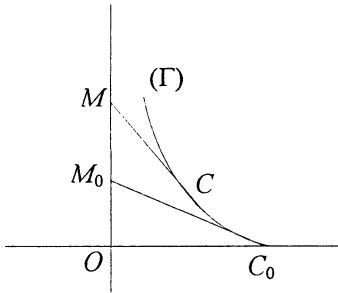
Courbes de Poursuite

Elles ont été étudiées par Bouguer dès 1732 dans un mémoire intitulé *Problème de la route du vaisseau à la chasse d'un autre* (Mémoires de l'Académie des Sciences). Bouguer examinait le cas où le vaisseau poursuivi suit une ligne droite¹. Il semble que ce problème fut également considéré par Léonard de Vinci.

Une autre formulation du problème est de déterminer la ligne décrite par un chien qui court après son maître lorsque celui-ci suit un chemin rectiligne d'un mouvement uniforme. C'est pour cela que l'on nomme également cette courbe *courbe du chien*.

C et M représentent les positions respectives du chien et du maître. Supposons que la position initiale du chien soit C_0 telle que $OC_0 = a$ sur l'axe des abscisses et que le maître parcourt l'axe des ordonnées à partir d'une position M_0 telle que $OM_0 = b$. Considérons que le chien et le maître aient des vitesses respectives égales à c et m .

Comme à tout moment le chien se dirige vers le maître, les droites (CM) doivent être tangentes à la courbe décrite par le chien ou encore l'enveloppe des droites (CM) sera la courbe recherchée.



L'équation de la tangente (MC) est de la forme

$$y - y_C = \frac{dy_C}{dx_C}(x - x_C)$$

En prenant $x = 0$, on trouve la position du point M qui est

$$OM = y_C - \frac{dy_C}{dx_C}x_C$$

Ou encore, en notant $y_C' = \frac{dy_C}{dx_C}$

$$OM = y_C - y_C'x_C$$

Dans le temps dt , le chien parcourt l'élément ds avec une vitesse c et le maître parcourt l'élément $d(OM)$ avec une vitesse m :

$$\frac{d(OM)}{dt} = m \text{ et } \frac{ds}{dt} = c$$

La courbe recherchée (Γ) a donc pour équation différentielle

$$\frac{d(OM)}{ds} = \frac{m}{c} \text{ soit } \frac{d(y_C - y_C'x_C)}{ds} = n$$

ou

$$\frac{dy_C'}{\sqrt{1 + y_C'^2}} = n \frac{dx_C}{x_C} \text{ c'est-à-dire } \frac{y_C''}{\sqrt{1 + y_C'^2}} = \frac{n}{x_C}$$

qui s'intègre en

$$\ln(y_C' + \sqrt{1 + y_C'^2}) = n \ln x_C + k, k \in \mathbb{R}$$

soit

$$y_C' + \sqrt{1 + y_C'^2} = kx^n, k \in \mathbb{R}$$

¹ Maupertuis, dans le même tome, généralisa le problème en supposant que la route du vaisseau poursuivi est quelconque et il obtint l'équation différentielle qui répond à la question.

Qui se transforme successivement en

$$\sqrt{1 + y_C'^2} = kx^n - y_C'$$

$$1 + y_C'^2 = k^2 x^{2n} + y_C'^2 - 2kx^n y_C'$$

$$y_C' = k \frac{x^n}{2} - \frac{1}{2k} x^{-n}$$

et réciproquement de telles solutions conviennent.

Une seconde intégration donne

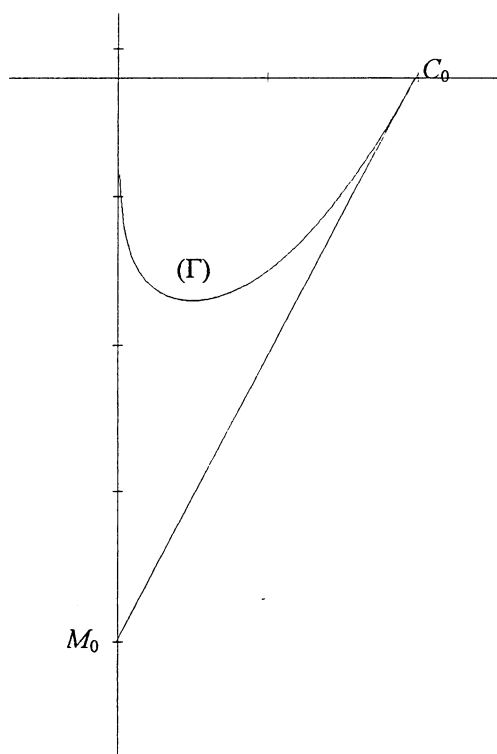
Si $n \neq 1$

$$y_C + B = \frac{A}{2(n+1)} x_C^{n+1} - \frac{1}{2A(-n+1)} x_C^{-n+1}$$

Les constantes A et B étant données par les conditions initiales, c'est-à-dire si $x_C = a$ alors $y_C' = -\frac{b}{a}$ et $y = 0$.

Si $n = 1$, c'est-à-dire lorsque le chien et le maître ont même vitesse, on a

$$y_C = \frac{Ax_C^2}{4} - \frac{1}{2A} \ln x_C + B$$



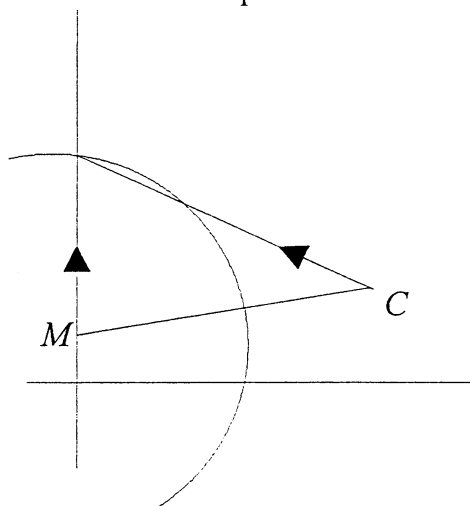
Lorsque la poursuite ne consiste plus à essayer de se diriger directement vers sa proie mais éventuellement de "couper" sa trajectoire, le problème devient résoluble en déterminant l'ensemble des points accessibles simultanément par les deux vaisseaux :

Supposons le vaisseau M poursuivi par le vaisseau C avec les mêmes vitesses respectives m et c . En un instant t , la distance parcourue par le vaisseau M est $m \times t$, celle du vaisseau C sera $c \times t$.

Ainsi, l'ensemble des points simultanément atteints sera l'ensemble des points S vérifiant, pour tout t , $MS = mt$ et $CS = ct$ soit $t = \frac{MS}{m} = \frac{CS}{c}$

$$\text{d'où } \frac{MS}{CS} = \frac{m}{c}$$

On reconnaît une ligne de niveau ou cercle d'Apollonius.



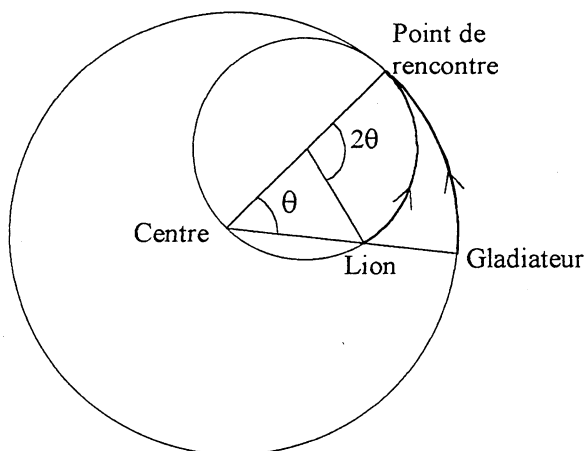
Si ce cercle a une intersection sur la demi-droite où M se dirige, cette intersection est le point de rencontre possible des deux vaisseaux. Sinon, il n'y a pas de rencontre possible.

Comme dans la situation précédente, c'est-à-dire lorsque la place le permet, la meilleure façon d'échapper à un éventuel poursuivant est de s'en éloigner sur la demi-droite "opposée" à ce poursuivant.

Un autre problème correspond à la situation du gladiateur tentant d'échapper aux griffes d'un lion dans une arène circulaire ; prédateur et proie sont alors confinés dans un espace restreint. Pour que sa résolution ne soit pas trop évidente, considérons que le gladiateur et le lion ont même vitesse.

Une première situation correspond au gladiateur placé sur le bord extérieur de l'arène qui est un cercle et qui tente d'échapper au lion. Dans ce cas, le lion peut toujours rattraper le gladiateur :

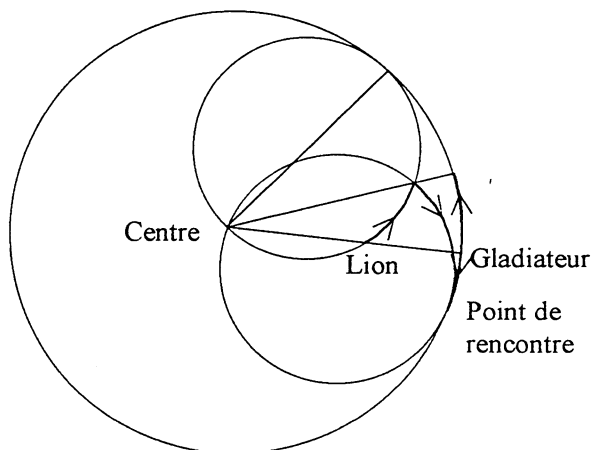
Si le gladiateur ne change pas de sens de parcours sur le cercle, comme sur le schéma ci-contre



Le gladiateur parcourt une distance égale à la longueur d'un arc de cercle d'angle θ et de rayon R , celui de l'arène. Le lion doit alors parcourir la longueur d'un arc de cercle d'angle 2θ et de rayon $\frac{R}{2}$ c'est-à-dire la même distance que le gladiateur. Comme les vitesses sont égales, le lion va dans ce cas rattraper le gladiateur.

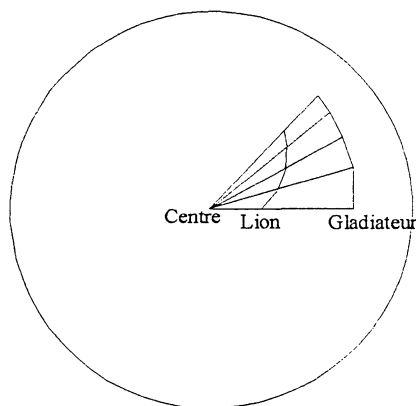
Si le gladiateur effectue des changements de sens dans le parcourt de ce cercle extérieur, la situation ne va guère changer pour lui.

Il suffit au lion de changer de cercle de diamètre le rayon de l'arène pour parcourir la même distance que le gladiateur et s'en rapprocher jusqu'à atteindre le cercle extérieur.



Dans le cas où le gladiateur ne se trouve pas sur le cercle extérieur mais en un point quelconque de l'intérieur de l'arène.

Le gladiateur doit alors décrire une spirale faite de segments successifs, chacun à angle droit du rayon et de longueur strictement inférieure à la précédente, pour ne pas sortir du cercle, et le lion restera sur le rayon joignant le gladiateur au centre de l'arène en "coupant" la trajectoire du gladiateur.



Bibliographie :

- *Courbes géométriques remarquables*, H. Brocard et T. Lemoyne, Librairie scientifique et technique, Albert Blanchard, 3 tomes, 1967.

Traité des courbes spéciales remarquables, Francisco Gomes Teixeira, 3 tomes, Rééditions Jacques Gabay.

- *Visions géométriques*, Ian Stewart, Bibliothèque Pour la Science, Belin, 1994.

Extremum d'une fonction, annulation de sa dérivée, illustration par des modèles de l'optique.

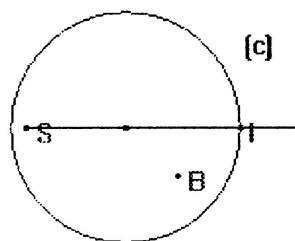
Un de mes professeurs répétait souvent la mise en garde suivante : « En mathématiques, il faut avoir le sens des nuances ! ». Ce sens des nuances trouve à s'exercer pour relier la localisation des extrema d'une fonction dérivable, par exemple d'une seule variable, aux zéros de sa dérivée : un énoncé correct précisera que, *si* la fonction présente un extremum local en un point *intérieur* à l'intervalle d'étude, *alors* ce point annule la dérivée (il est dit critique ou stationnaire, et les mêmes qualificatifs s'appliquent à la valeur prise en ce point par la fonction). Le principe de Fermat en optique est un bel objet de discussion sur les nuances séparant extremum et valeur critique. Nous en proposons une approche *expérimentale*, par le logiciel Cabri-Géomètre II.

1. Le principe de Fermat.

Vers le milieu du dix-septième siècle, Fermat énonce que « la nature agit toujours par les voies les plus courtes » ([M] p 85-86, [E] p 65), et, surtout, déduit de ce principe les lois de Snell-Descartes sur la réflexion et la réfraction, en introduisant la notion de chemin optique.

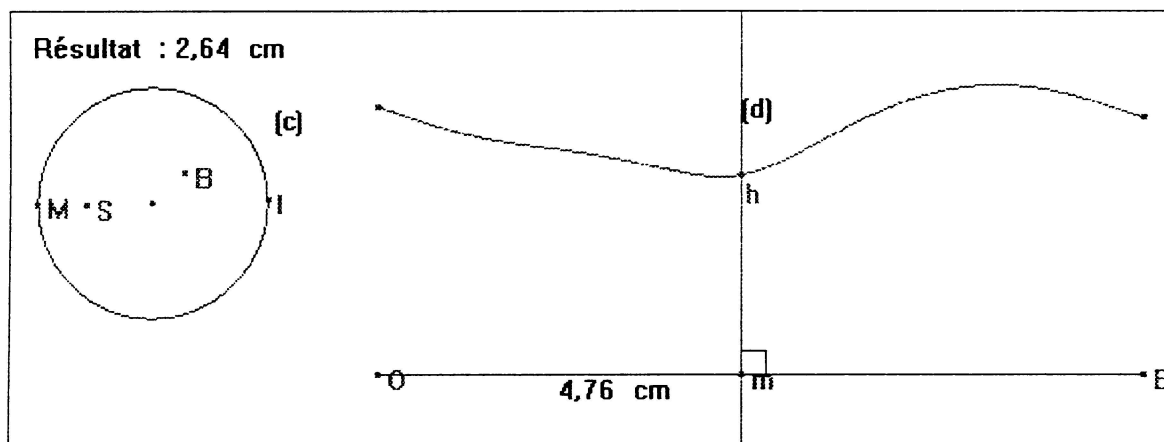
Dans un milieu plan homogène (les propriétés sont les mêmes en tout point) et isotrope (les propriétés sont les mêmes dans toutes les directions), un rayon joignant le point source S au point but B en étant réfléchi par un point M d'une courbe parcourt un chemin optique mesuré simplement par la somme des distances $SM+MB$. Dans le cas de la réfraction, le chemin optique est mesuré par le *temps* du parcours, ce qui amène à discuter selon la vitesse de la lumière lors des différents segments du trajet : ainsi la lumière est davantage freinée dans l'eau que dans l'air, et une même distance donnera ainsi un chemin optique plus grand si elle est parcourue dans l'eau plutôt que dans l'air.

Examinons si le chemin optique est bien minimal dans le cas de la réflexion (on adapterait assez aisément les diverses manipulations proposées à la réfraction) :



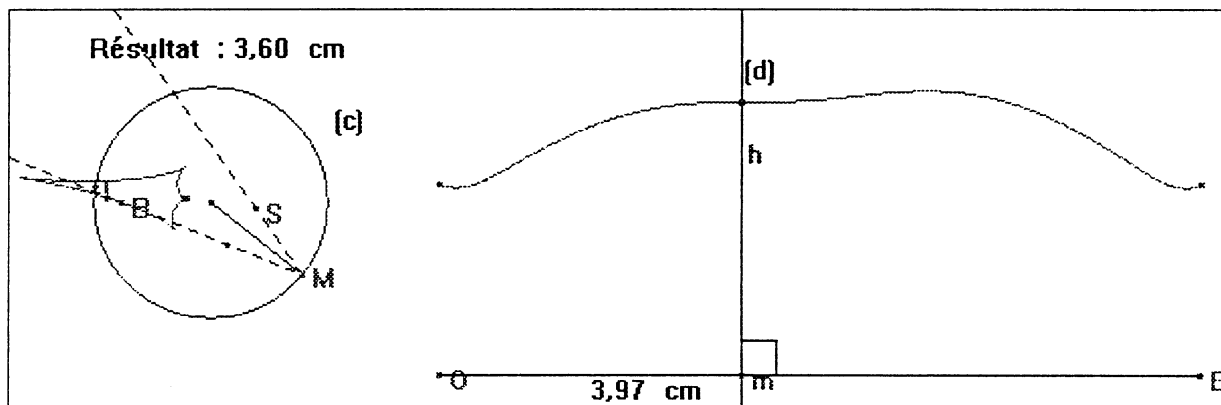
construisons d'abord deux points (libres) S et B , un cercle (c) , et une origine I sur (c) (par exemple avec (SI) un diamètre de (c)) : le résultat figure ci-contre.

Ensuite, construisons un segment $[OE]$, qui servira d'axe des abscisses, prenons un point m sur ce segment, la perpendiculaire (d) à $[OE]$ issue de m , mesurons la distance Om , reportons la sur le cercle (c) à partir du point I , ce qui nous donne un point M . Mesurons les distances SM et MB , calculons la somme et reportons le résultat sur la droite (d) à partir de m , ce qui nous donne un point h . Le lieu de h lorsque m varie donne la courbe représentative du chemin optique (S, B étant fixés).



Matérialisons le diamètre du cercle issu de M , la demi-droite $[MS)$ et la demi-droite réfléchi par rapport au diamètre passant par M . En déplaçant le point m , on constate que lorsque le point m réalise un minimum local, le rayon réfléchi passe par le point B : le principe de Fermat entraîne bien la loi de Descartes sur l'égalité des angles incidents et réfléchis. On peut également retrouver une objection soulevée au dix-huitième siècle par Euler et Lagrange : un maximum local conduit à la même configuration.

Maintenant, matérialisons la droite (SM) puis le lieu de cette droite quand le point m varie : nous obtenons l'enveloppe de la famille de droites. Cette courbe est appelée la caustique par réflexion (sur le cercle) du point S . Si nous amenons le point B sur cette caustique et le point m de manière à ce que le point h soit d'inflexion pour le chemin optique, le rayon réfléchi passe par le point B (et est tangent à la caustique).



L'énoncé correct du principe de Fermat est : le chemin optique est stationnaire. Or l'énoncé « historique » est encore souvent privilégié¹, ce qui ne contribue pas à clarifier les rapports. Par exemple dans l'ouvrage de M.Demazure : Catastrophes et bifurcations (Ellipses, 1989), où la notion de point critique joue pourtant le premier rôle, figure page 133 la remarque : « On vient ainsi de vérifier que le principe de Fermat (minimisation du chemin optique) implique les lois de Descartes. », sans autre commentaire. Or le calcul² qui précède cette remarque établit l'équivalence entre les lois de Descartes et le caractère stationnaire du chemin optique. En outre, nous verrons dans la suite que les points B pour lesquels le chemin optique est stationnaire sans être extrémal sont particulièrement lumineux !

¹ Voir Feynman, cours de physique, tome 2 de mécanique, chapitre 26, (InterEditions), pour une discussion des apports du principe de Fermat. Poincaré, dans ses écrits de vulgarisation (la valeur de la science, la science et l'hypothèse, science et méthode) a également mis en valeur l'importance des principes dans l'organisation des connaissances.

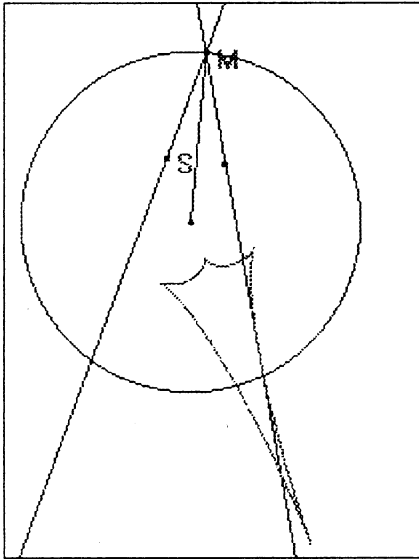
² Si l'arc est paramétré par l'abscisse curviligne s , la dérivée du chemin optique est $\left(\frac{S\vec{M}}{SM} + \frac{B\vec{M}}{BM} \right) \cdot \frac{d\vec{M}}{ds}$, où le

vecteur entre parenthèses dirige la bissectrice intérieure du triangle SMB et le second facteur dans ce produit scalaire dirige la tangente : l'annulation de la dérivée équivaut à la symétrie des demi-droites $[MS)$ et $[MB)$ par rapport à la normale en M .

2. Récréation : exemples de caustiques par réflexion.

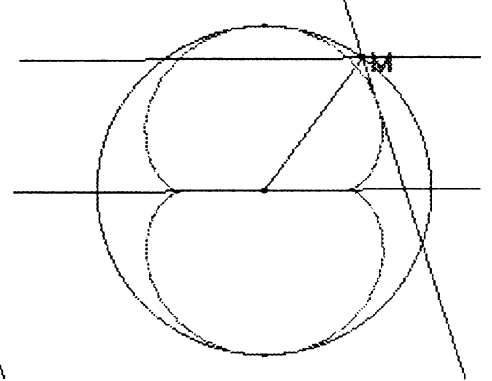
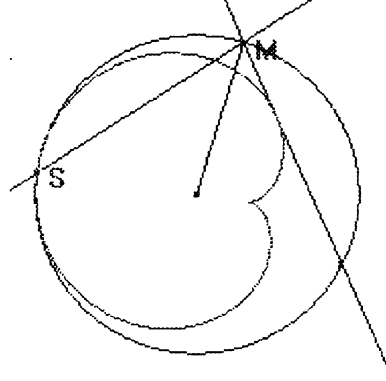
Il suffit de disposer d'une construction de courbe avec sa tangente en un point courant. Voici quelques exemples :

- avec un cercle, on obtient notamment une cardioïde si le point source S est sur le cercle, ou une néphroïde en remplaçant les droites (SM) par les droites issues de M parallèles à une droite donnée, sur deux droites parallèles.

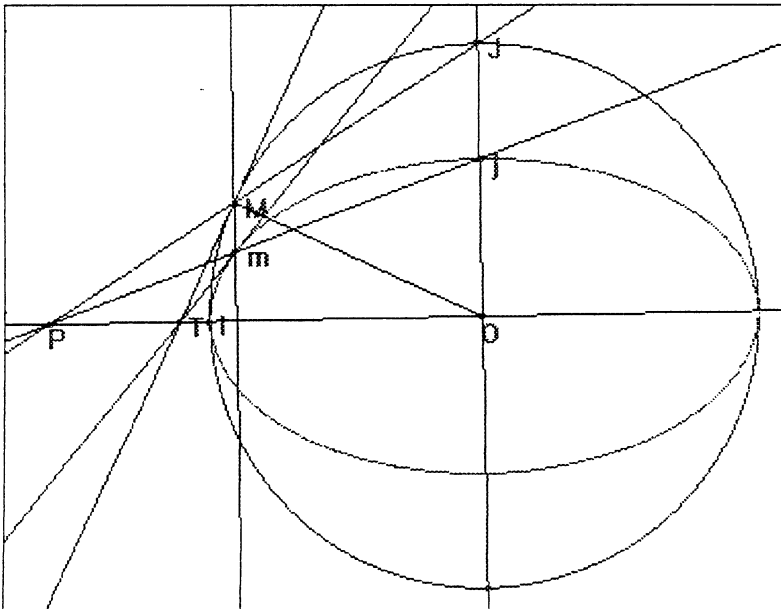


On construit le cercle et un point libre S , un point M sur le cercle, le segment joignant M au centre, la droite (SM) et sa symétrique (d) par rapport au segment précédent : le lieu de (d) quand M varie fournit la caustique par réflexion.

Avec S sur le cercle, ou au contraire à l'infini :

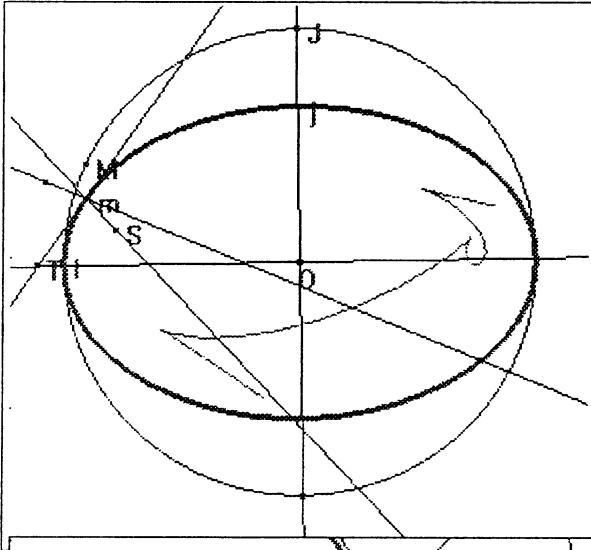


- avec une ellipse, que l'on peut construire à partir d'un cercle par affinité orthogonale :

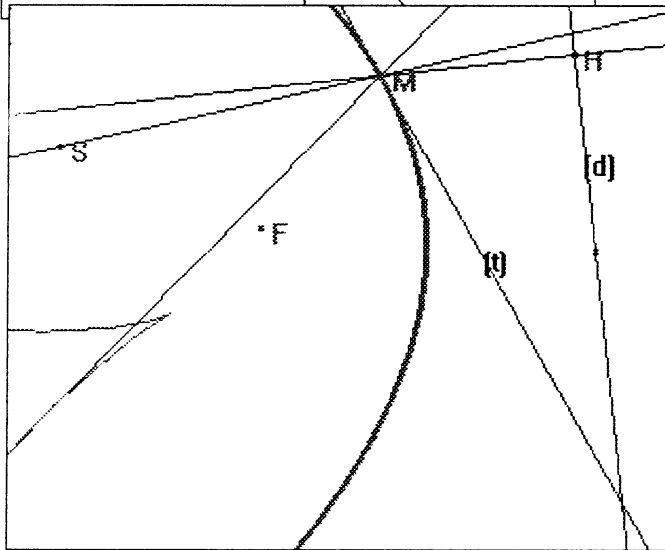


On construit un cercle de centre O , un point I sur ce cercle, la droite (OI) , la droite perpendiculaire à (OI) issue de O , un point J sur cette droite et le cercle, un point j sur la droite (OJ) , un point M sur le cercle. On note P le point d'intersection de (MJ) avec (OI) , et m le point d'intersection de (Pj) avec la perpendiculaire à (OI) issue de M . Le lieu de m quand M varie donne l'ellipse obtenue par l'affinité orthogonale d'axe (OI) qui transforme J en j .

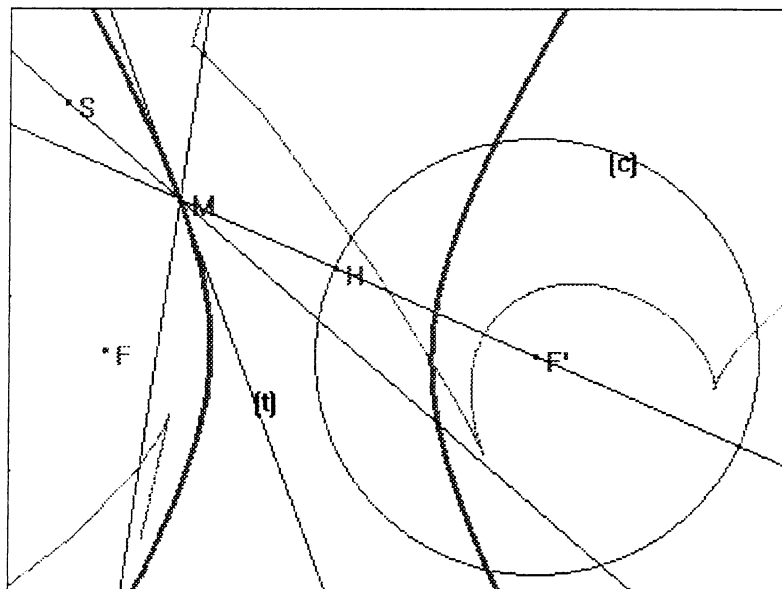
Avec T le point d'intersection de (OI) avec la perpendiculaire au segment $[OM]$ issue de M , la droite (Tm) est tangente à l'ellipse en m .



Avec un point libre S , la droite (SM) et sa symétrique par rapport à la tangente (mT) , le lieu de cette dernière droite quand M varie dessine la caustique. En déplaçant le point S , on peut créer une belle variété de singularités, ou au contraire chercher la position du foyer (qui engendre une caustique réduite à un point, l'autre foyer).



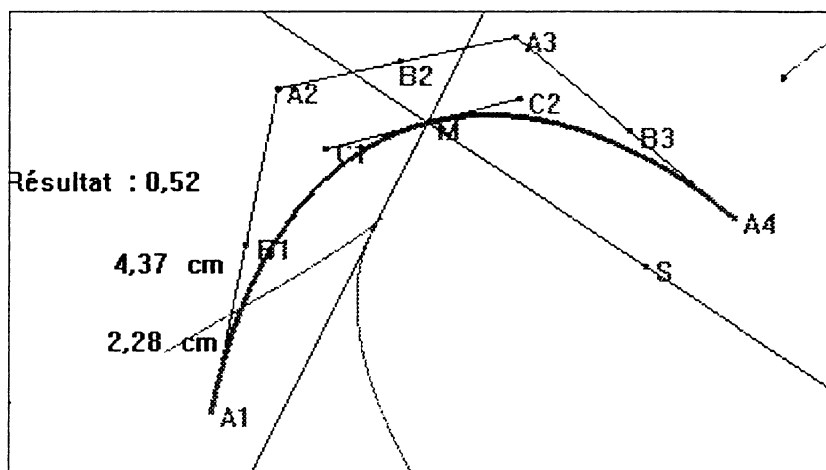
- F, S sont des points libres, (d) est une droite, H est un point sur (d) , M est le point d'intersection de la médiatrice (t) de $[FH]$ et de la perpendiculaire à (d) issue de H : le lieu de M quand H varie est la parabole de foyer F et de directrice (d) , (t) est la tangente en M à cette parabole. Traçons la droite (SM) et sa symétrique par rapport à (t) : le lieu de cette dernière droite quand le point H varie donne la caustique de S par rapport à la parabole.



- En remplaçant la droite (d) par un cercle (c) et de centre F' , on obtient une conique de foyers F et F' .

– enfin on peut utiliser les courbes de Bézier¹ (par exemple avec quatre points):

¹ Y. Haubry, Présentation des courbes de Bézier (bulletin vert n°390 de l'APMEP)



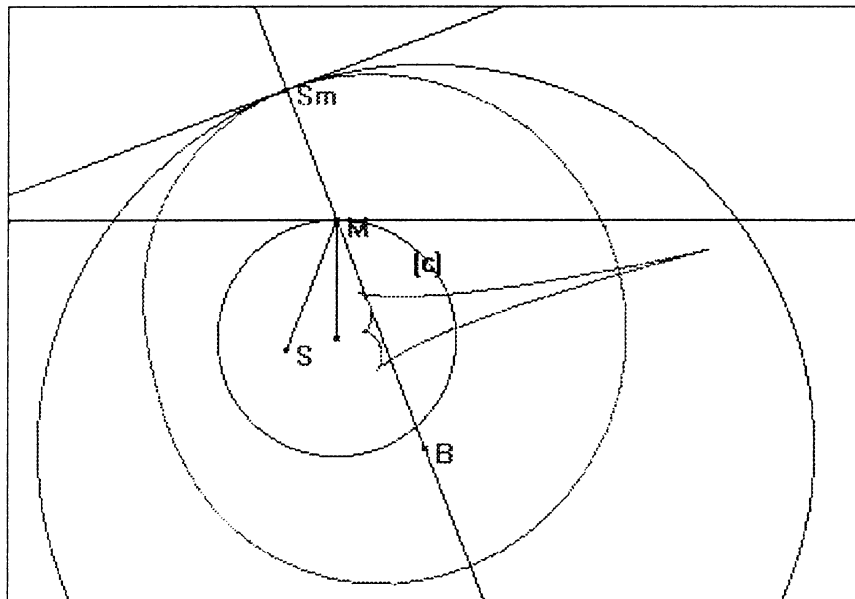
à partir de quatre points libres $A1, A2, A3, A4$, et d'un point $B1$ sur le segment $[A1A2]$, on mesure les distances $A1B1$ et $A1A2$, on calcule le rapport qui servira de rapport pour toutes les homothéties suivantes : $B2$ est l'image de $A3$ par l'homothétie de centre $A2$, idem pour $B3, A3, A4$ puis $C1, B1, B2$; $C2, B2, B3$; $M, C1, C2$.

La droite $(C1C2)$ est tangente au lieu de M quand $B1$ varie.

3. Source virtuelle, front d'onde.

Dans le cas d'un miroir plan, les rayons émis à partir d'un point source S , après réflexion sur le miroir, concourent en le point S' symétrique de S . Si, pour une courbe réfléchissante plus générale, on construit le symétrique S_M de S par rapport à la tangente en un point M de la courbe, le point S_M décrit une courbe que nous appellerons source virtuelle. Cette courbe se déduit de la podaire de S relative à la courbe réfléchissante par une homothétie de centre S et de rapport 2.

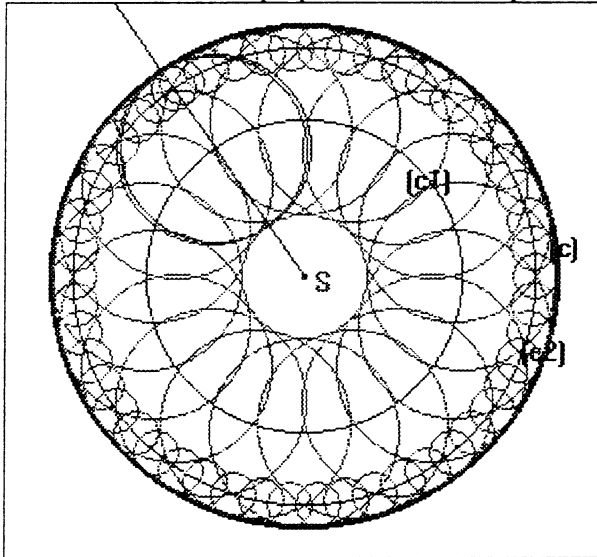
On peut reprendre chacune des constructions du paragraphe précédent et matérialiser la source virtuelle. Contentons-nous du cas le plus simple, avec le cercle :



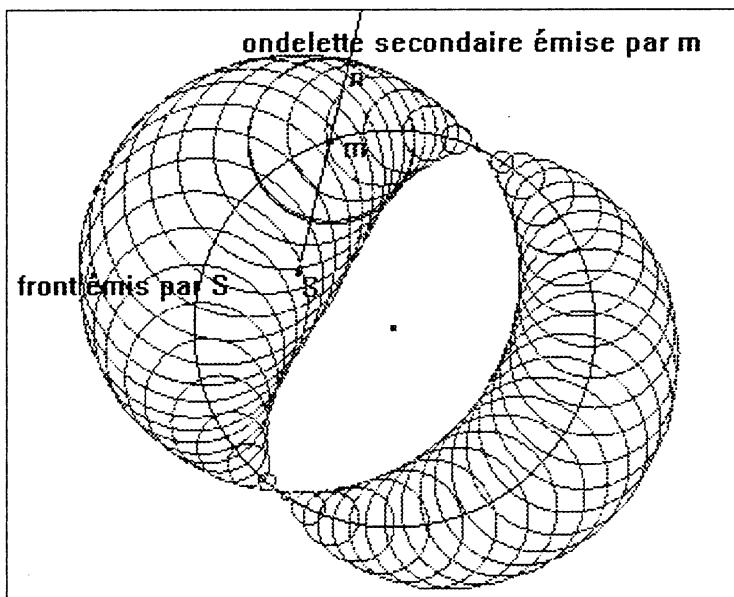
si nous matérialisons la droite $(S_M M)$ et sa perpendiculaire issue de S_M , cette dernière semble tangente à la source virtuelle. Après vérification (voir annexe 1), on en déduit que la caustique par réflexion est la développée de la source virtuelle, puisque les rayons réfléchis $(S_M M)$ sont normaux à celle-ci. Le chemin optique étant simplement la distance $S_M B$, les propriétés du cercle osculateur justifient qu'en général, si B est sur la développée, la distance $S_M B$ n'est pas un extremum local quand S_M varie (voir annexe 2). On a figuré ci-contre le cercle

centré en B , qui permet de constater que le chemin optique est localement un maximum. Si on déplace B sur le rayon réfléchi $(S_M M)$, on peut observer un minimum local, et à la transition entre les deux cas, lorsque B passe au centre de courbure, un point d'inflexion (en général).

Venons-en au modèle ondulatoire de Huygens : une source émet la lumière dans toutes les directions à une vitesse finie, et chaque point atteint se comporte à son tour comme une source secondaire

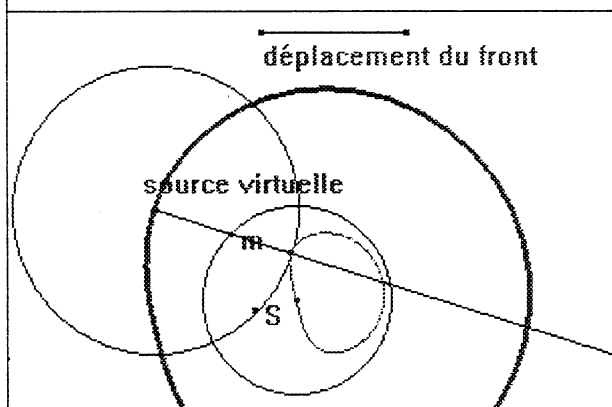


On a figuré ci-contre (voir [H] p 62 et 64) les ondes propagées à un instant donné à partir de deux familles de sources secondaires réparties sur deux cercles $(c1)$ et $(c2)$. Les ondes secondaires soulignent l'onde principale matérialisée par le cercle (c) qui enveloppe ces familles de cercles, et se brouillent partout ailleurs. Le front d'onde est le cercle (c) , et on peut considérer qu'il est atteint par des rayons rectilignes à partir de la source S , et qu'il se déplace suivant ces rayons, qui lui sont normaux. La situation sera plus variée après une réflexion (ou une réfraction) (voir [H] p 70 et 81) .

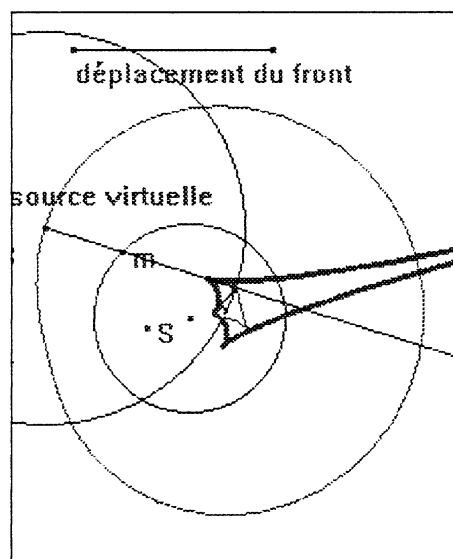
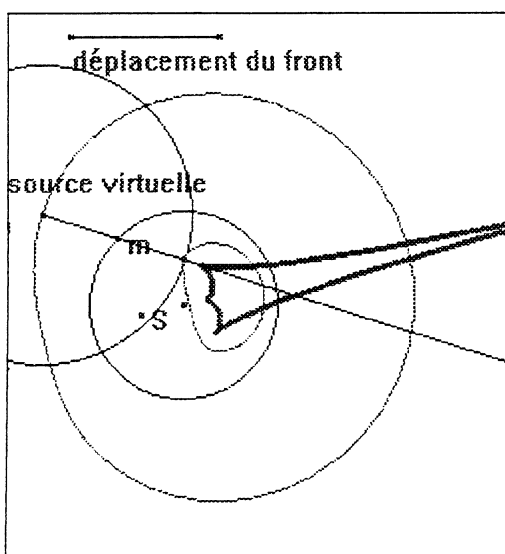


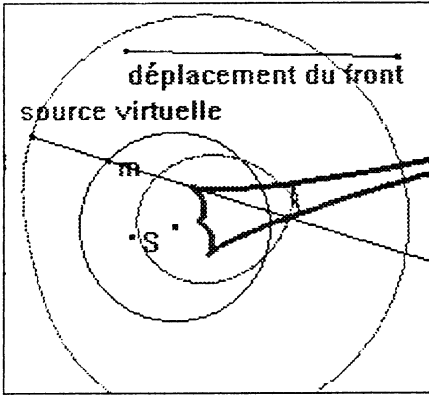
Reprenons la réflexion à partir d'une source S sur un cercle : on construit un point m sur ce cercle, la demi-droite [Sm) et un cercle centré en S (baptisé « front émis par S »). Ce front coupe la demi-droite [Sm) en un point n, et le cercle centré en m et passant par n matérialise l'ondelette secondaire émise par m. Le lieu de cette ondelette quand le point m varie souligne, outre le front émis par S, le front réfléchi. Il suffit de modifier le front émis par S pour suivre l'évolution du front réfléchi : en particulier, on le voit développer des points de rebroussement si le front est suffisamment avancé. En utilisant les constructions de podaires du paragraphe précédent, nous pouvons matérialiser le front réfléchi directement,

sans passer par les ondelettes secondaires :



à partir d'un point de la source virtuelle que l'on joint au point m correspondant sur le miroir par une demi-droite, on reporte (avec la commande compas) la longueur d'un segment mesurant le déplacement du front, ce qui donne un point p. Le lieu de p quand m varie donne le front après réflexion (si le déplacement du front est suffisamment important pour que la réflexion ait bien eu lieu). Si on matérialise en outre la développée de la source virtuelle, qui est aussi la caustique par réflexion, en faisant varier le déplacement du front, on voit les éventuelles singularités du front réfléchi coulisser le long de cette caustique (figure ci-après).





La caustique par réflexion sur le cercle à partir du point S a été soulignée par un trait plus épais. Le front réfléchi présente, pour le deuxième déplacement ci-dessus, trois points de rebroussement. L'adaptation aux autres configurations évoquées dans la récréation donne une belle variété de figures, qui cependant se contentent d'illustrer un unique type de métamorphose : voir [A] à ce sujet.

4. Si on ne se contente pas de jolis dessins...

Derrière les constructions proposées se profile un certain nombre d'interprétations, dont la plus importante est la notion de phase stationnaire, qui conduit à l'étude d'intégrales de la forme

$\int_a^b f(t) \exp\left(i \frac{g(t)}{\lambda}\right) dt$, où $g(t)$ mesure le chemin optique (depuis le point de la source virtuelle repéré par la

valeur t du paramètre, jusqu'au point d'observation) et la longueur d'onde λ peut être considérée comme un infiniment petit. Le développement asymptotique diverge d'autant plus rapidement que le nombre de dérivées de g qui s'annulent est élevé. On pourra consulter [F] pour le modèle géométrique, et Jean Dieudonné, Calcul infinitésimal, Hermann pages 131-136 pour les énoncés et preuves des résultats utiles.

D'autre part, en passant de la dimension deux à la dimension trois, les exigences techniques inhérentes à la géométrie différentielle s'élèvent rapidement. On pourra consulter Frédéric Pham, Géométrie et calcul différentiel sur les variétés, Dunod, pour voir les notions en situation. Pour obtenir des images représentatives des phénomènes étudiés, les logiciels « généralistes » (calcul symbolique, numérique et graphique) du type de Maple sont particulièrement bien adaptés.

Enfin, le formalisme inventé par Hamilton et Jacobi permet de fondre les modèles géométriques et ondulatoires dans la branche des mathématiques connue sous le nom de calcul des variations. Par exemple M. Giaquinta, S. Hildebrandt, Calculus of variations, Springer Verlag (2 tomes, environ 1200 pages...) permet certainement de se faire une idée précise du degré de sophistication de cette théorie, tout en appréciant les nombreuses références historiques.

Annexe 1

S est un point fixe. M est un point variable sur une courbe régulière C^2 , repéré par son abscisse curviligne s . $(M, \vec{t}, \vec{n})$ est le repère de Frénet, c désigne la courbure en M . P est le point symétrique de S par rapport à la tangente $(M, \vec{t})$.

P est caractérisé par $S\vec{P} = 2(\vec{SM} \cdot \vec{n})\vec{n}$ (1) ou encore $P\vec{M} = \vec{SM} - 2(\vec{SM} \cdot \vec{n})\vec{n}$ (2).

En dérivant la première relation par rapport à s , avec la deuxième formule de Frénet $\frac{d\vec{n}}{ds} = -c\vec{n}$, on obtient $\frac{d\vec{P}}{ds} = -2c((\vec{SM} \cdot \vec{t})\vec{n} + (\vec{SM} \cdot \vec{n})\vec{t})$, qui ne s'annule qu'avec la courbure, si le point S n'est pas situé sur la courbe.

On vérifie l'orthogonalité annoncée en calculant le produit scalaire :

$\frac{d\vec{P}}{ds} \cdot P\vec{M} = -2c((\vec{SM} \cdot \vec{t})(\vec{n} \cdot P\vec{M}) + (\vec{SM} \cdot \vec{n})(\vec{t} \cdot P\vec{M}))$. La relation (2) donne $\vec{n} \cdot P\vec{M} = -\vec{n} \cdot \vec{SM}$ et $\vec{t} \cdot P\vec{M} = \vec{t} \cdot \vec{SM}$, d'où la nullité du produit scalaire.

Annexe 2

B est un point fixe. M est un point variable sur une courbe régulière C^2 , repéré par son abscisse curviligne s . $(M, \vec{t}, \vec{n})$ est le repère de Frénet, c désigne la courbure en M .

On étudie les variations de la fonction $\Delta(s) = BM(s)^2$, dont les trois premières dérivées sont :

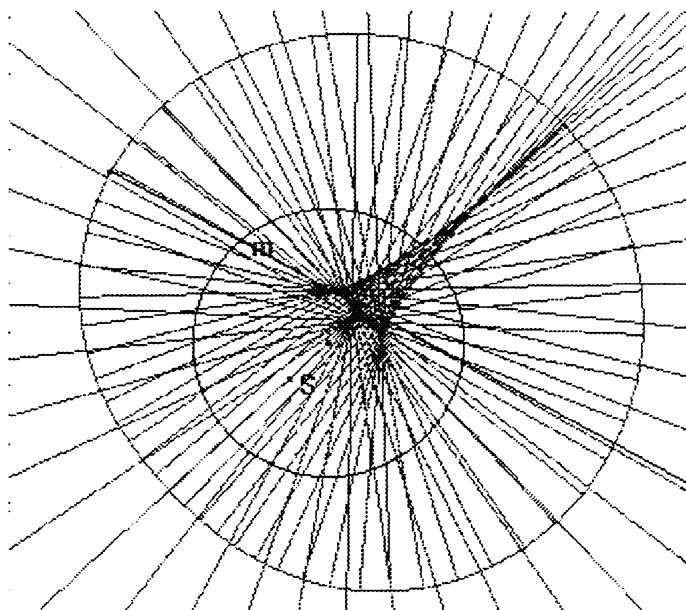
$$\begin{aligned} \Delta'(s) &= 2(\vec{BM}(s) \cdot \vec{t}(s)), & \Delta''(s) &= 2(1 + c(s)(\vec{BM}(s) \cdot \vec{n}(s))), \\ \Delta'''(s) &= 2(c'(s)(\vec{BM}(s) \cdot \vec{n}) - c(s)^2(\vec{BM}(s) \cdot \vec{t})). \end{aligned}$$

- a) Si la fonction Δ présente un extremum en un réel s_0 intérieur à l'intervalle d'étude, alors la dérivée première s'annule en s_0 , ce qui se traduit par l'appartenance de B à la normale $(M(s_0), \vec{n}(s_0))$. On supposera que B est ainsi disposé, c'est à dire qu'il existe λ tel que $M(s_0)\vec{B} = \lambda\vec{n}$.
- b) Sauf si B est situé au centre de courbure en $M(s_0)$, la fonction Δ présente un extremum local en s_0 (maximum si B est du même côté que $M(s_0)$ du centre de courbure, ou minimum dans l'autre cas).
- c) Dans le cas où B est situé au centre de courbure en $M(s_0)$, $\Delta'''(s_0) = -2 \frac{c'(s_0)}{c(s_0)}$, donc si la

dérivée de la courbure ne s'annule pas en s_0 , la fonction Δ présente un point d'inflexion en s_0 .

Remarque : $\left| \frac{\Delta'(s)}{2} \right|$ mesure la distance entre B et la normale $(M(s), \vec{n}(s))$. Dans le cas envisagé en

c), elle est de l'ordre de $(s-s_0)^2$, d'où une densité de traits plus importante au voisinage d'un tel point B . La développée de la source virtuelle est ainsi soulignée, et l'impression visuelle qui en résulte confirme (dans le cadre de l'optique géométrique, où les rayons lumineux sont considérés comme se propageant en ligne droite) la remarque finale du premier paragraphe.



Bibliographie

[M] Bernard Maitte, La lumière, 1981, Le Seuil (Points-Sciences, collection de poche)

[E] Ivar Ekeland, Le meilleur des mondes possibles, 2000, Le Seuil (Collection science ouverte)

Deux ouvrages passionnants retraçant, le premier l'aventure des théories de la lumière, le second le chemin difficile du principe de moindre action. L'un et l'autre permettent de mesurer la complexité des rapports entre expérimentation, imagination et logique.

[H] Christian Huygens, Traité de la lumière, 1992, Dunod

Ecrit en 1678, publié en 1690, l'auteur y expose, dans un langage entièrement géométrique, ses conceptions sur la nature ondulatoire de la lumière. La dernière phrase de sa préface est admirable de lucidité et d'humilité, surtout si l'on songe que les vues de Huygens ont plus de cent ans d'avance sur le développement de la science : « Enfin il reste bien plus à chercher touchant la nature de la Lumière, que je ne prétends d'en avoir découvert, et je devrai beaucoup de retour à celui qui pourra suppléer à ce qui me manque ici de connaissance. »

[F] Richard Feynman, Lumière et matière, une étrange histoire, 1987, Le Seuil (collection Points-Sciences)

Texte de conférences expliquant la notion de phase stationnaire, qui est au cœur du principe de Huygens et que Feynman transposa à la mécanique quantique.

[C] Roger Cuppens, Faire de la géométrie en jouant avec Cabri-Géomètre, brochures APMEP n°104 et 105

Indispensable pour découvrir que ce logiciel décuple le plaisir d'études géométriques.

[A] Vladimir Arnold, Catastrophe theory, 1992, Springer Verlag.

Petit livre abondamment illustré présentant, de manière informelle, les phénomènes les plus attrayants dans le domaine des métamorphoses de singularités des courbes et surfaces.

Réflexion à partir d'un exercice de géométrie posé en Première S.

Gildas LE HIR sur une idée de Patrick BARIL (lycée Jacques Prévert de Pont Audemer)

Problème :

Soit A et B deux points du plan, tracer plusieurs cercles passant par A et B.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. On choisit $A(-3 ; -2)$ et $B(7 ; 0)$.

Déterminer cinq cercles passant par A et B dont les coordonnées du centre sont entières et le rayon est un entier.

Le but avoué de l'enseignant posant cet exercice au niveau première, est d'utiliser la calculatrice et une programmation permettant d'obtenir éventuellement des réponses.

Soit ω le centre du cercle cherché, il doit appartenir à la médiatrice Δ de $[AB]$ dont une équation est facilement obtenue : $y = -5x + 9$.

Si I est milieu de $[AB]$, le rayon r du cercle de centre ω vérifie : $IA^2 + I\omega^2 = r^2$. Posons $\omega(x ; y)$, d'après ci-dessus avec $y = -5x + 9$, la condition précédente s'écrit : $26 + (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = r^2$, soit : $26 + (x - 2)^2 + (-5x + 9)^2 = r^2$, ou encore : $26(1 + (x - 2)^2) = r^2$.

Le problème peut se ramener, à l'aide d'un **programme sur calculatrice**, à déterminer des valeurs de x entières pour lesquelles $f(x) = \sqrt{26(1 + (x-2)^2)}$ soit également un entier.

Le principe est d'utiliser des boucles de 2 à n , et de tester par l'intermédiaire de $\text{int}(f(x)) = f(x)$, les valeurs à retenir (int étant la fonction partie entière).

La symétrie apparaissant sur l'écriture de $f(x)$ permet d'affirmer que si $x = p$ est solution, $x = 4 - p$ est une autre solution.

En faisant tourner la machine de 2 à 100, on décroche $x = 7$ (et donc $r = 26$), et c'est tout.

En faisant tourner la machine de 100 à 1000, on décroche $x = 517$ (et donc $r = 2626$), et c'est tout.

Après on est découragé, même en laissant tourner la machine plusieurs heures, rien ne sort de nouveau.

On a donc obtenu quatre solutions au problème posé, mais y en a-t-il d'autres ?

Une vision arithmétique du problème apporte des réponses plaisantes :

posons $n = x - 2$, l'équation cherchée s'écrit dans $\mathbb{N}$: $26(1 + n^2) = r^2$. Cela impose à l'évidence que 26 divise r^2 et donc divise r , posons $r = 26 \times d$, en simplifiant par 26, on obtient : $1 + n^2 = 26d^2$ que l'on peut écrire : $n^2 - 26d^2 = -1$.

On reconnaît alors une équation de **Pell Fermat**, dont on peut savoir qu'elle a une infinité de solutions (si on en a trouvé au moins une !) et que donc le problème posé admet bien cinq solutions (et plus...).

Pourquoi la machine a-t-elle tant de mal ?

Une démarche de résolution de cette équation est basée sur le développement en **fractions continues** de $\sqrt{26}$. Pour ce nombre particulier, le résultat est assez simple, en effet :

$$\sqrt{26} = \sqrt{25 + 1} = 5 + \frac{1}{a} \text{ donne : } \frac{1}{a} = \sqrt{26} - 5, \text{ soit : } a = \frac{1}{\sqrt{26} - 5} = \sqrt{26} + 5 = 10 + \frac{1}{a}.$$

On peut donc écrire successivement :

$$\sqrt{26} = 5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{a}} = 5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{a}}}}}}$$

On obtient ainsi le développement illimité en fractions continue de $\sqrt{26}$, que l'on note : $[5; \underline{10}]$ qui permet de donner des approximations de plus en plus précises de $\sqrt{26}$ par des rationnels :

$$\sqrt{26} \approx r_0 = \frac{5}{1} = \frac{p_0}{q_0} \text{ (bof !)}$$

$$\sqrt{26} \approx r_1 = 5 + \frac{1}{10} = \frac{51}{10} = \frac{p_1}{q_1}$$

$$\sqrt{26} \approx r_2 = 5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10}} = \frac{515}{101} = \frac{p_2}{q_2}$$

$$\sqrt{26} \approx r_3 = 5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10}}} = \frac{5201}{1020} = \frac{p_3}{q_3}$$

$$\sqrt{26} \approx r_4 = 5 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10 + \frac{1}{10}}}} = \frac{52525}{10301} = \frac{p_4}{q_4}$$

Quelques observations :

$$(p_0)^2 - 26(q_0)^2 = -1 \quad ; \quad (p_1)^2 - 26(q_1)^2 = 1 \quad ; \quad (p_2)^2 - 26(q_2)^2 = -1 \quad ;$$

$$(p_3)^2 - 26(q_3)^2 = 1 \quad ; \quad (p_4)^2 - 26(q_4)^2 = -1 \dots$$

On a donc décroché déjà trois solutions (qui en donnent donc six par symétrie au problème initial).

La machine aurait pu trouver la valeur suivant 527, d'après ci-dessus : $x = p_4 + 2 = 52527$. Le temps de calcul, avec un programme élémentaire est suffisamment long pour être découragé et éteindre la calculatrice pour ne pas épuiser les piles !

En suivant les notations introduites ci-dessus, on note $r_n = \frac{p_n}{q_n}$ le rationnel obtenu après n étapes de

fractions continues définissant $\sqrt{26}$ (r_n est appelé réduite de rang n de $\sqrt{26}$). Par construction de ces fractions continues, on a :

$$r_n - 5 = \frac{1}{10 + (r_{n-1} - 5)} \quad \text{d'où :} \quad \frac{p_n}{q_n} = 5 + \frac{1}{5 + \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} = \frac{26q_{n-1} + 5p_{n-1}}{5q_{n-1} + p_{n-1}}$$

On peut conjecturer que p_n et q_n sont premiers entre eux. D'après les premiers calculs cela est vérifié, supposons que p_{n-1} et q_{n-1} le soient, alors :

tout diviseur d commun à $(26q_{n-1} + 5p_{n-1})$ et à $(5q_{n-1} + p_{n-1})$ divise aussi :

$(26q_{n-1} + 5p_{n-1}) - 5 \times (5q_{n-1} + p_{n-1})$, soit q_{n-1} et aussi divise $5 \times q_{n-1} - (5q_{n-1} + p_{n-1})$, soit p_{n-1} .

Donc $d = 1$ et le résultat est obtenu par récurrence.

On peut même conclure que :

$$p_n = 26q_{n-1} + 5p_{n-1} \quad \text{et} \quad q_n = 5q_{n-1} + p_{n-1} .$$

En développant, on obtient alors :

$$p_n^2 - 26q_n^2 = -(p_{n-1}^2 - 26q_{n-1}^2) ,$$

comme $(p_0)^2 - 26(q_0)^2 = -1$, on peut affirmer que, pour tout entier naturel n :

$$p_n^2 - 26q_n^2 = (-1)^{n+1}$$

Les numérateur et dénominateur de r_n pour n impair apportent donc un couple solution de l'équation de Pell Fermat : $n^2 - 26d^2 = -1$.

Il y a donc effectivement une infinité de solutions au problème posé.

Commentaire :

Cette démarche se généralise aux équations de Pell Fermat du type : $n^2 - Nd^2 = -1$ (ou 1), lorsque N n'est pas un carré parfait. Le développement en fractions continues de $\sqrt{N}$ apporte par une démarche un peu similaire une résolution de cette équation. En particulier si $N = p^2 + 1$, la démarche est totalement calquée sur celle employée ci-dessus.

L'algorithme du nombre d'or.

1. Position du problème.

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, possédant un unique extremum $f(\alpha)$, $\alpha \in]a, b[$, et strictement monotone sur $[a, \alpha]$ et sur $[\alpha, b]$.

On ne connaît pas l'expression de $f(x)$ mais on sait déterminer expérimentalement $f(x)$ pour une valeur quelconque de x dans $[a, b]$.

Ce type de situation se rencontre en laboratoire : on étudie un phénomène dépendant d'une variable x , chaque valeur de $f(x)$ peut être obtenue par une mesure.

On souhaite déterminer une valeur approchée de α et de l'extremum $f(\alpha)$ en effectuant le moins de mesures possibles.

Une méthode naïve.

On découpe l'intervalle $[a, b]$ en cent intervalles de même longueur : $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{99}, b]$

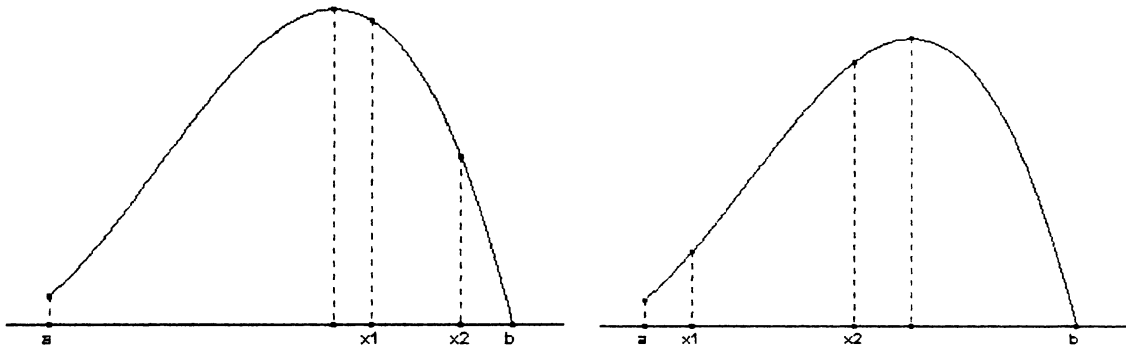
En au plus 99 mesures, c'est-à-dire les évaluations de $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{99})$, on obtient un encadrement de α de longueur $(b-a)/100$. On doit pouvoir faire mieux.

2. Réduction de l'intervalle.

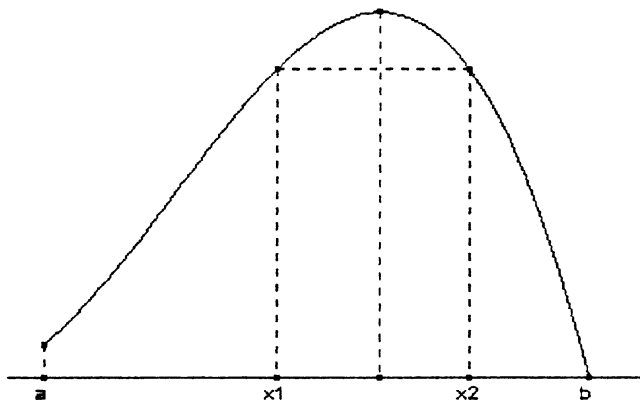
On suppose dans tout ce qui suit, que l'extremum cherché est un maximum.

Soient x_1 et x_2 tels que : $a < x_1 < x_2 < b$, alors :

$$f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow \alpha \notin [x_1, b] \text{ donc } \alpha \in [a, x_1] \quad f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow \alpha \notin [a, x_1] \text{ donc } \alpha \in [x_1, b]$$



Dans le cas particulier où $f(x_1) = f(x_2)$, on a $\alpha \in [a, x_2] \cap [x_1, b]$ c'est-à-dire $\alpha \in [x_1, x_2]$.



Donc après deux mesures, on peut réduire l'intervalle contenant α , à $[a, x_2]$ ou $[x_1, b]$.

En itérant ce processus on pourra donc réduire l'intervalle contenant α à un intervalle de longueur aussi petite que l'on veut.

Il suffit d'utiliser l'algorithme suivant, déterminant un encadrement de α de longueur ε :

```

Lire a, b et  $\varepsilon$ 
Répéter
    Choisir  $x_1, x_2$  tels que  $a < x_1 < x_2 < b$ 
    Si  $f(x_1) > f(x_2)$  alors  $b \leftarrow x_2$ 
        sinon  $a \leftarrow x_1$ 
Jusqu'à :  $b - a < \varepsilon$ 
Afficher a et b
    
```

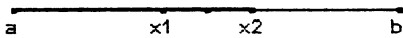
A chaque étape on effectue deux évaluations $f(x_1)$ et $f(x_2)$. Nous allons voir qu'un choix judicieux de x_1 et x_2 permet de n'effectuer qu'une seule évaluation à chaque étape.

Choix de x_1 et de x_2 .

On choisit x_1 et x_2 de sorte que :

- les segments $[a, x_2]$ et $[x_1, b]$ aient la même longueur : $x_2 - a = b - x_1$ c'est-à-dire x_1 et x_2 symétriques par rapport au milieu de l'intervalle $[a, b]$.
- la longueur de l'intervalle soit réduite d'une proportion constante à chaque étape
- à chaque étape (hormis pour l'étape initiale) une seule mesure supplémentaire soit nécessaire.

Etape 1



Etape 2



On réduit $[a, b]$ à $[a, x_2]$, (ou $[x_1, b]$),

la proportion est $\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_1}{b - a}$ par symétrie.

On effectue une nouvelle mesure en x_3 symétrique de x_1 par rapport au milieu de l'intervalle $[a, x_2]$, on réduit $[a, x_2]$ à $[a, x_1]$, (ou $[x_3, x_2]$),

la proportion est $\frac{x_1 - a}{x_2 - a} = \frac{x_2 - x_3}{x_2 - a}$ par symétrie.

On a donc : $\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{x_1 - a}{x_2 - a}$, notons k ce rapport, alors $\begin{cases} x_2 - a = k(b - a) \\ x_1 - a = k(x_2 - a) = k^2(b - a) \end{cases}$ or

$$x_1 - a = b - x_2 \text{ donc } x_1 - a = b - a + a - x_2 \Leftrightarrow k^2(b - a) = b - a - k(b - a) \Leftrightarrow k^2 = 1 - k$$

L'équation $k^2 + k - 1 = 0$ a pour solutions : $k = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ (exclu) ou $k = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} > 0$

k est l'inverse du nombre d'or, puisque : $\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{2(\sqrt{5} - 1)}{(\sqrt{5} + 1)(\sqrt{5} - 1)} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = k$

Alors x_1 et x_2 sont définis par : $\begin{cases} x_1 - a = \frac{1}{\varphi^2}(b - a) \\ x_2 - a = \frac{1}{\varphi}(b - a) \end{cases}$. De plus $x_1 - a = \frac{1}{\varphi}(x_2 - a)$ (1)

Le nouvel intervalle obtenu est : $[a, x_2]$ de longueur : $x_2 - a = \frac{1}{\varphi}(b - a)$, ou $[x_1, b]$ de longueur

$$\begin{aligned}
 b - x_1 &= b - a + a - x_1 = b - a - \frac{1}{\varphi^2}(b - a) = \left(1 - \frac{1}{\varphi^2}\right)(b - a) \\
 &= \frac{\varphi^2 - 1}{\varphi^2}(b - a) = \frac{\varphi + 1 - 1}{\varphi^2}(b - a) = \frac{1}{\varphi}(b - a) \text{ car } \varphi^2 = \varphi + 1
 \end{aligned}$$

Les segments $[a, x_2]$ et $[x_1, b]$ ont donc même longueur : x_1 et x_2 sont effectivement symétriques par rapport au milieu de $[a, b]$

L'inverse du nombre d'or "appliqué" deux fois au segment $[a, b]$ donne deux points x_1 et x_2 symétriques par rapport au milieu de $[a, b]$.

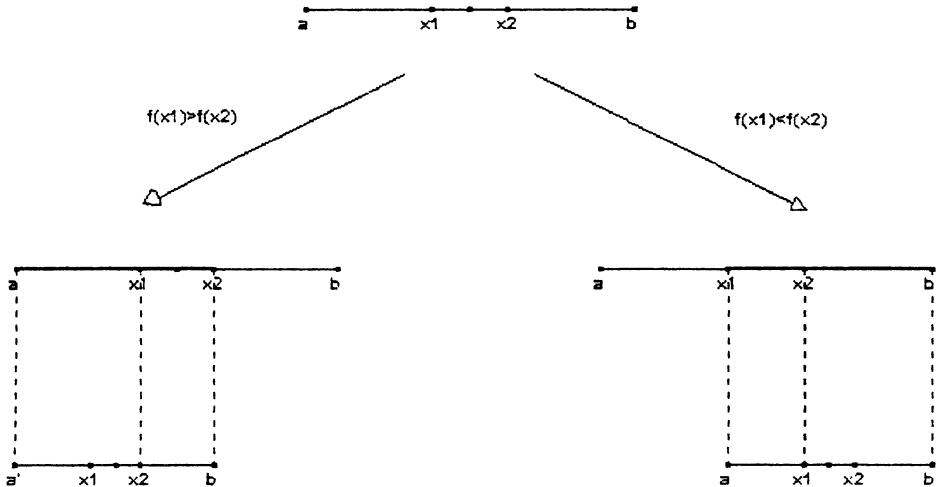
3. Algorithme du nombre d'or.

Résultat préliminaire : $x_2 = x_1 + \frac{1}{\varphi^2}(b - x_1)$ (2)

En effet :

$$\begin{aligned}
 x_1 + \frac{1}{\varphi^2}(b - x_1) &= a + (x_1 - a) + \frac{1}{\varphi^2}(x_2 - a) \text{ puisque } b - x_1 = x_2 - a \\
 &= a + \frac{1}{\varphi^2}(b - a) + \frac{1}{\varphi^3}(b - a) = a + \frac{\varphi + 1}{\varphi^3}(b - a) \\
 &= a + \frac{\varphi^2}{\varphi^3}(b - a) = a + \frac{1}{\varphi}(b - a) = x_2
 \end{aligned}$$

Principe de l'algorithme.



On se place dans l'intervalle $[a, x_2]$:	On se place dans l'intervalle $[x_1, b]$:
$b \leftarrow x_2$ $x_2 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi}(b - a) = a + \frac{1}{\varphi}(x_2 - a) = x_1$ d'après (1) $x_1 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi^2}(b - a) = a + \frac{1}{\varphi^2}(x_2 - a)$	$a \leftarrow x_1$ $x_1 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi^2}(b - a) = x_1 + \frac{1}{\varphi^2}(b - x_1) = x_2$ d'après (2) $x_2 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi}(b - a)$

Puis on itère ces instructions.
 L'algorithme peut alors s'écrire ainsi :

Lire a, b et ε

$$x_1 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi^2}(b - a)$$

$$x_2 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi}(b - a)$$

$$y_1 \leftarrow f(x_1)$$

$$y_2 \leftarrow f(x_2)$$

Répéter

Si $y_1 > y_2$ alors

$$b \leftarrow x_2$$

$$x_2 \leftarrow x_1$$

$$y_2 \leftarrow y_1^1$$

$$x_1 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi^2}(b - a)^2$$

$$y_1 \leftarrow f(x_1)$$

sinon

$$a \leftarrow x_1$$

$$x_1 \leftarrow x_2$$

$$y_1 \leftarrow y_2^3$$

$$x_2 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi}(b - a)^4$$

$$y_2 \leftarrow f(x_2)$$

Jusqu'à : $b - a < \varepsilon$
Afficher a et b

Performance de cet algorithme : en n étapes, on effectue $2+n-1=n+1$ évaluations, et on obtient un encadrement de α de longueur $\frac{1}{\varphi^n}(b - a)$.

Valeurs du coefficient de réduction $\frac{1}{\varphi^n}$ pour $1 \leq n \leq 9$:

n itérations	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{\varphi^n}$	0,618	0,382	0,236	0,146	0,090	0,056	0,034	0,021	0,013

Pour obtenir un encadrement de longueur ε, il suffit donc d'avoir :

$$\frac{1}{\varphi^n}(b - a) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \varphi^n \geq \frac{b - a}{\varepsilon} \Leftrightarrow n \geq \frac{\log(b - a) - \log \varepsilon}{\log \varphi}$$

¹ On ne recalcule pas $f(x_i)$.
² Ou bien : $x_2 \leftarrow a + \frac{1}{\varphi}(x_1 - a)$
³ On ne recalcule pas $f(x_2)$.
⁴ Ou bien : $x_1 \leftarrow a + \varphi(x_2 - a)$

Pour un intervalle $[a, b]$ de longueur 1, on obtient en prenant l'entier n par excès :

ε	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
n	5	10	15	20	24	29	34	39	44

4. Méthode de Fibonacci.

4.1 Problème dual.

Au lieu de chercher, à partir d'un intervalle initial donné $[a, b]$, le nombre d'évaluations nécessaires pour obtenir un encadrement de α de longueur ε , on va chercher le nombre d'évaluations et l'encadrement étant cette fois-ci donnés, le plus grand intervalle initial.

Notons D_n le plus grand intervalle *initial* permettant d'obtenir un encadrement de longueur 1, après n évaluations, c'est-à-dire $n-1$ itérations et notons u_n la longueur de cet intervalle.

On a : $u_0 = 1$ et aussi $u_1 = 1$ car il faut au moins deux évaluations pour réduire l'intervalle initial. Posons : $D_n = [a, b]$, on effectue deux évaluations en x_1 et x_2 tels que $a < x_1 < x_2 < b$.

Si $\alpha \in [a, x_1]$, alors puisqu'on a effectué deux évaluations il reste $(n-2)$ évaluations permettant d'obtenir un encadrement de longueur 1 à partir de $[a, x_1]$, donc : $[a, x_1] \subset D_{n-2}$

Si $\alpha \in [x_1, b]$, alors puisqu'on a effectué deux évaluations et que $x_2 \in [x_1, b]$, on peut réutiliser l'évaluation de $f(x_2)$, il reste $n-2+1 = n-1$ évaluations permettant d'obtenir un encadrement de longueur 1 à partir de $[x_1, b]$, donc : $[x_1, b] \subset D_{n-1}$

***On a alors : $[a, x_1] \cup [x_1, b] \subset D_{n-1} \cup D_{n-2}$ c'est-à-dire $D_n \subset D_{n-1} \cup D_{n-2}$ donc $u_n \leq u_{n-1} + u_{n-2}$. Alors l'intervalle D_n sera maximal si $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

La suite (u_n) est la suite de Fibonacci : il s'agit d'une suite définie par une relation de récurrence linéaire d'ordre 2, on sait alors que son terme général est donné par : $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$ où r_1 et r_2 sont les racines de l'équation caractéristique $r^2 = r + 1 \Leftrightarrow r^2 - r - 1 = 0$.

Alors $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda r_1 + \mu r_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{r_2 - 1}{r_2 - r_1} = \frac{-1 - \sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \mu = \frac{1 - r_1}{r_2 - r_1} = \frac{1 - \sqrt{5}}{-2\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

On obtient :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Réciproquement, partant d'un intervalle $[a, b]$, l'intervalle final obtenu après $n+1$ évaluations, aura pour longueur $\frac{1}{u_{n+1}}(b - a)$

De plus, cette méthode est optimale : on ne peut garantir dans tous les cas, un meilleur encadrement pour un même nombre d'évaluations⁵

⁵ Bien sûr, pour une fonction donnée, on peut toujours imaginer une meilleure méthode. Mais ceci est différent. "Il existe une meilleure méthode pour toutes les fonctions" n'est pas équivalent à "Pour toute fonction, il existe une meilleure méthode"

Valeurs du coefficient de réduction $\frac{1}{u_{n+1}}$ pour $1 \leq n \leq 9$:

n itérations	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\frac{1}{u_{n+1}}$	0,5	0,333	0,2	0,125	0,077	0,048	0,029	0,018	0,011

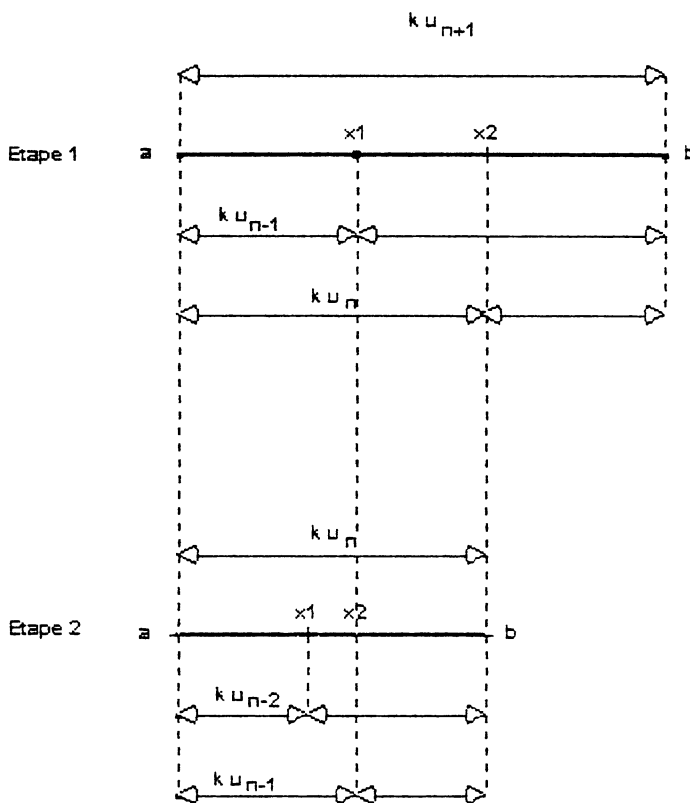
Ces valeurs sont inférieures à celles obtenues pour l'algorithme du nombre d'or.

4.2 Algorithme de Fibonacci.

On obtient un encadrement de longueur ε en n itérations (soit $n+1$ évaluations) si $\frac{1}{u_{n+1}}(b-a) \leq \varepsilon$

- A chaque étape, on choisit x_1 et x_2 de sorte que les segments $[a, x_1]$, $[x_1, b]$.et $[a, b]$ aient des longueurs proportionnelles à trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci

On note k le coefficient de proportionnalité.



1^{ère} étape.

On a $x_1 - a = ku_{n-1}$ $x_2 - a = ku_n$ et alors $b - x_1 = b - a + a - x_1 = ku_{n+1} - ku_{n-1} = ku_n = x_2 - a$
car $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, donc x_1 et x_2 sont symétriques par rapport au milieu de $[a, b]$.

De plus : $\frac{x_2 - a}{b - a} = \frac{b - x_1}{b - a} = \frac{u_n}{u_{n+1}}$ et $\frac{x_1 - a}{b - a} = \frac{b - x_2}{b - a} = \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}}$.

$$\text{Alors } \begin{cases} x_1 = a + \frac{u_{n-1}}{u_{n+1}}(b - a) \\ x_2 = a + \frac{u_n}{u_{n+1}}(b - a) \end{cases}$$

On réduit $[a, b]$ à $[a, x_2]$, (ou $[x_1, b]$).

2^{ème} étape : On se place dans le "nouvel" intervalle $[a, b]$, $b - a = ku_n$

Les nouvelles valeurs de x_1 et x_2 sont définies par :

$$x_1 - a = ku_{n-2} \quad x_2 - a = ku_{n-1} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_1 = a + \frac{u_{n-2}}{u_n} (b - a) \\ x_2 = a + \frac{u_{n-1}}{u_n} (b - a) \end{cases}$$

La valeur de x_2 ainsi définie est la valeur précédente de x_1

On peut encore remarquer que : $b - x_1 = b - a + a - x_1 = ku_n - ku_{n-2} = ku_{n-1} = x_2 - a$ car

$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$, donc x_1 et x_2 sont symétriques par rapport au milieu de $[a, b]$.

...

$i^{\text{ème}}$ étape : L' intervalle $[a, b]$ obtenu auparavant aura pour longueur $b - a = ku_{n+2-i}$

Les nouvelles valeurs de x_1 et x_2 sont définies par :

$$x_1 - a = ku_{n-i} \quad x_2 - a = ku_{n+1-i} \text{ c'est-à-dire } \begin{cases} x_1 = a + \frac{u_{n-i}}{u_{n+2-i}} (b - a) \\ x_2 = a + \frac{u_{n+1-i}}{u_{n+2-i}} (b - a) \end{cases}$$

x_1 et x_2 sont bien sûr symétriques par rapport au milieu de $[a, b]$ puisque

$b - x_1 = b - a + a - x_1 = ku_{n+2-i} - ku_{n-i} = ku_{n+1-i} = x_2 - a$ car $u_{n+2-i} = u_{n+1-i} + u_{n-i}$.

Le coefficient de réduction de l'intervalle est $\frac{u_{n+1-i}}{u_{n+2-i}}$

Finalement en n étapes, la longueur de l'intervalle final sera :

$$(b - a) \prod_{i=1}^n \frac{u_{n+1-i}}{u_{n+2-i}} = (b - a) \frac{u_n}{u_{n+1}} \cdot \frac{u_{n-1}}{u_n} \cdot \frac{u_{n-2}}{u_{n-1}} \dots \cdot \frac{u_2}{u_3} \cdot \frac{u_1}{u_2} = (b - a) \frac{u_1}{u_{n+1}} = \frac{b - a}{u_{n+1}}$$

L'algorithme est ici plus complexe que le précédent, car il faut d'abord déterminer le nombre d'itérations n que l'on devra réaliser. Il suffit de déterminer un entier (le plus petit) tel que

$$\frac{1}{u_{n+1}} (b - a) \leq \varepsilon \Leftrightarrow u_{n+1} \geq \frac{b - a}{\varepsilon}$$

Pour cela, on peut au choix :

- calculer les valeurs successives de u_n en utilisant l'expression du terme général :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

ou la formule de récurrence : $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ et les valeurs initiales $u_0 = u_1 = 1$,

- remarquer que $-1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ donc $-1 < \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} < 1$ et

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{\sqrt{5}} < -\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} < \frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{1}{2} \text{ d'où } -\frac{1}{2} < u_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} < \frac{1}{2}, \text{ or } u_n \text{ est un}$$

entier alors u_{n+1} est l'entier le plus proche de $\frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2}$. Pour obtenir $u_{n+1} \geq \frac{b - a}{\varepsilon}$, il suffit

$$\text{d'avoir } \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \frac{1}{2} \geq \frac{b - a}{\varepsilon} \Leftrightarrow \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \geq \sqrt{5} \left(\frac{b - a}{\varepsilon} + \frac{1}{2} \right).$$

On peut alors obtenir une valeur minimale de n et calculer u_{n-1}

L'algorithme peut alors s'écrire ainsi :

Lire a, b et ε
 $k \leftarrow 1$
 $u \leftarrow 1 \{ u_0 = 1 \}$
 $v \leftarrow 1 \{ u_1 = 1 \}$
Répéter

$t \leftarrow u$
 $u \leftarrow v$
 $v \leftarrow u + t$

ou

$v \leftarrow u + v$
 $u \leftarrow -u + v$

 $k \leftarrow k + 1$
Jusqu'à $u + v \geq \frac{b - a}{\varepsilon}$
 $x_1 \leftarrow a + \frac{u}{u + v}(b - a)$
 $x_2 \leftarrow a + \frac{v}{u + v}(b - a)$
 $y_1 \leftarrow f(x_1)$
 $y_2 \leftarrow f(x_2)$
Répéter

$t \leftarrow u$
 $u \leftarrow v - u$
 $v \leftarrow t$

ou

$u \leftarrow -u + v$
 $v \leftarrow -u + v$

Si $y_1 > y_2$ alors

$b \leftarrow x_2$
 $x_2 \leftarrow x_1$
 $y_2 \leftarrow y_1$
 $x_1 \leftarrow a + \frac{u}{u + v}(b - a)$
 $y_1 \leftarrow f(x_1)$

sinon

$a \leftarrow x_1$
 $x_1 \leftarrow x_2$
 $y_1 \leftarrow y_2$
 $x_2 \leftarrow a + \frac{v}{u + v}(b - a)$
 $y_2 \leftarrow f(x_2)$

Jusqu'à : $b - a < \varepsilon$

ou

$k \leftarrow k - 1$
jusqu'à $k = 0$

Afficher a et b

Calcul de u_{n+1}

u	v	k
u_0	u_1	1
u_1	$u_2 = u_0 + u_1$	2
u_3	$u_3 = u_1 + u_2$	3
...	...	...
u_{n-2}	$u_{n-1} = u_{n-3} + u_{n-2}$	$n-1$
u_{n-1}	$u_n = u_{n-2} + u_{n-1}$	n

Le test porte sur la valeur de $u + v = u_{n-1} + u_n = u_{n+1}$

On recalcule $u_{n-2}, u_{n-3}, u_{n-4}, \dots, u_1, u_0$ en utilisant la relation : $u_{n-2} = u_n - u_{n-1}$

L'algorithme de Fibonacci, est optimal et donc meilleur que celui du nombre d'or, mais il est plus complexe écrire, et le « gain » est faible : il suffit de regarder les tableaux donnant les valeurs du coefficient de réduction de l'intervalle pour un nombre donné d'itérations pour constater qu'avec une

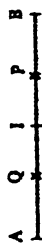
48

A propos de la suite de Fibonacci et des fractions continues :

Des activités pour le Professeur

Exercice 1

Soit (AB) un segment quelconque de milieu I .
Soit P un point quelconque de (AB) .
Construire le point Q symétrique de P autour de I .



Démontrer : $Q \in (AB)$

$$AQ = PB$$

$$QB = AP$$

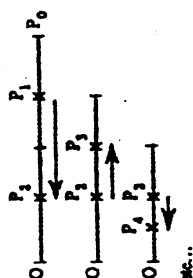
$$AB = AP + AQ$$

Peut-on avoir $Q = P$?

Nous dirons par la suite que Q est le symétrique de P sur le segment considéré.

Exercice 2

- 1) On se donne un point P_1 ($i = 1$) d'un segment $[OP_0]$.
- 2) On construit $P_{1,1}$ symétrique de P_1 sur le segment.
- 3) On coupe le segment en l'un des deux points P en ne conservant du segment que la partie contenant l'autre point.
- 4) Et on répète en 2) ..., tant que $P_{i+1} \neq P_i$ etc...



Que peut-il se passer ?

- I Illustration : pour un segment initial donné, choisir P_1 et construire $P_2, P_3, \dots, P_{10}$. Recommencer avec le même segment initial en modifiant la place de P_1 .
- II Démontrer que le choix arbitraire de la coupe du segment de chaque étape conduit à des situations identiques, à une isométrie près.
- III On cherche à matérialiser la situation : voici quelques plans de travail :

- 1- On suppose qu'il y a une étape quelconque, on a $P_{i+1} = P_i$. Démontrer que $x \in Q$. Étudier la réciproque. En déduire que la seule façon d'obtenir un algorithme "sans fin" est de choisir x irrationnel.
- 2- Soit x_1 l'abscisse du point P_1 . On cherche à quelles conditions sur x la suite $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ est strictement décroissante.
 - Démontrer $x_1 = x_2 - x_1$ avec les conditions initiales $x_0 = 1$ et $x_1 = x$.
 - Calculer en fonction de x les abscisses de $P_2, P_3, \dots, P_{10}$.
 - Démontrer que x est encadré par deux suites de rationnels définies par :

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_1 + b_1}{b_1 + 2b_1}, \text{ l'une strictement croissante avec les valeurs initiales } a_0 = 0, b_0 = 1, \text{ l'autre strictement décroissante, avec les valeurs initiales } a_0 = 1, b_0 = 1.$$

- Démontrer que ces rationnels $a_i = \frac{a_i}{b_i}$ sont définis par la relation $a_i = \frac{1}{1 + a_{i-1}}$, les uns avec $a_0 = 0$, les autres avec $a_0 = 1$.

- Démontrer que les rationnels a_i convergent à une suite finie d'abscisses strictement décroissantes (le dernier point P_n étant celui pour lequel $P_{n+1} = P_n$).

En déduire, par un passage à la limite, que l'inverse du Nombre d'Or est le seul irrationnel de $]1/2, 1[$ qui donne une suite d'abscisses strictement décroissantes.

- Étudier la fonction $f(x) = \frac{x+1}{x+2}$ sur $[0, 1]$. Tracer sa représentation graphique. Tracer la droite $y = x$. Résoudre $f(x) = x$. Justifier le choix de cette fonction par rapport à ce qui précède, et retrouver les résultats précédents.

3- Signification géométrique de l'écriture en fraction continue d'un rationnel entre 0 et 1.

$$\text{Soit } x = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \frac{1}{a_5 + \frac{1}{a_6 + \frac{1}{a_7 + \frac{1}{a_8 + \frac{1}{a_9 + \frac{1}{a_{10} + \frac{1}{a_{11} + \frac{1}{a_{12} + \frac{1}{a_{13} + \frac{1}{a_{14} + \frac{1}{a_{15} + \frac{1}{a_{16} + \frac{1}{a_{17} + \frac{1}{a_{18} + \frac{1}{a_{19} + \frac{1}{a_{20} + \frac{1}{a_{21} + \frac{1}{a_{22} + \frac{1}{a_{23} + \frac{1}{a_{24} + \frac{1}{a_{25} + \frac{1}{a_{26} + \frac{1}{a_{27} + \frac{1}{a_{28} + \frac{1}{a_{29} + \frac{1}{a_{30} + \frac{1}{a_{31} + \frac{1}{a_{32} + \frac{1}{a_{33} + \frac{1}{a_{34} + \frac{1}{a_{35} + \frac{1}{a_{36} + \frac{1}{a_{37} + \frac{1}{a_{38} + \frac{1}{a_{39} + \frac{1}{a_{40} + \frac{1}{a_{41} + \frac{1}{a_{42} + \frac{1}{a_{43} + \frac{1}{a_{44} + \frac{1}{a_{45} + \frac{1}{a_{46} + \frac{1}{a_{47} + \frac{1}{a_{48} + \frac{1}{a_{49} + \frac{1}{a_{50} + \frac{1}{a_{51} + \frac{1}{a_{52} + \frac{1}{a_{53} + \frac{1}{a_{54} + \frac{1}{a_{55} + \frac{1}{a_{56} + \frac{1}{a_{57} + \frac{1}{a_{58} + \frac{1}{a_{59} + \frac{1}{a_{60} + \frac{1}{a_{61} + \frac{1}{a_{62} + \frac{1}{a_{63} + \frac{1}{a_{64} + \frac{1}{a_{65} + \frac{1}{a_{66} + \frac{1}{a_{67} + \frac{1}{a_{68} + \frac{1}{a_{69} + \frac{1}{a_{70} + \frac{1}{a_{71} + \frac{1}{a_{72} + \frac{1}{a_{73} + \frac{1}{a_{74} + \frac{1}{a_{75} + \frac{1}{a_{76} + \frac{1}{a_{77} + \frac{1}{a_{78} + \frac{1}{a_{79} + \frac{1}{a_{80} + \frac{1}{a_{81} + \frac{1}{a_{82} + \frac{1}{a_{83} + \frac{1}{a_{84} + \frac{1}{a_{85} + \frac{1}{a_{86} + \frac{1}{a_{87} + \frac{1}{a_{88} + \frac{1}{a_{89} + \frac{1}{a_{90} + \frac{1}{a_{91} + \frac{1}{a_{92} + \frac{1}{a_{93} + \frac{1}{a_{94} + \frac{1}{a_{95} + \frac{1}{a_{96} + \frac{1}{a_{97} + \frac{1}{a_{98} + \frac{1}{a_{99} + \frac{1}{a_{100} + \frac{1}{a_{101} + \frac{1}{a_{102} + \frac{1}{a_{103} + \frac{1}{a_{104} + \frac{1}{a_{105} + \frac{1}{a_{106} + \frac{1}{a_{107} + \frac{1}{a_{108} + \frac{1}{a_{109} + \frac{1}{a_{110} + \frac{1}{a_{111} + \frac{1}{a_{112} + \frac{1}{a_{113} + \frac{1}{a_{114} + \frac{1}{a_{115} + \frac{1}{a_{116} + \frac{1}{a_{117} + \frac{1}{a_{118} + \frac{1}{a_{119} + \frac{1}{a_{120} + \frac{1}{a_{121} + \frac{1}{a_{122} + \frac{1}{a_{123} + \frac{1}{a_{124} + \frac{1}{a_{125} + \frac{1}{a_{126} + \frac{1}{a_{127} + \frac{1}{a_{128} + \frac{1}{a_{129} + \frac{1}{a_{130} + \frac{1}{a_{131} + \frac{1}{a_{132} + \frac{1}{a_{133} + \frac{1}{a_{134} + \frac{1}{a_{135} + \frac{1}{a_{136} + \frac{1}{a_{137} + \frac{1}{a_{138} + \frac{1}{a_{139} + \frac{1}{a_{140} + \frac{1}{a_{141} + \frac{1}{a_{142} + \frac{1}{a_{143} + \frac{1}{a_{144} + \frac{1}{a_{145} + \frac{1}{a_{146} + \frac{1}{a_{147} + \frac{1}{a_{148} + \frac{1}{a_{149} + \frac{1}{a_{150} + \frac{1}{a_{151} + \frac{1}{a_{152} + \frac{1}{a_{153} + \frac{1}{a_{154} + \frac{1}{a_{155} + \frac{1}{a_{156} + \frac{1}{a_{157} + \frac{1}{a_{158} + \frac{1}{a_{159} + \frac{1}{a_{160} + \frac{1}{a_{161} + \frac{1}{a_{162} + \frac{1}{a_{163} + \frac{1}{a_{164} + \frac{1}{a_{165} + \frac{1}{a_{166} + \frac{1}{a_{167} + \frac{1}{a_{168} + \frac{1}{a_{169} + \frac{1}{a_{170} + \frac{1}{a_{171} + \frac{1}{a_{172} + \frac{1}{a_{173} + \frac{1}{a_{174} + \frac{1}{a_{175} + \frac{1}{a_{176} + \frac{1}{a_{177} + \frac{1}{a_{178} + \frac{1}{a_{179} + \frac{1}{a_{180} + \frac{1}{a_{181} + \frac{1}{a_{182} + \frac{1}{a_{183} + \frac{1}{a_{184} + \frac{1}{a_{185} + \frac{1}{a_{186} + \frac{1}{a_{187} + \frac{1}{a_{188} + \frac{1}{a_{189} + \frac{1}{a_{190} + \frac{1}{a_{191} + \frac{1}{a_{192} + \frac{1}{a_{193} + \frac{1}{a_{194} + \frac{1}{a_{195} + \frac{1}{a_{196} + \frac{1}{a_{197} + \frac{1}{a_{198} + \frac{1}{a_{199} + \frac{1}{a_{200} + \frac{1}{a_{201} + \frac{1}{a_{202} + \frac{1}{a_{203} + \frac{1}{a_{204} + \frac{1}{a_{205} + \frac{1}{a_{206} + \frac{1}{a_{207} + \frac{1}{a_{208} + \frac{1}{a_{209} + \frac{1}{a_{210} + \frac{1}{a_{211} + \frac{1}{a_{212} + \frac{1}{a_{213} + \frac{1}{a_{214} + \frac{1}{a_{215} + \frac{1}{a_{216} + \frac{1}{a_{217} + \frac{1}{a_{218} + \frac{1}{a_{219} + \frac{1}{a_{220} + \frac{1}{a_{221} + \frac{1}{a_{222} + \frac{1}{a_{223} + \frac{1}{a_{224} + \frac{1}{a_{225} + \frac{1}{a_{226} + \frac{1}{a_{227} + \frac{1}{a_{228} + \frac{1}{a_{229} + \frac{1}{a_{230} + \frac{1}{a_{231} + \frac{1}{a_{232} + \frac{1}{a_{233} + \frac{1}{a_{234} + \frac{1}{a_{235} + \frac{1}{a_{236} + \frac{1}{a_{237} + \frac{1}{a_{238} + \frac{1}{a_{239} + \frac{1}{a_{240} + \frac{1}{a_{241} + \frac{1}{a_{242} + \frac{1}{a_{243} + \frac{1}{a_{244} + \frac{1}{a_{245} + \frac{1}{a_{246} + \frac{1}{a_{247} + \frac{1}{a_{248} + \frac{1}{a_{249} + \frac{1}{a_{250} + \frac{1}{a_{251} + \frac{1}{a_{252} + \frac{1}{a_{253} + \frac{1}{a_{254} + \frac{1}{a_{255} + \frac{1}{a_{256} + \frac{1}{a_{257} + \frac{1}{a_{258} + \frac{1}{a_{259} + \frac{1}{a_{260} + \frac{1}{a_{261} + \frac{1}{a_{262} + \frac{1}{a_{263} + \frac{1}{a_{264} + \frac{1}{a_{265} + \frac{1}{a_{266} + \frac{1}{a_{267} + \frac{1}{a_{268} + \frac{1}{a_{269} + \frac{1}{a_{270} + \frac{1}{a_{271} + \frac{1}{a_{272} + \frac{1}{a_{273} + \frac{1}{a_{274} + \frac{1}{a_{275} + \frac{1}{a_{276} + \frac{1}{a_{277} + \frac{1}{a_{278} + \frac{1}{a_{279} + \frac{1}{a_{280} + \frac{1}{a_{281} + \frac{1}{a_{282} + \frac{1}{a_{283} + \frac{1}{a_{284} + \frac{1}{a_{285} + \frac{1}{a_{286} + \frac{1}{a_{287} + \frac{1}{a_{288} + \frac{1}{a_{289} + \frac{1}{a_{290} + \frac{1}{a_{291} + \frac{1}{a_{292} + \frac{1}{a_{293} + \frac{1}{a_{294} + \frac{1}{a_{295} + \frac{1}{a_{296} + \frac{1}{a_{297} + \frac{1}{a_{298} + \frac{1}{a_{299} + \frac{1}{a_{300} + \frac{1}{a_{301} + \frac{1}{a_{302} + \frac{1}{a_{303} + \frac{1}{a_{304} + \frac{1}{a_{305} + \frac{1}{a_{306} + \frac{1}{a_{307} + \frac{1}{a_{308} + \frac{1}{a_{309} + \frac{1}{a_{310} + \frac{1}{a_{311} + \frac{1}{a_{312} + \frac{1}{a_{313} + \frac{1}{a_{314} + \frac{1}{a_{315} + \frac{1}{a_{316} + \frac{1}{a_{317} + \frac{1}{a_{318} + \frac{1}{a_{319} + \frac{1}{a_{320} + \frac{1}{a_{321} + \frac{1}{a_{322} + \frac{1}{a_{323} + \frac{1}{a_{324} + \frac{1}{a_{325} + \frac{1}{a_{326} + \frac{1}{a_{327} + \frac{1}{a_{328} + \frac{1}{a_{329} + \frac{1}{a_{330} + \frac{1}{a_{331} + \frac{1}{a_{332} + \frac{1}{a_{333} + \frac{1}{a_{334} + \frac{1}{a_{335} + \frac{1}{a_{336} + \frac{1}{a_{337} + \frac{1}{a_{338} + \frac{1}{a_{339} + \frac{1}{a_{340} + \frac{1}{a_{341} + \frac{1}{a_{342} + \frac{1}{a_{343} + \frac{1}{a_{344} + \frac{1}{a_{345} + \frac{1}{a_{346} + \frac{1}{a_{347} + \frac{1}{a_{348} + \frac{1}{a_{349} + \frac{1}{a_{350} + \frac{1}{a_{351} + \frac{1}{a_{352} + \frac{1}{a_{353} + \frac{1}{a_{354} + \frac{1}{a_{355} + \frac{1}{a_{356} + \frac{1}{a_{357} + \frac{1}{a_{358} + \frac{1}{a_{359} + \frac{1}{a_{360} + \frac{1}{a_{361} + \frac{1}{a_{362} + \frac{1}{a_{363} + \frac{1}{a_{364} + \frac{1}{a_{365} + \frac{1}{a_{366} + \frac{1}{a_{367} + \frac{1}{a_{368} + \frac{1}{a_{369} + \frac{1}{a_{370} + \frac{1}{a_{371} + \frac{1}{a_{372} + \frac{1}{a_{373} + \frac{1}{a_{374} + \frac{1}{a_{375} + \frac{1}{a_{376} + \frac{1}{a_{377} + \frac{1}{a_{378} + \frac{1}{a_{379} + \frac{1}{a_{380} + \frac{1}{a_{381} + \frac{1}{a_{382} + \frac{1}{a_{383} + \frac{1}{a_{384} + \frac{1}{a_{385} + \frac{1}{a_{386} + \frac{1}{a_{387} + \frac{1}{a_{388} + \frac{1}{a_{389} + \frac{1}{a_{390} + \frac{1}{a_{391} + \frac{1}{a_{392} + \frac{1}{a_{393} + \frac{1}{a_{394} + \frac{1}{a_{395} + \frac{1}{a_{396} + \frac{1}{a_{397} + \frac{1}{a_{398} + \frac{1}{a_{399} + \frac{1}{a_{400} + \frac{1}{a_{401} + \frac{1}{a_{402} + \frac{1}{a_{403} + \frac{1}{a_{404} + \frac{1}{a_{405} + \frac{1}{a_{406} + \frac{1}{a_{407} + \frac{1}{a_{408} + \frac{1}{a_{409} + \frac{1}{a_{410} + \frac{1}{a_{411} + \frac{1}{a_{412} + \frac{1}{a_{413} + \frac{1}{a_{414} + \frac{1}{a_{415} + \frac{1}{a_{416} + \frac{1}{a_{417} + \frac{1}{a_{418} + \frac{1}{a_{419} + \frac{1}{a_{420} + \frac{1}{a_{421} + \frac{1}{a_{422} + \frac{1}{a_{423} + \frac{1}{a_{424} + \frac{1}{a_{425} + \frac{1}{a_{426} + \frac{1}{a_{427} + \frac{1}{a_{428} + \frac{1}{a_{429} + \frac{1}{a_{430} + \frac{1}{a_{431} + \frac{1}{a_{432} + \frac{1}{a_{433} + \frac{1}{a_{434} + \frac{1}{a_{435} + \frac{1}{a_{436} + \frac{1}{a_{437} + \frac{1}{a_{438} + \frac{1}{a_{439} + \frac{1}{a_{440} + \frac{1}{a_{441} + \frac{1}{a_{442} + \frac{1}{a_{443} + \frac{1}{a_{444} + \frac{1}{a_{445} + \frac{1}{a_{446} + \frac{1}{a_{447} + \frac{1}{a_{448} + \frac{1}{a_{449} + \frac{1}{a_{450} + \frac{1}{a_{451} + \frac{1}{a_{452} + \frac{1}{a_{453} + \frac{1}{a_{454} + \frac{1}{a_{455} + \frac{1}{a_{456} + \frac{1}{a_{457} + \frac{1}{a_{458} + \frac{1}{a_{459} + \frac{1}{a_{460} + \frac{1}{a_{461} + \frac{1}{a_{462} + \frac{1}{a_{463} + \frac{1}{a_{464} + \frac{1}{a_{465} + \frac{1}{a_{466} + \frac{1}{a_{467} + \frac{1}{a_{468} + \frac{1}{a_{469} + \frac{1}{a_{470} + \frac{1}{a_{471} + \frac{1}{a_{472} + \frac{1}{a_{473} + \frac{1}{a_{474} + \frac{1}{a_{475} + \frac{1}{a_{476} + \frac{1}{a_{477} + \frac{1}{a_{478} + \frac{1}{a_{479} + \frac{1}{a_{480} + \frac{1}{a_{481} + \frac{1}{a_{482} + \frac{1}{a_{483} + \frac{1}{a_{484} + \frac{1}{a_{485} + \frac{1}{a_{486} + \frac{1}{a_{487} + \frac{1}{a_{488} + \frac{1}{a_{489} + \frac{1}{a_{490} + \frac{1}{a_{491} + \frac{1}{a_{492} + \frac{1}{a_{493} + \frac{1}{a_{494} + \frac{1}{a_{495} + \frac{1}{a_{496} + \frac{1}{a_{497} + \frac{1}{a_{498} + \frac{1}{a_{499} + \frac{1}{a_{500} + \frac{1}{a_{501} + \frac{1}{a_{502} + \frac{1}{a_{503} + \frac{1}{a_{504} + \frac{1}{a_{505} + \frac{1}{a_{506} + \frac{1}{a_{507} + \frac{1}{a_{508} + \frac{1}{a_{509} + \frac{1}{a_{510} + \frac{1}{a_{511} + \frac{1}{a_{512} + \frac{1}{a_{513} + \frac{1}{a_{514} + \frac{1}{a_{515} + \frac{1}{a_{516} + \frac{1}{a_{517} + \frac{1}{a_{518} + \frac{1}{a_{519} + \frac{1}{a_{520} + \frac{1}{a_{521} + \frac{1}{a_{522} + \frac{1}{a_{523} + \frac{1}{a_{524} + \frac{1}{a_{525} + \frac{1}{a_{526} + \frac{1}{a_{527} + \frac{1}{a_{528} + \frac{1}{a_{529} + \frac{1}{a_{530} + \frac{1}{a_{531} + \frac{1}{a_{532} + \frac{1}{a_{533} + \frac{1}{a_{534} + \frac{1}{a_{535} + \frac{1}{a_{536} + \frac{1}{a_{537} + \frac{1}{a_{538} + \frac{1}{a_{539} + \frac{1}{a_{540} + \frac{1}{a_{541} + \frac{1}{a_{542} + \frac{1}{a_{543} + \frac{1}{a_{544} + \frac{1}{a_{545} + \frac{1}{a_{546} + \frac{1}{a_{547} + \frac{1}{a_{548} + \frac{1}{a_{549} + \frac{1}{a_{550} + \frac{1}{a_{551} + \frac{1}{a_{552} + \frac{1}{a_{553} + \frac{1}{a_{554} + \frac{1}{a_{555} + \frac{1}{a_{556} + \frac{1}{a_{557} + \frac{1}{a_{558} + \frac{1}{a_{559} + \frac{1}{a_{560} + \frac{1}{a_{561} + \frac{1}{a_{562} + \frac{1}{a_{563} + \frac{1}{a_{564} + \frac{1}{a_{565} + \frac{1}{a_{566} + \frac{1}{a_{567} + \frac{1}{a_{568} + \frac{1}{a_{569} + \frac{1}{a_{570} + \frac{1}{a_{571} + \frac{1}{a_{572} + \frac{1}{a_{573} + \frac{1}{a_{574} + \frac{1}{a_{575} + \frac{1}{a_{576} + \frac{1}{a_{577} + \frac{1}{a_{578} + \frac{1}{a_{579} + \frac{1}{a_{580} + \frac{1}{a_{581} + \frac{1}{a_{582} + \frac{1}{a_{583} + \frac{1}{a_{584} + \frac{1}{a_{585} + \frac{1}{a_{586} + \frac{1}{a_{587} + \frac{1}{a_{588} + \frac{1}{a_{589} + \frac{1}{a_{590} + \frac{1}{a_{591} + \frac{1}{a_{592} + \frac{1}{a_{593} + \frac{1}{a_{594} + \frac{1}{a_{595} + \frac{1}{a_{596} + \frac{1}{a_{597} + \frac{1}{a_{598} + \frac{1}{a_{599} + \frac{1}{a_{600} + \frac{1}{a_{601} + \frac{1}{a_{602} + \frac{1}{a_{603} + \frac{1}{a_{604} + \frac{1}{a_{605} + \frac{1}{a_{606} + \frac{1}{a_{607} + \frac{1}{a_{608} + \frac{1}{a_{609} + \frac{1}{a_{610} + \frac{1}{a_{611} + \frac{1}{a_{612} + \frac{1}{a_{613} + \frac{1}{a_{614} + \frac{1}{a_{615} + \frac{1}{a_{616} + \frac{1}{a_{617} + \frac{1}{a_{618} + \frac{1}{a_{619} + \frac{1}{a_{620} + \frac{1}{a_{621} + \frac{1}{a_{622} + \frac{1}{a_{623} + \frac{1}{a_{624} + \frac{1}{a_{625} + \frac{1}{a_{626} + \frac{1}{a_{627} + \frac{1}{a_{628} + \frac{1}{a_{629} + \frac{1}{a_{630} + \frac{1}{a_{631} + \frac{1}{a_{632} + \frac{1}{a_{633} + \frac{1}{a_{634} + \frac{1}{a_{635} + \frac{1}{a_{636} + \frac{1}{a_{637} + \frac{1}{a_{638} + \frac{1}{a_{639} + \frac{1}{a_{640} + \frac{1}{a_{641} + \frac{1}{a_{642} + \frac{1}{a_{643} + \frac{1}{a_{644} + \frac{1}{a_{645} + \frac{1}{a_{646} + \frac{1}{a_{647} + \frac{1}{a_{648} + \frac{1}{a_{649} + \frac{1}{a_{650} + \frac{1}{a_{651} + \frac{1}{a_{652} + \frac{1}{a_{653} + \frac{1}{a_{654} + \frac{1}{a_{655} + \frac{1}{a_{656} + \frac{1}{a_{657} + \frac{1}{a_{658} + \frac{1}{a_{659} + \frac{1}{a_{660} + \frac{1}{a_{661} + \frac{1}{a_{662} + \frac{1}{a_{663} + \frac{1}{a_{664} + \frac{1}{a_{665} + \frac{1}{a_{666} + \frac{1}{a_{667} + \frac{1}{a_{668} + \frac{1}{a_{669} + \frac{1}{a_{670} + \frac{1}{a_{671} + \frac{1}{a_{672} + \frac{1}{a_{673} + \frac{1}{a_{674} + \frac{1}{a_{675} + \frac{1}{a_{676} + \frac{1}{a_{677} + \frac{1}{a_{678} + \frac{1}{a_{679} + \frac{1}{a_{680} + \frac{1}{a_{681} + \frac{1}{a_{682} + \frac{1}{a_{683} + \frac{1}{a_{684} + \frac{1}{a_{685} + \frac{1}{a_{686} + \frac{1}{a_{687} + \frac{1}{a_{688} + \frac{1}{a_{689} + \frac{1}{a_{690} + \frac{1}{a_{691} + \frac{1}{a_{692} + \frac{1}{a_{693} + \frac{1}{a_{694} + \frac{1}{a_{695} + \frac{1}{a_{696} + \frac{1}{a_{697} + \frac{1}{a_{698} + \frac{1}{a_{699} + \frac{1}{a_{700} + \frac{1}{a_{701} + \frac{1}{a_{702} + \frac{1}{a_{703} + \frac{1}{a_{704} + \frac{1}{a_{705} + \frac{1}{a_{706} + \frac{1}{a_{707} + \frac{1}{a_{708} + \frac{1}{a_{709} + \frac{1}{a_{710} + \frac{1}{a_{711} + \frac{1}{a_{712} + \frac{1}{a_{713} + \frac{1}{a_{714} + \frac{1}{a_{715} + \frac{1}{a_{716} + \frac{1}{a_{717} + \frac{1}{a_{718} + \frac{1}{a_{719} + \frac{1}{a_{720} + \frac{1}{a_{721} + \frac{1}{a_{722} + \frac{1}{a_{723} + \frac{1}{a_{724} + \frac{1}{a_{725} + \frac{1}{a_{726} + \frac{1}{a_{727} + \frac{1}{a_{728} + \frac{1}{a_{729} + \frac{1}{a_{730} + \frac{1}{a_{731} + \frac{1}{a_{732} + \frac{1}{a_{733} + \frac{1}{a_{734} + \frac{1}{a_{735} + \frac{1}{a_{736} + \frac{1}{a_{737} + \frac{1}{a_{738} + \frac{1}{a_{739} + \frac{1}{a_{740} + \frac{1}{a_{741} + \frac{1}{a_{742} + \frac{1}{a_{743} + \frac{1}{a_{744} + \frac{1}{a_{745} + \frac{1}{a_{746} + \frac{1}{a_{747} + \frac{1}{a_{748} + \frac{1}{a_{749} + \frac{1}{a_{750} + \frac{1}{a_{751} + \frac{1}{a_{752} + \frac{1}{a_{753} + \frac{1}{a_{754} + \frac{1}{a_{755} + \frac{1}{a_{756} + \frac{1}{a_{757} + \frac{1}{a_{758} + \frac{1}{a_{759} + \frac{1}{a_{760} + \frac{1}{a_{761} + \frac{1}{a_{762} + \frac{1}{a_{763} + \frac{1}{a_{764} + \frac{1}{a_{765} + \frac{1}{a_{766} + \frac{1}{a_{767} + \frac{1}{a_{768} + \frac{1}{a_{769} + \frac{1}{a_{770} + \frac{1}{a_{771} + \frac{1}{a_{772} + \frac{1}{a_{773} + \frac{1}{a_{774} + \frac{1}{a_{775} + \frac{1}{a_{776} + \frac{1}{a_{777} + \frac{1}{a_{778} + \frac{1}{a_{779} + \frac{1}{a_{780} + \frac{1}{a_{781} + \frac{1}{a_{782} + \frac{1}{a_{783} + \frac{1}{a_{784} + \frac{1}{a_{785} + \frac{1}{a_{786} + \frac{1}{a_{787} + \frac{1}{a_{788} + \frac{1}{a_{789} + \frac{1}{a_{790} + \frac{1}{a_{791} + \frac{1}{a_{792} + \frac{1}{a_{793} + \frac{1}{a_{794} + \frac{1}{a_{795} + \frac{1}{a_{796} + \frac{1}{a_{797} + \frac{1}{a_{798} + \frac{1}{a_{799} + \frac{1}{a_{800} + \frac{1}{a_{801} + \frac{1}{a_{802} + \frac{1}{a_{803} + \frac{1}{a_{804} + \frac{1}{a_{805} + \frac{1}{a_{806} + \frac{1}{a_{807} + \frac{1}{a_{808} + \frac{1}{a_{809} + \frac{1}{a_{810} + \frac{1}{a_{811} + \frac{1}{a_{812} + \frac{1}{a_{813} + \frac{1}{a_{814} + \frac{1}{a_{815} + \frac{1}{a_{816} + \frac{1}{a_{817} + \frac{1}{a_{818} + \frac{1}{a_{819} + \frac{1}{a_{820} + \frac{1}{a_{821} + \frac{1}{a_{822} + \frac{1}{a_{823} + \frac{1}{a_{824} + \frac{1}{a_{825} + \frac{1}{a_{826} + \frac{1}{a_{827} + \frac{1}{a_{828} + \frac{1}{a_{829} + \frac{1}{a_{830} + \frac{1}{a_{831} + \frac{1}{a_{832} + \frac{1}{a_{833} + \frac{1}{a_{834} + \frac{1}{a_{835} + \frac{1}{a_{836} + \frac{1}{a_{837} + \frac{1}{a_{838} + \frac{1}{a_{839} + \frac{1}{a_{840} + \frac{1}{a_{841} + \frac{1}{a_{842} + \frac{1}{a_{843} + \frac{1}{a_{844} + \frac{1}{a_{845} + \frac{1}{a_{846} + \frac{1}{a_{847} + \frac{1}{a_{848} + \frac{1}{a_{849} + \frac{1}{a_{850} + \frac{1}{a_{851} + \frac{1}{a_{852} + \frac{1}{a_{853} + \frac{1}{a_{854} + \frac{1}{a_{855} + \frac{1}{a_{856} + \frac{1}{a_{857} + \frac{1}{a_{858}$$

- Préciser deux valeurs x_1 et x_2 telles que $a < x_1 < x_2 < b$ et mesurons $f(x_1)$ et $f(x_2)$.
- Si $f(x_1) > f(x_2)$, $\bar{x}$ est forcément sur $]a, x_2]$
 - Sinon, il est sur $[x_1, b]$.

Donc les deux cas, on a réduit l'intervalle de recherche à un intervalle plus petit, sur lequel on a déjà fait une mesure. Le choix d'une symétrie entre x_1 et x_2 sur $[a, b]$ permet de fondre les deux situations en une seule. On peut alors réduire le processus sur l'intervalle réduit ... tant que la précision ϵ voulue n'est pas atteinte. A noter que une seule valeur x_1 ne permet pas de réduire l'intervalle ! Le lien avec l'exercice 2 est évident. L'expliquer.

d) Soit P la suite de Fibonacci, définie par $P_0 = 0, P_1 = 1, P_i = P_{i-2} + P_{i-1}$.

- Montrer que les q_i de l'exercice 2 sont les quotients de deux termes consécutifs de P .
- En déduire que les q_i constituent la stratégie optimale cherchée, en prenant les valeurs vérifiant :

Precision	Nombre de mesures	abscisse x de P_i
$\epsilon = \frac{1}{P_{n+2}}$	n	sur $[0, 1]$ sur $[a, b]$
		$\frac{P_{n+1}}{P_{n+2}}$ $\frac{P_{n+1}}{P_{n+2}}$ $a + \frac{P_{n+1}}{P_{n+2}}(b-a)$

• Montrer que l'abscisse de P_2 sur $[0, 1]$ est $\frac{P_1}{P_3}$.

• Vérifier les nombres significatifs ci-contre, qui donnent le nombre de mesures à faire pour une précision donnée.

(On prend P_{n+2} le plus voisin de ϵ).

ϵ	n
décimales	4
centimés	9
millimés	14
micromés	29

e) Écrire l'algorithme explicite de l'algorithme.

f) Application : On cherche sur $[0, 1]$ le minimum de f avec une approximation de $\bar{x}$ de l'ordre de centimes, sachant qu'on obtient les résultats suivants :

$$f(x_1) < f(x_2) ; f(x_2) < f(x_3) ; f(x_3) < f(x_4) ; f(x_4) < f(x_5) ; f(x_5) < f(x_6) ; f(x_6) < f(x_7) ; f(x_7) < f(x_8) ; f(x_8) < f(x_9) ; f(x_9) < f(x_{10})$$

Construire une représentation graphique possible. Quelle est la valeur de $\bar{x}$?

g) Inverser une fonction définie par une expression littérale, et répondre aux hypothèses 2 et 3.

- Calculer $\bar{x}$ par un calcul différentiel.

- On se fixe $\epsilon = \frac{1}{1000}$. Déterminer, par exemple avec une calculatrice, les valeurs successives de $x_1, x_2, \dots, x_{14}$. Comparer les résultats.

De nombreux problèmes de ce type se rencontrent en laboratoire, mais aussi dans l'industrie, et même en économie. Pour ceux que l'algorithme intéresse, on peut faire des comparaisons avec l'algorithme de dichotomie (qui est optimal), mais s'appliquant à une autre classe de problèmes. Il y a, il faut, mettre à réflexion ... rien en exercice.

En résumé, les rationnels q_i sont les seuls donnant une suite finie de points d'abscisses strictement décroissantes, en quantités minimales, et tels que le dernier point soit d'abscisse minimale.

En dehors du fait que l'on retrouve les liens directs entre Nombre d'Or, suite de Fibonacci, développement en fractions continues, quel est l'intérêt de l'exercice précédent ? On avait tout de même vu que ces notions sont primaires, on n'est qu'un lauréat classique. Mais que l'algorithmique ait disparu de nos programmes - et certains le regretent - il existe des applications actuelles de ces notions, dont voici un exemple, comme parfois sous le nom d'algorithme de minimax.

Exercice 3 :

Soit f une fonction d'une variable x , définie sur l'intervalle $[a, b]$. On se place dans les hypothèses suivantes :

1. On ne connaît pas l'expression de $f(x)$.
2. Pour tout x de $[a, b]$, on sait déterminer $f(x)$.
3. On suppose de plus :
 - que f est continue sur $[a, b]$
 - que f possède sur $[a, b]$ un extremum unique ($\bar{x}$) avec $a < \bar{x} < b$.

Une telle situation est fréquente en laboratoire : expérimentalement, on étudie un phénomène dépendant d'un certain nombre de paramètres, qu'on fixe empiriquement sur un seul d'entre eux, x , ce qui détermine la fonction. En général, on ne sait pas exprimer $f(x)$ par une expression littérale (hypothèse 1) ou qui existerait sous forme mathématique (cf. l'hypothèse 2) se concrétise par des expériences (choix de $x_i \in]a, b[$, mesure de $f(x_i)$). L'hypothèse 3 est inutile, l'intervalle d'étude des variations de x étant, si nécessaire, réduit suffisamment pour garantir l'existence d'un unique extremum.

Le problème posé est le suivant : Comment déterminer ($\bar{x}$) à moindre coût ? Il s'agit en fait d'un double problème :

- Toute mesure expérimentale fournit un résultat dépendant de la précision des appareils de mesure, donc la valeur de $\bar{x}$ est toujours obtenue à une certaine approximation connue à l'avance par exemple, de l'ordre de $1/10$ ou $1/100$, ou $1/1000$, ...
- Pour minimiser le coût, il faut minimiser le nombre de mesures à faire $[x_i, f(x_i)]$. Le choix des x_i sur $]a, b[$ est un problème de stratégie, qui doit pouvoir s'appliquer à toutes les situations, même les plus défavorables.

Ex : pour trouver $\bar{x}$ au centième près, on découpe l'intervalle en 100, et on fait au plus 99 mesures $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{99})$. Cette stratégie a-t-elle pas performante !

Existe-t-il une stratégie optimale ? (on se souvient que l'abscisse du nombre n des mesures se généralise une précision ϵ donnée). Si oui, laquelle ?

La réponse est oui, et l'explicitation de la stratégie s'appuie sur les résultats de l'exercice 2. Voici quelques plans de travail, ou a déduits le nombre de mesures et ϵ la précision.

a) Inverse une stratégie meilleure que la précédente, en 30 mesures max (avec $\epsilon = \frac{1}{100}$).

b) Si on s'impose $n = 1$, il faut prendre le point $\bar{x} = \frac{a+b}{2}$ pour obtenir la plus

grande précision $\left(\epsilon = \frac{b-a}{2}\right)$. On suppose dans la suite que $a > 1$.

c) Supposons pour fixer les idées que $f(x)$ est maximum sur $]a, b[$.

