

A PROPOS DU TEXTE DE DEMONSTRATION TIRE DES EXERCICES DE GEOMETRIE

de F. G.-M.

Jean-Yves Hély

Dans une édition *originale* (F. G.-M., 1912, 5ème édition, page 244), il est fait mention d'un livre d'Exercices de Géométrie de P. ANDRE.

→ Voici d'abord le texte de l'énoncé de F. G.-M..

Théorème 55

522 - Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés de la figure, une des diagonales du parallélogramme se trouve divisée en trois parties égales (P. ANDRE, Exercices de Géométrie).

→ Voici ensuite l'énoncé et la solution extraits des Exercices de Géométrie de P. ANDRE (3ème édition, non datée*, page 19).

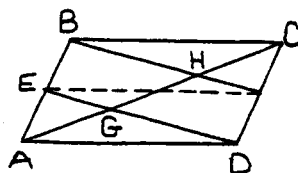
* On peut situer cette édition vers 1880.

50 - Si E et F sont les milieux des côtés opposés AB et CD d'un parallélogramme ABCD, les droites BF et ED divisent la diagonale AC en trois parties égales.

On aura $AG = GH = CH$.

En effet, la figure DEBF dans laquelle les deux côtés opposés BE, DF sont égaux et parallèles est un parallélogramme.

Par suite les deux côtés opposés BF, ED sont parallèles.



Or, dans le triangle CGD, la droite FH menée par le milieu F de CD et parallèlement à GD passe par le milieu H de CG (ex. 49) et l'on a $CH = GH$.

On a de même $AG = GH$.

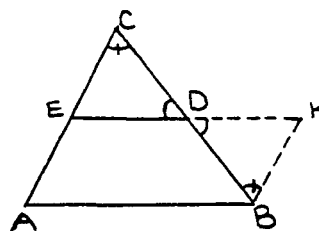
Donc $AG = GH = CH$.

Pour éclaircissement, voici l'énoncé de l'exercice 49.

49 - Dans tout triangle, la droite qui joint les milieux de deux côtés est :

- 1) parallèle au troisième
- 2) égale à la moitié

Soit ED une droite qui joint les milieux des côtés AC , BC du triangle ACB ; on aura ED parallèle à AB et égale à la moitié.



Pour le démontrer, je mène par le point B , BK parallèle à AC et je prolonge ED jusqu'en K .

Les deux triangles DCE , BDK sont égaux comme ayant un côté égal ($CD = BD$) adjacent à deux angles égaux, les angles en D comme opposés par le sommet et les deux autres angles comme alternes-internes.

Il en résulte l'égalité : $BK = CE = AE$.

Le quadrilatère $ABKE$ ayant deux côtés opposés, AE , BK , égaux et parallèles, est un parallélogramme ; par suite, les côtés opposés AB , EK sont égaux et parallèles.

Or, $ED = DK$ à cause de l'égalité des triangles CDE , BDK . Donc $AB = 2DE$.

Ainsi, DE est parallèle à AB et égale à sa moitié.

Remarque : Par un point D on ne peut mener qu'une parallèle à une droite AB . De ce qui précède, on déduit donc que toute droite DE menée par le milieu D du côté BC et parallèlement au côté AB dans un triangle ABC partage le côté CA en deux parties égales, et est la moitié de AB .

Ceci m'amène à faire quelques remarques sur le texte de l'énoncé ainsi que sur la solution de l'exercice 50 de P. ANDRE.

Sur l'énoncé

P. ANDRE nomme les points de la figure, exceptés G et H , alors que F. G.-M. n'en nomme aucun.

L'énoncé commence par le mot "Si..." pour bien indiquer quelles sont les données.

La deuxième partie de l'énoncé, après la virgule, est en fait la conclusion.

Ainsi, les deux énoncés (celui de F. G.-M. et celui de P. ANDRE) sont rédigés sur le même modèle et ne comportent qu'une seule phrase.

Sur la solution

La première ligne et la dernière ligne sont presque identiques. P. ANDRE commence par énoncer la conclusion en employant un verbe au futur ("on aura") pour bien montrer que la propriété n'est pas encore démontrée.

Les points G et H , dont on parle, ne sont définis que d'après le dessin. Le rôle de la figure est implicite mais essentiel.

La démonstration proprement dite comporte trois phrases dont l'une, la dernière, est d'une structure plus complexe. Deux de ces phrases commencent par des locutions adverbiales ("en effet", "par suite") alors que la troisième commence par la conjonction "Or".

Après avoir démontré que $CH = GH$, P. ANDRE affirme : "On a de même $AG = GH$ ". Il emploie donc ici une nouvelle locution adverbiale pour indiquer qu'il fait une comparaison de raisonnement.

P. ANDRE commence la conclusion par "donc" pour bien montrer que maintenant la propriété est bien démontrée.

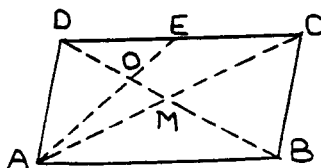
Dans la démonstration, P. ANDRE utilise beaucoup la notion de milieu et, en particulier, le théorème des milieux.

On peut noter que F. G.-M. a employé des expressions analogues, à savoir : "en effet", "de même", "donc".

- La démonstration de la propriété énoncée par F. G.-M. figure aussi dans un livre d'Exercices de Géométrie rédigé par une équipe de Professeurs (Edition de 1975, page 173, Edition LIGEL).
Voici l'énoncé et la solution proposés dans ce livre.

529 - On donne un parallélogramme ABCD. On joint le point A au milieu E du côté CD. La droite AE coupe la diagonale BD en un point O.

Démontrer que $OD = \frac{DB}{3}$.



En effet, AE et MD sont les médianes du triangle ACD.

Donc : $OD = \frac{2}{3} MD = \frac{1}{3} DB$.

Dans cet énoncé, il est seulement demandé de démontrer que $OD = \frac{DB}{3}$.

Le fait que la droite CF, avec F milieu du segment AB, coupe la diagonale BD en un point K tel que $BK = \frac{DB}{3}$ n'est pas envisagé ici.

La démonstration comporte une phrase unique qui fait appel à une seule notion. En effet, les auteurs utilisent uniquement les propriétés des médianes d'un triangle.

Cette démonstration est semblable à la première démonstration proposée par F. G.-M..

On peut tout de même se demander pourquoi les auteurs disent : "AE et MD sont les médianes..." ; peut-être ne considèrent-ils que les médianes tracées sur la figure (?)

On peut noter aussi que l'énoncé comporte quatre phrases, toutes assez courtes, ce qui les différencie des énoncés de F. G.-M. et de P. ANDRE.

→ D'autres textes du même exercice peuvent être trouvés dans des livres de cours.
En voici quelques-uns, mais sans les démonstrations.

- Texte de l'énoncé tiré du Cours de Géométrie de Félicien GIROD (1883, 3ème édition, page 55) :

55 - Les droites qui joignent deux sommets opposés d'un parallélogramme au milieu des côtés opposés divisent la diagonale qui joint les deux autres sommets en trois parties égales.

- Texte de l'énoncé tiré du Cours abrégé de Géométrie Élémentaire de E. COMBETTE (1898, page 55) :

55 - Si l'on joint les milieux E, F des côtés AB et CD d'un parallélogramme aux sommets D et B, ces droites partageront la diagonale AC en trois parties égales.

- Texte de l'énoncé tiré des Eléments de Géométrie de F.J. (1927, page 35) :

35 - Lorsqu'on joint deux sommets opposés d'un parallélogramme aux points milieux de deux côtés opposés, une des diagonales se trouve divisée en trois parties égales.

On peut remarquer que cet énoncé est presque le même que celui de F. G.-M..
Il manque juste les deux expressions "de la figure" et "du parallélogramme".

Pour terminer, je voudrais montrer la figure accompagnant la démonstration de F. G.-M. parue dans l'édition originale datée de 1912.

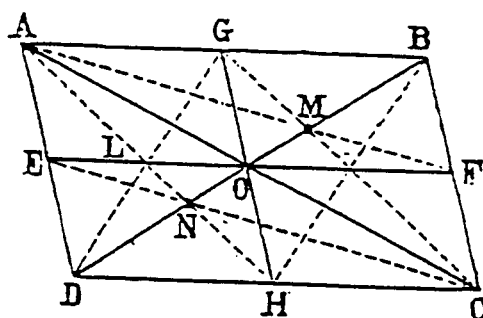


Fig. 329.

On peut y voir que le segment GH est tracé sur cette figure n°329 et que six droites sont tracées en pointillé.

Il me semble que cela donne une figure plus scolaire que celle qui accompagnait le document distribué le jour du colloque de Rennes.