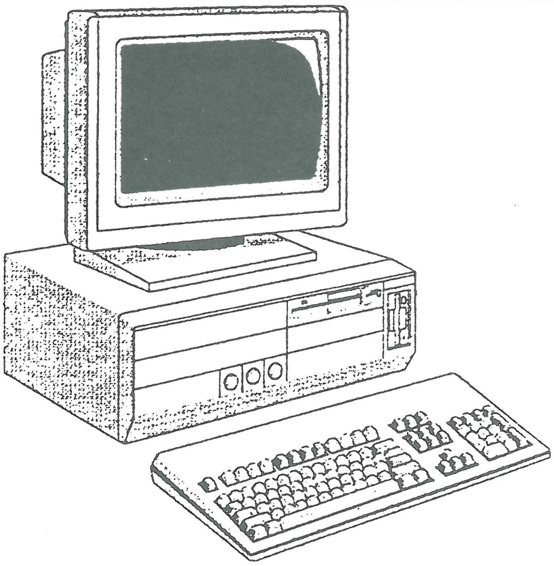
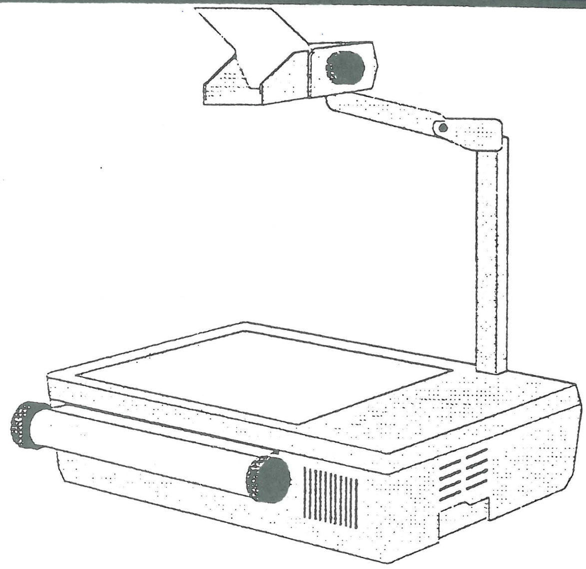
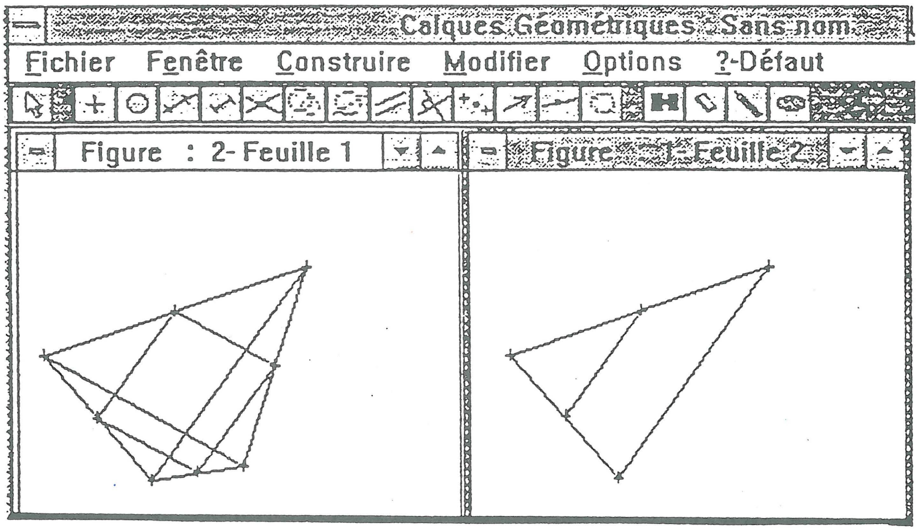
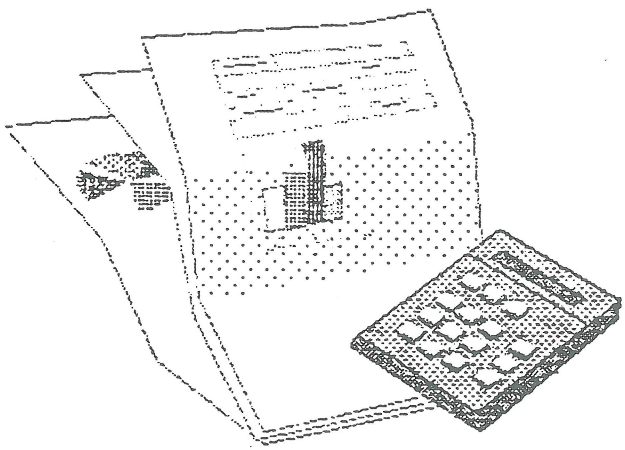




AU COLLEGE



FIGURES-TYPES



TABLEUR

MICRO - ORDINATEUR

ET

GRAND ECRAN

AU COLLEGE

I.R.E.M. de RENNES
1993 - 1995

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, etc...). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer. Nous avons laissé volontairement certaines pages verso blanches pour faciliter la lecture simultanée de l'énoncé et des figures.

I.S.B.N. 2-85728-026-2

Ont participé à l'élaboration et à la rédaction de ce document :

DUBREUIL Alain	Collège Georges Brassens - LE RHEU
GARNIER Régine	Collège Martin Luther King - LIFFRE
GERARD Christiane	Collège Martin Luther King - LIFFRE
LE GALL Alex	Collège Georges Brassens - LE RHEU
LE GORJU Jean-Yves	Collège Roquebleue - ST GEORGES DE REINTEMBAULT
PATIN Monique	Collège Georges Brassens - LE RHEU
SIMON Odile	IRMAR - UFR de Mathématiques - RENNES I

Nous remercions le personnel administratif des collèges publics du RHEU, de LIFFRE et de ST GEORGES DE REINTEMBAULT, pour leur accueil et le prêt du matériel informatique.

Cette recherche a été menée avec des moyens de l'IREM et de la MAFPEN.

La saisie et la mise en page ont été assurées par Danièle QUENTIN

la reprographie et la reliure par Françoise LE BESCOND

SOMMAIRE

INTRODUCTION et MODE D'EMPLOI

Beaucoup de collèges sont équipés de matériel informatique : micro-ordinateurs, rétroprojecteur, différents logiciels, ... Ce matériel est souvent sous-exploité : il faut beaucoup s'investir pour mettre au point une petite activité.

Dans notre groupe I.R.E.M., nous avons expérimenté quelques activités, certaines utilisant le logiciel WORKS dans sa forme tableur et graphique, d'autres utilisant le logiciel CALQUES GEOMETRIQUES, ce qui donne lieu aux deux chapitres de ce document.

La disquette comporte deux répertoires :

- Works en WORKS version pour Windows.
- Calques en CALQUES GEOMETRIQUES version 2.

Certaines personnes du groupe découvraient l'un ou l'autre des deux logiciels. De ce fait, nous pensons avoir rédigé ce document de telle sorte qu'il soit utilisable sans prérequis informatique.

En annexe 2 du chapitre I, nous avons rédigé une fiche technique qui extrait, de la documentation de WORKS, les commandes suffisantes pour les activités proposées. Il ne nous a pas semblé nécessaire de faire de même dans le chapitre II, pour CALQUES GEOMETRIQUES, la présentation par icônes et l'aide intégrée nous paraissant suffisantes.

CHAPITRE I

RESOLUTION D'UN PROBLEME PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

PRESENTATION

ET REMARQUES GENERALES

Pour illustrer ce chapitre, nous avons sélectionné :

- Cinq activités

dont la problématique essentielle, pour l'élève, est de chercher une ou des solutions à un problème.
Il devra résoudre des équations ou rechercher des extréma à des fonctions, sans disposer des techniques de calculs qu'il découvrira dans les classes supérieures.

Cependant, par leur présentation, nous faisons en sorte que ces problèmes aient **du sens** pour des élèves de collège et qu'ils s'attachent à :

- émettre des conjectures,
- les tester par des moyens "para-mathématiques" (bricolage...),
- mathématiser les situations,
- présenter leurs calculs de manière algorithmique.

Puis, pour les aider à aller jusqu'au bout de leur démarche et pour rendre moins fastidieux l'aspect calculatoire (voire pour lui donner un habillage plus contemporain), nous les guidons dans l'utilisation d'outils de calculs efficaces : calculatrices et tableur (associé à un grapheur).

Toutefois, nous prenons bien soin de développer, parallèlement, leur esprit critique face, en particulier, aux affichages proposés par ces outils.

Pour asseoir notre démarche, nous avons détaillé l'activité 1 *"La Boîte"*. Dans la présentation des activités suivantes, nous avons gommé les points élémentaires.

- Une activité

à titre de contre-exemple pour illustrer le danger qu'il y aurait à vouloir généraliser une telle méthode sans prendre quelques précautions et, en particulier, celle qui consiste à analyser le problème, au préalable, sur le plan purement mathématique. C'est pourquoi, dans un sous-chapitre plus "théorique", nous rappelons quelques règles utiles pour œuvrer dans ce sens.

I - CONTENUS MATHEMATIQUES MAJEURS

- Notion de volume (*"La boîte", "Le cône", "La bille", "La casserole"*).
- Notion d'aire (*"La terrasse", "La casserole"*).
- Formules (pour calculer des aires et des volumes).
- Calcul numérique et valeurs approchées.
- Calcul littéral.
- Elaboration d'un tableau.
- Représentation graphique.
- Traitement algorithmique d'un problème.
- Résolution d'un problème par approximations successives.

II - OBJECTIFS POUR L'ELEVE

- Chercher et émettre des conjectures "réalistes".
- Savoir établir puis appliquer une formule pour :
    - simplifier des calculs,
    - améliorer des arrondis.
- Connaître les possibilités élémentaires :
    - d'une calculatrice,
    - d'un tableur,
    - d'un grapheur.
- Savoir construire un tableau.
- Savoir construire une représentation graphique et l'utiliser :
    - prendre des initiatives pour améliorer la précision du tracé et sa lisibilité,
    - reconnaître la nécessité d'un tracé point par point,
    - reconnaître les coordonnées du point d'intersection d'une courbe et d'une droite.
- Maîtriser les règles de comparaison des nombres en écriture décimale.
- Prendre conscience de l'existence d'une infinité de décimaux dans un intervalle, encadrer un réel.
- Etre critique face à l'affichage d'un outil de calcul.
- Savoir choisir le graphique le plus performant.

II - DEROULEMENT DES ACTIVITES

Après expérimentations, nous avons abouti aux remarques suivantes :

- Pour que chaque problème ait réellement du SENS pour les élèves il est souhaitable :
    - de les laisser procéder par tâtonnements, de les conduire à tester leurs conjectures à partir de quelques valeurs particulières (en utilisant ou non la calculatrice),
    - d'amener chacun d'entre eux à établir un graphique sur papier millimétré,
    - d'organiser, à l'issue de ces deux premières étapes, une confrontation des représentations qui aura pour but d'encadrer au mieux la valeur cherchée.

- L'**algorithmisation**, objectif majeur, n'est pas toujours très facile à atteindre et nécessite parfois, pour certains élèves, un niveau de guidage important. Toutefois, avant de passer à l'étape suivante, il est préférable de faire en sorte que l'ensemble de la classe choisisse une décomposition commune pour faciliter, par la suite, l'exploitation des résultats partiels.

- L'utilisation des **outils informatiques** nécessite également quelques précautions préalables de la part de l'enseignant.

- **Au tableur** :

    - préparer, avant le cours, un tableau avec les titres des colonnes et les formules. Prévoir les largeurs de colonnes judicieuses pour obtenir tous les résultats sur l'écran (voir fiche technique).

    Exemple : *"La terrasse"*

Longueur	Aire de R1	Aire de R2	Aire-carré	Aire totale	Aire-maison
X	$L \times X$	$l \times X$	$X \times X$		$L \times l$

    - remplir, en présence des élèves :
        - la colonne de la variable,
        - les colonnes des constantes (si elles existent),
        - la première colonne qui utilise la variable et mérite un temps de réflexion non négligeable car elle sensibilise à la notion de fonction d'une variable (introduction de "recopier vers le bas", voir fiche technique),
        - les colonnes suivantes (même démarche en faisant appel à l'initiative des élèves).

    Remarque : l'analyse des données est facilitée par l'utilisation de la surbrillance qui matérialise un encadrement.

- **Au grapheur** :

    - présenter plusieurs graphiques,
    - permettre une confrontation des arguments pour justifier le choix d'un type de graphique,
    - améliorer techniquement le graphique retenu à l'aide des items : "titre", "légende", "couleur", etc... (voir fiche technique).

- En **conclusion** de chaque activité :

    - le dernier **tableau de valeurs** données par le tableur permet de situer la valeur cherchée avec une précision satisfaisante,

    - le **graphique** correspondant assure une meilleure visualisation du résultat.

- Au total, les élèves ont atteint grâce à une méthode d'**encadrement par approximations successives** un résultat qu'ils jugent satisfaisant et ils sauraient, au besoin, trouver un encadrement encore plus fin.

"LA BOITE"

"La boîte"

Quelques points de repère pour le professeur :

Niveaux : Tous niveaux.
Rubrique : Longueur, aire, volume.
Logiciel : Works.

Prérequis :

- En 6ème et 5ème

  - Volume et patron du pavé droit.
  - Unités de volume et de capacité.
  - Compréhension de l'écriture 2c (en 5ème).
  - Utilisation des parenthèses.

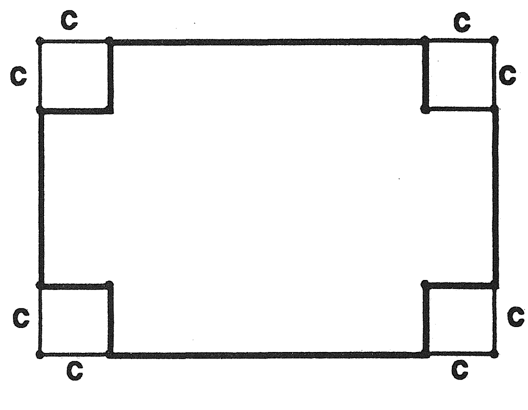
- En 4ème et 3ème

  - Développer (a+b)(c+d).
  - Utiliser les puissances.

Problème

Dans une feuille de format 24 x 32, on désire fabriquer le patron d'une boîte sans couvercle. On souhaite que cette boîte ait le volume le plus grand possible Quelle valeur doit-on donner au côté de chaque carré à découper ? (formulation en 6ème et 5ème).

Ou encore, (formulation en 4ème et 3ème), quelle(s) valeur(s) doit-on donner à c pour que le volume de la boîte soit maximum ?



Déroulement de l'activité
3 séquences de travail

Séquence 1

Deux phases nettement différentes l'une de l'autre tant par les objectifs visés que par les procédures développées.

Première phase : " Activités préparatoires, bricolage, mesures..."

Objectifs :
- Rendre un vrai problème motivant pour les élèves.
- Les amener à émettre des conjectures, à tester ces conjectures à travers des mesures.
- Les conduire à se rendre compte des limites de validité de leurs tests.

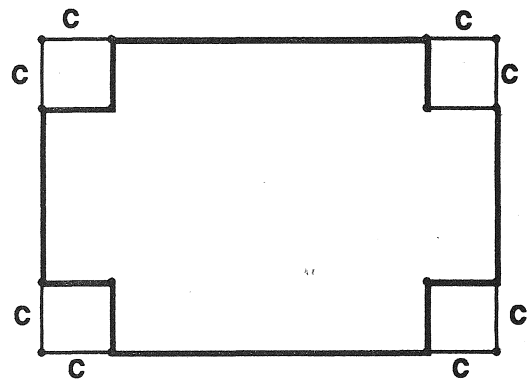
Matériel :
- Calculatrices.
- Matériel de cartonnage.
- Eprouvettes graduées.
- Vermiculite.

Situation fonctionnelle :

- Travail individuel à la maison.
- Travail en équipe en classe.
... sans utiliser l'ordinateur.

Activité préparatoire (réalisable en partie à la maison) :

Après une présentation du problème à la classe par le professeur, chaque élève découpe sa feuille 24 x 32 comme indiqué ci-contre.



Tous les élèves construisent une boîte avec c=1, puis, un élève sur deux fabrique, avec la même feuille, une boîte en prenant c=2 ; la comparaison des deux volumes est très parlante.

Pour faciliter la gestion des résultats et la répartition des élèves en équipes plus tard, nous proposons à chacun de choisir pour c l'une des valeurs suivantes :
2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ou 7 .

Puis, les étapes se succèdent :

- Construction des boîtes.
- La comparaison des volumes des différentes boîtes devient difficile et conduit certains élèves à passer aux calculs. Par contre, en utilisant la vermiculite, on classe les boîtes selon leur volume et on obtient un encadrement de la valeur cherchée : $4 < c < 5$.
- Réalisation d'un tableau de présentation des résultats et comparaison ...

Questions :

- Parmi les volumes obtenus, y en a-t-il un plus grand que tous les autres ?
- Est-ce la boîte la plus longue qui a le plus grand volume ?
- Est-ce la boîte la plus large qui a le plus grand volume ?
- Est-ce la boîte la plus haute qui a le plus grand volume ?
- Ces critères, la longueur, la largeur, la hauteur de la boîte, sont-ils pertinents pour permettre de trouver facilement la boîte qui a le plus grand volume ?

- Mesures des dimensions des boîtes. Calculs des volumes à partir de ces mesures.

c	2	3	4	5	6	7	8
Volumes							

- Discussion...

Deuxième phase : Mathématisation du problème

Objectifs :
- Etablir la formule du calcul du volume V en fonction de c.
- L'utiliser pour comparer son résultat à celui obtenu à partir des mesures.
- En fin de séquence, amener les élèves à se poser la question suivante : "Quelle procédure employer pour trouver c afin que V soit maximum ?"

Matériel : - Calculatrices.

Situation fonctionnelle :

- Travail individuel en classe,
  ... sans utiliser l'ordinateur.

- Calculons le volume pour $c = 4{,}4$
  (calculatrice autorisée)
  On sait que $V = L \times l \times h$
  or, $L = 32 - (4{,}4 \times 2)$
  $l = 24 - (4{,}4 \times 2)$
  $h = 4{,}4$
  donc V = ...
- Application : - Calculez ainsi le volume de la boîte que vous avez construite.
- Conclusion : - Le volume dépend de c.
  - Il varie en fonction de c.

Pour trouver le volume maximum, nous sommes donc amenés à choisir une série de valeurs pour c puis à calculer les volumes correspondants et enfin, à les comparer. Mais ceci fera l'objet, entre autres, de la seconde séquence.

Séquence 2

Objectifs :
- Construction et analyse d'un tableau de valeurs.
- Comparaison de nombres.
- Construction et analyse d'une représentation graphique.
- Choix de la représentation graphique la mieux adaptée.
- Reconnaissance et mise en évidence d'un maximum.

Matériel :
- Calculatrices.
- Tableur.
- Grapheur.
- Papier millimétré.

Situation fonctionnelle :

- Travail collectif au "grand écran".
- Travail individuel crayon-papier.

- **Algorithmisation du calcul de V :**

La formule du volume du pavé est bien connue :

V = Longueur x largeur x hauteur,

la difficulté consiste à trouver les dimensions du pavé :

L = 32 - 2c
l = 24 - 2c
h = c

Donc V = (32 -2c) x (24 - 2c) x c

Pour créer une étape supplémentaire représentative du premier produit nous pensons qu'il est intéressant de faire figurer dans le tableau de valeurs celles de "l'Aire de base" du pavé.

Premier tableau de valeurs obtenu au "grand écran" :

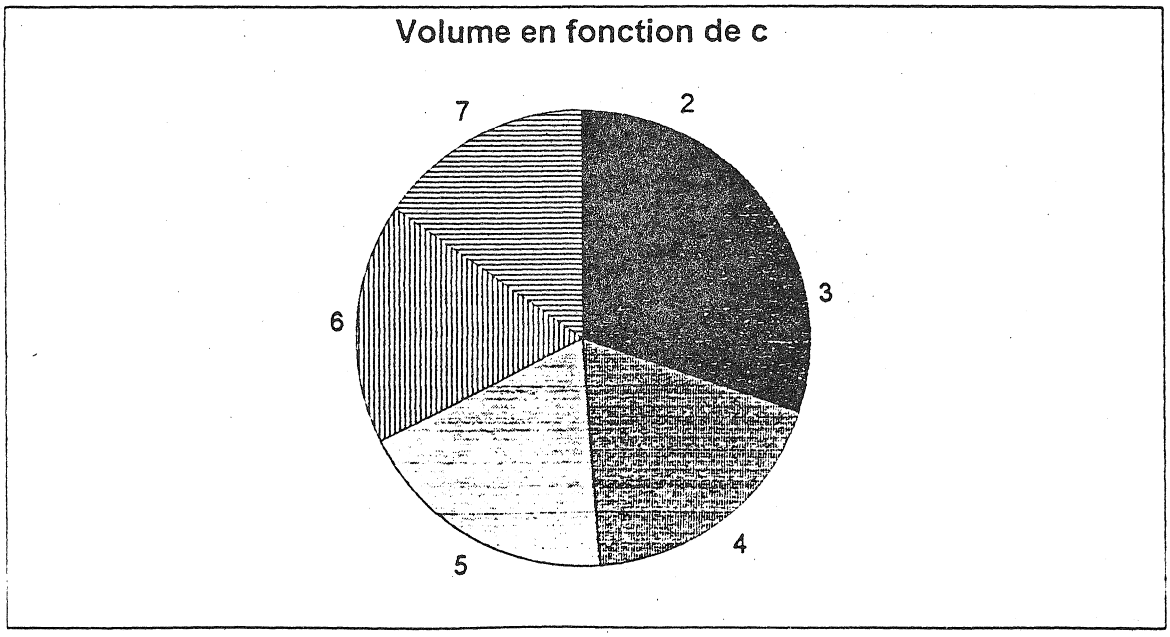
c	32 - 2c Longueur	24 - 2c Largeur	(32-2c)(24-2c) Aire de base	(32-2c)(24-2c) x c Volume
2	28	20	560	1120
3	26	18	468	1404
4	24	16	384	1536
5	22	14	308	1540
6	20	12	240	1440
7	18	10	180	1260

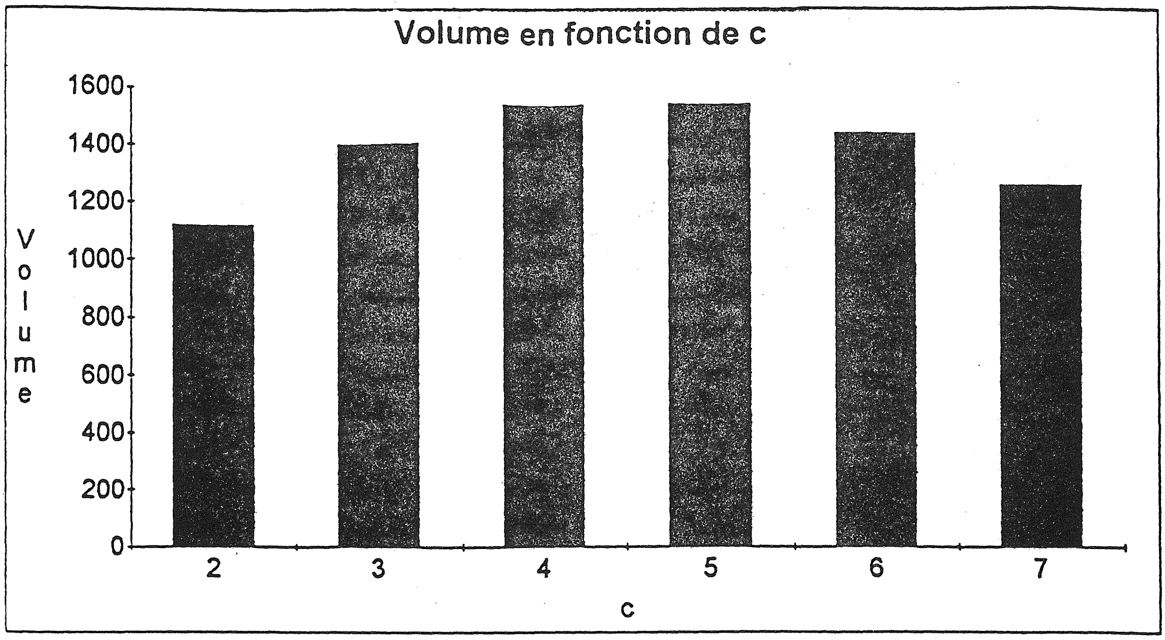
- **Vérification des calculs** à la calculatrice, comparaison des résultats avec ceux trouvés lors de la séquence 1.

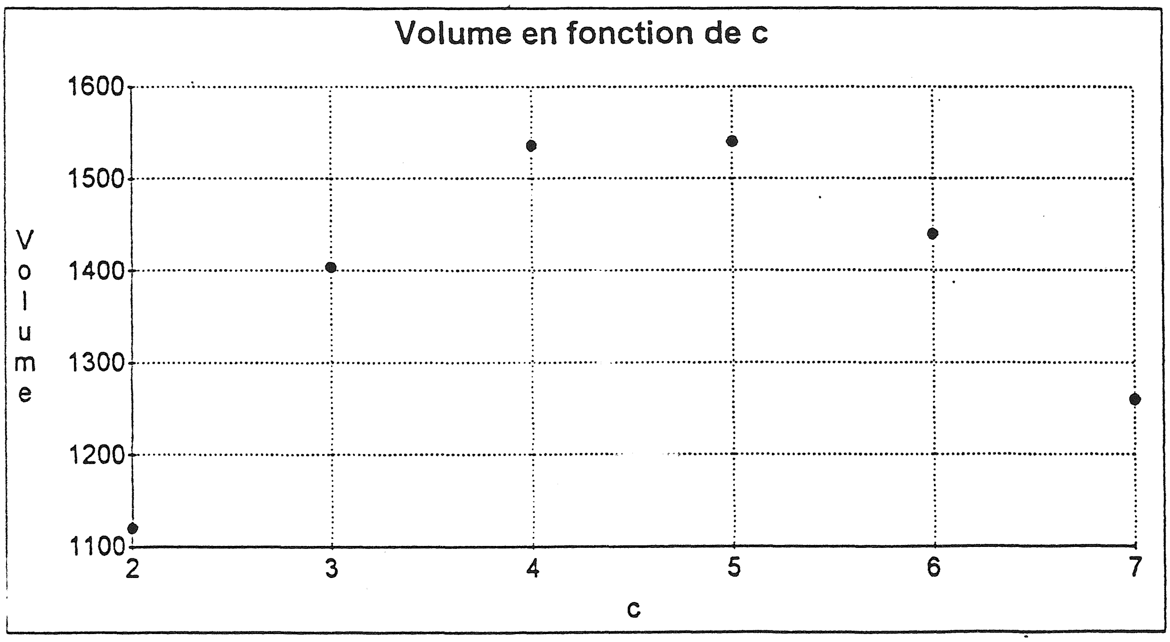
- **Elaboration** d'un premier **tableau** sur le cahier.

- **Retour au "grand écran" pour construire** un premier **graphique**, un second, etc... **Choix** du graphique le plus pertinent.

Voici quelques graphiques parmi lesquels les élèves vont sélectionner celui qui, de leur point de vue, les aide le mieux à trouver le volume maximum :







- Les élèves sélectionnent le dernier graphique.

- **Analyse** plus fine de cette représentation :

  - A quoi correspondent les points ?
  - Peut-on définir avec précision la ou les valeurs de c cherchée(s) ?

La séquence se termine sur les interrogations suivantes :

  - Le tableau de valeurs peut-il nous permettre de résoudre le problème ?
  - Question analogue à propos du graphique.

Les élèves ont donc à préparer, pour la séquence suivante un tableau et une représentation graphique qui apporteraient plus de précision.

Séquence 3

Objectifs :
- Construction et analyse d'un tableau de valeurs.
- Comparaison des nombres en écriture décimale.
- Résolution d'un problème par approximations successives.
- Construction et analyse d'une représentation graphique.
- Reconnaissance et mise en évidence d'un maximum.

Matériel :

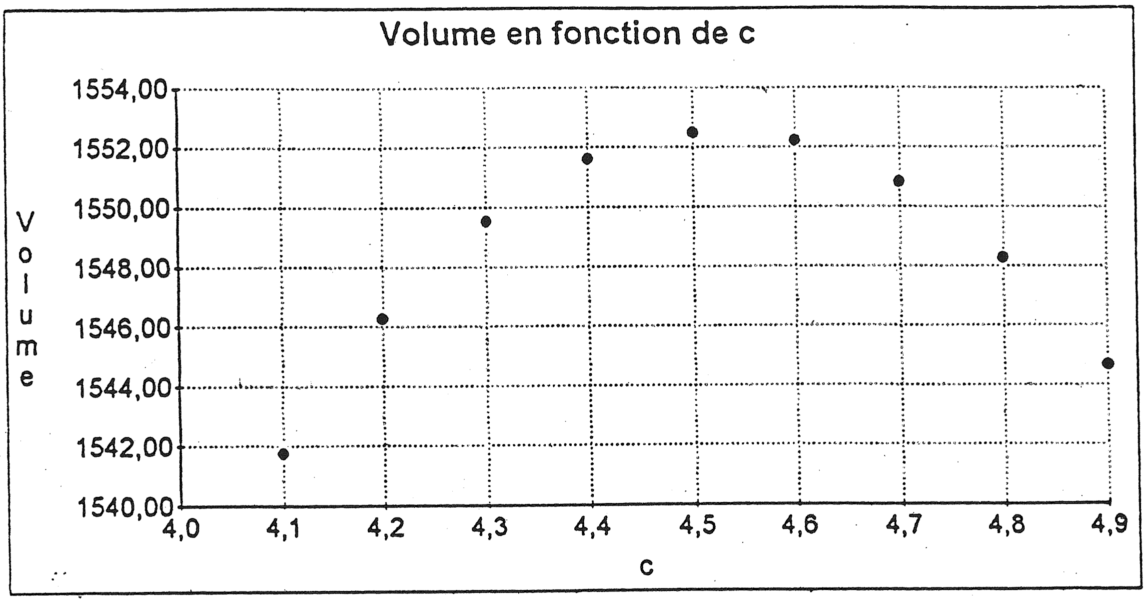
Situation fonctionnelle :

identiques à ceux de la séquence 2.

Après **analyse et discussion des productions écrites** des élèves, on décide de choisir pour c des valeurs comprises entre 4 et 5 (excluses). On construit au tableur le tableau suivant :

c	Longueur	largeur	Aire de base	Volume
4,1	23,80	15,80	376,04	1 541,76
4,2	23,60	15,60	368,16	1 546,27
4,3	23,40	15,40	360,36	1 549,55
4,4	23,20	15,20	352,64	1 551,62
4,5	23,00	15,00	345,00	1 552,50
4,6	22,80	14,80	337,44	1 552,22
4,7	22,60	14,60	329,96	1 550,81
4,8	22,40	14,40	322,56	1 548,29
4,9	22,20	14,20	315,24	1 544,68

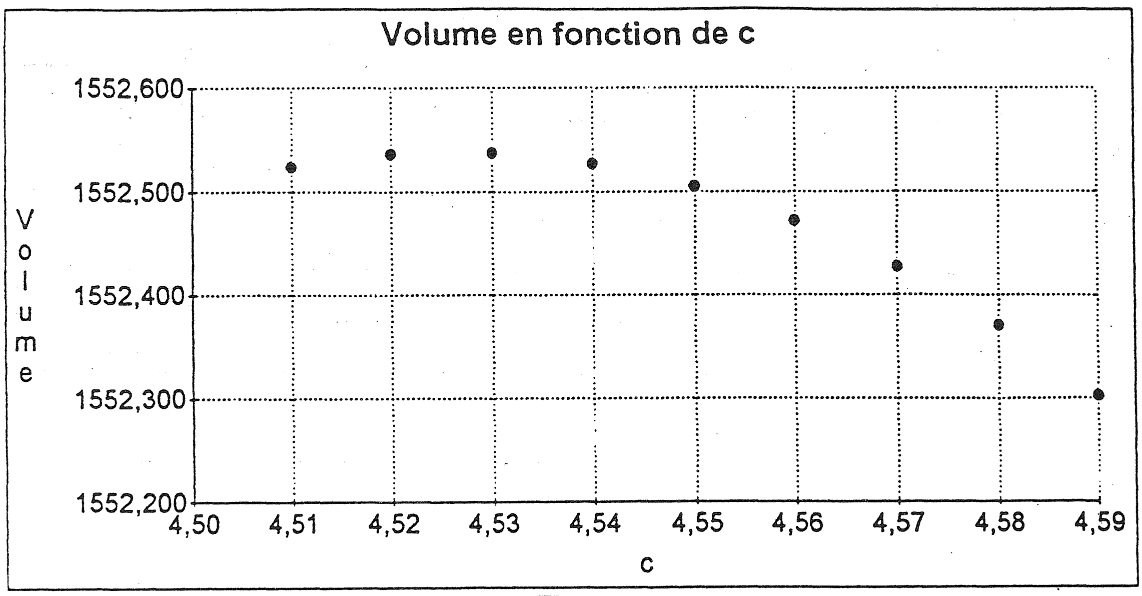
et avec le grapheur, la courbe suivante :



... on affine un peu plus :

c	Longueur	Largeur	Aire de base	Volume
4,51	22,98	14,98	344,24	1 552,524
4,52	22,96	14,96	343,48	1 552,537
4,53	22,94	14,94	342,72	1 552,538
4,54	22,92	14,92	341,97	1 552,527
4,55	22,90	14,90	341,21	1 552,506
4,56	22,88	14,88	340,45	1 552,472
4,57	22,86	14,86	339,70	1 552,427
4,58	22,84	14,84	338,95	1 552,371
4,59	22,82	14,82	338,19	1 552,303

... et on trace le graphique suivant :



Analyse finale :

- Le dernier tableau de valeurs proposé par le tableur nous permet de situer c entre 4,52 et 4,53. Le graphique correspondant permet une meilleure visualisation du volume maximum.

- Nous avons atteint grâce à une méthode d'encadrement par approximations successives une valeur de c satisfaisante ; au besoin nous saurions trouver un encadrement encore plus fin.

"LA TERRASSE"

"La terrasse"

Quelques points de repère pour le professeur :

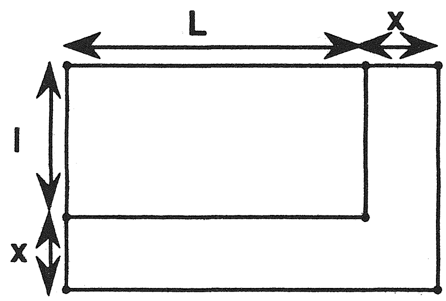
Niveaux : 5ème et 4ème.
Rubrique : Longueur, aire.
Logiciel : Works.

Prérequis :

- Aires du rectangle, du carré.
- Compréhension de l'écriture $X \times X = X^2$.
- Factorisation (notion de...).
- Utilisation des parenthèses.

Problème

Gilles a une maison de longueur L et de largeur l. Il a l'intention d'aménager une terrasse de largeur x selon le schéma ci-contre.
On sait que la valeur de L est 18 m et celle de l 10 m.
Quelle doit-être la valeur de x pour que l'aire de la terrasse soit égale à celle de la maison ?



Déroulement de l'activité
2 séquences de travail

Séquence 1

Objectifs :
- Etablir les formules des calculs des deux aires (maison et terrasse) en fonction de x.
- Construire un tableau de valeurs numériques.
- Construire un graphique point par point sur papier millimétré pour résoudre le problème.
- Encadrer, dans un tableau et sur un graphique, la valeur cherchée.

Matériel :
- Calculatrices, papier millimétré et papier non quadrillé pour le dessin de la maison et de sa terrasse.

Situation fonctionnelle :

- Travail individuel en classe.
- Sans utiliser l'ordinateur.

Algorithmisation du calcul de l'aire de la terrasse :

L'aire de la terrasse se compose de trois parties :

- l'aire d'un premier rectangle : $L \times X$
- celle d'un carré : $X \times X$
- celle d'un second rectangle : $l \times X$

soit au total : $(L \times X) + (l \times X) + (X \times X)$

Remarque : Suite aux expérimentations, trois démarches émergent :

$L \times X + l \times X + X \times X$

$l \times X + (L+X) \times X$

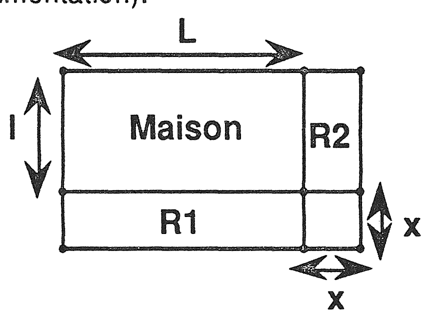
$[(L+X) \times (l+X)] - l \times L$

Applications :

1 - Construction d'un tableau de valeurs en rappelant que :

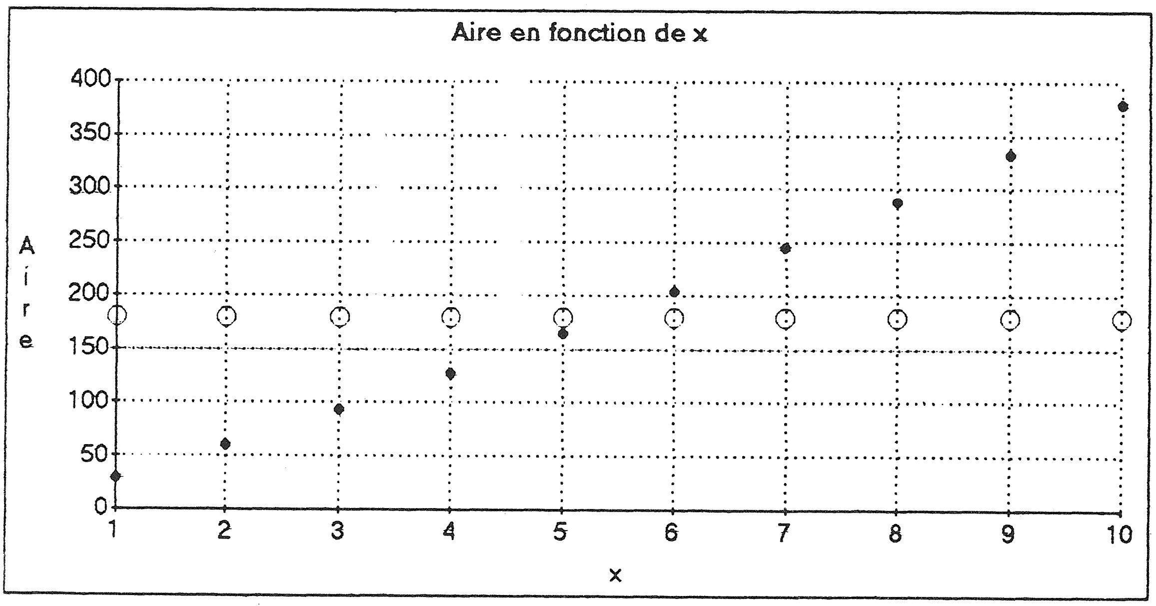
$L = 18$ et $l = 10$

(éviter de prendre L et l multiples évidents l'un de l'autre, pour ne pas induire un dérapage vers la proportionnalité, phénomène observé dans deux classes en expérimentation).



Largeur	Aire de R1	Aire de R2	Aire-carré	Aire totale	Aire-maison
X	L × X	l × X	X × X		L × l
1	18	10	1	29	180
2	36	20	4	60	180
3	54	30	9	93	180
4	72	40	16	128	180
5	90	50	25	165	180
6	108	60	36	204	180
7	126	70	49	245	180
8	144	80	64	288	180
9	162	90	81	333	180
10	180	100	100	380	180

2 - Construction d'un graphique point par point sur papier millimétré :



Analyse des graphiques ainsi réalisés : on met en évidence l'existence d'une solution pour x compris entre 5 et 6.

Séquence 2

Objectifs :
- Construction et analyse d'un tableau de valeurs.
- Comparaison de nombres.
- Construction et analyse d'une représentation graphique.

Matériel :
- Tableur.
- Grapheur.
- Papier millimétré.

Situation fonctionnelle :

- Travail collectif au "grand écran".
- Travail individuel crayon-papier.

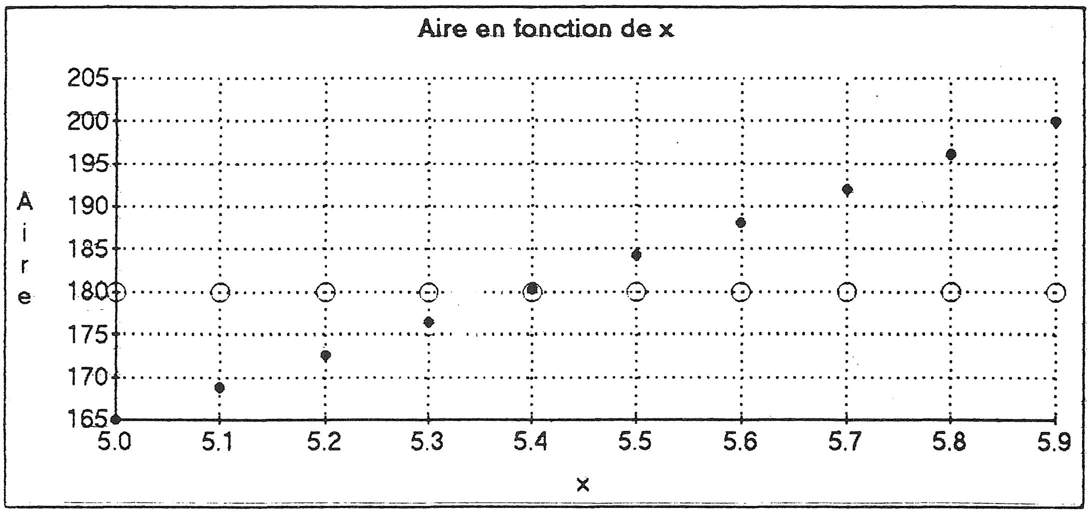
Tableau de valeurs obtenu au "grand écran"

Largeur	Aire de R1	Aire de R2	Aire-carré	Aire totale	Aire-maison
X	L × X	l × X	X × X		L × l
5	90	50	20	165	180
5,1	91,8	51	26,01	168,81	180
5,2	93,6	52	27,04	172,64	180
5,3	95,4	53	28,09	176,49	180
5,4	97,2	54	29,16	180,36	180
5,5	99	55	30,25	184,25	180
5,6	100,8	56	31,36	188,16	180
5,7	102,6	57	32,49	192,09	180
5,8	104,4	58	33,64	196,04	180
5,9	106,2	59	34,81	200,01	180
6	108	60	36	204	180

Remarque : Il va de soi que seules les valeurs de x sont fixées par les élèves. Les autres en découlent à partir de formules.

- **Vérification des calculs** à la calculatrice, comparaison des résultats avec ceux trouvés lors de la séquence 1 pour x = 5 et x = 6.
- **Elaboration** d'un tableau analogue **sur le cahier.**
- Construction d'un nouveau **graphique** sur **papier millimétré.**

- **Comparaison** avec le graphique suivant obtenu au "grand écran" :



Analyse finale :

- Le dernier tableau de valeurs proposé par le tableur nous permet de situer x entre 5,3 et 5,4. Le graphique correspondant permet une meilleure visualisation de la solution.

- Nous avons atteint grâce à une méthode d'encadrement par approximations successives une valeur de x satisfaisante ; au besoin nous saurions trouver un encadrement encore plus fin.

"LA CASSEROLE"

"La casserole"

Quelques points de repère pour le professeur :

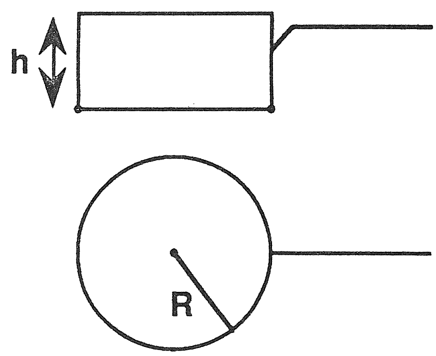
Niveaux : 4ème, 3ème.
Rubrique : Aire, volume.
Logiciel : Works.

Prérequis :

- Volume du cylindre, aire latérale.
- Compréhension d'une écriture littérale.
- Notion de variable.
- Utilisation des touches π et x^2 de la calculatrice.
- Notion d'unités de volume et de capacité.

Problème

Quelles dimensions doit avoir le corps d'une casserole cylindrique, en acier, de 1 litre pour que sa fabrication exige la plus petite surface de métal possible?



Commentaire : Un vrai problème aux résultats surprenants et vérifiables dans votre cuisine !

Déroulement de l'activité
3 séquences de travail

Séquence 1

Objectifs :
- Donner du sens au problème initial.
- Reformuler le problème en mettant en avant le paramètre capital : le rayon R.
- Construire un tableau de valeurs numériques, l'analyser.
- Emettre des conjectures.
- Etablir une formule et en voir les intérêts.

Matériel : - Calculatrices.

Situation fonctionnelle :

- Travail : individuel à la maison,
  en groupe en classe,
  collectif en classe.

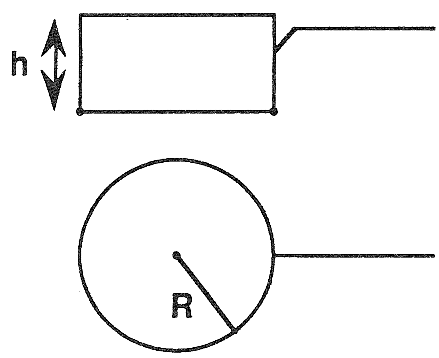
Première phase : Présentation du problème à la classe :

Voici deux schémas représentant une casserole en métal de 1 litre.
- h désigne sa hauteur en cm,
- R le rayon de sa base en cm.

1 - Calcule sa hauteur si R = 4 cm.

2 - Calcule l'aire de la surface S de métal nécessaire à la réalisation du corps de la casserole quand R = 4 cm.

3 - Recommence l'exercice en donnant une autre valeur à R, par exemple 6 cm.



Deuxième phase (pendant la même heure de cours) :

1) En groupe : chaque groupe fait les calculs avec une ou deux autre(s) valeur(s) du rayon. On prendra des valeurs entières allant de 2 à 16.

2) Collectivement : on construit un tableau regroupant les résultats.

Rayon R	2	4	6	8	10	12	14	16
hauteur h								
Aire S								

- Des discussions s'engagent à propos des arrondis. On décide de rechercher une procédure de calculs (aboutissant à l'élaboration d'une formule) qui mettra un terme aux désaccords.

- On conduira les élèves à observer les sens de variations de la hauteur et de l'aire en fonction de R.

Mathématisation du problème (algorithmisation)

Recherche de la formule qui permettra de calculer S uniquement en fonction de R.
La capacité de la casserole est constante : 1 litre ou 1 000 cm^3.

Or le volume V de la casserole peut s'exprimer :

$$V = \text{Aire de base} \times \text{hauteur}$$

soit $V = \pi R^2 \times h$

on en déduit que $h = 1\ 000 / \pi R^2$

L'aire S est la somme de l'aire de base et de l'aire latérale, soit $S = \pi R^2 + 2\pi R h$

En remplaçant h par la valeur trouvée plus haut on exprime donc S uniquement en fonction de R :

$$\boxed{S = \pi R^2 + (2\ 000 / R)}$$

Premières conclusions :

1 - Sur le tableau, on constate que lorsque le rayon augmente progressivement, l'aire commence par diminuer puis elle augmente.
Conjecture : il semblerait qu'il existe une valeur de R "intéressante" pour laquelle la surface métallique soit minimale.
C'est cette valeur que nous nous proposons de rechercher dans la séquence suivante.

2 - On constate également que lorsque le rayon augmente, la hauteur diminue. Quand nous aurons trouvé le "rayon intéressant" nous calculerons la valeur de h correspondante.

Travail à la maison :

1 - En utilisant la formule, construire un tableau donnant les valeurs de S pour les valeurs entières de R comprises entre 1 et 18.

2 - Construire le graphique correspondant.

Remarque : Une initiation aux fonctionnalités des calculatrices semble indispensable, à ce stade, si ce n'est déjà fait.

Séquence 2

Le problème est reformulé de la manière suivante :

***Problème** :*

Un industriel veut fabriquer des casseroles de 1 litre, avec la surface de tôle la plus petite possible. Quel rayon de base a-t-il intérêt à choisir ?
Dans ce contexte, quelle est la hauteur d'une casserole ?

Objectifs : - Construction et analyse d'un tableau de valeurs.
- Comparaison de nombres.
- Construction et analyse d'une représentation graphique.
- Choix du graphique le mieux adapté.
- Reconnaissance et mise en évidence d'un minimum.

Matériel : - Calculatrices.
- Tableur.
- Grapheur.
- Papier millimètré.

Situation fonctionnelle :

- Travail collectif au "grand écran".
- Travail individuel crayon-papier, préparé à la maison.

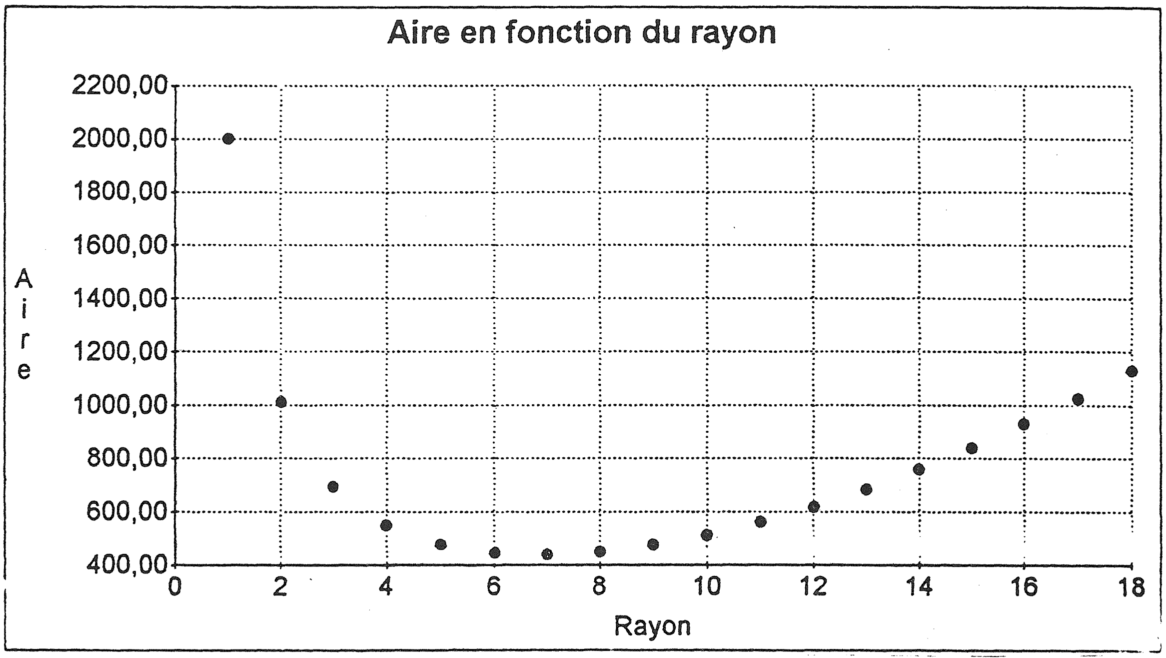
1 - **A l'aide du tableur** (collectivement), construction d'un tableau de valeurs de S pour R entier et variant de 1 à 18. Il est intéressant de faire figurer la hauteur dans ce tableau.

R	Aire de base	h	Aire latérale	S
	πR^2	$1000 / \pi R^2$	$2000 / R$	$\pi R^2 + (2000/R)$
1	3,14	318,31	2000,00	2003,14
2	12,57	79,58	1000,00	1012,57
3	28,27	35,37	666,67	694,94
4	50,27	19,89	500,00	550,27
5	78,54	12,73	400,00	478,54
6	113,10	8,84	333,33	446,43
7	153,94	6,50	285,71	439,65
8	201,06	4,97	250,00	451,06
9	254,47	3,93	222,22	476,69
10	314,16	3,18	200,00	514,16
11	380,13	2,63	181,82	561,95
12	452,39	2,21	166,67	619,06
13	530,93	1,88	153,85	684,78
14	615,75	1,62	142,86	758,61
15	706,86	1,41	133,33	840,19
16	804,25	1,24	125,00	929,25
17	907,92	1,10	117,65	1025,57
18	1017,88	0,98	111,11	1128,99

2 - **Vérification des calculs** : comparaison des résultats avec ceux trouvés à la maison.

3 - **Distribution** d'une photocopie du tableau à chaque élève.

4 - **Comparaison** du graphique fait à la maison avec le graphique suivant obtenu au "grand écran" :



Questions

- Pour quelles valeurs de R a-t-on S = 800 cm² ?
- Par simple lecture, à quelle valeur approximative de R correspond une surface minimum ?

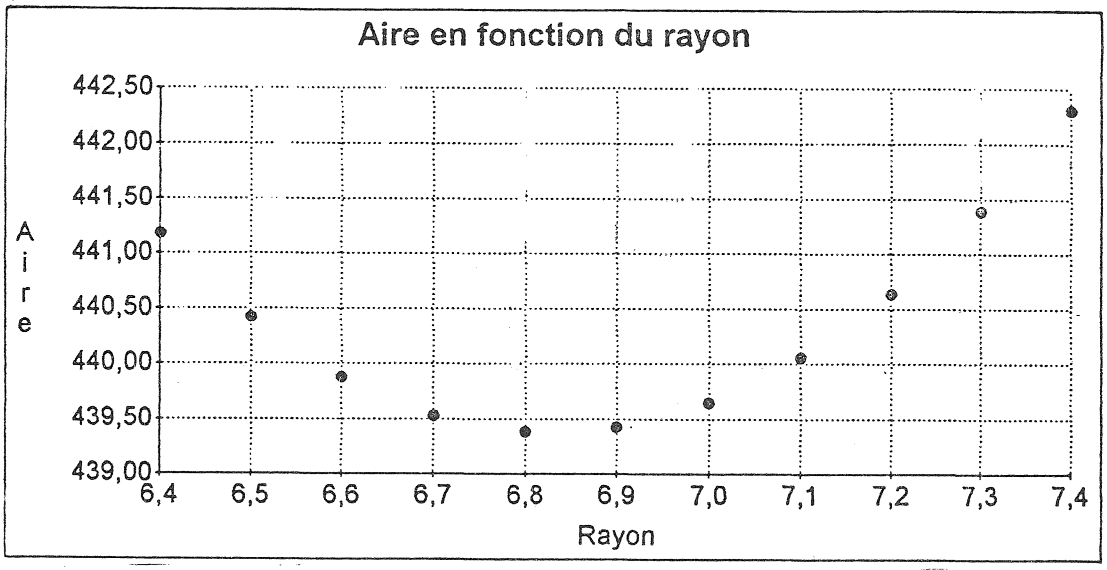
Travail à la maison :

Construire un tableau donnant les valeurs de S pour les valeurs de R comprises entre 6,4 et 7,4 de 0,1 en 0,1.

Séquence 3

On reprend la **même démarche** mais cette fois, avec des valeurs de R comprises entre 6,4 et 7,4. Voici le tableau et le graphique correspondants :

R	Aire de base	h	Aire latérale	S
	πR^2	$1\ 000\ /\ \pi R^2$	$2\ 000\ /\ R$	$\pi R^2 + (2000/R)$
6,4	128,68	7,77	312,50	441,18
6,5	132,73	7,53	307,69	440,42
6,6	136,85	7,31	303,03	439,88
6,7	141,03	7,09	298,51	439,53
6,8	145,27	6,88	294,12	439,38
6,9	149,57	6,69	289,86	439,43
7,0	153,94	6,50	285,71	439,65
7,1	158,37	6,31	281,69	440,06
7,2	162,86	6,14	277,78	440,64
7,3	167,42	5,97	273,97	441,39
7,4	172,03	5,81	270,27	442,30



Analyse finale :

- Le dernier tableau de valeurs proposé par le tableur nous permet de situer R aux environs immédiats de 6,8 cm. Le graphique correspondant permet, lui, une assez bonne visualisation de la solution.

- Nous avons atteint grâce à une méthode d'encadrement par approximations successives une valeur de R satisfaisante ; au besoin nous saurions trouver un encadrement encore plus fin.

- Quand la valeur de R est satisfaisante, celle de h correspondante est sensiblement la même. Il est frappant de constater que les casseroles vendues dans le commerce ont effectivement ces caractéristiques.

"LA BILLE"

"La bille"

Quelques points de repère pour le professeur :

Niveaux : 4ème (éventuellement 3ème).

Rubrique : Volume, cylindre et sphère.

Logiciel : Works.

Prérequis :

- Notion de volume.
- Volume du cylindre, de la sphère.
- Calcul littéral, factorisation.

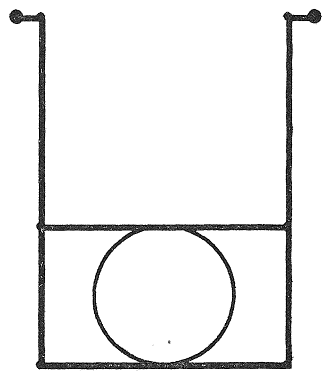
Problème

On dépose au fond d'un récipient cylindrique (bécher) de rayon 10 cm, une bille d'acier de rayon 5 cm. On recouvre d'eau la bille jusqu'à ce qu'il y ait affleurement (voir dessin).

On retire ensuite la bille en laissant intacte la quantité d'eau dans le récipient.
Que se passe-t-il, quant au niveau de l'eau, si on dépose une bille d'acier de rayon différent dans le récipient ?

La bille est-elle recouverte ? Partiellement découverte ?

Peut-on retrouver une situation d'affleurement avec une bille de rayon différent ?



Déroulement de l'activité
3 séquences de travail

Séquence 1

Première phase (facultative) : activités préparatoires, manipulations.

Objectifs :
- Faire prendre conscience de l'existence d'une situation problématique.
- Rendre un vrai problème motivant (voire déstabilisant) pour les élèves.
- Les amener à émettre des conjectures, à tester ces conjectures à travers des observations, des mesures.

Matériel :
- Récipient cylindrique gradué.
- Billes de différents diamètres (inférieurs à celui du récipient !)
- Eau.
- Pied à coulisse.

Situation fonctionnelle :
- Travail individuel en classe.
- Expérience avec le récipient.

Activités :
- Prise de conscience : sachant qu'une bille de 5 cm de rayon est recouverte jusqu'à affleurement, imaginer et représenter par un schéma ce qui se passerait avec une bille de rayon 3 cm, 7 cm ou 9 cm.
  Confrontation des représentations .... difficulté réelle à cerner le problème mais le rôle probable du volume de la bille apparaît nettement. On décide de tenter une expérimentation avec le matériel dont nous disposons.
- Manipulation (grandeur nature) : on réalise l'expérience avec un bécher cylindrique et des billes à jouer de différents diamètres.

Remarque : Le professeur pourra, en s'inspirant éventuellement du chapitre sur les dérivées, rechercher, par le calcul, les rayons appropriés des différentes billes qui permettront de bien illustrer le problème.

Observations : Suivant les billes choisies, le niveau de l'eau est inférieur ou supérieur au diamètre de la bille ; autrement dit, la bille peut être recouverte ou partiellement découverte.

Nous sommes amenés à préciser la problématique initiale de la manière suivante :

Si on appelle X le rayon de la bille,

- pour quelles valeurs de X la bille est-elle découverte ?
- que se passe-t-il lorsque le rayon de la bille diminue ?
- que se passe-t-il lorsque le rayon de la bille augmente progressivement ?

Deuxième phase : mathématisation du problème.

Objectifs :
- Rechercher une procédure pour résoudre le problème (quels calculs peut-on faire ?)
- Rappeler et utiliser les formules permettant de calculer le volume du cylindre et celui de la bille.
- Amener les élèves à définir une problématique nouvelle : "Existe-t-il une autre bille qui permettrait aussi de réaliser l'affleurement ?"

Matériel :
- Calculatrices.

Situation fonctionnelle :

- Travail individuel en classe.
- Guidage éventuel du professeur en s'appuyant sur des confrontations de représentations émanant de l'ensemble des élèves.

Activités : Que peut-on calculer ?
On désigne par X le rayon d'une autre bille.

Propositions des élèves :

Calcul du volume d'eau (fixe) contenu dans le récipient cylindrique :

Eau + Bille :

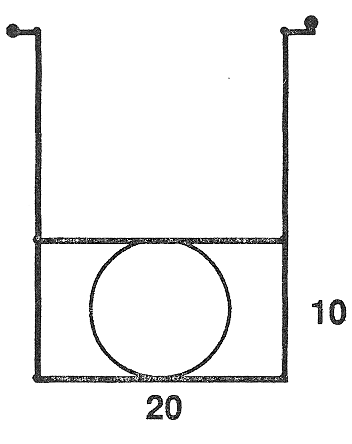
$\pi \times 10^2 \times 10 = 1000\,\pi$

Bille :

$(4/3)\,\pi \times 5^3 = (500/3)\,\pi$

Volume d'eau au départ :

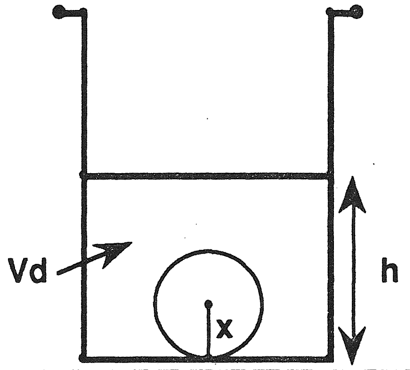
$Vd = 1000\,\pi - (500/3)\,\pi$
$Vd = (2500/3)\,\pi$



Calcul de la hauteur d'eau, h, contenue dans le récipient, en présence d'une bille de rayon X :

Vd + (4/3) π X^3 = π x 10^2 x h

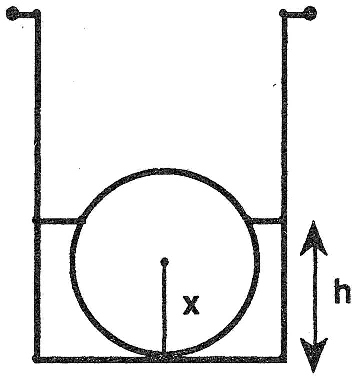
On pourrait en déduire h en fonction de X et étudier la valeur de h par rapport à 2X.



***Mais** le calcul précédent ne convient pas lorsque la bille n'est que partiellement recouverte d'eau. Dans ce cas, il faudrait disposer d'une formule permettant de calculer le volume d'une calotte sphérique (ce qui est tout à fait possible d'ailleurs).*

***Cependant**, même en ayant effectué correctement ce second calcul, comment saurons-nous à l'avance si nous travaillons dans le 1er ou le 2nd cas ?*

Cette stratégie ne convient donc pas. Il en existe une autre que le professeur n'hésitera pas à proposer aux élèves s'ils n'y pensent pas.

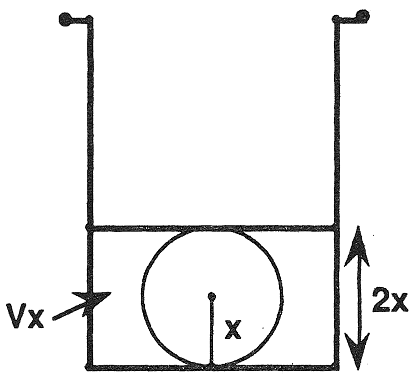


Calcul du volume d'eau idéal, volume nécessaire pour réaliser l'affleurement, on le notera Vx :

Volume du cylindre de hauteur h = 2X
π x 10^2 x 2X

Volume d'une bille de rayon X
(4/3) π X^3

donc Vx = π x 10^2 x 2X - (4/3) π X^3
Vx = 4πX (50 - X^2/3)



Travail individuel :

Représenter par des schémas les situations qui correspondent aux conditions suivantes :
- si Vx > Vd,
- si Vx < Vd.

Pour la séance suivante, calculer Vd et Vx pour plusieurs valeurs entières de X.

Séquence 2

Objectifs :
- Construction et analyse d'un tableau de valeurs.
- Comparaison de nombres.
- Signe d'une différence.
- Construction et analyse d'une représentation graphique.
- Choix de la représentation graphique la mieux adaptée.
- Reconnaissance et mise en évidence d'un rayon permettant d'obtenir l'affleurement.

Matériel :
- Tableur.
- Grapheur.
- Papier millimétré, calculatrice.

Situation fonctionnelle :

- Travail collectif au "grand écran", et mise en commun des résultats.

Remarque : Une des difficultés, ici, réside dans le fait que la représentation que les élèves ont du volume idéal (et de son rôle) n'est pas très fiable.

Activités : Les élèves réalisent individuellement :
- un tableau de valeurs pour X variant de 1 à 10,
- un graphique point par point correspondant au tableau,

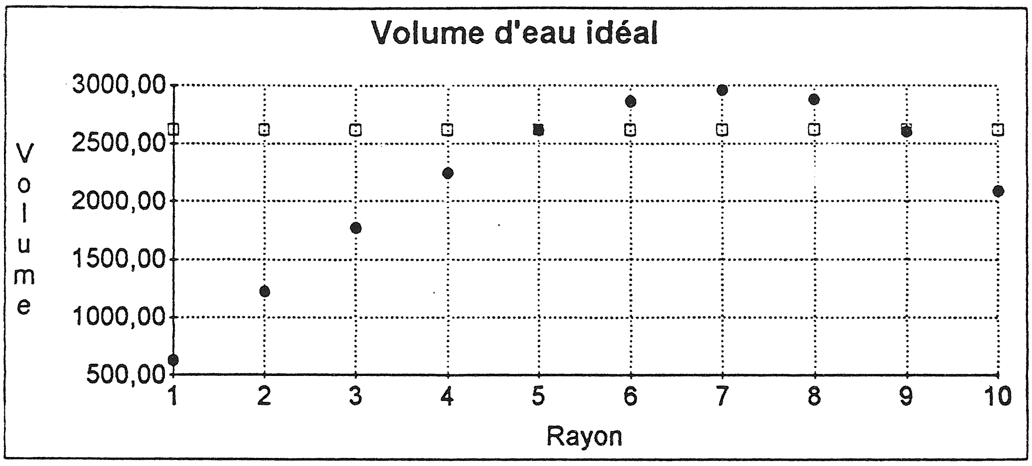
puis, collectivement au "grand-écran" les productions suivantes :

Tableau de valeurs obtenu au "grand écran" :

X	Vd	Vx	Vd - Vx
	$(2500/3) \times \pi$	$4\pi X\ (50 - X^2/3)$	
1	2617,99	624,13	1993,86
2	2617,99	1223,13	1394,87
3	2617,99	1771,86	846,14
4	2617,99	2245,19	372,80
5	2617,99	2617,99	0,00
6	2617,99	2865,13	-247,14
7	2617,99	2961,47	-343,48
8	2617,99	2881,89	-263,89
9	2617,99	2601,24	16,76
10	2617,99	2094,40	523,60

Remarque technique : sous Works le nombre π s'obtient par : PI () .

Graphique réalisé au "grand-écran" :



Analyse :

- Lorsque le rayon augmente de 1 à 5, la bille est recouverte par une quantité d'eau de plus en plus faible.
- Lorsque le rayon varie entre 5 et 9, la bille est découverte, mais il semble qu'en se rapprochant de 9, il y a presque affleurement.
- Pour un rayon supérieur à 9, la bille est recouverte.

On envisage donc une étude au voisinage de 9 (travail à préparer pour la séance suivante).

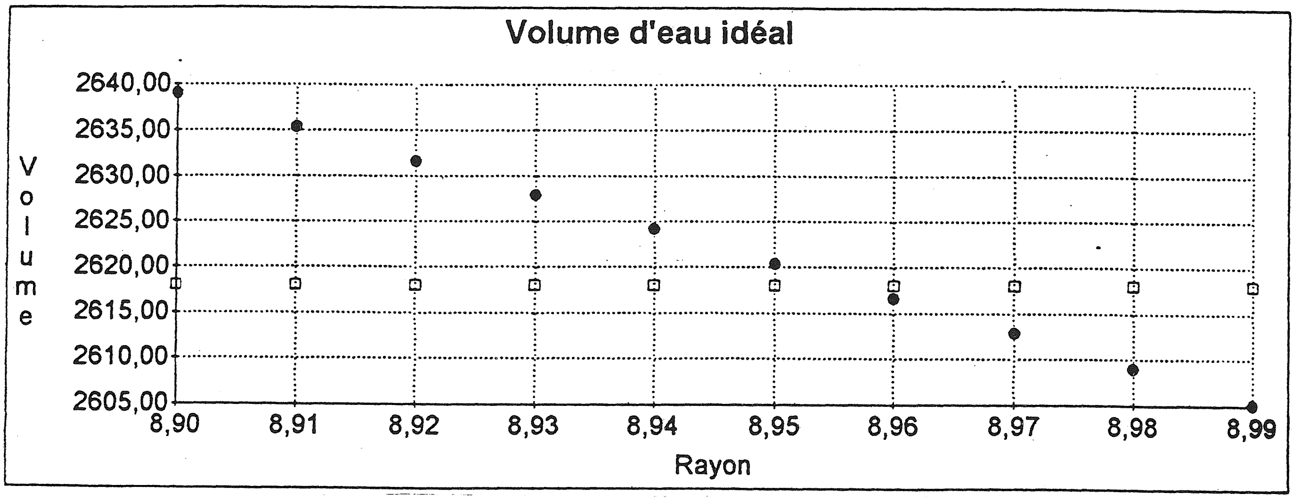
Séquence 3

Objectifs : Matériel : Situation fonctionnelle :	Analogues à ceux de la séquence 2

Tableau de valeurs obtenu au "grand écran" :

X	Vd	Vx	Vd - Vx
	$(2500/3) \times \pi$	$4\pi X\ (50 - X^2/3)$	
8,90	2617,99	2639,07	-21,07
8,91	2617,99	2635,39	-17,39
8,92	2617,99	2631,68	-13,69
8,93	2617,99	2627,96	-9,96
8,94	2617,99	2624,21	-6,21
8,95	2617,99	2620,43	-2,44
8,96	2617,99	2616,64	1,35
8,97	2617,99	2612,82	5,17
8,98	2617,99	2608,98	9,01
8,99	2617,99	2605,12	12,87

Graphique réalisé au "grand-écran" :



Analyse finale

- Le dernier tableau de valeurs proposé nous permet de situer la valeur du rayon entre 8,95 et 8,96 et le graphique correspondant permet une meilleure visualisation de la solution.

- Nous avons atteint grâce à une méthode d'encadrement par approximations successives une valeur de X convenable ; au besoin nous saurions trouver un encadrement encore plus fin.

Recherche d'une valeur plus précise, par le calcul (uniquement pour se faire plaisir !...)
- Résolution de l'équation Vx = Vd

$$\begin{aligned} 4\pi X\,(50 - X^2/3) &= (2500/3)\,\pi \\ 4\pi X\,(50 - X^2/3) - (2500/3)\,\pi &= 0 \\ 4X\,(50 - X^2/3) - (2500/3) &= 0 \\ 50X - X^3/3 - (625/3) &= 0 \\ 150X - X^3 - 625 &= 0 \\ X^3 - 150X + 625 &= 0 \end{aligned}$$

Solution évidente X = 5, factorisons ce polynôme

$$\begin{array}{llll|l} X^3 & & -150X & +625 & \underline{X-5} \\ \underline{-X^3} & \underline{+5X^2} & & & X^2 + 5X - 125 \\ & 5X^2 & -150X & & \\ & \underline{-5X^2} & \underline{+25X} & & \\ & & -125X & +625 & \\ & & \underline{+125X} & \underline{-625} & \\ & & 0 & 0 & \end{array}$$

donc $X^3 - 150X + 625 = (X-5)\,(X^2 + 5X - 125)$

recherchons les solutions correspondant au deuxième facteur :

$$X^2 + 5X - 125 = 0$$
$$\Delta = 25 + 4 \times 125$$
$$\Delta = 525$$

$X1 = (-5 + \sqrt{525})/2$ $\quad$ $X2 = (-5 - \sqrt{525})/2$

$X1 \approx 8{,}956....$ $\quad$ $X2 \approx -13{,}956...$

Seule X1 convient bien sûr.

"LE CÔNE"

"Le cône"

Quelques points de repère pour le professeur :

Niveaux : Bon niveau de 3ème.
Rubrique : Volume.
Logiciel : Works.

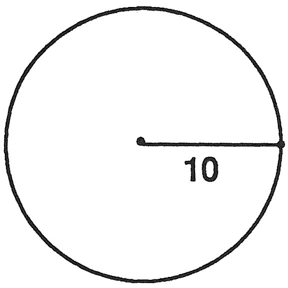
Prérequis :

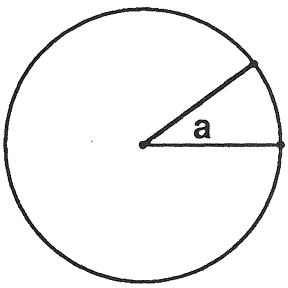
- Angle plein.
- Longueur du cercle.
- Théorème de Pythagore.
- Volume du cône.
- Racine carrée.
- Identités remarquables.

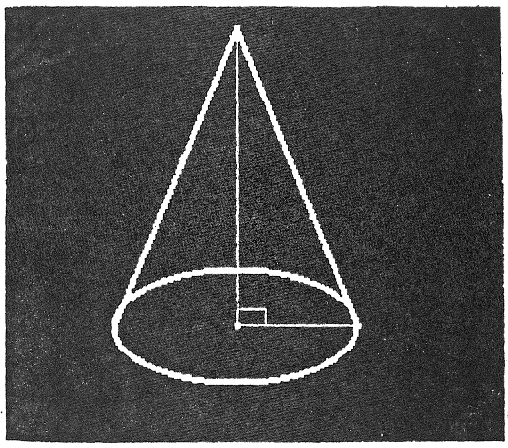
Problème

On dispose d'un disque de rayon 10 cm. On découpe un secteur de mesure a de ce disque afin d'en faire un cône.

Pour quelle(s) valeur(s) de a le volume du cône est-il maximum?







On conviendra d'appeler : *a la mesure du secteur que l'on enlève,*
b la mesure de celui qui reste,
l la longueur du périmètre de la base,
R le rayon de base du cône,
V son volume.

Déroulement de l'activité
2 séquences de travail

Séquence 1

Objectifs :
- Proportionnalité.
- Conjecture.
- Test de ces conjectures à partir de mesures.
- Décomposition d'un calcul complexe, recherche de calculs-types.

Matériel :
- Calculatrices, matériel de cartonnage, éprouvettes graduées, vermiculite.

Situation fonctionnelle :

- Travail individuel à la maison (construction du cône).
- Travail par groupes en classe.

Activités :
- A la maison : après avoir présenté le problème à toute la classe, le professeur indique à chaque élève une valeur de a parmi les valeurs suivantes 20°, 40°, 60°, 80°, 120°, 140°, 160° ou 180°, mais un élève peut construire plusieurs cônes avec des angles a de son choix.

- En classe : évaluation du volume de chaque cône en le remplissant de vermiculite et en utilisant des éprouvettes graduées.

Premières conclusions :

- La classe propose la **conjecture** suivante : le volume du cône varie bien en fonction de a.

- Après avoir mesuré le rayon de base du cône et sa hauteur, les élèves calculent le volume de chacune de leurs réalisations, comparent les résultats obtenus et sont confortés dans leur conjecture initiale.

Algorithmisation du calcul du volume du cône

Formule générale permettant de calculer le volume du cône : $V = (1/3)\ \pi\ R^2\ h$

Nous devons donc calculer R et h.

Calcul de R (en fonction de a)

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre, donc le périmètre de base du cône est $2\pi \times 10 \times b/360$

donc $P = (2\pi \times 10 \times b) / 360 = 2\pi R$

or $b = 360 - a$

donc $R = (360 - a) / 36$

$R = 10 - (a/36)$

donc $R^2 = [\ 10 - (a/36)]^2$

Calcul de h (en fonction de a)

D'après le théorème de Pythagore

$h^2 + R^2 = 10^2$

$h = \sqrt{100 - R^2}$

$h = \sqrt{100 - [10 - (a/36)]^2}$

Calcul de V (en fonction de a)

$$V = (1/3)\ \pi\ [10 - (a/36)]^2 \sqrt{100 - [10 - (a/36)]^2}$$

$$V = (1/3)\ \pi\ [10 - (a/36)]^2 \sqrt{[10 + (10 - a/36)]\ [10 - (10 - a/36)]}$$

$$V = (1/3)\ \pi\ [10 - (a/36)]^2 \sqrt{(20 - a/36) \times a/36}$$

Pour la séquence suivante les élèves doivent préparer chez eux :

- Un tableau de valeurs de V correspondant aux choix retenus pour a : 20°, 40°, 60°, 80°, 120°, 140°, 160° et 180°,
- Un graphique, point par point, représentant ces valeurs.

Séquence 2

Objectifs :
- Construction et analyse d'un tableau de valeurs,
- Comparaison des résultats,
- Construction et analyse d'une représentation graphique,
- Mise en évidence d'un volume maximum.

Matériel :
- Tableur.
- Grapheur.
- Papier millimétré.

Situation fonctionnelle :

- Travail collectif au "grand écran".
- Travail individuel crayon-papier.

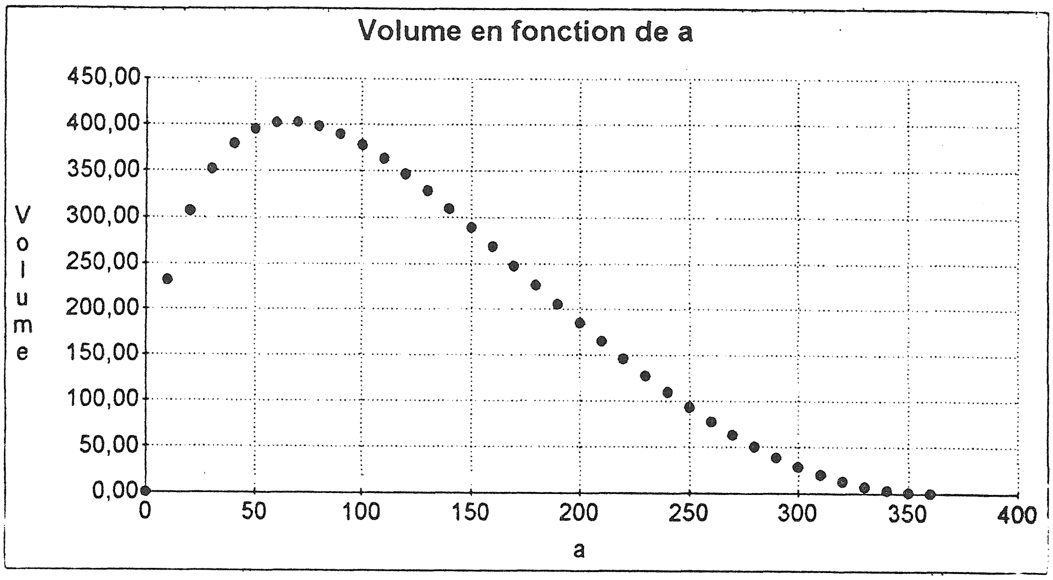
Activités :
- Comparaison des travaux réalisés à la maison par chaque élève avec ceux entrepris collectivement au tableur puis au grapheur et projetés sur le "grand écran".

Tableau de valeurs obtenu au "grand écran" :

a	R	h	V
	10-a/36	$\sqrt{100-R^2}$	$(1/3)\pi R^2 h$
0	10,00	0,00	0,00
20	9,44	3,29	307,00
40	8,89	4,58	379,06
60	8,33	5,53	401,99
80	7,78	6,29	398,17
100	7,22	6,92	377,80
120	6,67	7,45	346,90
140	6,11	7,92	309,56
160	5,56	8,31	268,74
180	5,00	8,66	226,72
200	4,44	8,96	185,30
220	3,89	9,21	145,91
240	3,33	9,43	109,70
260	2,78	9,61	77,62
280	2,22	9,75	50,42
300	1,67	9,86	28,68
320	1,11	9,94	12,85
340	0,56	9,98	3,23
360	0,00	10,00	0,00

Remarque technique : Sous Works le nombre π s'obtient par : PI (),
et $\sqrt{n}$ par RACINE (n).

Graphique réalisé au "grand-écran" :



Conclusions de cette étape

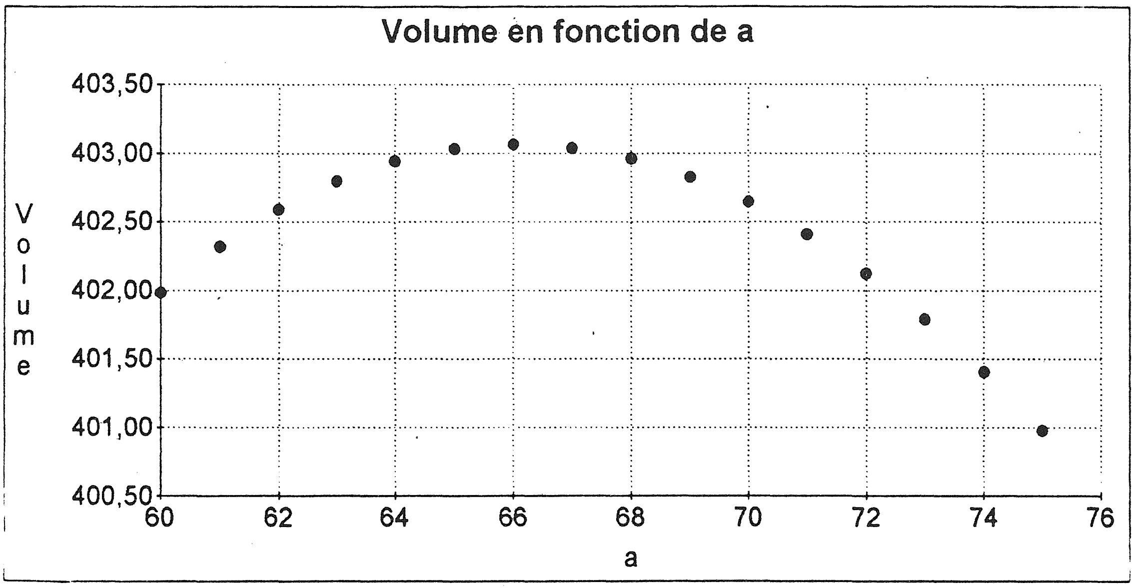
- La mise en évidence de l'existence d'un maximum se fait aisément.
- La précision du tableau et celle du graphique ne permettent pas de définir une valeur satisfaisante pour V.
- Une discussion collective s'engage pour le choix des bornes de l'intervalle où se trouve le maximum. La classe s'accorde pour retenir : 60° < a < 75° .
- Cet intervalle comporte 16 valeurs entières ; on les répartit à raison de trois par groupe d'élèves, puis on collecte les résultats au tableau et chacun construit un graphique à partir de ces résultats.

A l'issue de ce **travail individuel**, la classe construit un nouveau tableau de valeurs puis un second graphique au "grand-écran" et chacun compare sa production à celle de l'ordinateur.

Tableau de valeurs obtenu au "grand écran" :

a	R	h	V
	10-a/36	$\sqrt{100-R^2}$	$(1/3)\pi R^2 h$
60	8,33	5,53	401,99
61	8,31	5,57	402,32
62	8,28	5,61	402,59
63	8,25	5,65	402,80
64	8,22	5,69	402,95
65	8,19	5,73	403,03
66	8,17	5,77	403,07
67	8,14	5,81	403,04
68	8,11	5,85	402,96
69	8,08	5,89	402,83
70	8,06	5,93	402,65
71	8,03	5,96	402,41
72	8,00	6,00	402,12
73	7,97	6,04	401,79
74	7,94	6,07	401,41
75	7,92	6,11	400,98

Graphique réalisé au "grand-écran" :



Analyse finale :

- Le dernier tableau de valeurs proposé nous permet de situer la valeur de l'angle a aux environs de 66° avec une précision satisfaisante. Le graphique correspondant permet une meilleure visualisation de la solution.

- Nous avons atteint grâce à une méthode d'encadrement par approximations successives une valeur de a convenable ; au besoin nous saurions trouver un encadrement encore plus fin.

"LE CYLINDRE"

"Le cylindre"

Quelques points de repère pour le professeur :

Niveaux : 5ème, 4ème.
Rubrique : Longueur, aire, volume.
Logiciel : Works.

Prérequis :

- Volume du cylindre, aire latérale.
- Aire d'un disque.
- Notion de variable.
- Utilisation des touches π et x^2 de la calculatrice.

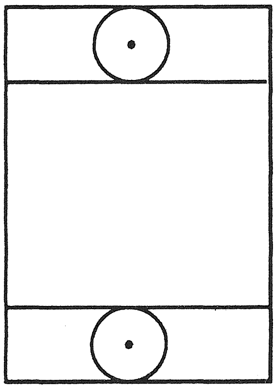
Problème

Dans une feuille de format A4 (21 x 29,7), on désire fabriquer le patron d'une boîte cylindrique avec couvercle. On souhaite que cette boîte ait le volume le plus grand possible.

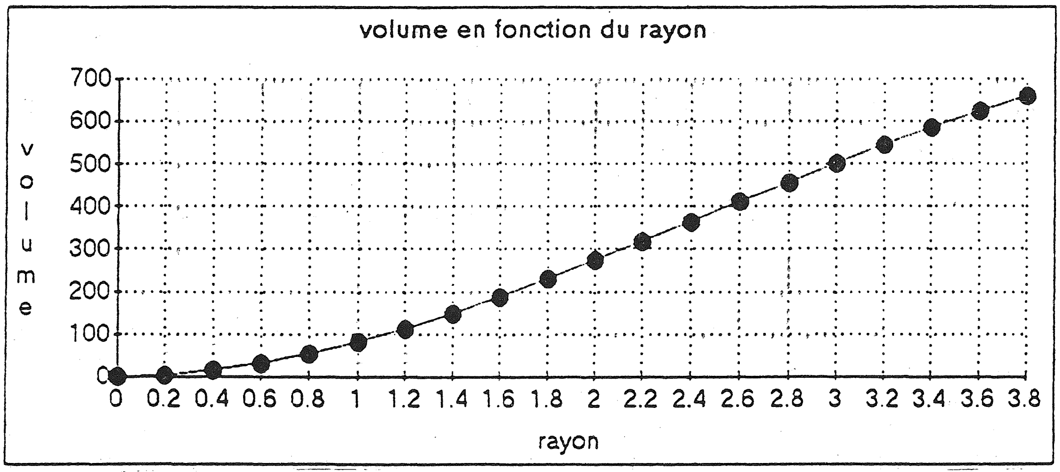
Attention ! Nous proposons ce problème à titre de contre-exemple. En effet, l'énoncé ressemble beaucoup à celui de la boîte cubique mais une étude théorique préalable nous indique que le volume de cette boîte cylindrique est une fonction du rayon. Sa dérivée est une fonction strictement positive dans l'intervalle pratique (imposé par les dimensions de la feuille A4). Le volume maximum est donc obtenu quand le rayon est maximum sous réserve que la longueur de la bande de papier restant quand on a découpé un disque-couvercle soit au moins égale au périmètre de ce disque.

Nous présenterons donc, ici, simplement une étude succincte des différents cas qui se présenteraient aux élèves si on leur posait un tel problème.

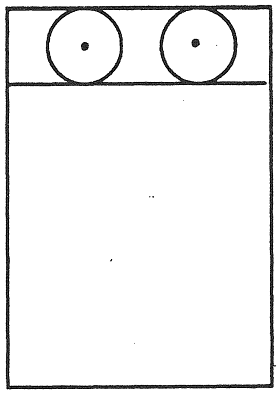
Premier cas



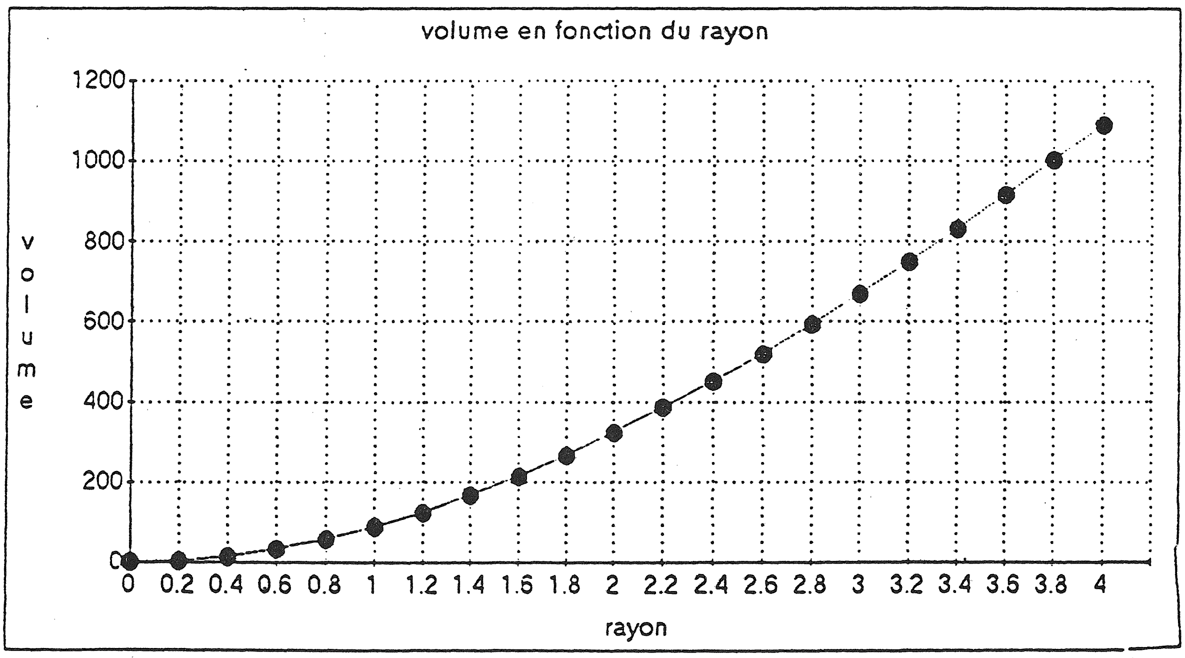
Courbe du volume en fonction du rayon :



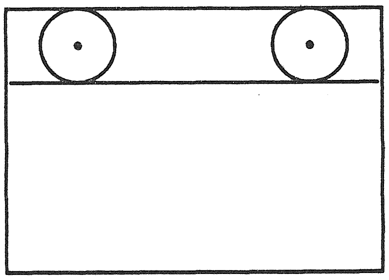
Deuxième cas



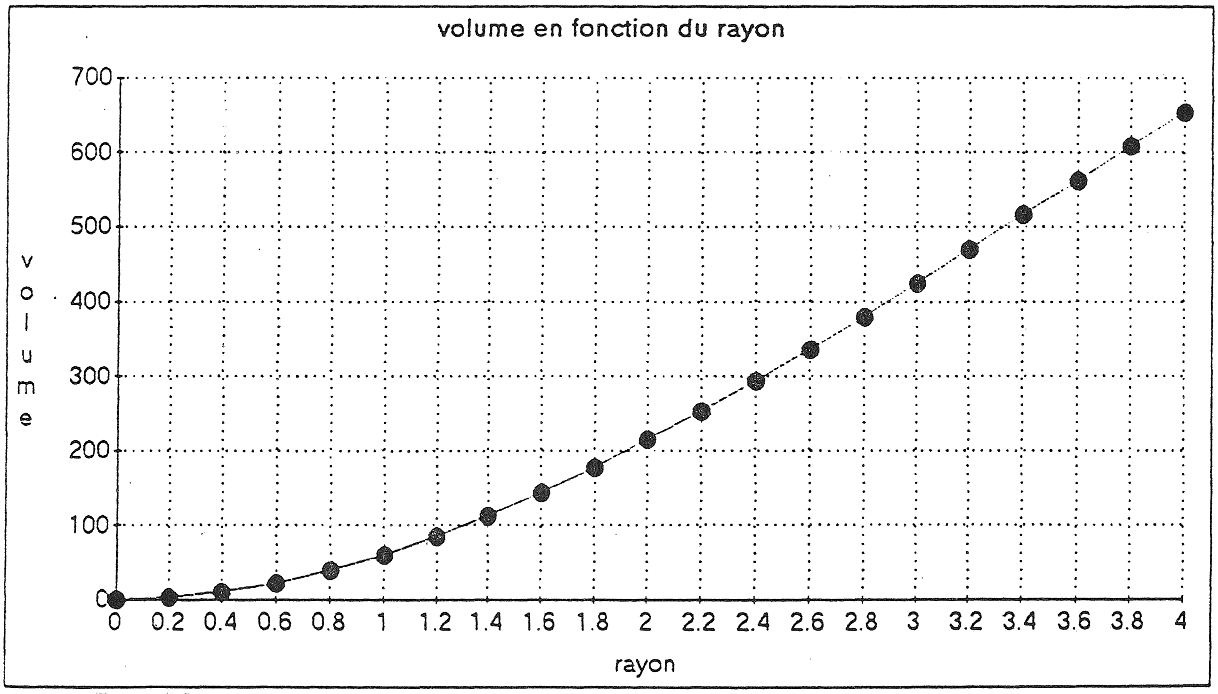
Courbe du volume en fonction du rayon :



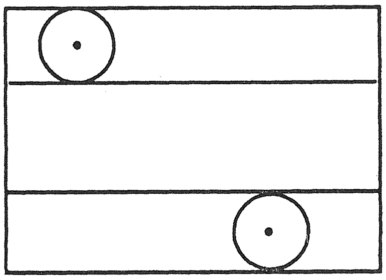
Troisième cas



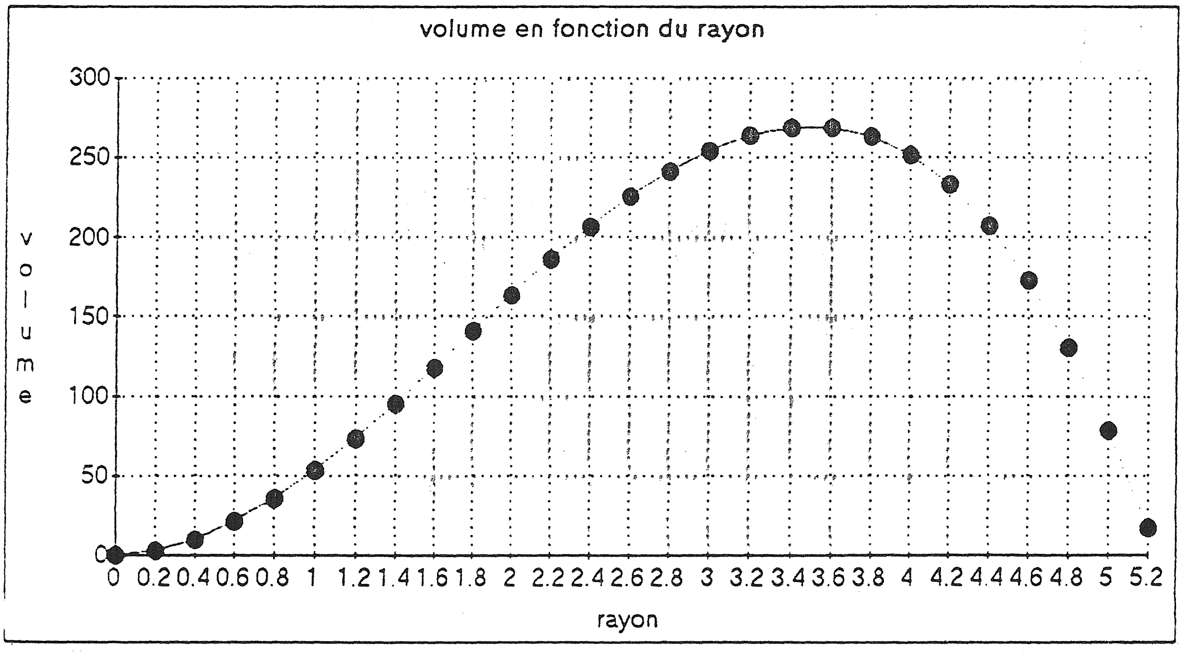
Courbe du volume en fonction du rayon :



Quatrième cas



Courbe du volume en fonction du rayon :



Analyse rapide de ces différentes possibilités :

- Les deux disques (le fond de la boîte et le couvercle) peuvent toujours être réalisés dans la même bande de papier car $4R < 2\pi R$.

- Seul le quatrième cas nous intéresserait pour la recherche d'un extremum par approximations successives. Or, dans ce cas, le volume maximum est très nettement inférieur à ceux que l'on obtiendrait dans les trois situations précédentes (environ 3 fois).

- La conjugaison de ces deux remarques suffit, à nos yeux, pour éviter de présenter un tel problème aux élèves si ce n'est, toutefois, pour les conduire à constater que la recherche d'un maximum n'est pas forcément toujours du type de celle mise en œuvre au cours de l'activité 1, mais n'y a-t-il pas autour de nous des exemples plus simples et au moins aussi efficaces ?

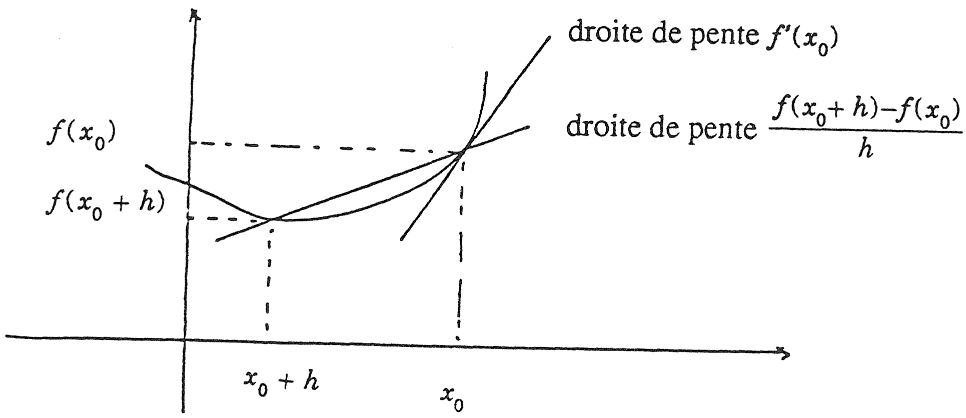
ANNEXE 1

RAPPEL SUR LA NOTION DE DERIVEE

Taux d'accroissement et nombre dérivé

Définition 1

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et x_0 appartenant à $]a,b[$. On définit le taux d'accroissement de f en x_0 par $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.



Définition 2

Si $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ existe, on dit que f est dérivable en x_0 et la valeur de cette limite est appelée le nombre dérivé en x_0 .

Exemple :

Soit $f(x) = x^2$ et x_0 un nombre réel.

On a $\dfrac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x_0+h)^2-x_0^2}{h} = 2x_0 .$$

Géométriquement :
- le taux d'accroissement est la pente de la droite passant par le point $(x_0, f(x_0))$ et le point $(x_0+h, f(x_0+h))$.
- le nombre dérivé est la pente de la tangente en $(x_0, f(x_0))$ à la courbe $y= f(x)$.

Fonctions dérivées

Définition

Si f est définie sur $]a,b[$ et admet un nombre dérivé en chaque point de $]a,b[$ alors f est dérivable sur $]a,b[$ et on appelle dérivée de f la fonction, notée f', définie telle que $f'(x)$ soit le nombre dérivé de f en x.

Exemples de dérivées

la fonction	x^n	a pour dérivée la fonction	nx^{n-1}
	$\sqrt{x}$		$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$1/x$		$-1/x^2$
	$\cos x$		$-\sin x$
	$\sin x$		$\cos x$

- Si f et g sont deux fonctions dérivables sur $]a,b[$ alors la fonction $f(x) + g(x)$ a pour dérivée $f'(x) + g'(x)$ et la fonction $f(x).g(x)$ a pour dérivée $f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$.

- Si g est dérivable sur $]a,b[$ à valeurs dans un intervalle $]c,d[$ et si f est dérivable sur $]c,d[$, alors la fonction $f(g(x))$ a pour dérivée $g'(x).f'(g(x))$

Tableau de variations

Principe de Lagrange

Soit f une fonction définie et dérivable sur $]a,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

si $f' = 0$ sur $]a,b[$ alors f' est une fonction constante sur $]a,b[$.

si $f' > 0$ sur $]a,b[$ sauf en un nombre fini de points, où elle s'annule, alors la fonction f est strictement croissante sur $]a,b[$.

si $f' < 0$ sur $]a,b[$ sauf en un nombre fini de points, où elle s'annule, alors la fonction f est strictement décroissante sur $]a,b[$.

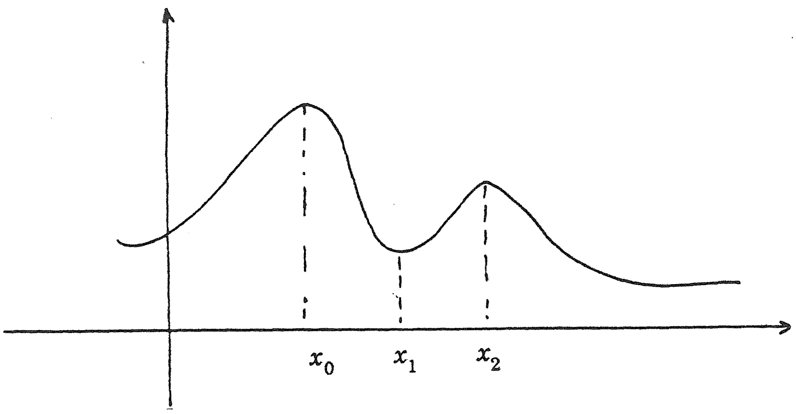
Connaissant le signe de f' sur $]a,b[$, on connaît le sens de variation de f.
Si f' change de signe, on découpe $]a,b[$ en une réunion d'intervalles disjoints et on a le sens de variation de f sur chaque intervalle.

Notion d'extremum local

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]a,b[$ et x_0 appartenant à $]a,b[$, on dit que $f(x_0)$ est un minimum (respectivement maximum) local de la fonction f lorsque $f(x_0)$ est la plus petite (respectivement la plus grande) valeur de f sur un intervalle ouvert contenant x_0.

Exemple



$f(x_0)$ et $f(x_2)$ sont des maxima locaux.
$f(x_1)$ est un minimum local.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $[a,b]$. Comment caractériser ses extrema ?

Condition suffisante

Si f' s'annule en x_0 en changeant de signe, alors $f(x_0)$ est un extremum local.

Condition nécessaire et non suffisante

Si $f(x_0)$ est un extremum local alors $f'(x_0) = 0$

Contre-exemple

$f(x) = x^3$ et $f'(x) = 3x^2 > 0$
$f'(0) = 0$ mais 0 n'est pas un extremum local.

Résolution d'équation et bijection

Théorème des valeurs intermédiaires

soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $[a,b]$;

- si pour tout x dans $[a,b]$, on a $f'(x) > 0$ alors f réalise une bijection strictement croissante de $[a,b]$ sur $[f(a), f(b)]$;
- si pour tout x dans $[a,b]$, on a $f'(x) < 0$ alors f réalise une bijection strictement décroissante de $[a, b]$ sur $[f(b), f(a)]$;

En conséquence, si f' garde un signe constant sur $[a,b]$, pour toute valeur y_0 comprise entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe une valeur et une seule x_0 dans $[a,b]$ telle que $y_0 = f(x_0)$.

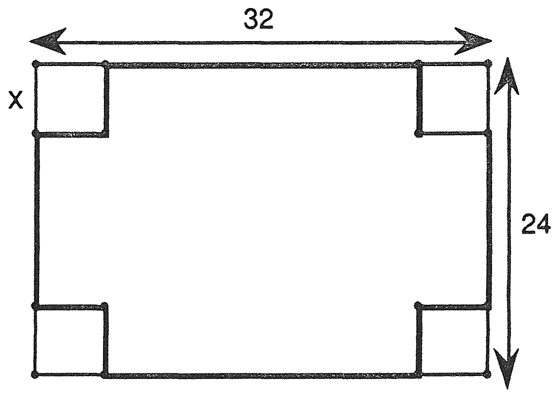
A quoi peut servir l'étude de la dérivée d'une fonction pour un professeur de collège ?

La connaissance et l'étude de la dérivée d'une fonction peuvent guider le professeur dans le choix des exercices à proposer aux élèves. Les différentes propriétés de la dérivée vont permettre de distinguer la nature des exercices proposés.

Exemple 1 : *La boîte*

On dispose d'un carton rectangulaire de longueur 32 *cm* et de largeur 24 *cm*. On évide les quatre coins d'un carré de côté x et on forme la boîte, sans couvercle.

Etude du volume de la boîte en fonction de x, sur l'intervalle $[0,12]$:



$V(x) = x(32 - 2x)(24 - 2x) = 4x^3 - 112x^2 + 768x$
$V'(x) = 12x^2 - 224x + 768$

On a à étudier le signe d'un polynôme du second degré :

Discriminant : $\Delta = 224^2 - 4 * 12 * 768 = 13312 > 0$

Ce polynôme admet deux racines dans $\mathbb{R}$:

$x_1 = 4/3(7+\sqrt{13}) \approx 14{,}14$ $\qquad$ $x_2 = 4/3(7-\sqrt{13}) \approx 4{,}52$

Il est nécessaire de connaître la position de x_1 et x_2 par rapport à 0 et 12, pour en déduire le signe de V' sur l'intervalle $[0,12]$:

Tableau de variations

x	0		x_2		12		x_1	
$V'(x)$		+	0		−		0	+
$V(x)$	0	↗	1552,52	↘	0	↘		↗

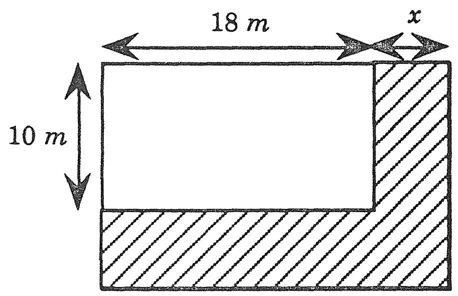
La fonction $V(x)$ est :

- maximum pour la valeur $x_2 \approx 4{,}52$
- strictement croissante pour $x \in [0, x_2]$
- strictement décroissante pour $x \in [x_2, 12]$

Le volume maximum obtenu est donc $1552{,}52\ cm^3 = 1{,}552\ l$ pour une longueur de $x \approx 4{,}52\ cm$.

Exemple 2 : *La terrasse*

On a une maison rectangulaire de longueur 18 m et largeur 10 m, on veut construire une terrasse de largeur, x, bordant la maison sur deux côtés adjacents .



Etude de l'aire A de la terrasse en fonction de sa largeur, x :
Soit $A = f(x) = 18x + 10x + x^2 = x^2 + 28x$
On a $f'(x) = 2x + 28 > 0$
Cette fonction est strictement croissante, elle n'a donc pas d'extrema. D'une part, $f(0) = 0$ et d'autre part, elle n'est pas bornée.
Le théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer l'existence d'une solution et d'une seule à l'équation $f(x) = A_0$ dans un intervalle$[0, a]$, si on connaît a tel que $f(a) \geq A_0$.

Dans l'activité proposée, on veut chercher x tel que l'aire de la terrasse soit égale à l'aire de la maison, 180 m^2. Si on choisit $a = 10$, on obtient $f(a) = 380 > 180$. Alors on sait qu'il existe une solution et une seule :

$$x_0 \in \,]0, 10[\text{ telle que } f(x_0) = 180.$$

On a deux méthodes pour résoudre cette équation :

- Résolution graphique :

  $(x_0, f(x_0))$ est le point d'intersection de la droite $y = 180$
  et de la courbe $y = f(x) = x^2 + 28x$.

- Résolution algébrique de l'équation $f(x) = 180$:

  Soit $x^2 + 28x - 180 = 0$

  Discriminant : $\Delta = 784 + 4*180 = 1504 > 0$

  L'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$:

  $x_1 = -14 - 2\sqrt{94}$ $\quad x_2 = -14 + 2\sqrt{94}$

  Une seule est positive, on a donc la solution

  $$x_0 = x_2 \approx 5{,}39$$

Exemple 3 : *La casserole*

Un industriel veut fabriquer une casserole cylindrique, de contenance un litre.
Etude de la surface de métal utilisée, S, en fonction du rayon de la base, R :

Volume de la casserole : $1000 = \pi R^2 h$
Surface du métal : $S = \pi R^2 + 2\pi Rh$
On a h en fonction de R : $h = 1000 / \pi R^2$

Donc $S = f(R) = \pi R^2 + 2000 / R$
$f'(R) = 2\pi R - 2000 / R^2$

Le signe de $f'(R)$ est le même que celui de $2\pi R^3 - 2000$
qui s'annule pour $R_1^3 = 1000 / \pi$

c'est-à-dire $R_1 = \sqrt[3]{1000/\pi} \approx 6{,}83$

Tableau de variations

R	0		R_1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

On obtient que la surface est :

- minimale pour $R_1 \approx 6{,}83\ cm$. On remarque qu'alors, on a : $h = R_1$
- strictement décroissante pour $R \in [0 , R_1]$
- strictement croissante pour $R \in [R_1, +\infty [$

Exemple 4 : *La bille dans le cylindre*

On dispose d'un cylindre de rayon de base 10 *cm*, de hauteur 25 *cm*, on y place une bille de plomb de rayon R, $0 < R < 10$. On y verse l'eau jusqu'à la hauteur de $2R$, affleurant la bille.

Soit V le volume d'eau utilisé.

Etude de ce volume en fonction de R sur l'intervalle $[0, 10]$.

On a $V = f(R) = \pi*100*2R - 4/3*\pi R^3$.

$f'(R) = \pi(200 - 4R^2)$

$f'(R) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R^2 = 50$

$\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad R = \pm\sqrt{50} \approx \pm 7{,}07$

Tableau de variation

R	0	5	$\sqrt{50}$		10
f'		+	0	−	
f	0 $\nearrow$		2961,92	$\searrow$	2094,39

On obtient un maximum pour $R = \sqrt{50} \approx 7{,}07$, on a alors $V \approx 2961{,}92$.
Dans l'activité proposée, on se donne une bille de rayon $R_0 = 5$ *cm*, un volume d'eau affleurant cette bille, et on cherche une bille d'un autre rayon R_1, réalisant l'affleurement.
Ce problème a-t-il une solution pour $R_0 = 5$ *cm* ? Quelles sont les valeurs possibles de R_0 pour qu'il en ait une ? Le théorème des valeurs intermédiaires et le tableau des variations permettent de répondre à ces deux questions :
la fonction f est une bijection entre les intervalles $[0, \sqrt{50}]$ et $[0, f(\sqrt{50})]$ d'une part, et les intervalles $[\sqrt{50}, 10]$ et $[f(10), f(\sqrt{50})]$, d'autre part.

On a $f(10) > 0$. Il est donc nécessaire de déterminer R tel que $f(R) = f(10)$ et $0 < R < \sqrt{50}$.

Il faut résoudre l'équation :

$$\pi(200*R - 4/3*R^3) = \pi(2000-4/3*1000) = 2000\pi/3$$

$$600R - 4R^3 = 2000$$

$$-4R^3 + 600R - 2000 = 0$$

Cette équation du troisième degré peut se résoudre en factorisant le polynôme du premier membre.

On sait que 10 est racine de ce polynôme, donc il se factorise en $(R - 10)(aR^2 + bR + c)$.
On a deux méthodes pour déterminer a, b, c :

- la division euclidienne de $-4R^3 + 600R - 2000$ par $R-10$
- l'identification des coefficients de $-4R^3 + 600R - 2000$ avec ceux de :
$$(R - 10)(aR^2 + bR + c) = aR^3 + (b - 10a)R^2 + (c - 10b)R - 10c.$$

On obtient :

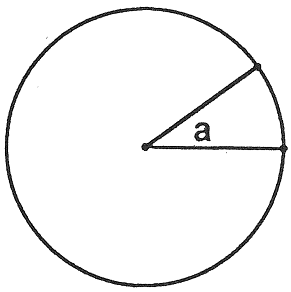
$$-4R^3 + 600R - 2000 = (R - 10)(-4R^2 - 40R + 200)$$

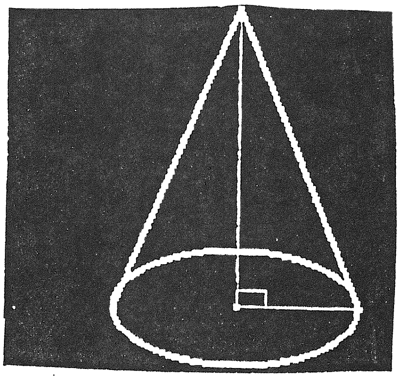
La solution $0 < R < \sqrt{50}$ vérifie : $-4R^2 - 40R + 200 = 0$
On résout l'équation du second degré
On a $\Delta = 4800$ d'où $R = -5 \pm 5\sqrt{3}$
La racine positive est $R = 5\,(\sqrt{3}-1) \approx 3{,}66$
On a donc $f(5\,(\sqrt{3}-1)) = f(10) \approx 2094{,}39$

Ainsi, pour l'activité proposée, on a $R_0 = 5 \in [5\,\sqrt{3}-1,\ \sqrt{50}]$, donc il existe une autre solution unique $R_1 \in [\sqrt{50},\ 10]$. De même, l'activité a un sens pour toute valeur de $R_0 > 5\,(\sqrt{3}-1)$; si on choisit une bille ayant un rayon $R_0 \in [5\,(\sqrt{3}-1),\ \sqrt{50}]$, (respectivement $R_0 \in [\sqrt{50},\ 10]$), on trouve une solution unique $R_1 \in [\sqrt{50},\ 10]$ (respectivement $\in [5(\sqrt{3}-1),\ \sqrt{50}]$), telle que $f(R_0) = f(R_1)$.

Exemple 5 : *Le cône*

On dispose d'un disque de rayon 10 *cm*. On retire un secteur d'angle a dans ce disque afin de faire un cône.





Etude du volume de ce cône en fonction de a .
Si R est le rayon de la base d'un cône et h sa hauteur, on a son volume $V = (1/3)\pi R^2 h$.
En fonction de a dans l'intervalle $[0, 360[$, on a R et h :
$R = 10 - a/36 \qquad h = (20 - a/36)a/36$.

On a ainsi à étudier la fonction :

$$V = f(a) = 1/3\ \pi\ (10-a/36)^2\ \sqrt{(20-a/36)(a/36)}$$

$f'(a)$ est du signe de $(10-a/36\ )(a^2 - 720\,a + 43200)$

f' s'annule pour $a_1 = 360$,

$$a_2 = 120(3-\sqrt{6}) \approx 66{,}06 \quad \text{et} \quad a_3 = 120(3+\sqrt{6}) \approx 653{,}93$$

d'où le tableau de variations

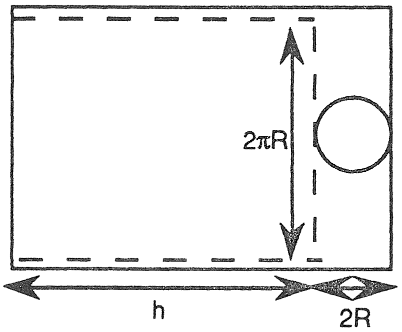
a	0		a_2		360	
$f'(a)$		+	0	−	0	+
$f(a)$	0	↗	403,07	↘	0	↗

Sur l'intervalle des valeurs possibles de a, f admet un maximum pour $a_2 = 120(3-\sqrt{6}) \approx 66{,}06$, elle est strictement croissante sur $[0\ ,\ a_2]$ et strictement décroissante sur $[a_2\ ,360]$.

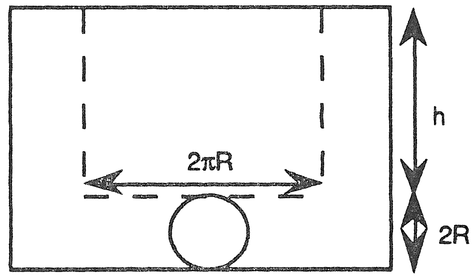
Exemple 6 : *Le patron du cylindre*

On dispose d'une feuille de papier de dimension 21 $cm \times 29{,}7\ cm$; on considère 4 façons de découper le patron d'un cylindre (base circulaire et surface latérale) :

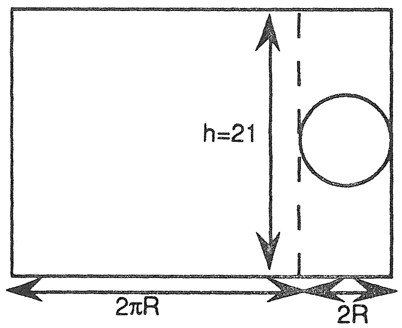
Patron 1



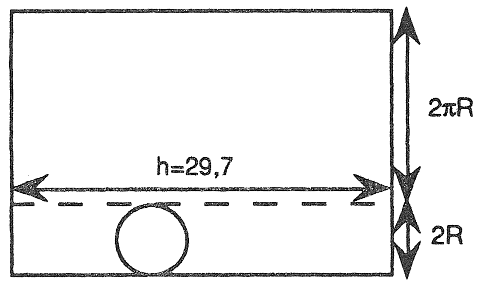
Patron 2



Patron 3



Patron 4



Etude du volume des cylindres construits :

Patron 1

On a les contraintes pour l'exécution :

$2R \leq 21$ et $2\,\pi\,R \leq 21$ c'est-à-dire $R \leq 21/2\pi \approx 3{,}34$

$V_1 = f(R) = \pi\,R^2(29{,}7 - 2R)$

$f'(R) = 2\,\pi\,R(29{,}7 - 3\,R)$

$f'(R) = 0$ pour $R = 0$ et $R = 9{,}9$

On a le tableau de variations

R	0		3,34		9,9		10,5
f'	0	+			0	−	
$f(R)$	0	↗	806,76	↗	3048,28	↘	

Sur l'intervalle des valeurs possibles pour R, $[0\,;\,3{,}34]$, f est croissante, on obtient un volume maximum pour $R \approx 3{,}34$, soit $V_1 \approx 806{,}76$.

Patron 2

On a les contraintes pour l'exécution :

$2R \leq 21$ et $2\,\pi\,R \leq 29{,}7$ c'est-à-dire $R \leq 29{,}7/2\pi \approx 4{,}72$

$V_2 = f(R) = \pi\,R^2(21-2R)$

$f'(R) = 2\,\pi\,R(21-3\,R)$

$f'(R) = 0$ pour $R = 0$ et $R = 7$

On a le tableau de variations

R	0		4,72		7		10,5
f'	0	+			0	−	
$f(R)$	0	$\nearrow$	810,29	$\nearrow$	1077,56	$\searrow$	

Sur l'intervalle des valeurs possibles pour R , $[0\ ;\ 4{,}72]$, f est croissante, on obtient un volume maximum pour $R \approx 4{,}72$, soit $V_2 \approx 810{,}29$

Patron 3

On a les contraintes pour l'exécution :

$2R + 2\pi R \leq 29{,}7$ c'est-à-dire $R \leq 29{,}7 / (2(\pi+1)) \approx 3{,}58$

$V_3 = f(R) = \pi R^2(21)$

$f'(R) = 42\pi R$

$f'(R) = 0$ pour $R = 0$ et $f'(R) > 0$ pour $R > 0$

Sur l'intervalle des valeurs possibles pour R , $[0\ ;\ 3{,}585]$, f est croissante, on obtient un volume maximum pour $R \approx 3{,}58$, soit $V_3 \approx 847{,}90$

Patron 4

On a les contraintes pour l'exécution :

$2R + 2\pi R \leq 21$ c'est-à-dire $R \leq 21 / (2(\pi+1)) \approx 2{,}54$

$V_4 = f(R) = \pi R^2(29{,}7)$

$f'(R) = 59{,}4\pi R$

$f'(R) = 0$ pour $R = 0$ et $f'(R) > 0$ pour $R > 0$

Sur l'intervalle des valeurs possibles pour R , $[0\ ;\ 2{,}54]$, f est croissante, on obtient un volume maximum pour $R \approx 2{,}54$, soit $V_4 \approx 599{,}60$

Dans les quatre cas, on constate que si on veut un cylindre avec couvercle, pour la valeur de R donnant le volume maximal, on a la possibilité de faire le patron du couvercle dans la surface inutilisée, sans toucher au patron du cylindre de volume maximum déjà trouvé.

La détermination des valeurs de R donnant une valeur maximum paraît plus complexe dans le cas des patrons 1 et 2, mais pour les patrons 3 et 4, la hauteur est constante indépendante de R, il est normal de subdiviser la longueur (patron 3) ou la largeur (patron 4) en deux morceaux tels que $2R$ et $2\pi R$, cette dimension de la feuille est proportionnelle à R.

Le choix entre l'un des quatre patrons est un choix entre quatre problèmes différents et ne rentre pas dans un chapitre de recherche d'un extremum par approximations successives.

Conclusion :

Dans chaque exemple, il s'agit d'étudier une fonction $f(x)$ sur un intervalle donné de $\mathbb{R}$, borné ou non. Selon les résultats du tableau de variations, l'exemple donne lieu à différents types d'exercices :

1) Si la fonction est monotone sur l'intervalle donné, exemples 2 et 6, le tableau de variations permet d'affirmer selon le choix de A_0, si l'équation

$$f(x) = A_0$$

admet une solution unique ou pas de solution.

En donnant une valeur de A_0 convenable, l'exercice proposé aux élèves consistera à approximer la solution de l'équation à l'aide du tableau et du graphique.

2) Si la fonction admet un extremum dans l'intervalle donné, exemples 1, 3, 4 et 5, chacun des exemples pourra donner lieu à deux types d'exercices en utilisant le tableau et le graphique :

- approximer la valeur x donnant l'extremum et la valeur de celui-ci
- étant donné une valeur convenable de x_0, choisie à l'aide du tableau de variations, approximer la solution x différente de x_0 de l'équation :

$$f(x) = f(x_0)$$

Ainsi à partir d'une situation donnée l'étude de la dérivée d'une fonction $f(x)$, permet de déterminer le but et les données numériques d'un exercice à proposer aux élèves.

ANNEXE 2

FICHE TECHNIQUE

Commençons par charger le logiciel WORKS ;

soit en tapant WORKS après que l'écran ait inscrit a:\>
soit en cliquant deux fois vite sur WORKS (en solution microsoft).

Il apparaît une page presque vierge,

on clique sur FICHIER puis sur CREER UN NOUVEAU DOCUMENT.
devant les élèves, on prendra OUVRIR UN DOCUMENT EXISTANT.

Choisissons le TABLEUR pour avoir un tableau de valeurs.

La feuille 1 apparaît avec les colonnes A,B,C,D,... AL... mais on en voit 8 ; et les lignes 1,2,3,4,... mais on en voit 20.

Plaçons nous dans l'exemple *"La terrasse"* :

LES TITRES

Nous voulons 6 colonnes.

Allons dans FORMAT puis dans LARGEUR DE COLONNE, modifions la largeur 10 et prenons 13 ; seule la colonne A s'agrandit car la cellule A1 était la seule active, le rectangle A1 était le seul encadré, (la largeur 10 dépend de l'initialisation du logiciel).

Avant d'aller dans FORMAT nous activons les 6 colonnes ensemble en commençant à cliquer en A1 et en s'arrêtant uniquement en F1 (on maintient le doigt sur la souris) les 6 cases sont alors actives, c'est-à-dire encadrées, colorées.

Retournons dans FORMAT pour modifier les 6 largeurs en une fois.

Cliquons sur A1 pour y écrire "largeur", passons à B1 avec une des 4 flèches ou avec la souris pour y écrire "aire de R1"...

LES CALCULS

Colonne A, nous voulons la suite de nombres de 0 à 10,

Activons A2, tapons 0 ; activons A3 pour taper 1...
Il y a plus rapide : après avoir tapé 0, nous activons une dizaine de cases de cette colonne en même temps et allons dans EDITION pour utiliser CREER UNE SUITE de nombres, de pas 1, nous n'obtenons rien si nous avons oublié de garder 0 actif.

Activons B2, attention, nous ne tapons plus un nombre, nous attendons un résultat de calcul qui sera 18 fois la largeur.

Aussi nous tapons **=18*A2,** (n'oubliez pas le signe =)
Tapons sur **ENTREE**

ou

Activons une autre case,
Dans la case B2 s'inscrit le résultat 0.

Nous contrôlons ce que nous tapons ou avons tapé ou attendons dans la barre de contrôle au dessus de la feuille 1.

Activons C2 puis tapons =**10*A2**
Activons D2 pour y écrire =**A2*A2**
Activons E2 pour écrire =**B2+C2+D2**
Et enfin F2 pour écrire =**180**
Remarquons que A2 s'obtient en le tapant ou en le cherchant avec la souris ou les flèches.

LES RESULTATS

Activons toute la colonne B en commençant par cliquer sur le 0, en maintenant le doigt appuyé sur la souris, et en ne s'arrêtant que sur la case B12, le dernier nombre.

N'oublions pas de prendre le 0 de B2 car il est le modèle, il est **=18*0.**
Allons dans EDITION puis RECOPIER VERS LE BAS. Toutes les cases actives sont alors calculées.

Nous pouvions aller plus vite en activant toutes les cases de B2 à F12, en maintenant le doigt appuyé sur la souris pendant le déplacement en diagonale. Ensuite, nous allons dans EDITION...

Le tableau est fini ; en cas d'erreur allons revoir si les cases B2 ... sont bien du type $\boxed{\text{= formule}}$ et que la formule est bonne.

LES GRAPHIQUES

Nous voulons l'aire de la terrasse en fonction de sa largeur et l'aire de la maison.
Activons les deux colonnes E et F, y compris les étiquettes (facultatif).
Cliquons sur GRAPHIQUES puis sur CREER UN NOUVEAU GRAPHIQUE.
Il apparaît un histogramme avec légendes.
Allons dans PRESENTATION si nous préférons une courbe.
Allons dans EDITION si nous voulons inscrire des titres sur les axes, si nous voulons y placer des valeurs.

CHAPITRE II

SOUS-FIGURES
DANS UNE CONFIGURATION COMPLEXE

FIGURES-TYPES

SOUS-FIGURES DANS UNE CONFIGURATION COMPLEXE

FIGURES-TYPES

I - UN CONSTAT

Les élèves qui réussissent bien en géométrie élémentaire semblent mettre en œuvre, dans leurs résolutions de problèmes, des procédures qui "relient" certains éléments de la figure à une "banque mentale" de figures-types qu'ils ont amassées et classées au fil de leurs apprentissages.

Certains procèdent par analogie directe avec des situations vues antérieurement (dans ce cas, ils disposent d'une "banque" très étoffée), d'autres recherchent simplement quelques éléments caractéristiques ("banque" moins riche mais peut-être plus efficace car mieux organisée) et émettent des hypothèses à partir de ces points nodaux.

II - OBJECTIFS DU GROUPE

2-1 Dans ce chapitre, nous n'avons pas souhaité dénombrer et classer les figures-types que rencontre un élève au collège de la 6ème à la 3ème (nous manquions réellement de temps).

2-2 Nous nous sommes attachés à construire des activités qui conduisent l'élève à prendre quelques séries d'initiatives pour mettre en évidence des sous-figures intéressantes dans des configurations relativement complexes, à savoir : analyser la figure initiale .

I - Sans faire de tracés supplémentaires. Problèmes proposés :
  I.1 Bissectrices.
  I.2 Synthèse (deux versions).
  I.3 Thalès.
II - En reliant des points existants. Problèmes proposés :
  II.1 Le poisson.
  II.2 Distance minimale (deux versions).
III - En créant de nouveaux points. Problèmes proposés :
  III.1 Milieu.
  III.2 Trirect (deux versions).
  III.3 Le pont (deux versions).

2-3 Le logiciel "Calques géométriques" (à partir de la version 2) permet très facilement d'isoler des sous-figures afin :

- d'aider d'éventuels élèves en difficultés à analyser la configuration initiale,
- ou tout simplement d'organiser, au sein du groupe classe, une confrontation des représentations quant à la ou les démarches à mettre en œuvre pour résoudre les problèmes posés.

III - PROPOSITIONS D'UTILISATION DES PRODUITS INFORMATIQUES

En général, le professeur pourra :

3-1 Proposer l'énoncé du problème à la classe, par écrit, de manière habituelle.

3-2 Après un temps de réflexion (travail individuel ou en groupes), il amènera la classe à conjecturer à partir de la feuille 1 de Calques.

3-3 Au fil des propositions, et si nécessaire, il pourra faire apparaître les sous-figures correspondantes à l'aide des feuilles suivantes, de 2 à 7 en fonction des situations et dans l'ordre dicté par ces propositions.

3-4 A ce stade, il est utile de reformuler le problème car très souvent les élèves se rendent compte que l'une des sous-figures met en évidence l'étape majeure du raisonnement. Mais lors de cette reformulation, on prendra bien soin de lier cette étape majeure à son contexte (voir remarque 1).

3-5 Tout au long des recherches individuelles ou en groupes, on pourra également se servir de l'écran de l'ordinateur (et non du grand écran qui, lui, est réservé aux interventions à caractère collectif) pour débloquer un ou plusieurs élèves ayant la même difficulté et ce, sans gêner les autres.

3-6 Au moment de rédiger la solution du problème, et si la prise en compte de toutes les étapes risque d'être longue et fastidieuse, on peut toujours ne retenir que l'essentiel c'est-à-dire :

- Faire définir par la classe la (ou les) démarche(s) judicieuse(s) en précisant les différentes étapes qui permettent d'atteindre le résultat.
- Démontrer la conclusion majeure (qui n'est pas forcément la conclusion finale) en supposant éventuellement connues certaines conclusions préalablement nécessaires.

Remarque 1 : Il existe un réel danger à substituer aux problèmes que nous proposons des problèmes à questions multiples sous prétexte que pour obtenir la solution il faut passer par plusieurs conclusions partielles. En aucun cas nous n'avons voulu créer des "gros problèmes" comportant des "sous-problèmes", mais plutôt **conduire les élèves à rechercher une démarche qui prend en compte plusieurs étapes induites par des sous-figures intéressantes.**

Remarque 2 : Les activités plus complexes ont été étudiées en groupes pour mieux contrôler l'avancée des travaux et permettre un échange entre élèves de niveaux différents.

IV - PLACE DU TRAVAIL SUR LES SOUS-FIGURES DANS L'APPRENTISSAGE DU RAISONNEMENT

Dans notre esprit, ce travail concourt, avec d'autres, à l'apprentissage de l'analyse et à l'entraînement aux démarches déductives.

Cependant, il est capital de l'associer aux activités :

- de reproduction, - de construction, - de classement, - de codage et décodage, - d'association de textes et de figures, - de constitution d'îlots logiques,	voir document GRF EDAP 35 1994/95

pour permettre à chaque élève de se construire le plus fiablement possible sa banque mentale de figures-types qui lui servira de référence au cours de ses recherches présentes et futures.

I - SANS TRACE SUPPLEMENTAIRE

1 - LES BISSECTRICES

2 - SYNTHESE

3 - THALES

1 - LES BISSECTRICES

Niveaux : Fin 5ème ou 4ème.

Enoncé du Problème

ABCD est un parallélogramme. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ coupe en J celle de l'angle $\widehat{ABC}$ et en I celle de l'angle $\widehat{ADC}$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BCD}$ coupe en L celle de l'angle $\widehat{ADC}$ et en K celle de l'angle $\widehat{ABC}$. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ? (ou que peux-tu dire du quadrilatère IJKL ?).

Après confrontation des conjectures, on choisit de démontrer que c'est un rectangle.

Contenus majeurs :

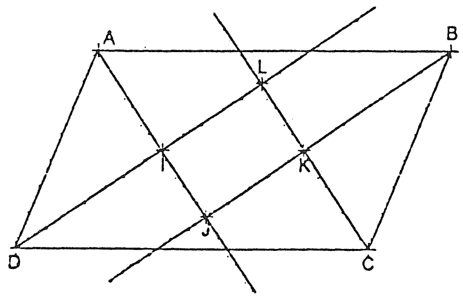
- Parallélogramme.
- Angles consécutifs supplémentaires, angles complémentaires.
- Somme des angles du triangle.
- Rectangle.

Suites possibles :

- IJKL peut-il être un carré ?
- Les points I, J, K et L peuvent-ils être confondus ?

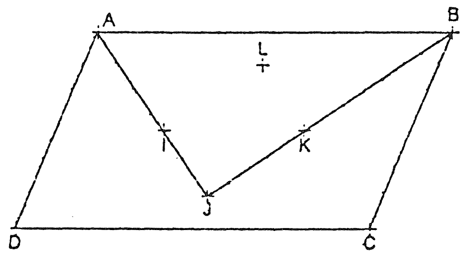
BISSECT

1



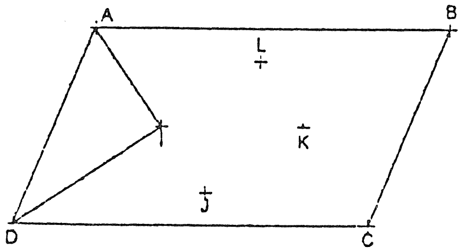
On déplace les sommets du parallélogramme ABCD pour faire apparaître le rectangle.

2



Possibilité d'afficher la mesure des angles $\widehat{JAB}$ et $\widehat{ABJ}$.

3



La même démarche sera réutilisée pour plusieurs triangles.

2 - SYNTHESE

Niveaux :

- Fin de la 4ème, pour établir un bilan des différentes notions vues en cours d'année.
- Début de la 3ème, pour rappeler les connaissances vues en 4ème.

Pour cet exercice, différentes figures sont possibles suivant que l'orthocentre du triangle AIJ se trouve à l'intérieur ou hors du triangle. On propose ici les deux types de figures dans les fichiers :

- Synthint → orthocentre à l'intérieur.
- Synthext → orthocentre à l'extérieur.

Enoncé du Problème

Deux cercles de centres O_1 et O_2 sont sécants en A et B. La droite (O_1A) coupe en I le cercle de centre O_1 et en L le cercle de centre O_2. La droite (O_2A) coupe en K le cercle de centre O_1 et J le cercle de centre O_2. On appelle M le milieu du segment [BJ] et N celui de [AB].

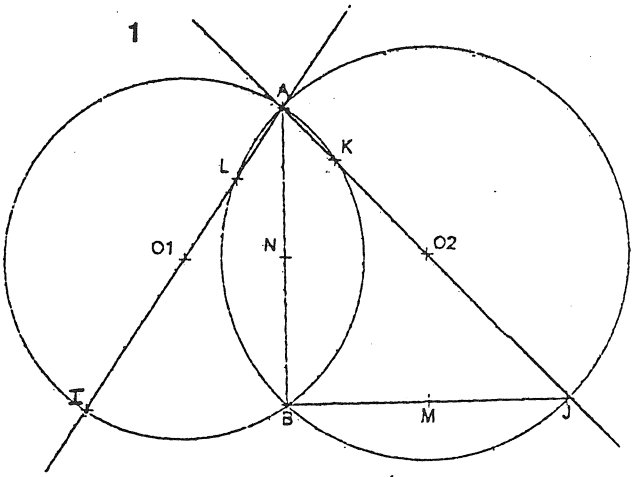
- *Construire une figure correspondant à ce texte.*
- *Ecrire au moins trois conjectures à propos de cette figure.*
- *Démontrer certaines d'entre-elles.*
- *Démontrer que les droites (IK), (JL) et (AB) sont concourantes.*

Contenus majeurs :

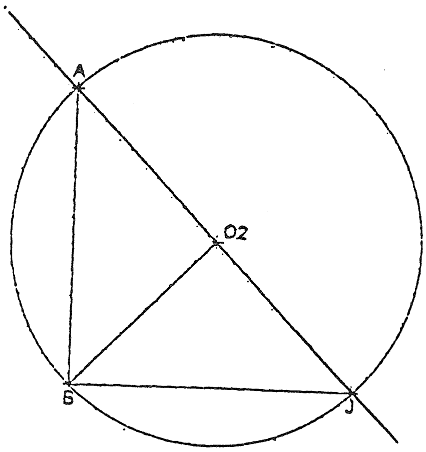
- Propriétés de la droite des milieux.
- Hauteurs concourantes.
- Triangle rectangle et cercle circonscrit.
- Médiane relative à l'hypothénuse.
- Points alignés.
- Rectangle.

SYNTHINT

1

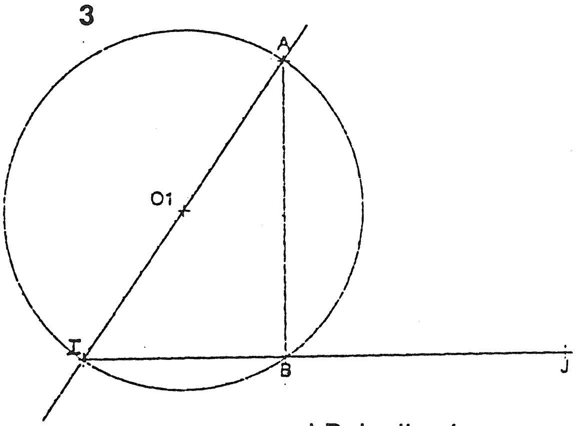


2



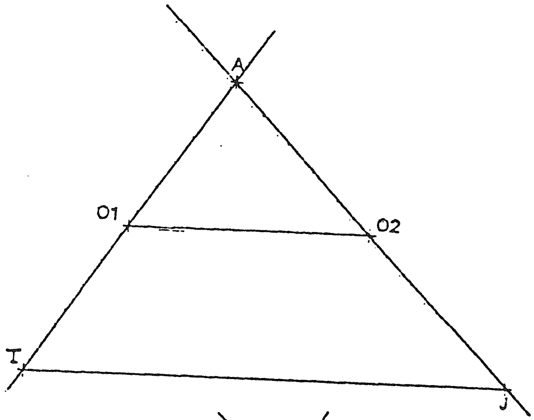
ABJ rectangle en B

3

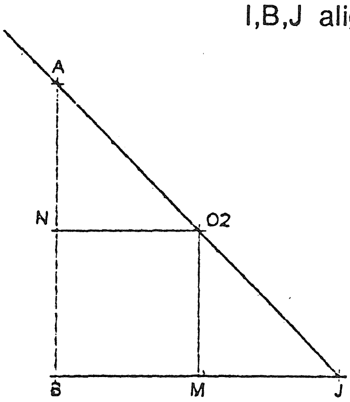


I,B,J alignés

4

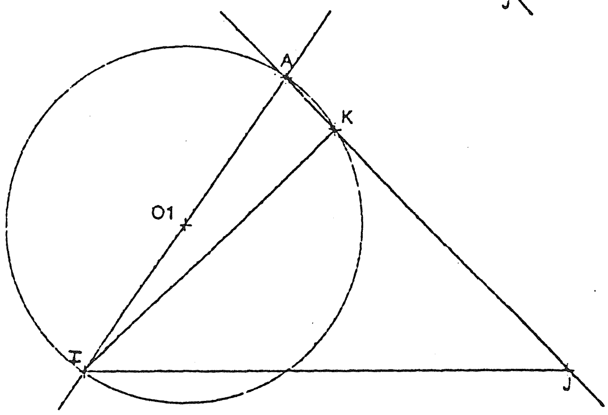


5



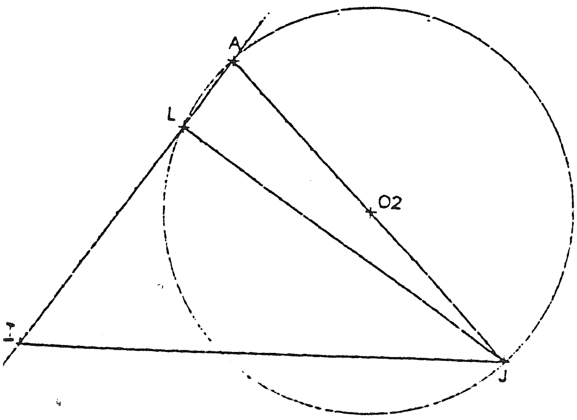
BNO_2M rectangle

6

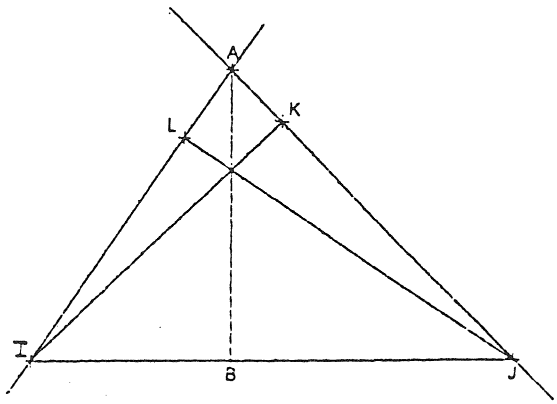


(IK) hauteur issue de I dans AIJ

7

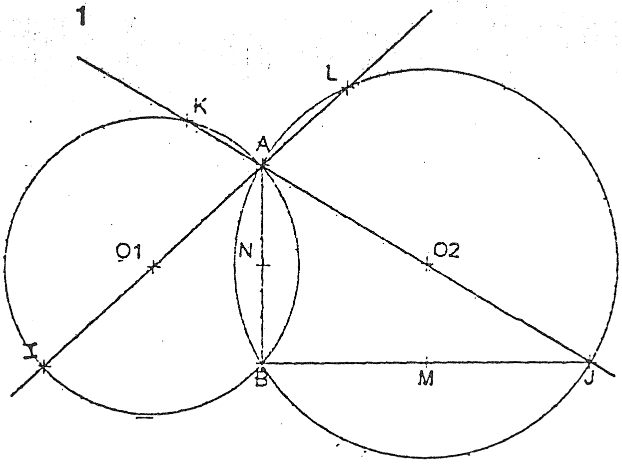


8

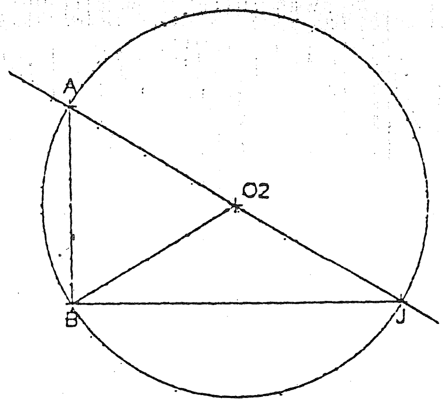


SYNTHEXT

1

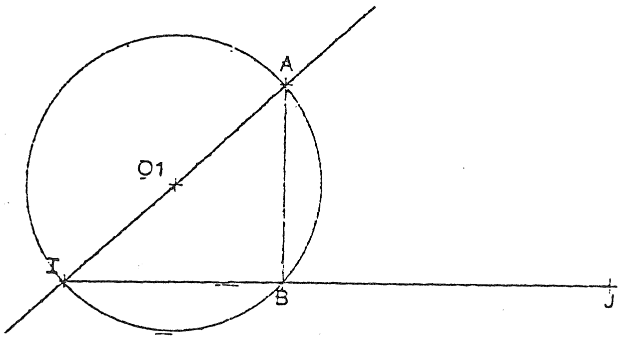


2

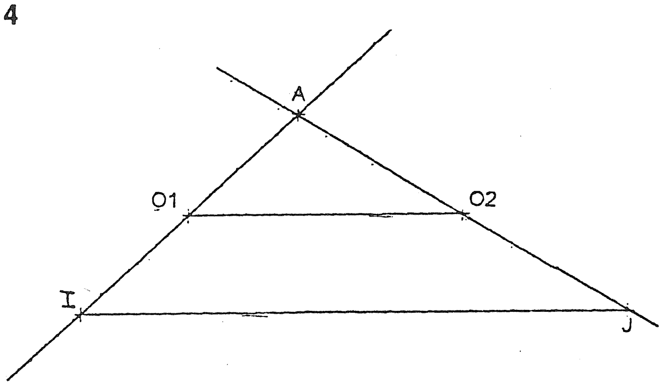


ABJ rectangle en B

3

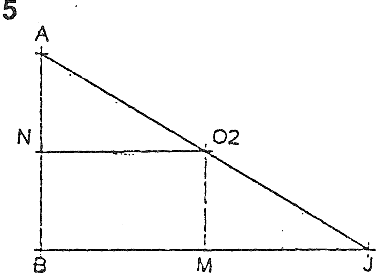


4



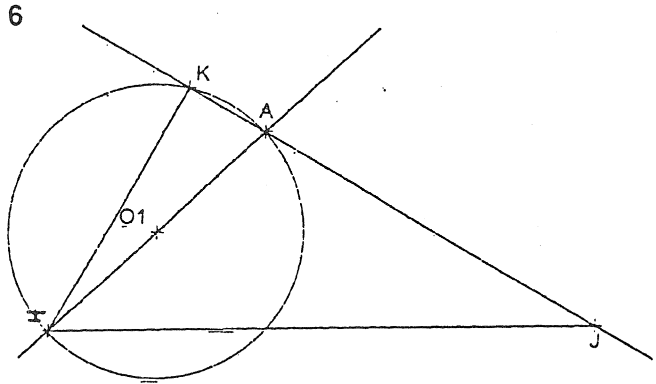
I,B,J alignés

5



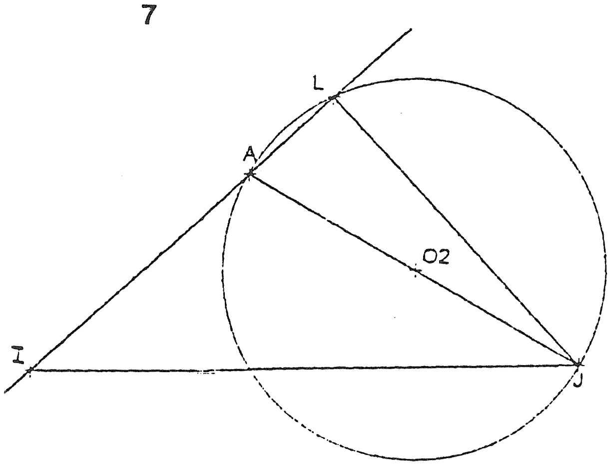
BNO$_2$M rectangle

6

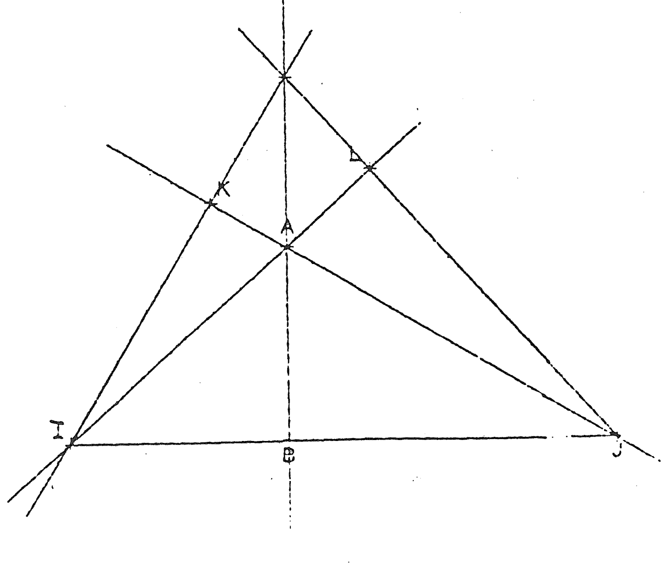


(IK) hauteur issue de I dans AIJ

7



8



3 - THALES

Niveaux :

4ème ou 3ème.

Enoncé du Problème

Soit un triangle ABC et le symétrique E de C par rapport à A.
La parallèle à (BC) passant par E coupe (AB) en S.
La parallèle à (AC) passant par S coupe (BC) en I.
La parallèle à (AB) passant par I coupe (AC) en M.
La parallèle à (BC) passant par M coupe (AB) en P.
La parallèle à (AC) passant par P coupe (BC) en L.

Montrer que (EL) est parallèle à (AB) et calculer le périmètre de l'hexagone SIMPLE en fonction de celui de ABC.

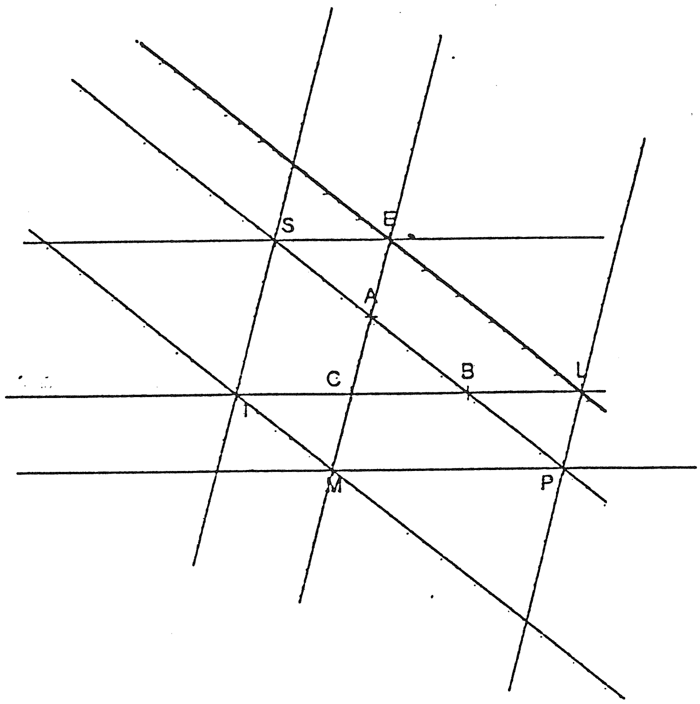
Contenus majeurs :

en 4ème :
- droite des milieux
- projection du milieu
- factorisation en situation

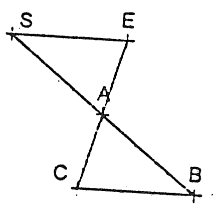
en 3ème :
- théorème de Thalès dans différents cas de figures
- réciproque de ce théorème
- factorisation en situation

THALES

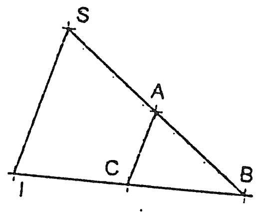
1



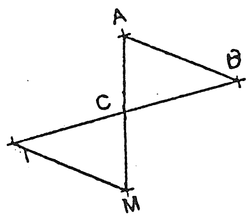
2



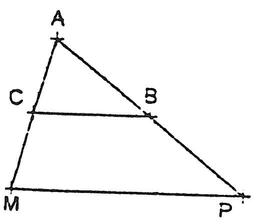
3



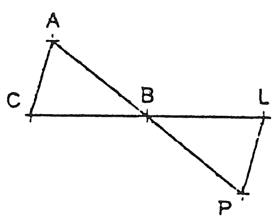
4



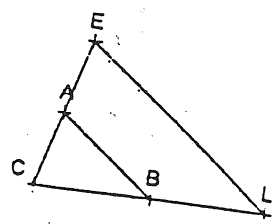
5



6



7



II - EN RELIANT DES POINTS EXISTANTS

1 - LE POISSON

2 - DISTANCE MINIMALE

1 - LE POISSON

Niveaux :

4ème ou 3ème.

Enoncé du Problème

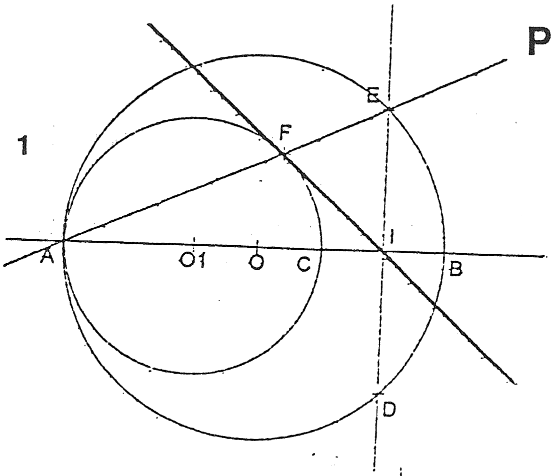
Construis un grand cercle (C) de diamètre [AB] et de centre O.
Marque un point O_1 sur le segment [AO] et trace le cercle (C') de centre O_1 et passant par A. Ce cercle coupe [AB] en C.
Appelle I le milieu de [BC].
La médiatrice de [BC] coupe (C) en D et E. La droite (AE) coupe (C') en F.
Démontre que la droite (FI) est tangente à (C').

Contenus majeurs :

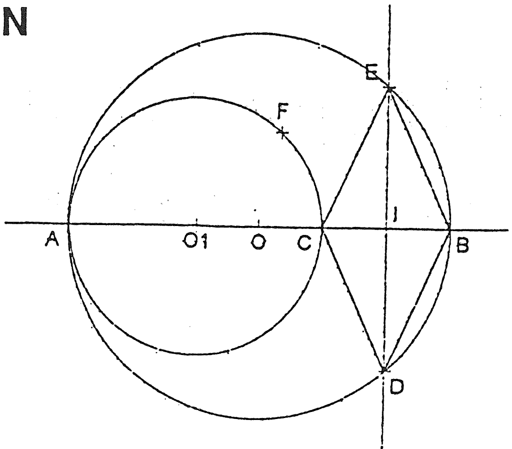
- Triangle rectangle et cercle.
- Médiatrice.
- Losange.
- Triangle isocèle.
- Triangle rectangle et médiane.

POISSON

1

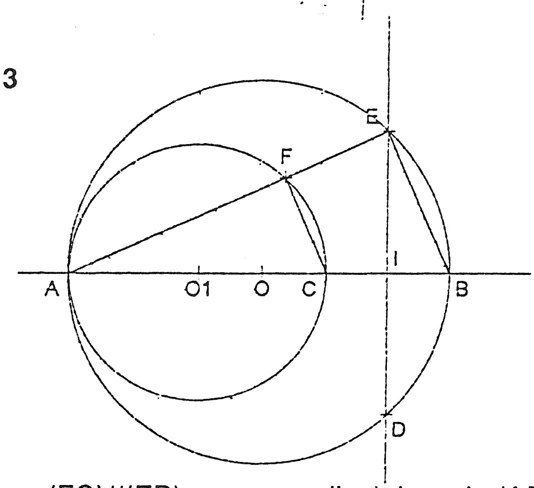


2



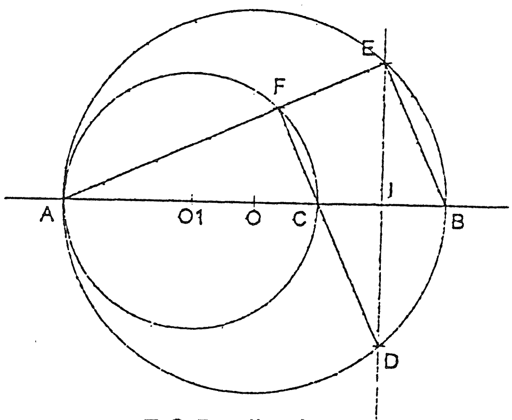
CEBD est un losange

3



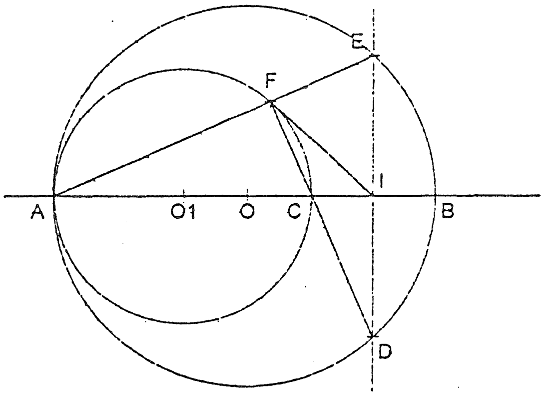
(FC)//(EB) : perpendiculaires à (AE)

4



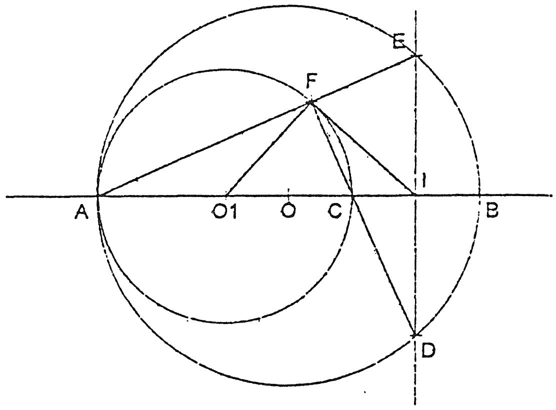
F,C,D alignés

5



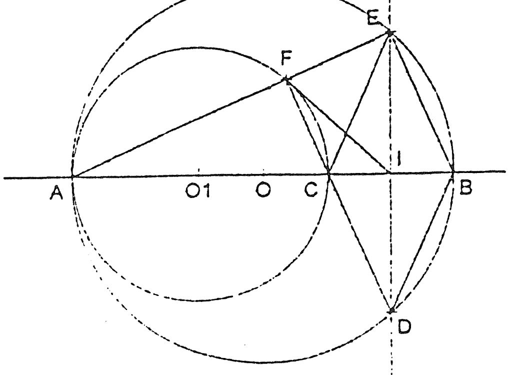
FED rectangle

6



Utiliser des égalités d'angles

7



2 - DISTANCE MINIMALE

Niveaux :

5ème ou 4ème.

Enoncé du Problème en 5ème

On considère un triangle ABC rectangle en A et un point P quelconque du segment [BC].
La perpendiculaire à (AC) passant par P coupe la droite (AC) en J.
La perpendiculaire à (AB) passant par P coupe la droite (AB) en I.
Où doit-on placer P (sur [BC]) pour que la distance IJ soit minimale ?

Remarque : La construction étant réalisée à l'écran, on pourra mesurer [IJ], déplacer P sur [BC] et conjecturer.

Contenus majeurs :

- Propriétés du rectangle.
- Plus courte distance d'un point à une droite.

Enoncé du Problème en 4ème

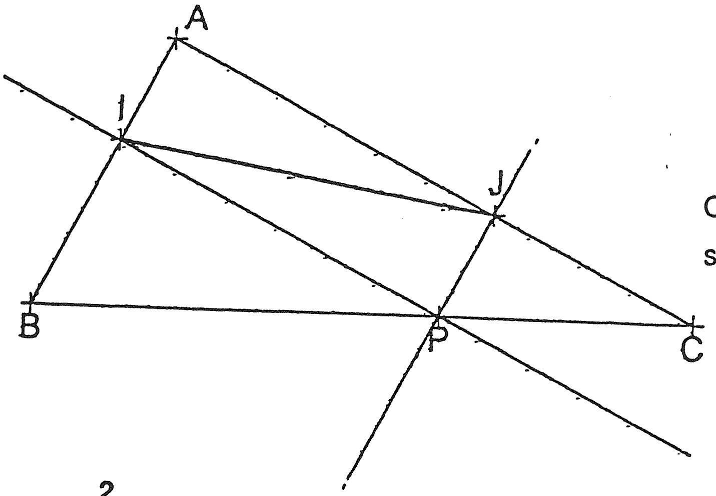
On considère un triangle ABC rectangle en A et un point P quelconque du segment [BC].
Le cercle de diamètre [PC] coupe [AC] en J.
Le cercle de diamètre [PB] coupe [AB] en I.
Où doit-on placer P (sur [BC]) pour que la distance IJ soit minimale ?

Contenus majeurs :

- Propriétés du rectangle.
- Distance d'un point à une droite.
- Triangle rectangle et cercle.

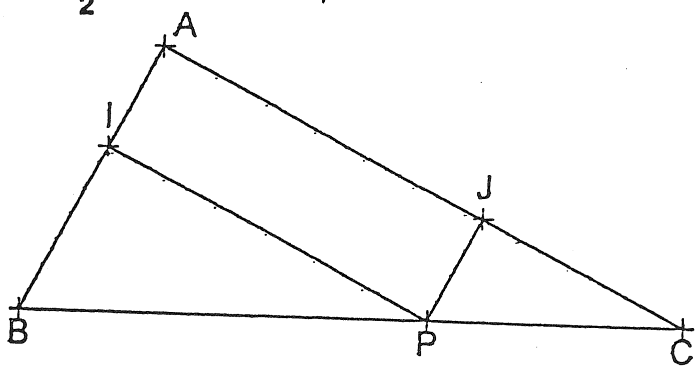
DISTMIN1

1

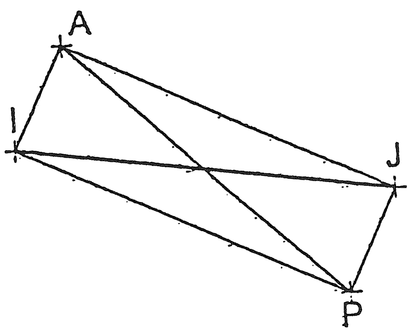


On affiche la mesure de [IJ] et on déplace P sur [BC].

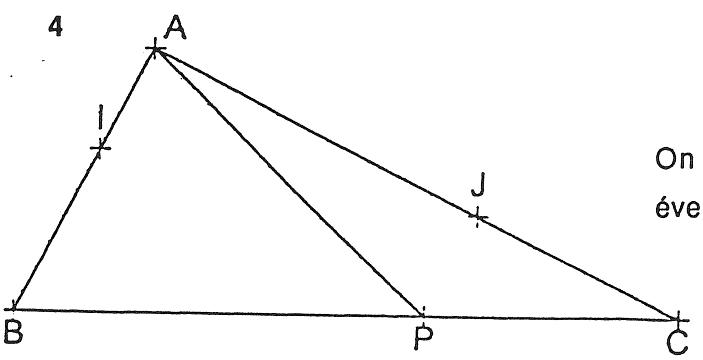
2



3



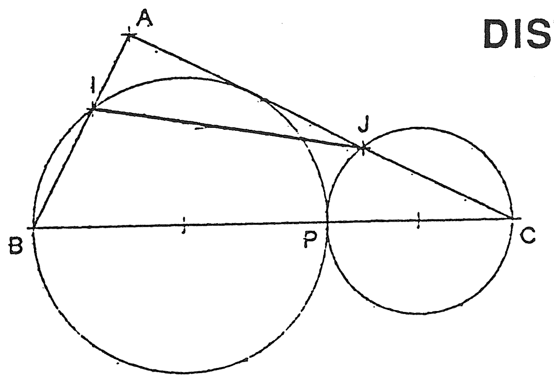
4



On déplace P sur [BC] et on peut éventuellement afficher la mesure de [AP].

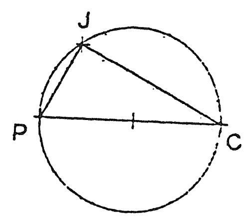
DISTMIN2

1



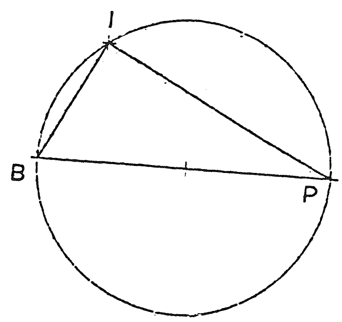
On affiche la mesure de IJ et on déplace P sur [BC].

2



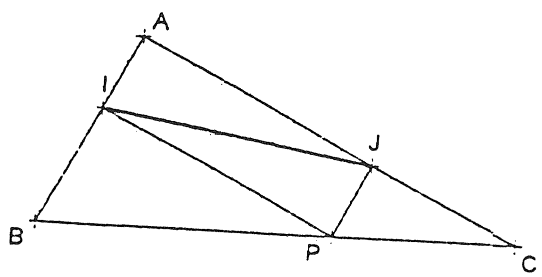
On fait apparaître le triangle PJC.

3



On fait apparaître le triangle BIP.

4



On trace le rectangle AJPI pour utiliser les propriétés de ses diagonales.

III - EN CREANT DE NOUVEAUX POINTS

1 - MILIEU

2 - TRIRECT

3 - LE PONT

1 - UN MILIEU

Niveaux :

4ème ou 3ème.

Enoncé du Problème

On considère un triangle ABC. Soit I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC].

Construire, en utilisant uniquement une règle non graduée et un crayon, le milieu M de [IB].

Au cours de l'expérimentation, nous avons observé deux démarches comportant des points communs mais aussi quelques variations quant aux choix des sous-figures retenues et des propriétés mises en avant :

Milieu1 -> Médianes concourantes, parallélogrammes, droite des milieux et sa réciproque.

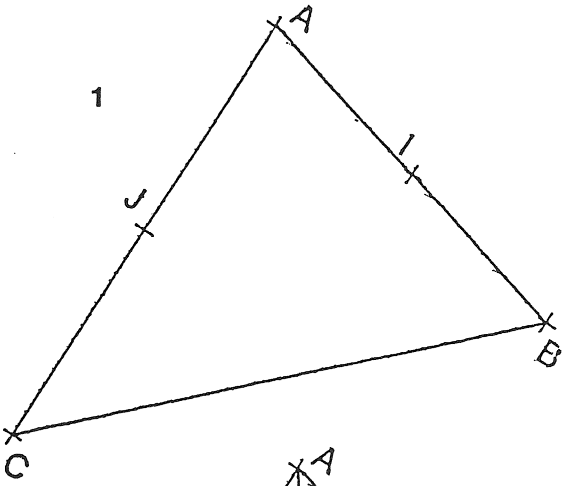
Milieu2 -> Médianes concourantes, parallélogramme.

Contenus majeurs :

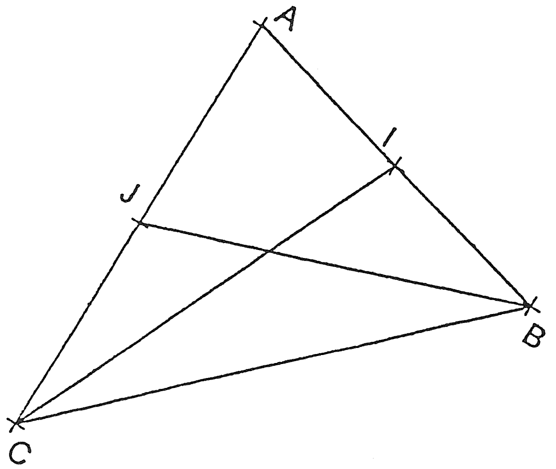
- Médianes concourantes.
- Droite des milieux et sa réciproque.
- Parallélogrammes.

MILIEU 1

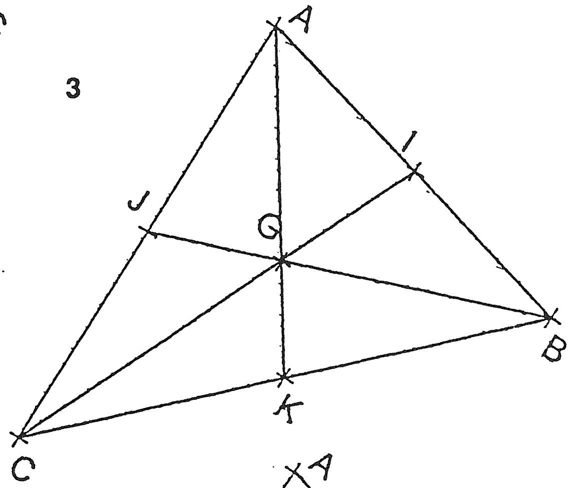
1



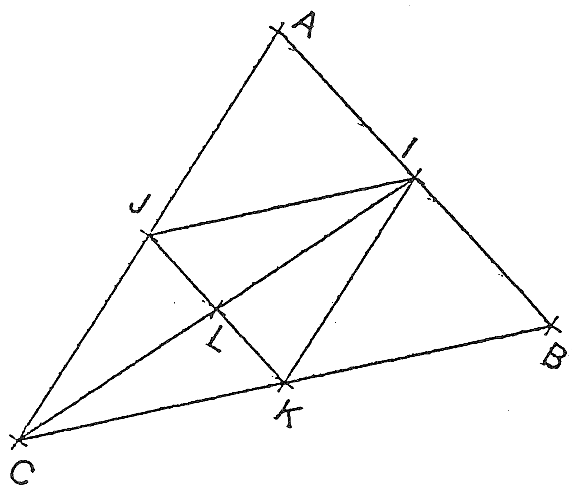
2



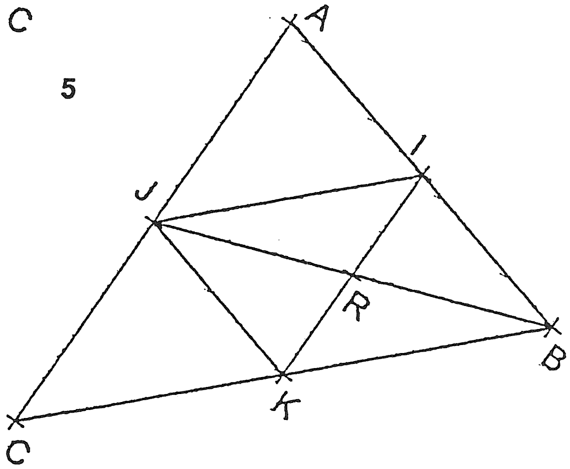
3



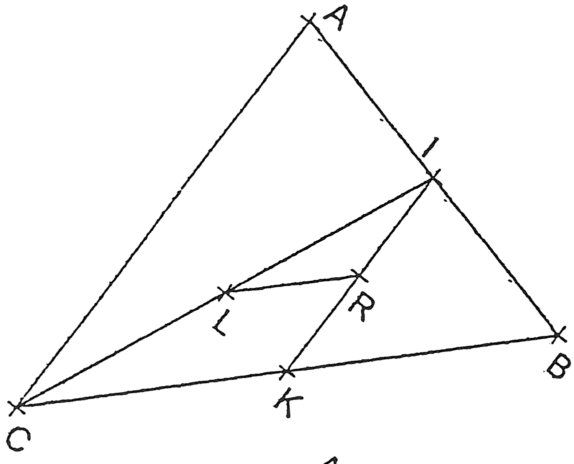
4



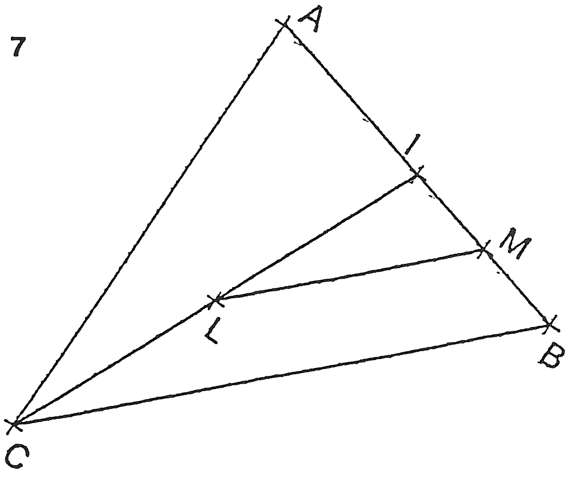
5



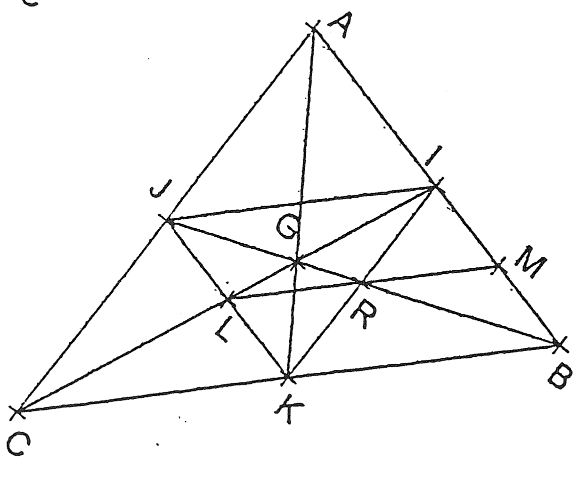
6



7

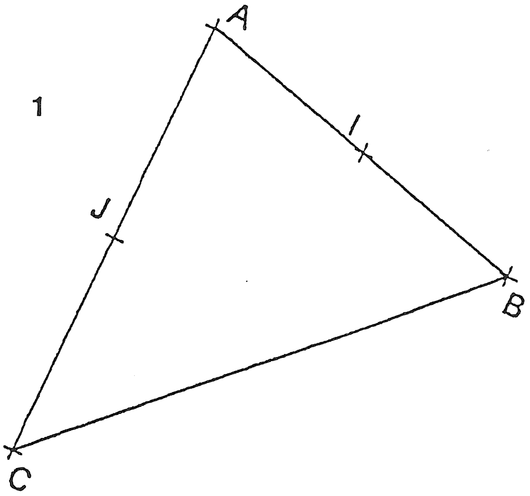


8

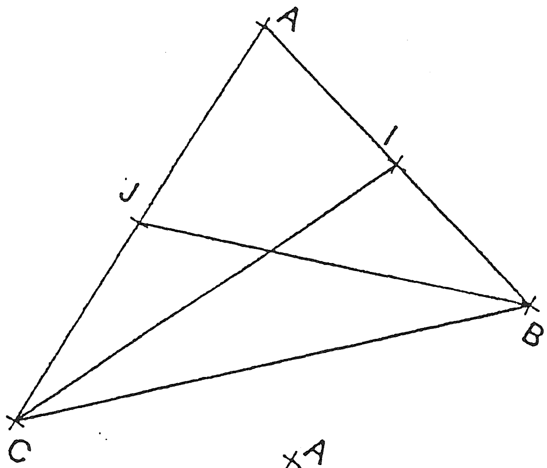


MILIEU 2

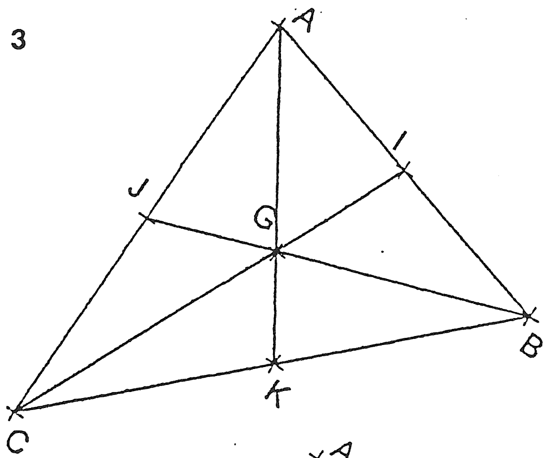
1



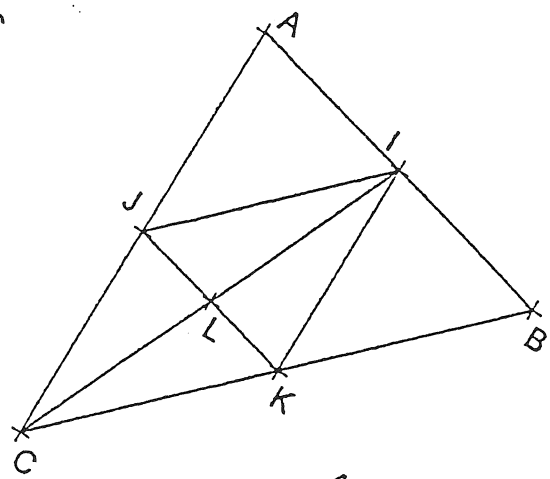
2



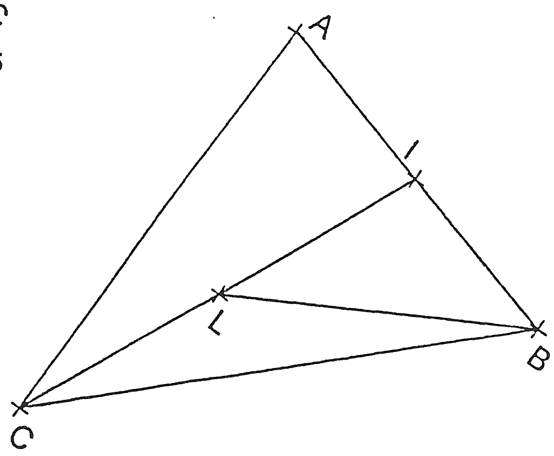
3



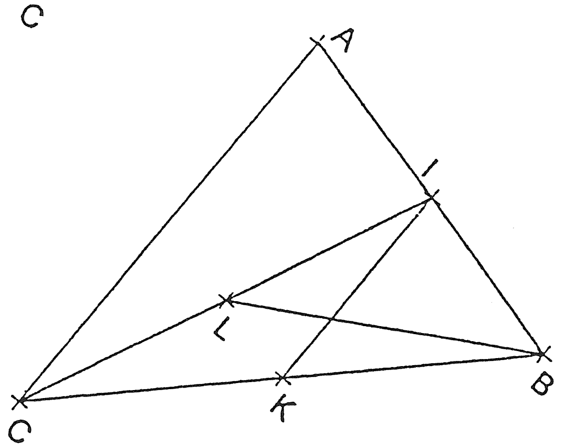
4



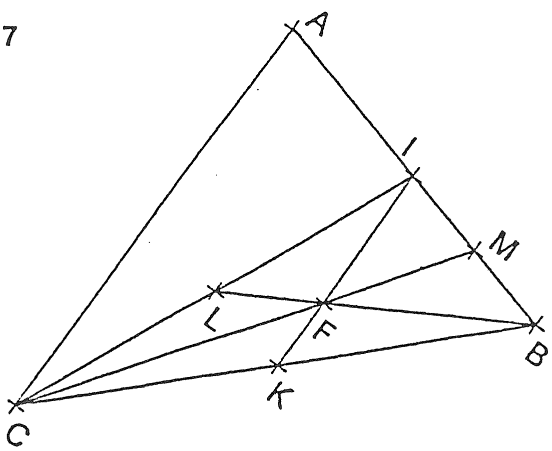
5



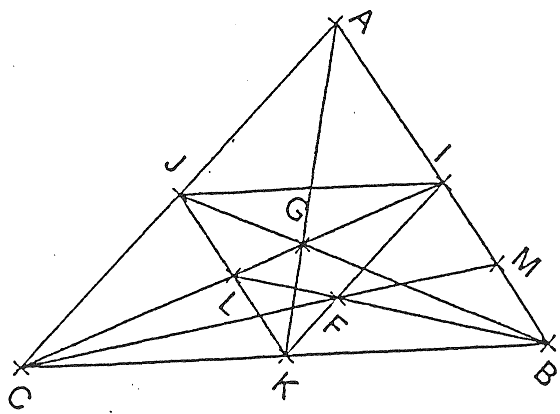
6



7



8



2 - TRIRECT

Niveaux :

4ème ou 3ème.

Enoncé du Problème

Construire un triangle ABC rectangle en A tel que :
- sa médiane [AI] mesure 5 cm,
- et sa hauteur [AH] mesure 3,6 cm.

Il y a plusieurs façons de commencer la résolution de ce problème et elles entraînent des constructions sensiblement différentes.

1 - On peut s'imposer A et I au départ. Dans ce cas, le problème nous semble plus difficile. Fichier correspondant -> **Trirect 1**.

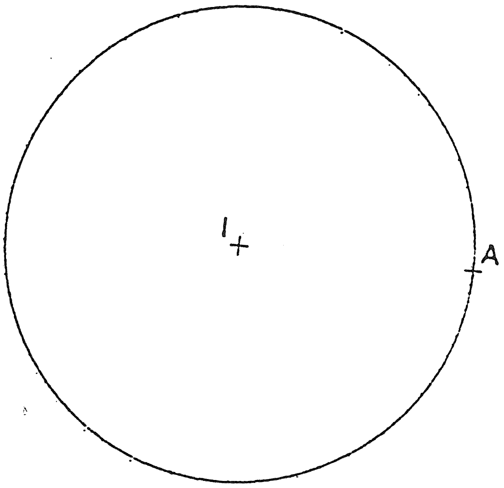
2 - On peut aussi imposer A et H au départ. Fichier correspondant-> **Trirect 2**.

Contenus majeurs :

- Définition de la hauteur.
- Triangle rectangle et cercle.
- Triangle rectangle et médiane.
- Points situés à une distance donnée d'une droite.
- Points situés à une distance donnée d'un point.

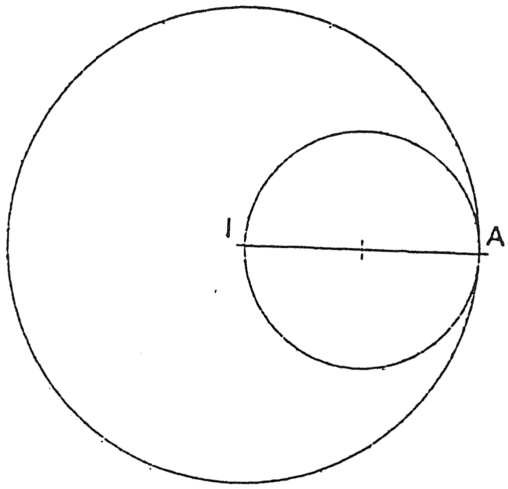
TRIRECT 1

1



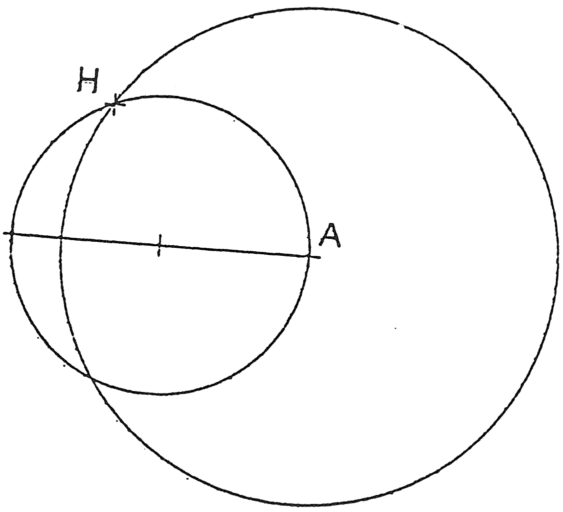
La médiane [AI] est donnée.

2



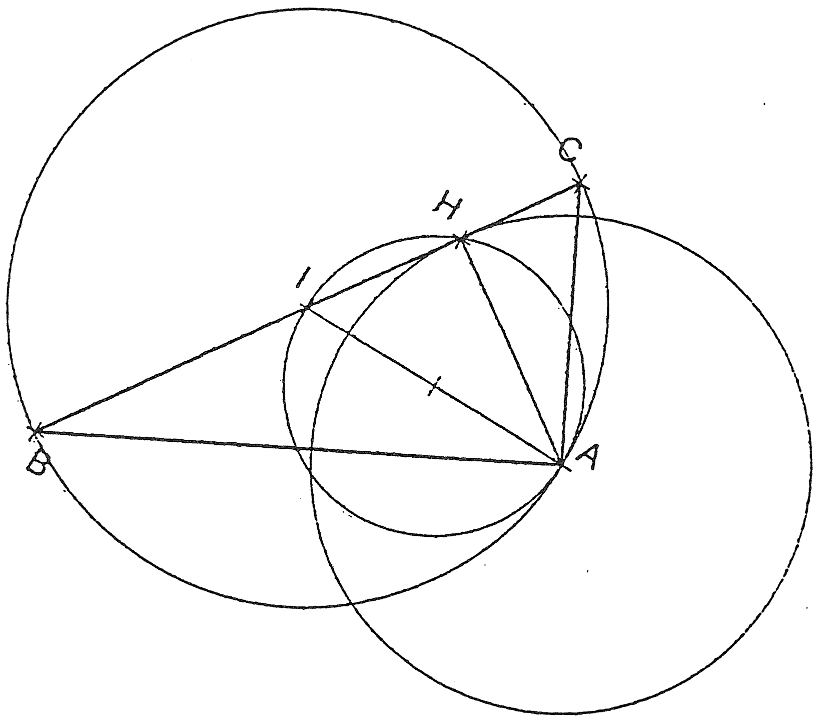
Cercle de diamètre [AI] pour obtenir le triangle rectangle IHA.

3



AH = 3,6 cm.

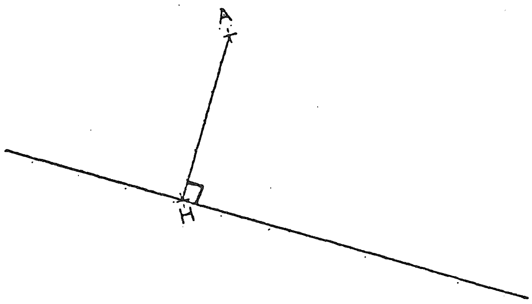
4



B et C sont sur [IH]. ABC est rectangle en A donc inscrit dans le cercle de centre I de rayon AI.

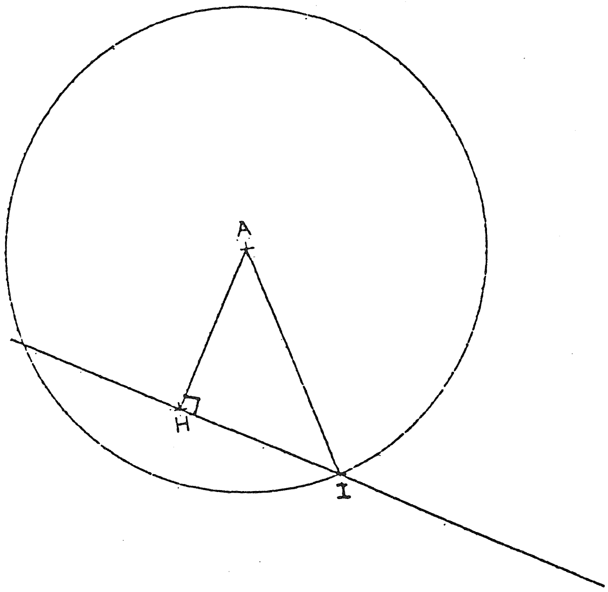
TRIRECT 2

1



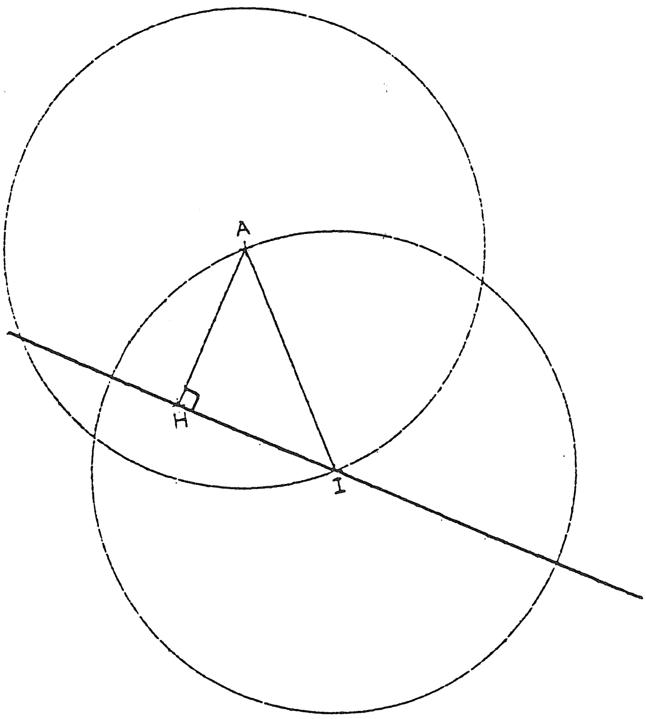
AH = 3,6 cm.

2

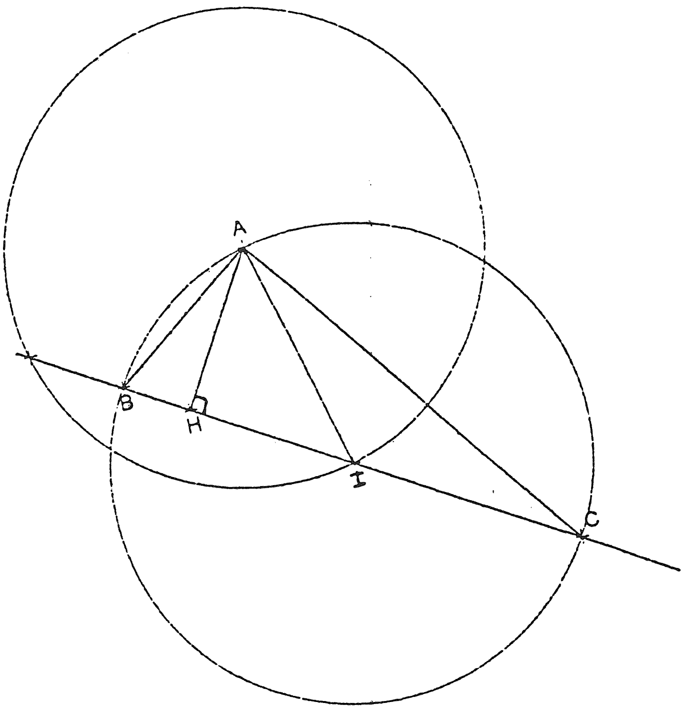


AI = 5 cm.

3



4



ABC est rectangle, donc inscrit dans le cercle de centre I, de rayon AI.

3 - LE PONT

Niveaux :

4ème ou 3ème.

Enoncé du Problème

Deux villages A et B sont situés de part et d'autre d'une rivière. On veut construire un pont [EF] entre les deux rives de façon à ce que chaque village soit à la même distance de l'extrémité la plus proche de ce pont, c'est à dire, EB = FA.
Remarque : les deux rives de la rivière sont rectilignes, parallèles et le pont est perpendiculaire aux rives.

Contenus majeurs :

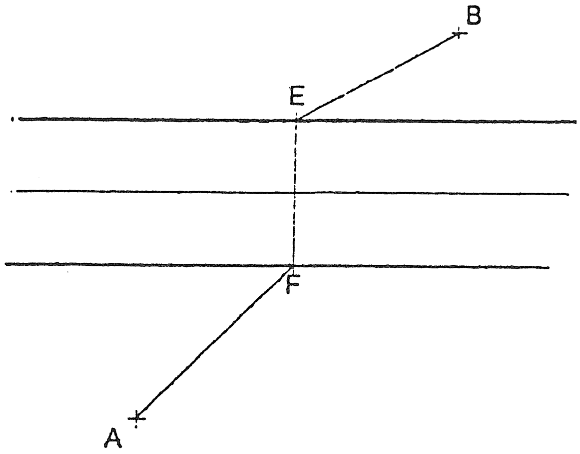
Au cours de l'expérimentation, nous avons observé deux démarches comportant des points communs mais aussi quelques variations quant aux choix des sous-figures retenues et des propriétés mises en avant :

Pont 1 -> Symétrie axiale, médiatrice.

Pont 2 -> Translation ou parallélogramme puis médiatrice.

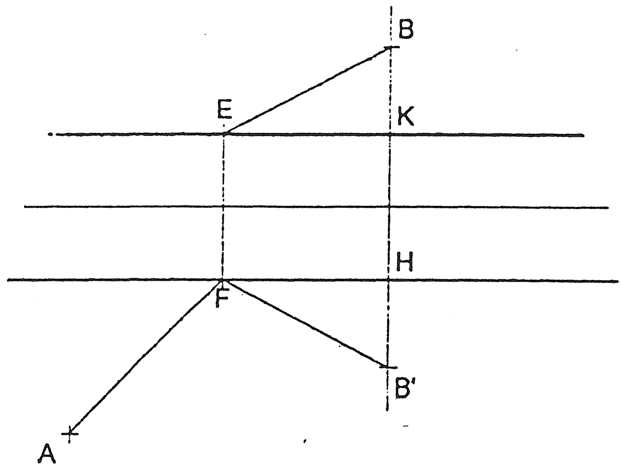
PONT 1

1



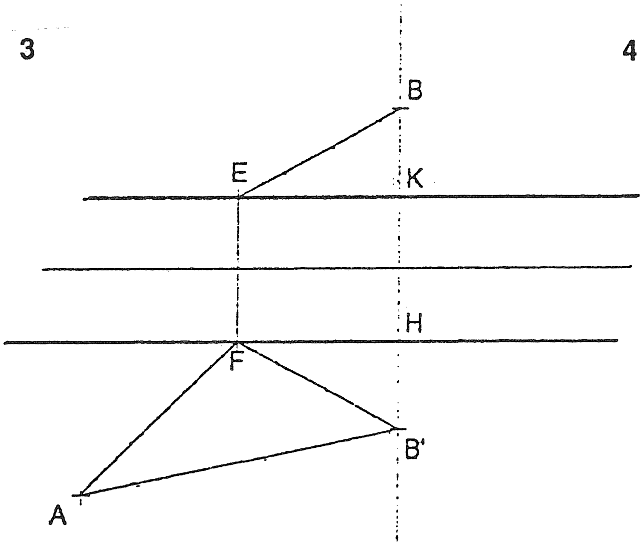
On peut afficher la mesure de [EB] et [AF].

2

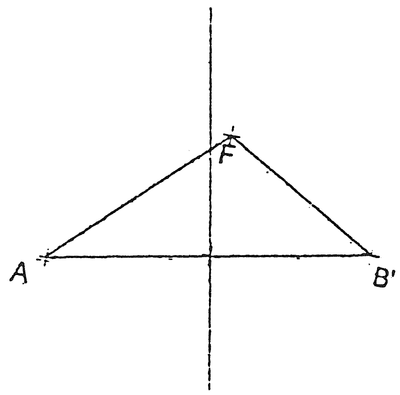


On construit le symétrique B' de B par rapport à l'axe médian.

3

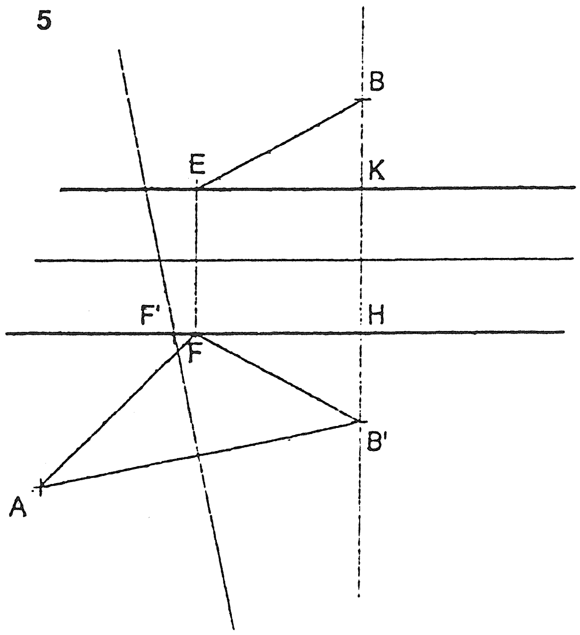


4

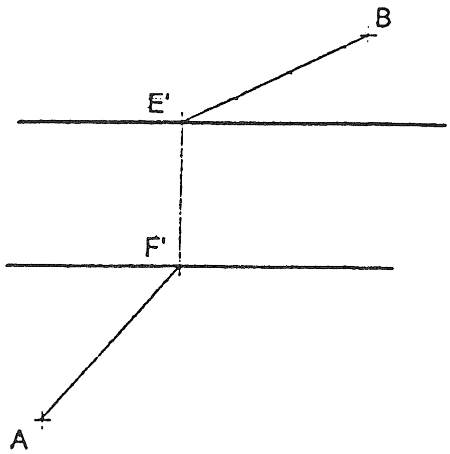


On construit la médiatrice de [AB'].

5



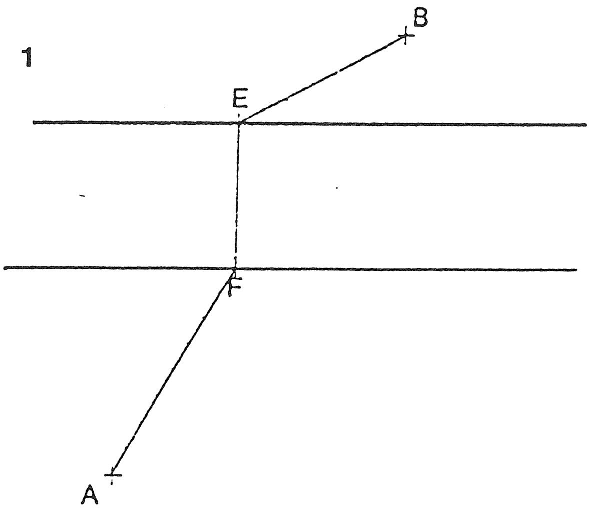
6



On a : AF' = E'B.

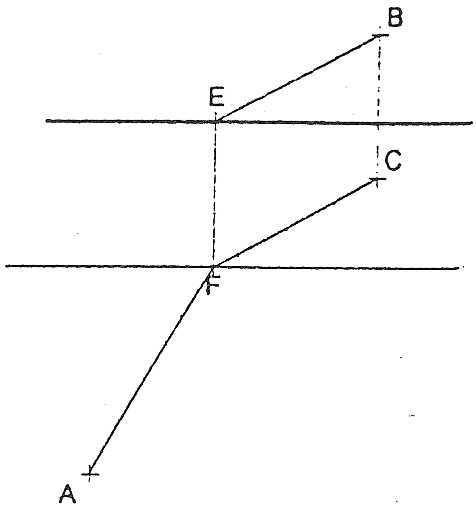
PONT 2

1



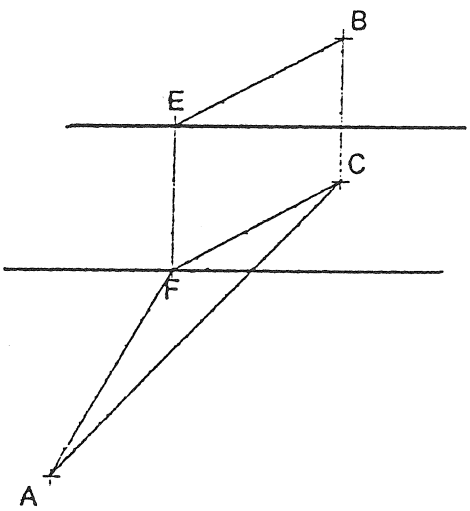
On peut afficher la mesure de [EB] et [AF].

2

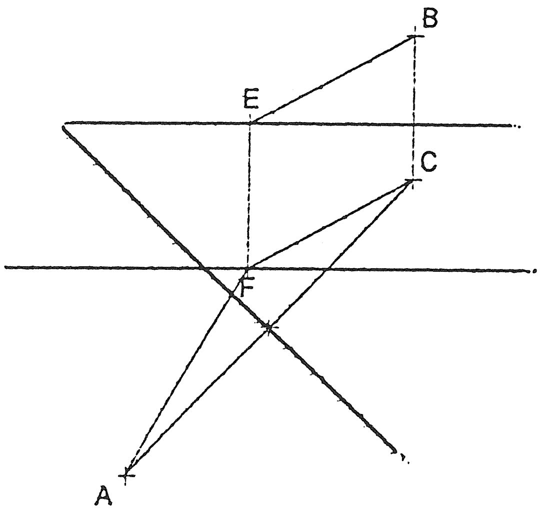


On construit le parallélogramme EBCF.

3

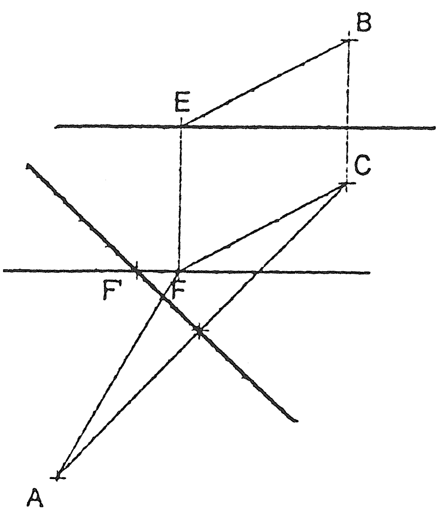


4

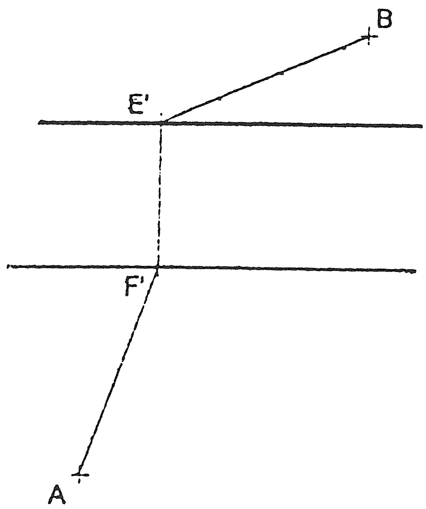


On construit la médiatrice de [AC].

5



6



On a : AF' = E'B.

CONCLUSION

Ces deux années étaient un temps trop court pour étudier les diverses possibilités qui peuvent nous être offertes. Nous voyons ce document comme un point de départ pour l'utilisateur.

Il pourra facilement ajouter d'autres activités sur le modèle de celles que nous avons rédigées.

Nous nous sommes limités volontairement à ces deux logiciels, l'utilisateur pourra être curieux de voir ce que peuvent faire les autres.

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Deuxième Trimestre 1996
N° de publication : 96-04

I.R.E.M. de RENNES - Université de RENNES I
Campus de Beaulieu - 35040 RENNES CEDEX
Tél : 99 28 63 42

FICHE DUBLIREM

TITRE : AU COLLEGE - *FIGURES-TYPES - TABLEUR*

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS : DUBREUIL Alain - GARNIER Régine - GERARD Christiane - LE GALL Alex - LE GORJU Jean-Yves - PATIN Monique - SIMON Odile -

DATE : JUIN 1996

NIVEAU : Tous niveaux au collège.

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de mathématiques au collège.

MOTS-CLES :

- Equation - Résolution d'un problème par approximations successives.
- Tableur - Grapheur.
- Sous-figures, Figures-types.
- Calques géométriques.
- Grand écran.

RESUME :

Beaucoup de collèges sont équipés de matériel informatique : micro-ordinateurs, rétroprojecteur, différents logiciels, ... Ce matériel est souvent sous-exploité : il faut beaucoup s'investir pour mettre au point une petite activité.

Dans notre groupe I.R.E.M., nous avons expérimenté quelques activités, certaines utilisant le logiciel WORKS dans sa forme tableur et graphique, d'autres utilisant le logiciel CALQUES GEOMETRIQUES, ce qui donne lieu aux deux chapitres de ce document :

- Résolution d'un problème par approximations successives.
- Sous-figures dans une configuration complexe. Figures-types.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX T.T.C.	TIRAGE
21 x 29,7	111	1 € ~~45~~ F	500 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-026-2