LES COMPLEXES SANS COMPLEXE

IREM de Rennes

Juin 1997

2ème Edition

I.S.B.N. 2-85728-019-X

Ce fascicule sur les nombres complexes s'adresse aux lycéens. Il est destiné à être utilisé sous forme de travail dirigé en classe. Notre souhait a été de faire participer le lecteur en le questionnant et en lui proposant de nombreux exercices qu'il pourra dans la plupart des cas rédiger directement sous l'énoncé.

Ce fascicule peut éventuellement remplacer un cours traditionnel sur les nombres complexes mais l'enseignant reste lui, irremplaçable et sa parole viendra sans aucun doute apporter des couleurs à ce document noir et blanc.

Les auteurs :

Yvette BOISSEAU
Lycée Joliot Curie - RENNES

Françoise DAL'BO
Institut de Mathématiques - Université de RENNES I

Guillemette DUMONCEL
Lycée Saint Joseph - BRUZ

Michèle FILLEUL
Lycée Joliot Curie- RENNES

Marie-Hélène HINAULT
Lycée Henri Avril - LAMBALLE

Jean-Paul LE BRAS
Lycée Ile de France - RENNES

Marie-Noëlle LE KER
Institution - ST MALO

Joseph ROUILLER
Lycée La Poterie - RENNES

Nous remercions Danièle QUENTIN pour la qualité de son travail.

La saisie et la mise en page de ce document ont été effectuées par Danièle QUENTIN (I.R.E.M. de RENNES).

Le tirage de ce document a été effectué par Françoise LE BESCOND (I.R.E.M. de RENNES), la reliure par Françoise LE RESTEUX et Gabrielle LOTHORE.

Dessin de la couverture : M.C. Escher (1898-1972)/Circle Limit IV. 1960

Les complexes ? des "super-réels" !

Cette idée assez répandue qui conduit tout naturellement l'élève à comparer les nombres complexes, à confondre valeur absolue et module etc... est à l'origine de notre travail. Cette confusion entre réels et complexes nous a paru en partie liée à la présentation traditionnelle des nombres complexes reposant sur l'introduction de i comme solution de l'équation $x^2 + 1 = 0$ et sur le prolongement à $\mathbb{C}$ des calculs faits sur $\mathbb{R}$. Cet aspect algébrique est généralement bien accepté par les élèves, les difficultés arrivent lorsque l'on aborde l'aspect géométrique.

Nous avons ici choisi de présenter les nombres complexes en commençant par le point de vue géométrique. Il nous a semblé essentiel de faire un rappel sur le repérage des points dans le plan en coordonnées polaires. Nous présentons l'addition et la multiplication des nombres complexes en nous appuyant sur la géométrie. L'aspect algébrique est également traité, il est illustré par des propriétés géométriques à chaque fois que cela est possible.

Pour traiter un exercice sur les nombres complexes, l'élève est souvent confronté à faire des choix, par exemple : écrire sous forme algébrique ou trigonométrique les complexes, traduire géométriquement ou non le problème, calculer littéralement ou numériquement. Les exercices que nous proposons visent à aider l'élève à choisir la méthode la plus adaptée.

SOMMAIRE

REPERAGE D'UN POINT DANS LE PLAN

LES NOMBRES COMPLEXES

LES COMPLEXES UN OUTIL POUR FAIRE DE LA GEOMETRIE

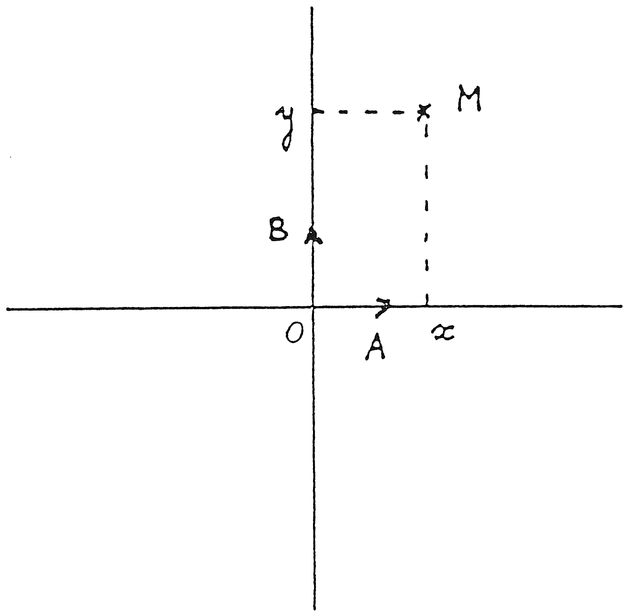
LES COMPLEXES UN OUTIL POUR CALCULER

LES COMPLEXES AU BAC

REPERAGE D'UN POINT DANS LE PLAN

I - COORDONNEES CARTESIENNES

Soit $\mathcal{P}$ le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$. On peut repérer un point du plan $\mathcal{P}$ par ses coordonnées cartésiennes. En effet, M étant un point de $\mathcal{P}$, il existe un couple unique de réels (x, y) tel que : $\overrightarrow{OM} = x\ \overrightarrow{OA} + y\ \overrightarrow{OB}$



Le couple (x, y) caractérise le point M ;

x est appelé **l'abscisse** du point M,

y est appelé **l'ordonnée** du point M;

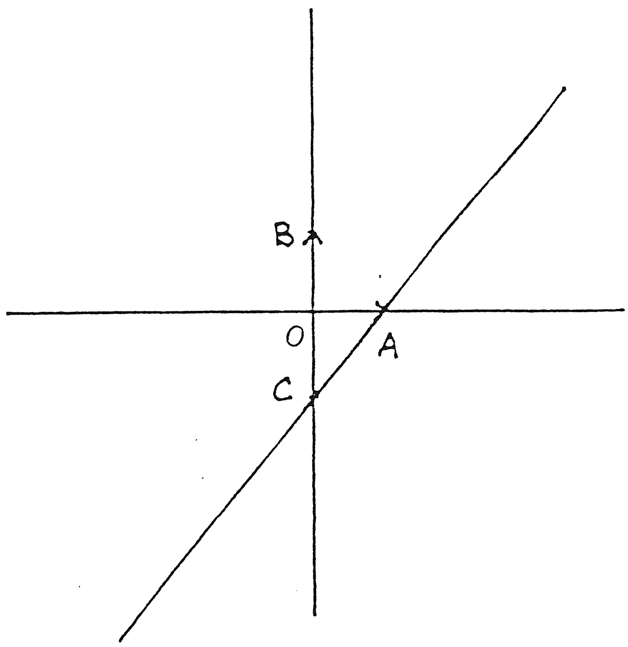
(x, y) est appelé le couple des **coordonnées cartésiennes** du point M.

On note : $M\,(x, y)$ ou $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Exercice I.1

Dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonomal $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; on considère le point $C\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

1 - Ecrire une équation cartésienne de la droite Δ tracée ci-contre.



2 - Caractériser les points du segment [AC] en utilisant les coordonnées cartésiennes.

Exercice I.2

On considère le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal
$(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$.

1 - Ecrire une équation cartésienne du cercle de centre O et de rayon 1.

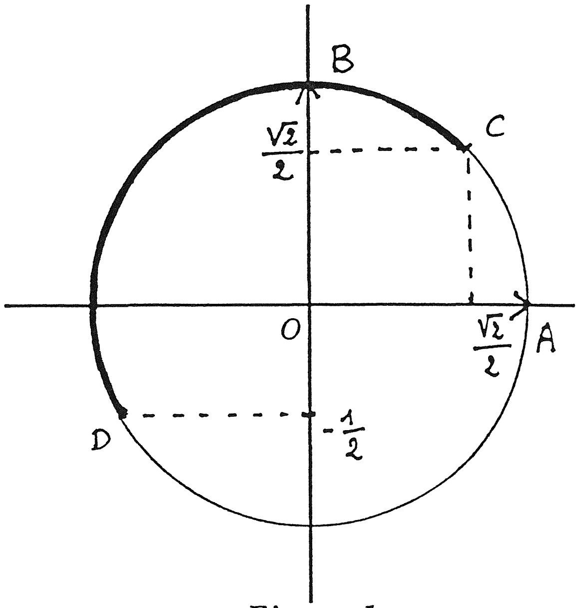


Figure 1

2 - Caractériser les points de l'arc $\overset{\frown}{CD}$ représenté sur la figure 1 ci-contre en utilisant les coordonnées cartésiennes.

3 - Même question pour les points de la réunion des arcs $\overset{\frown}{AB}$ et $\overset{\frown}{A'B'}$ représentés en gras sur la figure 2.

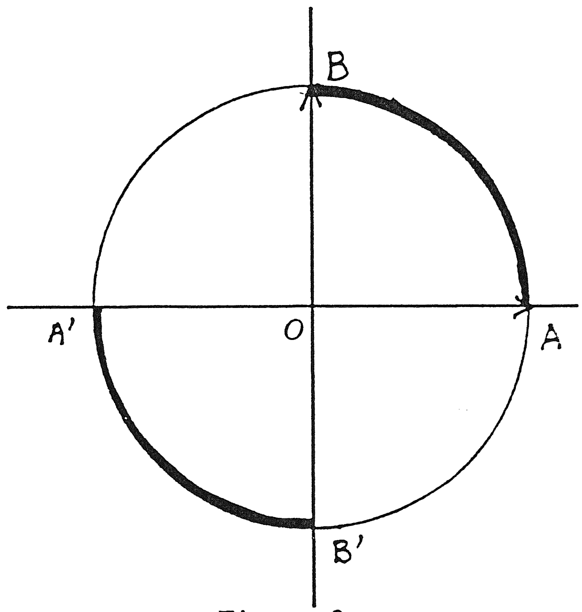


Figure 2

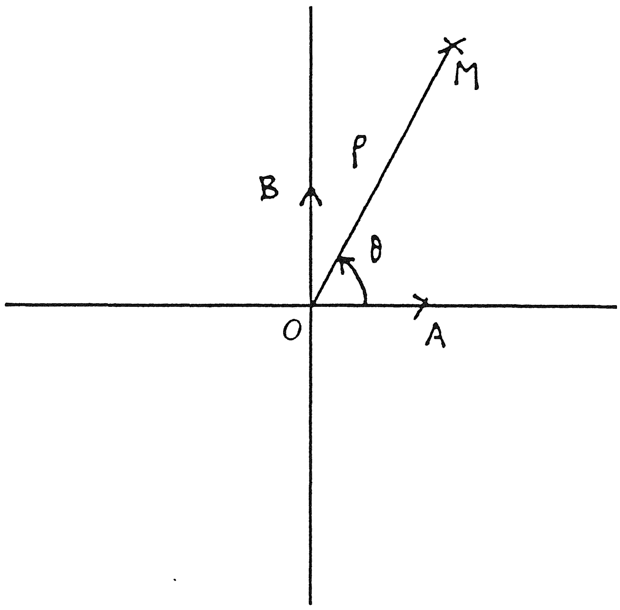
Comme on le voit dans cet exercice les coordonnées cartésiennes ne sont pas toujours pratiques pour caractériser des ensembles même simples. Aussi allons nous chercher une autre façon de repérer les points du plan.

II - COORDONNES POLAIRES

Dans la suite du chapitre le repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est supposé direct.

Soit M un point du plan ; on note ρ la distance de O à M .

Si le point M est différent du point O, on lui associe un réel θ tel que $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.



Quel est l'ensemble E des points M tels que : OM = 2 ?

Quel est l'ensemble F des points M tels que :
$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{3}$?

Déterminer $E \cap F$?

Peut-on construire un point M tel que : $OM = 2$ *et* $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{4}$?

Plus généralement, la donnée du couple (ρ, θ) caractérise-t-elle le point M ?

Nous sommes maintenant en mesure de définir ce que l'on appelle **les coordonnées polaires** d'un point.

Définition

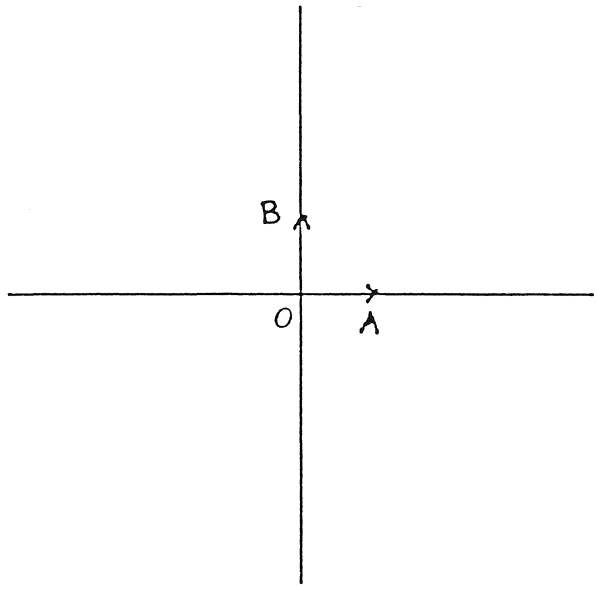
> Le plan $\mathscr{P}$ étant muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, tout point M de $\mathscr{P}$ différent de O est caractérisé par la donnée du réel strictement positif ρ et d'un réel θ tels que :
> $$\begin{cases} \rho = OM. \\ \theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \end{cases}$$
> ρ et θ sont appelés les coordonnées polaires du point M.
> On note : $M\,[\rho, \theta]$.

Remarque : O n'a pas de coordonnées polaires (problème de la détermination de l'angle).

Exercice II.1

Représenter les quatre points suivants définis par leurs coordonnées polaires :

$C\,[3\,;\,\pi]$, $D\,[2\,;\,-\frac{\pi}{2}]$, $E\,[2\,;\,0]$, $F\,[\frac{3}{2}\,;\,\frac{4\pi}{3}]$



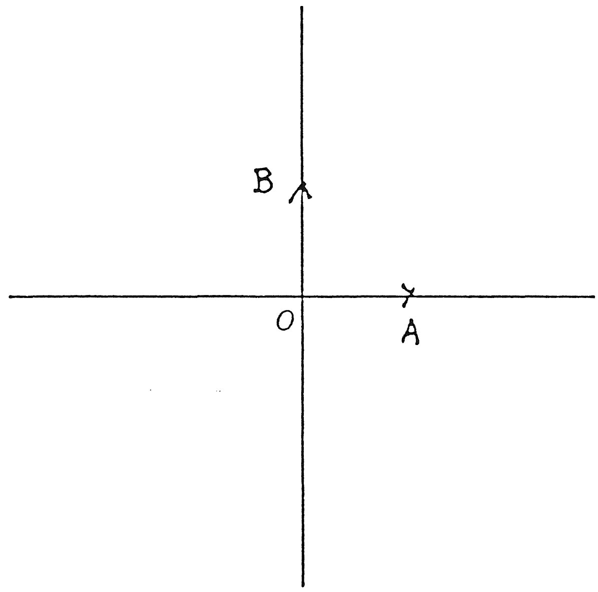
Exercice II.2

Représenter les ensembles suivants :

$E_1 = \{\, M\,[\rho\,,\,\theta\,] \,/\, 1 \leq \rho \leq 2\}$

$E_2 = \{\, M\,[\rho\,,\,\theta\,] \,/\, \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$

$E_3 = \{\, M\,[\rho\,,\,\theta\,] \,/\, \rho \leq 2 \text{ et } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$



Passage des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes

Connaissant les coordonnées polaires d'un point, il est possible de retrouver ses coordonnées cartésiennes.

Soit $M\,[\rho\,,\,\theta\,]$, on a $\overrightarrow{OM} = \rho\,\vec{U}$ où $\vec{U}$ désigne le vecteur unitaire tel que $(\overrightarrow{OA}\,,\,\vec{U}) = \theta$.

Dans la base $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ le vecteur $\vec{U}$ s'écrit donc $\vec{U} = (\cos\theta)\ \overrightarrow{OA} + (\sin\theta)\ \overrightarrow{OB}$
d'où $\overrightarrow{OM} = \rho\,(\cos\theta)\,.\,\overrightarrow{OA} + \rho\,(\sin\theta)\,.\,\overrightarrow{OB}$.

Les coordonnées cartésiennes de $M\,[\rho\,,\,\theta\,]$ sont : $\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{cases}$

Exercice II.3

Calculer les coordonnées cartésiennes des points C, D, E, F de l'exercice II.1

III - COORDONNEES POLAIRES OU CARTESIENNES ?

Nous avons maintenant deux possibilités pour repérer un point du plan. Dans les exercices se pose la question du choix du système de coordonnées. Il n'y a pas de réponse toute faite. L'expérience permet de développer une certaine intuition.

Exercice III.1

Caractériser les points des ensembles décrits dans l'exercice I.2 en utilisant les coordonnées polaires.

Exercice III.2

Compléter le tableau ci-dessous.

M est un point différent de l'origine situé sur	*si et seulement si ses coordonnées cartésiennes (x, y) , $(x, y) \neq (o, o)$ vérifient*	*si et seulement si ses coordonnées polaires $[\rho, \theta]$ vérifient*
L'axe $(O , \overrightarrow{OA})$		
L'axe $(O , \overrightarrow{OB})$		
Le cercle de centre O et de rayon 2.		
La demi-droite $]O , \overrightarrow{OA}]$		
La demi-droite $]O , -\overrightarrow{OB}]$		
La droite bissectrice de AOB.		

Exercice III.3

$(O , \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est un repère orthonormal et I est un point du cercle trigonométrique tel que $(\overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OI}) = \frac{\pi}{3}$.

En utilisant le système de coordonnées de votre choix caractériser :

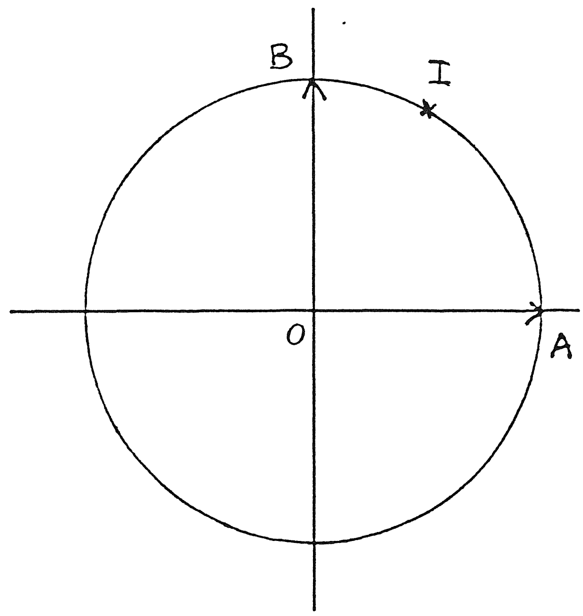
1 - La droite (OI) privée de O.

2 - Le petit arc $\overset{\frown}{IB}$.

3 - La droite (AB).

4 - La parallèle à (OB) passant par I.

5 - Le cercle de centre B et de rayon 1.



Exercice III.4

On note r_θ la rotation de centre O et d'angle θ, h_λ l'homothétie de centre O et de rapport λ, $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Soit M $[2\ ,\ \frac{\pi}{3}]$.

1 - Quelles sont les coordonnées cartésiennes de M ?

2 - Représenter les points suivants et les caractériser en utilisant le système de coordonnées qui vous semble le mieux adapté.

. $C = r_{\frac{\pi}{2}}(M)$

. $D = h_{\frac{-3}{2}}(M)$

. $E = h_{\frac{1}{2}}(M)$

. $F = h_{\frac{1}{2}} \circ r_{\frac{\pi}{2}}(M)$

. $G = r_{\frac{\pi}{2}} \circ h_{\frac{-3}{2}}(M)$

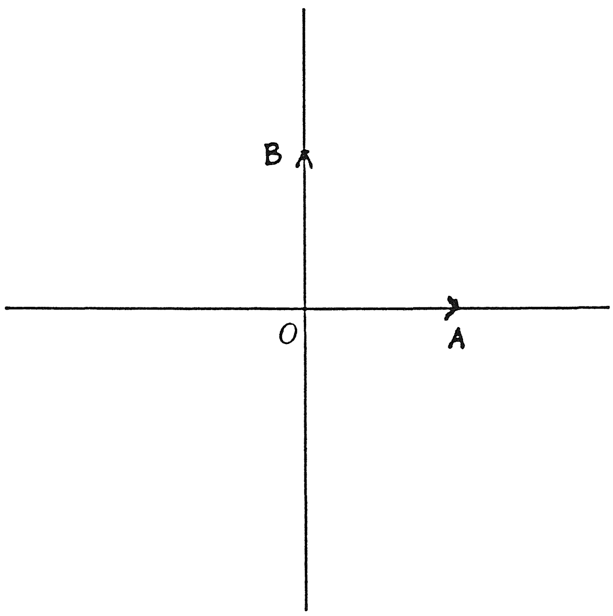
. $H = r_{\pi} \circ h_2(M)$

. *I image de M par la réflexion d'axe (OA).*

. *J image de M par la réflexion d'axe (OB).*

. *K symétrique de M par rapport à O.*

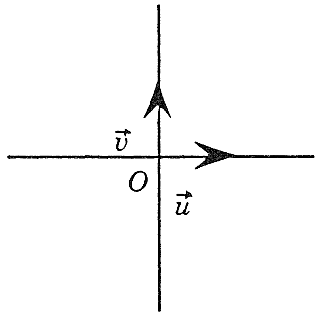
. *L image de M par la translation de vecteur $\vec{u}\ (2\ ,\ 1)$.*



NOMBRES COMPLEXES

I - UNE APPROCHE DES NOMBRES COMPLEXES

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$
A tout point M de l'axe $(O, \vec{u})$, on associe l'unique nombre réel x tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}$
Ce nombre réel x est appelé **abscisse** de M.



Réciproquement :

Soit x un réel, il existe un unique point M sur l'axe $(O, \vec{u})$, appelé **image** de x, tel que $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}$

On établit ainsi une correspondance entre l'axe $(O, \vec{u})$ et l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.

Notre but est à présent d'introduire un ensemble $\mathbb{C}$ appelé **ensemble des nombres complexes**, ayant les propriétés suivantes :

$\boxed{\text{P1}}$ Il y a une correspondance entre $\mathbb{C}$ et le plan $\mathcal{P}$:
Autrement dit, à tout point M de $\mathcal{P}$ correspond un unique nombre complexe, appelé **affixe de** M, que l'on **note** z.
Réciproquement, à tout nombre complexe z, correspond un unique point M, appelé **image de** z que l'on note $M(z)$. De plus l'affixe de $M(z)$ est z.

$\boxed{\text{P2}}$ L'ensemble $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$ et si $z \in \mathbb{R}$, son image est le point de l'axe $(O, \vec{u})$ d'abscisse z.

$\boxed{\text{P3}}$ On peut effectuer des calculs sur $\mathbb{C}$. En d'autres termes deux nombres complexes peuvent s'additionner, se multiplier.

La correspondance entre $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ va permettre de traduire des problèmes géométriques en des problèmes algébriques et vice-versa.

Soit M un point de P, comment définir son affixe ?

Nous savons que si M est un point de l'axe $(O, \vec{u})$ alors $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}$. D'après les propriétés P_1 et P_2 l'affixe de M est x.

Prenons ensuite un point $M(x, y)$ du plan $\mathcal{P}$, on a $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$. Posons alors $z = x + iy$ (ou $x + yi$). **La lettre i introduite dans cette écriture sert à distinguer la part de l'abscisse et celle de l'ordonnée.**

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C} & \\ M(x, y) & \xrightarrow{\text{a pour affixe}} & z = x + iy \end{array}}$$

et

$$\boxed{\begin{array}{ccc} & \mathbb{C} \longrightarrow \mathcal{P} & \\ z = x + iy & \xrightarrow{\text{a pour image}} & M(x, y) \end{array}}$$

Egalité de deux nombres complexes

Soient $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ $z_1 = z_2$ équivaut à $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$	d'après la propriété P_1

Affixe d'un vecteur : Soit $\vec{V} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$. On appelle **affixe de** $\vec{V}$ le complexe $x + iy$.

Remarque : Si M est le point du plan tel que $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$, **l'affixe** de $\vec{V}$ est égale à l'affixe de M.

Exercice I.1

Quelle est l'affixe de B ? $Z_B =$

Quelle est l'affixe de A ? $Z_A =$

Quelle est l'affixe de O ? $Z_O =$

Quelle est l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ *?* $Z_{\overrightarrow{AB}} =$

Représenter en rouge sur la figure 1 l'ensemble des points M d'affixe $z = x + i.o \qquad x \in \mathbb{R}$

Représenter en bleu l'ensemble des points M d'affixe $z = o + iy \qquad y \in \mathbb{R}$

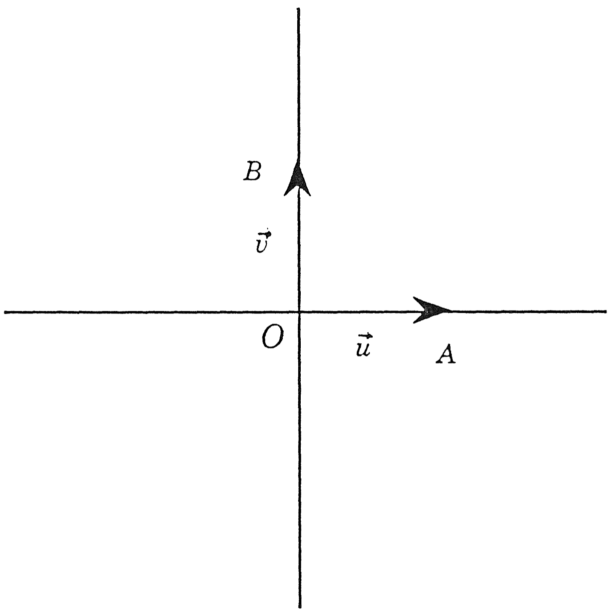


Figure 1

Exercice I.2

Placer sur la figure 2 les points C, D, E, F images respectives de 2 ; $1 - 2i$; $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$; $-1i$

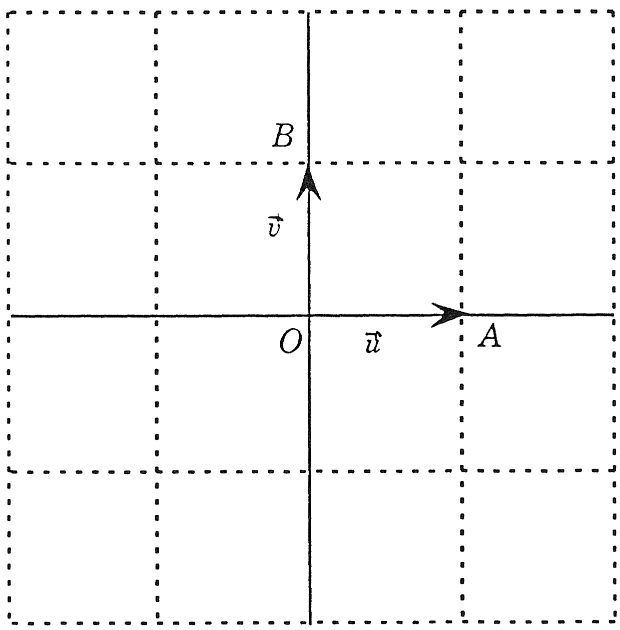


Figure 2

Exercice I.3

Représenter sur la figure 3 les ensembles de points dont les affixes vérifient :

$z = 1 + iy$, *y décrivant* $\mathbb{R}$

$z = x + 2i$, *x décrivant* $\mathbb{R}$

$z = x + i(x + 1)$, *x décrivant* $\mathbb{R}$

Donner une équation cartésienne de chacun de ces ensembles.

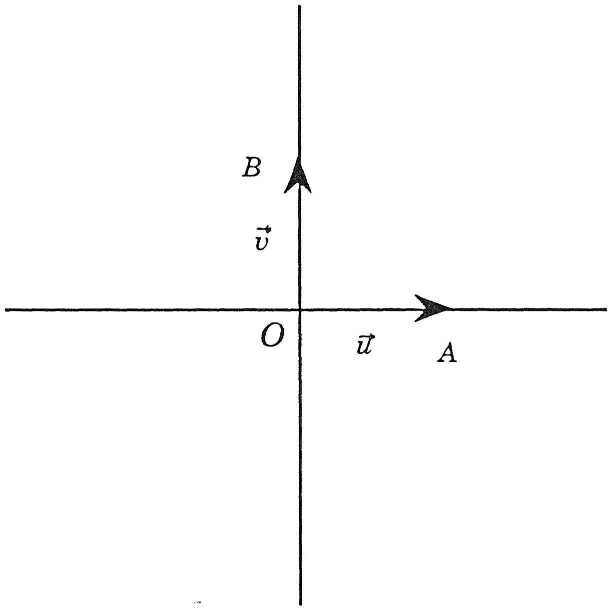


Figure 3

Exercice I.4

Quelle est la forme des affixes des points de la droite d'équation :

$x = 0$?

$y = 0$?

$y = x$?

Exercice I.5

Existe-t-il des nombres réels a et b tels que $3 + 2i = (2a + b) + (a - b)\,i$? *Si oui les calculer.*

RESUME

L'ensemble $\mathbb{C}$ est l'ensemble des nombres complexes $z = x + iy$ (ou $z = x + yi$).

$\mathbb{C} = \{ z \mid z = x + iy \ , \ x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \}$

$$\begin{array}{ccc} & \mathscr{P} \longrightarrow \mathbb{C} & \\ M(x, y) & \xrightarrow{\text{a pour affixe}} & z = x + iy \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{ccc} & \mathbb{C} \longrightarrow \mathscr{P} & \\ z = x + iy & \xrightarrow{\text{a pour image}} & M(x, y) \end{array}$$

Remarques :

Les nombres complexes $x + io$, que l'on notera x représentent les points de l'axe $(O, \vec{u})$. L'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ peut donc être considéré comme un sous ensemble de $\mathbb{C}$ (propriété $\boxed{P_2}$).

Les nombres complexes $o + iy$, que l'on notera iy, représentent les points de l'axe $(O, \vec{u})$. Ces complexes sont appelés **imaginaires purs**.

Vocabulaire :

$x + iy$ est appelée **forme cartésienne ou algébrique** du nombre complexe z.

x est la **partie réelle** de z, on la note $Re(z)$
y est la **partie imaginaire** de z, on la note $Im(z)$

L'axe $(O, \vec{u})$ est appelé axe des réels.

L'axe $(O, \vec{v})$ est appelé axe des imaginaires purs.

Définition :

On appelle affixe d'un vecteur $\vec{V}$ l'affixe du point M tel que $\vec{V} = \overrightarrow{OM}$

A tout nombre complexe z est associé un point M du plan. A partir des coordonnées cartésiennes du point M nous avons obtenu la **forme algébrique** du nombre complexe z. A partir des coordonnées polaires du point M cherchons à définir une autre écriture de ce complexe qui sera appelée **écriture trigonométrique**.

II - ECRITURE TRIGONOMETRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES NON NULS

Soit N un point du cercle trigonométrique.

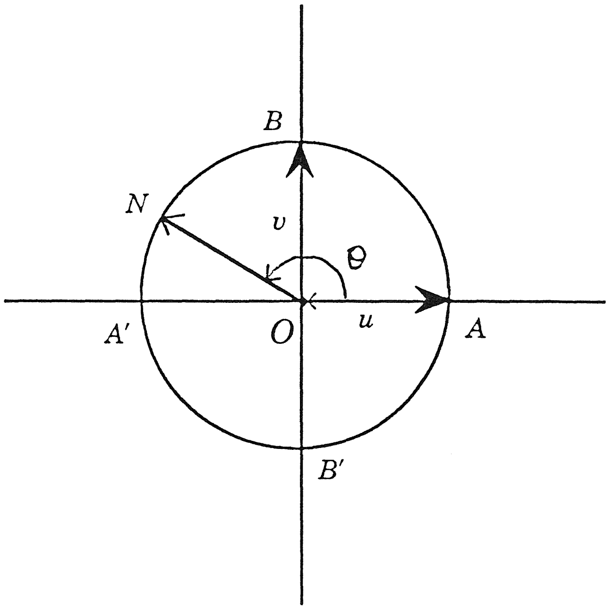
Ses **coordonnées polaires** sont $[1\ ,\ \theta]$.

Ses **coordonnées cartésiennes** sont $(\cos\theta\ ,\ \sin\theta)$.

Le point N a pour **affixe** le nombre complexe $z = \cos\theta + i\sin\theta$ **que l'on note** $e^{i\theta}$. On a donc :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

L'écriture $e^{i\theta}$ ou $\cos\theta + i\sin\theta$ est appelée **forme trigonométrique de** z.



Exercice II.1

Les points A, B, A', B' étant représentés sur la figure ci-dessus, compléter le tableau suivant :

	A	B	A'	B'
Coordonnées polaires				
Affixes sous forme trigonométrique				
Affixes sous forme algébrique				

Soit M un point du plan différent de O, de coordonnées polaires $[\rho\ ,\ \theta]$.

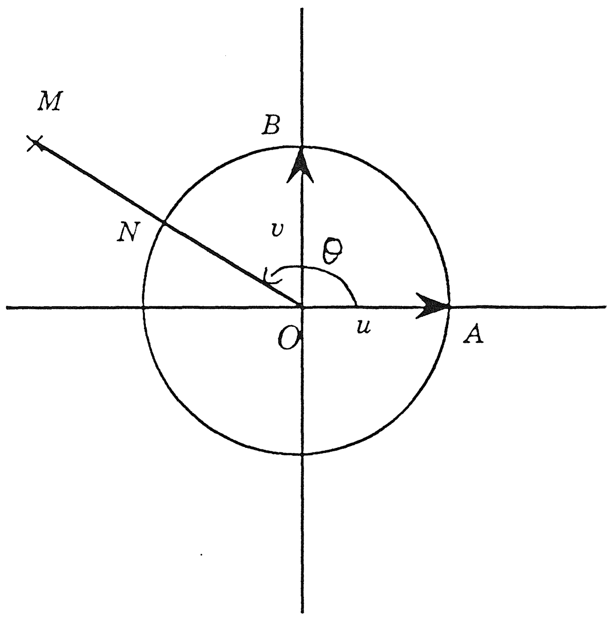
On rappelle que $\rho = OM$ et $\theta = (\overrightarrow{OA}\ ,\ \overrightarrow{OM})$.

Considérons le point N appartenant à l'intersection de la demi-droite $[OM)$ d'origine O contenant M et du cercle trigonométrique. On a donc $N[1\ ,\ \theta]$.

En utilisant la relation $\overrightarrow{OM} = \rho\ \overrightarrow{ON}$ on en déduit que l'affixe de M est $z = \rho\cos\theta + i\ (\rho\sin\theta)$, que l'on note $\rho e^{i\theta}$.

On a donc $\boxed{\rho\cos\theta + i\ (\rho\sin\theta) = \rho e^{i\theta}}$

L'écriture $\rho e^{i\theta}$ ou $\rho\ (\cos\theta + i\sin\theta)$, ρ réel positif est appelée **forme trigonométrique** de z.



Conséquence : $\rho\ e^{i\theta} = \lambda\ e^{i\alpha}$ *équivaut à* $\rho = \lambda$ *et* $\theta = \alpha + 2k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$

Vocabulaire : Pour tout complexe z d'image M, on appelle **module de** z le réel positif ou nul OM et on le note $|z|$.

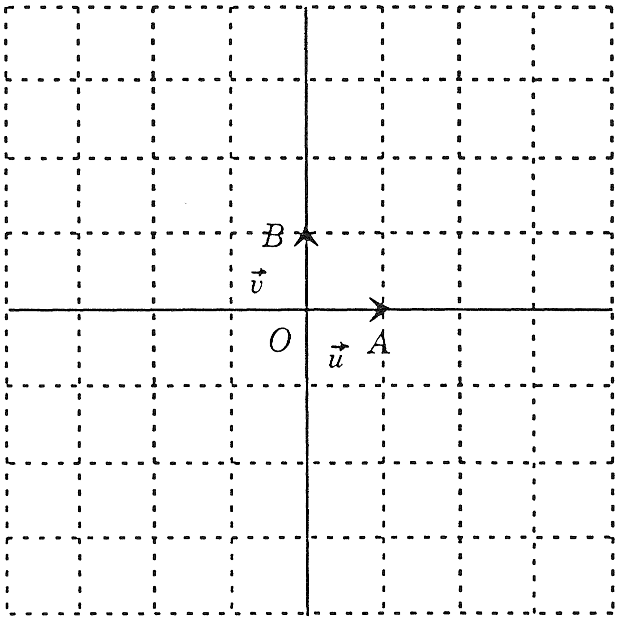
Pour tout complexe z **non nul** $\theta = (\vec{u}\ ,\ \overrightarrow{OM})$ est **un argument** de z, on le note $\arg z$.

Remarques importantes :
- Si M a pour affixe $z = x + iy$ avec x et y réels, on a : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
- $z = 0$ équivaut à $|z| = 0$.
- Si $\vec{V}$ a pour affixe $z = x + iy$ avec x nombre réel, y nombre réel alors $|z|$ est égal à la norme de $\vec{V}$: $\|\vec{V}\|$.
- Si $\vec{V}$ a pour affixe z alors $(\vec{u}, \vec{V}) = arg\, z$.
- Le complexe $e^{i(-\theta)}$ sera plus simplement noté $e^{-i\theta}$.

Exercice II.2

Placer sur la figure les points suivants définis en coordonnées polaires :

$C[2\,,0]$ $D[3\,,-\frac{\pi}{2}]$ $E[2\,,\pi]$ $F[3\,,\frac{\pi}{2}]$



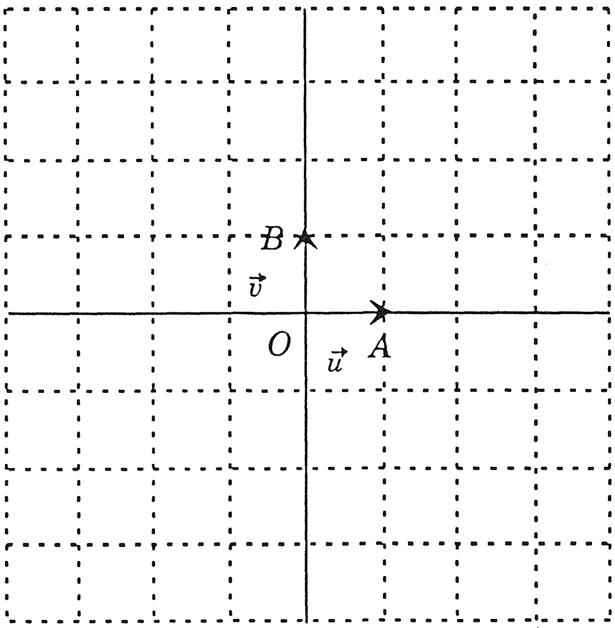
Donner la forme trigonométrique puis la forme algébrique des affixes des points C, D, E, F (tableau ci-dessous) :

	$C[2\ ,\ 0]$	$D[3\ ,\ -\frac{\pi}{2}]$	$E\ [2\ ,\ \pi]$	$F\ [3\ ,\ \frac{\pi}{2}]$
Forme trigonométrique				
Forme algébrique				

Exercice II.3

Placer sur la figure les points M, N, P, Q, R, S, T, U images respectives de

$e^{i\pi}$; $e^{i\frac{\pi}{2}}$; $2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$; $3\,e^{-i\pi}$; $e^{i\frac{5\pi}{4}}$; $\frac{3}{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$; $e^{i\frac{5\pi}{6}}$; $e^{i\times 1}$

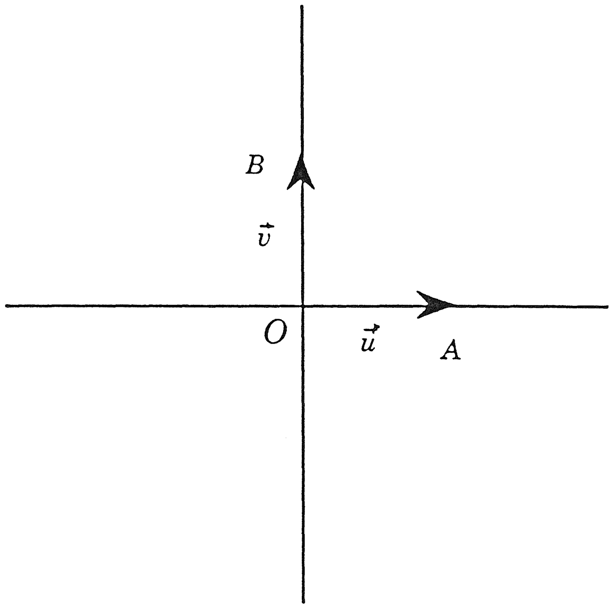


Exercice II.4

Représenter en bleu l'ensemble des nombres complexes dont l'argument est O.

Représenter en rouge l'ensemble des nombres complexes dont l'argument est π.

Que peut-on dire de l'argument de z si $z \in \mathbb{R}^*$?

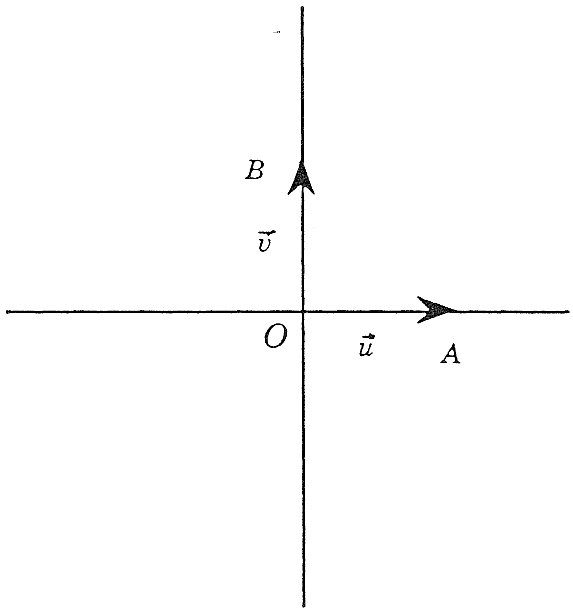


Exercice II.5

Ecrire sous forme trigonométrique les affixes des points situés sur le cercle de centre O et de rayon 2 ?

Ecrire sous forme trigonométrique les affixes des points situés sur la droite d'équation y = x privée de O.

Donner les affixes des points d'intersection du cercle de centre O et de rayon 2, et de la droite d'équation y = x.



Exercice II.6

Soient E, F, G, H les sommets d'un carré inscrit dans un cercle de centre O, se suivant dans le sens direct.

Le point E a pour affixe $Z_E = \rho\, e^{i\theta}$. Quelles sont les affixes des points F, G, H et du milieu I de [EF] ?

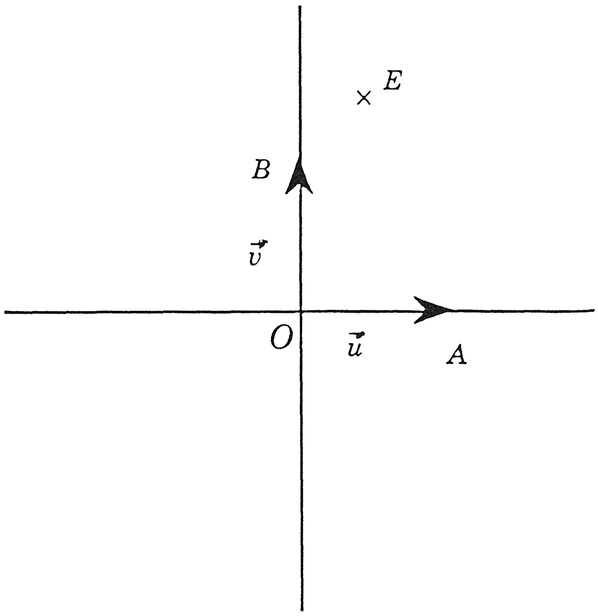
$Z_F =$

$Z_G =$

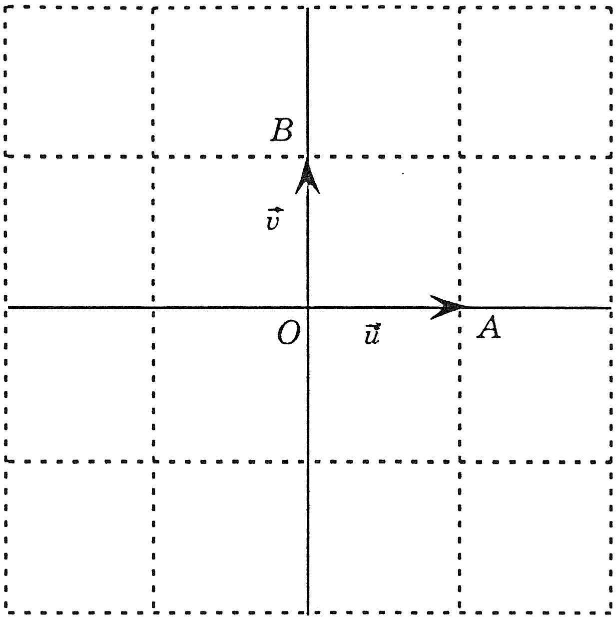
$Z_H =$

$Z_I =$

Le point E a pour affixe $Z_E = x + iy$.
Quelle est l'expression cartésienne de Z_F , Z_G , Z_H , Z_I ?



Exercice II.7



Placer le point M d'affixe $Z_M = 2 + 2i$

Placer le point N d'affixe $Z_N = 1 - \sqrt{3}i$

Placer le point P d'affixe $Z_P = -\sqrt{3}+i$

Ecrire les affixes de M, N, P sous forme trigonométrique :

$Z_M =$

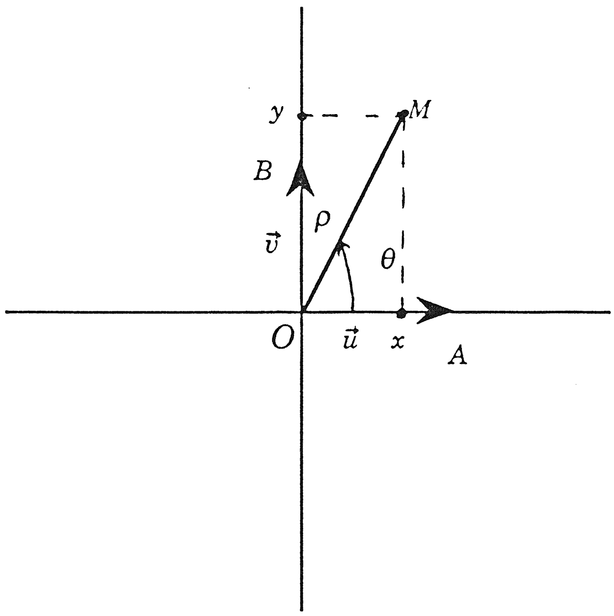
$Z_N =$

$Z_P =$

RESUME

Soient M un point du plan **différent de** O et z son affixe, on peut écrire z de deux façons différentes :

Forme algébrique de l'affixe de $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	*Forme trigonométrique de l'affixe de* $M[\rho\ ,\theta\ ]$
$z = x + iy$	$z = \rho\, e^{i\theta}$ $\rho > 0$



Remarque : Le complexe nul n'a pas de forme trigonométrique (problème de la détermination de l'argument), mais il a un module $|0| = 0$.

On a les relations :

$\rho = OM \qquad \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \theta = \arg z = (\vec{u}\ ,\overrightarrow{OM})$

$z = 0$ *si et seulement si* $|z| = 0$

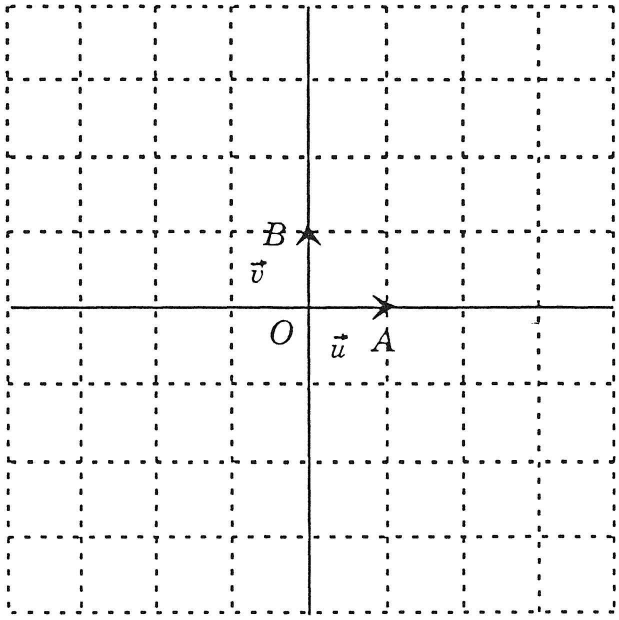
$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta$

III - L'ADDITION DANS $\mathbb{C}$

Soient z_1 et z_2 , d'images respectives M_1 et M_2 .
L'affixe z du point M tel que : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ est appelée somme de z_1 et z_2 .

$$\boxed{\begin{gathered}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} \\ z = z_1 + z_2\end{gathered}}$$

Exercice III.1



Placer les points $M_1(-1 + i)$ et $M_2\ (2 + 3i)$

Placer le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$ puis déterminer l'affixe de M.

En déduire l'écriture cartésienne (i-e algébrique) de $(-1+i) + (2+3i)$.

Plus généralement :

$$\boxed{\text{Si } z_1 = x_1 + iy_1 \text{ et } z_2 = x_2 + iy_2 \text{ alors } z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i\,(y_1 + y_2)}$$

Remarque : Si z_1 et z_2 sont réels on retrouve l'addition des réels.

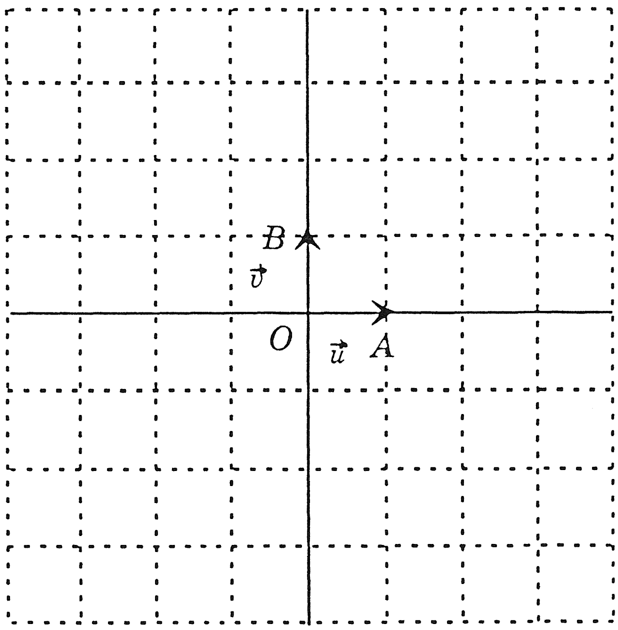
On déduit des propriétés de l'addition des vecteurs que l'addition des nombres complexes est *commutative :*

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$$

et aussi qu'elle est *associative* :

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$$

Exercice III.2

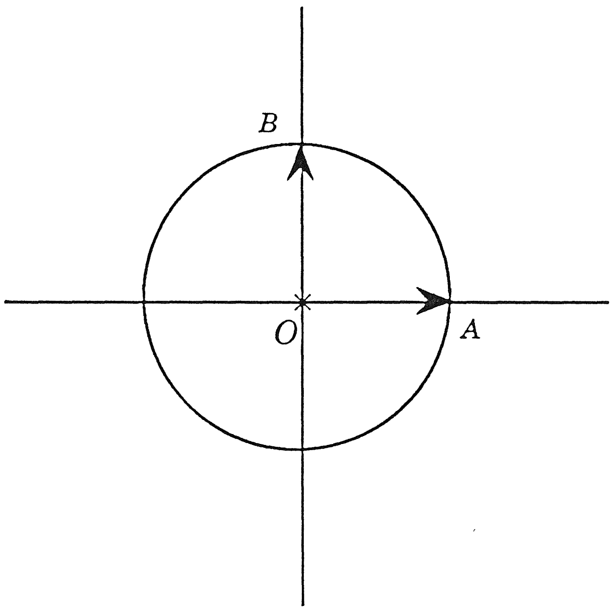


Soit $C(1 + i)$. Construire l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OM}$ soit un vecteur colinéaire à $\overrightarrow{OA}$.

Retrouver ce résultat en utilisant les nombres complexes.

Exercice III.3

Placer le point E d'affixe $e^{i\frac{\pi}{4}}$, *F d'affixe* $e^{i\frac{2\pi}{3}}$,
G d'affixe $e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}$



a) Calculer un argument et le module du nombre complexe
$e^{i\frac{\pi}{4}} + e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) Ecrire ce nombre complexe sous forme cartésienne.

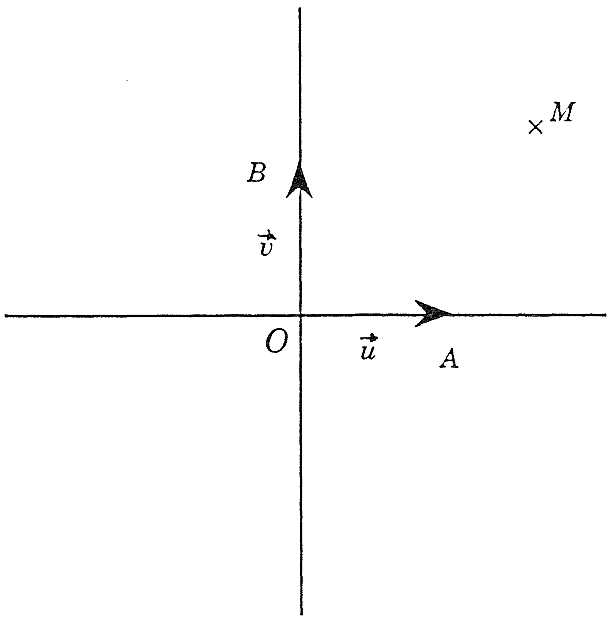
Remarques :

- Il est souvent peu commode d'utiliser l'écriture trigonométrique pour additionner deux nombres complexes. Pour vous en convaincre, essayez de refaire l'exercice précédent en remplaçant l'affixe de E par $2\,e^{i\frac{\pi}{4}}$.

- En général l'argument d'une somme n'est pas égal à la somme des arguments. *Illustrer cette remarque par un exemple.*

Exercice III.4

Soient M un point d'affixe non nulle z, M' son symétrique par rapport à l'axe (OA), M'' le symétrique de M par rapport à O, et M''' le symétrique de M par rapport à l'axe (OB).



1) On pose $z = x + iy$. *Ecrire les affixes de M' et M'', M''' sous la forme cartésienne.*

2) On pose $z = \rho\, e^{i\theta}$. *Ecrire les affixes de M' et M'', M''' sous la forme trigonométrique.*

Définition :

L'affixe z' de M', symétrique de M par rapport à (OA), est appelée le **conjugué** de z, et est **notée** $\bar{z}$.

L'affixe z'' de M'' , symétrique de M par rapport à O, est appelée **l'opposé** de z et est **notée** $-z$.

Si	$z = \rho e^{i\theta}$	alors	$\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$	et	$-z = \rho e^{i(\theta + \pi)}$
Si	$z = x + iy$	alors	$\bar{z} = x - iy$	et	$-z = -x - iy$

Exercice III.5

Déterminer l'ensemble E des complexes z tels que $z = \bar{z}$.

Déterminer l'ensemble F des complexes z tels que $z = -\bar{z}$.

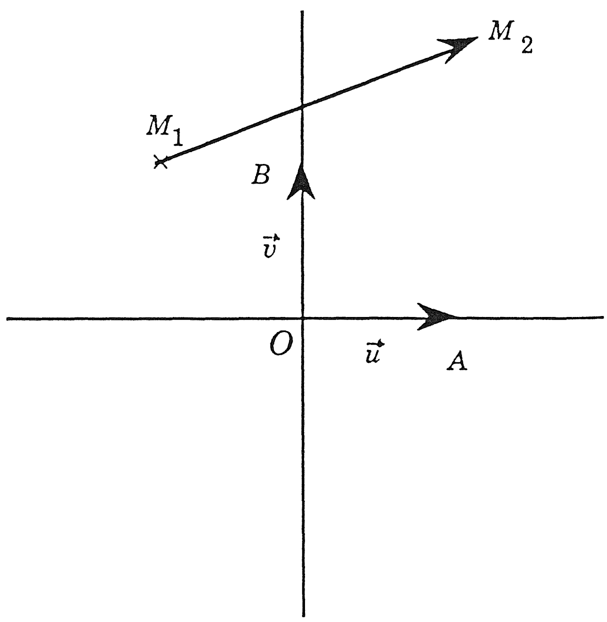
Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z et $\bar{z}$ *pour que z soit imaginaire pur.*

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur z et $\bar{z}$ *pour que z soit réel.*

z est réel $\Longleftrightarrow z = \bar{z} \Longleftrightarrow z = 0$ ou $\arg z = k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

z est imaginaire pur $\Longleftrightarrow z = -\bar{z} \Longleftrightarrow z = 0$ ou $z = \frac{\pi}{2} + k\pi \, (k \in \mathbb{Z})$

Soustraction dans $\mathbb{C}$.



Considérons M_1 et M_2 deux points du plan.

On note (x_1, y_1) les coordonnées cartésiennes de M_1 , et z_1 son affixe.
On note (x_2, y_2) les coordonnées cartésiennes de M_2, et z_2 son affixe.

On a $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$ donc $\overrightarrow{M_1M_2}$ a pour affixe $(x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1)$. Ce nombre complexe est noté $z_2 - z_1$.

Exercice III.6

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes d'images respectives M_1 et M_2.

Interpréter géométriquement le module et un argument de $z_2 - z_1$.

Exercice III.7

Soit M un point d'affixe $z = x + iy = \rho e^{i\theta}$
Ecrire sous forme trigononométrique et sous forme cartésienne les complexes :

$z + \bar{z}$

$z - \bar{z}$

En déduire une expression simplifiée de $e^{i\theta} + e^{-i\theta}$ et de $e^{i\theta} - e^{-i\theta}$

Exercice III.8

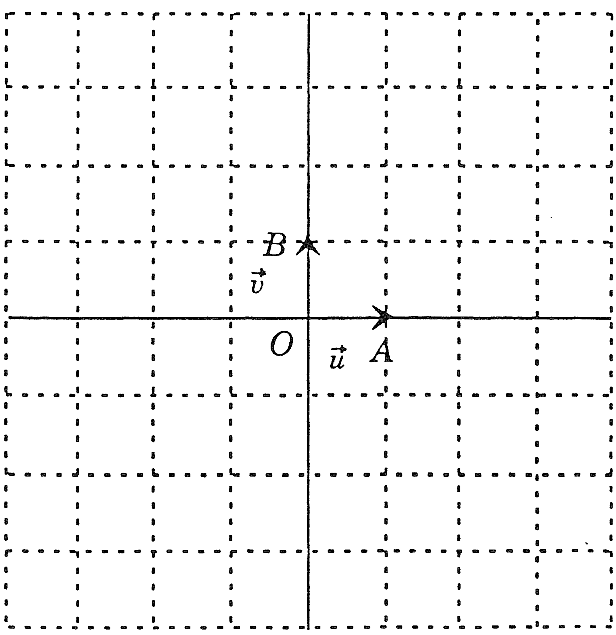
On considère dans le plan les points E et F d'affixes respectives $2 + 3i$ et $-5 + 4i$.

Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{EF}$

Exercice III.9

Placer dans le plan les points E et F d'affixes respectives $3 - i$ et $-2 + 3i$.

Construire le point K tel que OEKF soit un parallélogramme et calculer l'affixe Z_K du point K.



Exercice III.10

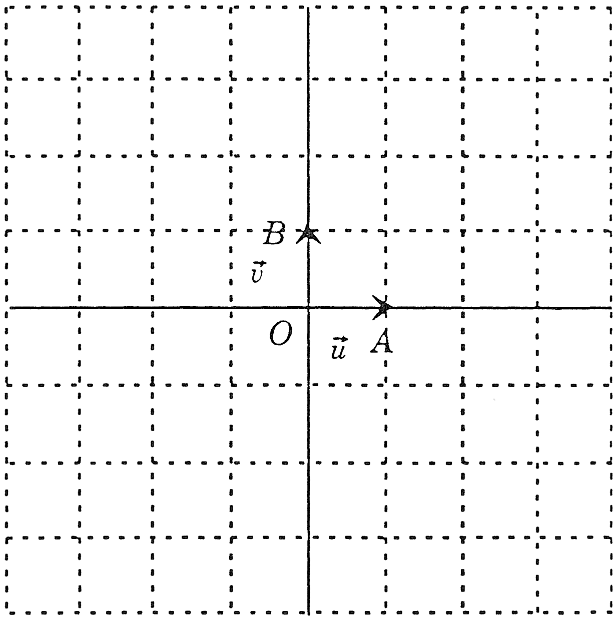
Soient MNPQ un parallélogramme tel que $Z_M = 1 + 2i$, $Z_N = 4 + 3i$, $Z_Q = 2 + 5i$.

Déterminer Z_P.

Exercice III.11

Soit E, F, G, H les points du plan d'affixes respectives $1 + 3i$, $2 + i$, 4 , $3 + 2i$.

Démontrer que le quadrilatère EFGH est un losange.



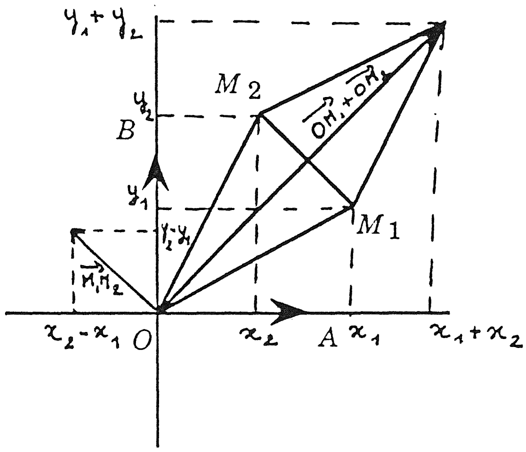
RESUME

Soient M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2 .

$z_1 + z_2$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$

$z_2 - z_1$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$
(on suppose $M_1 \neq M_2$)

$|z_2 - z_1| = M_1M_2$
$arg\,(z_2 - z_1) = (\vec{u}\ , \overrightarrow{M_1M_2})$



Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \\ z_2 - z_1 = (x_2 - x_1) + i(y_2 - y_1) \end{cases}$$

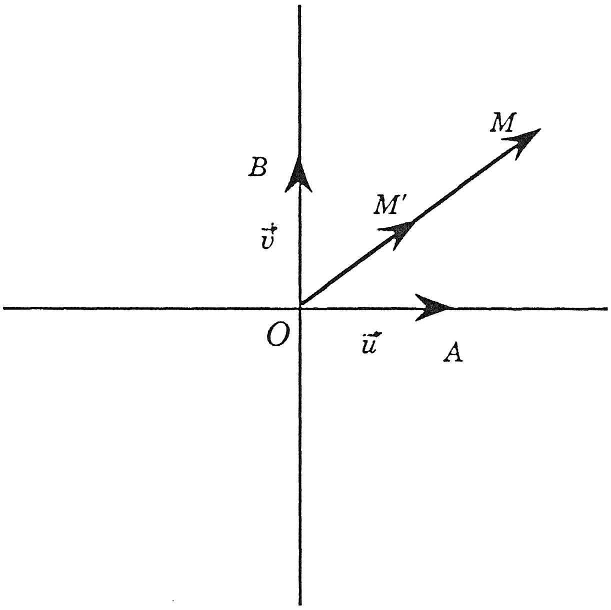
Pour tous complexes z_1 , z_2 , z_3 on a
$$\begin{cases} z_1 + z_2 = z_2 + z_1 \\ z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 + 0 = 0 + z_1 = z_1 \\ z_1 + (-z_1) = 0 \end{cases}$$

Pour tout complexe z on a
$$\begin{cases} z + \bar{z} = 2Re\ (z) \\ z - \bar{z} = 2i\ Im\ (z) \\ \left.\begin{array}{l} \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \cos\theta \\ \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \sin\theta \end{array}\right\} \textit{Formule d'Euler} \end{cases}$$

IV - LA MULTIPLICATION DANS $\mathbb{C}$

A - MULTIPLICATION D'UN NOMBRE COMPLEXE PAR UN NOMBRE REEL

Soient k un **réel** et h l'homothétie de centre O et de rapport k.
Considérons le point M d'affixe $z = x + iy$ et M' son image par l'homothétie h ; M' est défini par la relation vectorielle : $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$; on en déduit que le point M' a pour coordonnées $(kx\,,\,ky)$, donc que son affixe est $kx + iky$.



Définition :

Soient le réel k et le complexe $z = x + iy$, où x et y sont des réels.
On note kz le nombre complexe $kx + i(ky)$.

Remarque :

Soient M d'affixe z et M' d'affixe z'. $\boxed{z' = kz \text{ équivaut à } \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}}$

Si $k = -1$ les vecteurs $\overrightarrow{OM'}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont opposés. On a donc $(-1)\,z = -z$.

Pour tout complexe on a : $0 \times z = 0$ et $1 \times z = z$

Exercice IV.1

Placer les points C et D d'affixes respectives $Z_C = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$ *et* $Z_D = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.

Placer les points E, F, G, H d'affixes respectives
$\frac{1}{4}Z_C$, $2Z_D$, $-Z_C$, $\frac{-3}{2}Z_D$.

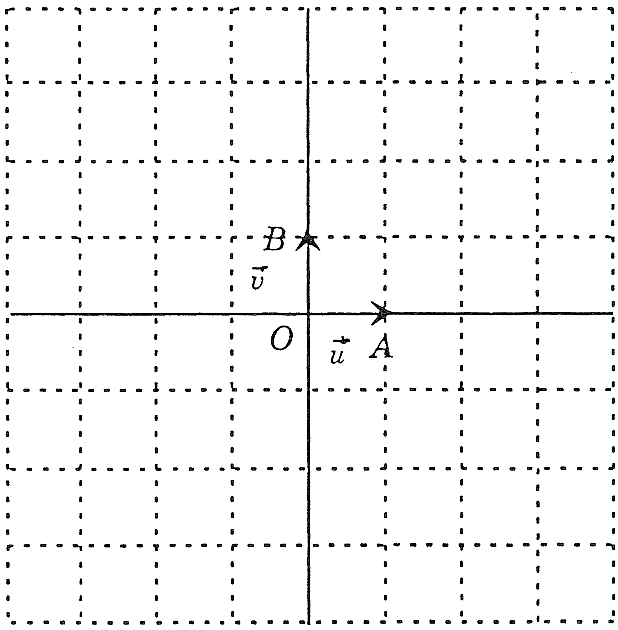
Ecrire sous forme trigonométrique les affixes des points E, F, G, H.

$Z_E =$

$Z_F =$

$Z_G =$

$Z_H =$



Exercice IV.2

Soient z un complexe et k un réel. On suppose $z \neq 0$ et $k \neq 0$

Exprimer $|kz|$ et arg (kz) en fonction de k, $|z|$ et arg z.

Remarque : Le module du produit d'un complexe par un réel est égal au produit de la **valeur absolue du réel** par le module du complexe.

B - MULTIPLICATION DES NOMBRES COMPLEXES DE MODULE 1

Exercice IV.3

Soient C le point d'affixe $e^{i\frac{\pi}{6}}$ et D le point d'affixe $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

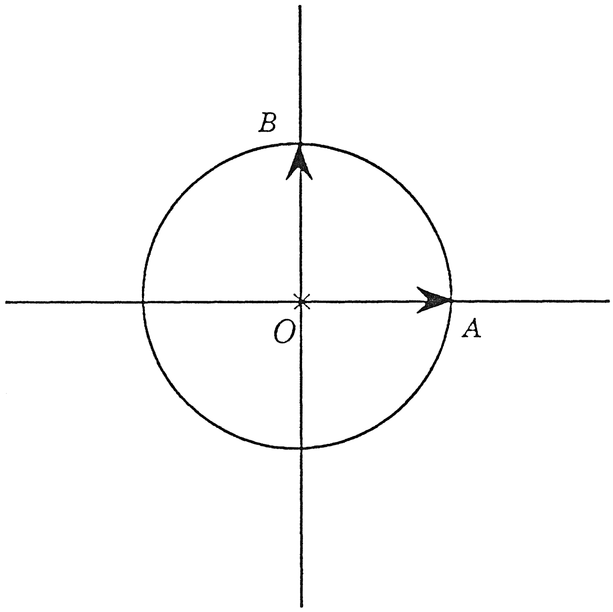
Construire les images respectives C' et D' de C et D par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Ecrire les affixes de ces points sous forme trigonométrique.

$z_{C'} =$ $\qquad$ $z_{D'} =$

Même question pour les points C'' et D'' images respectives de C et D par la rotation de centre O et d'angle π.

$z_{C''} =$ $\qquad$ $z_{D''} =$



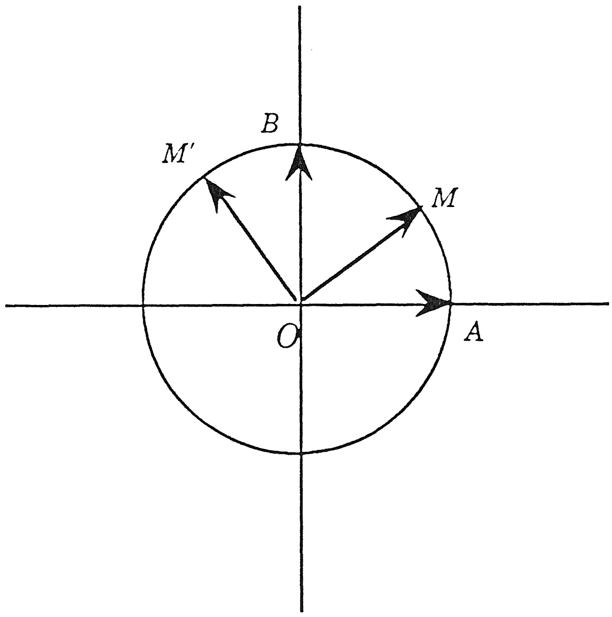
Soit M le point d'affixe $e^{i\theta}$. On note r_α la rotation de centre O et d'angle α et on pose $M' = r_\alpha(M)$.

On a :

$OM = OM' = 1$

$(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta + \alpha$

On en déduit que l'affixe de M' est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\theta + \alpha$, c'est-à-dire $e^{i(\theta+\alpha)}$. L'affixe de M' est appelée le **produit de $e^{i\theta}$ et $e^{i\alpha}$.**



Définition :

Soient $e^{i\theta}$ et $e^{i\alpha}$ deux nombres complexes de module 1. On note $e^{i\theta}.e^{i\alpha}$ ou $e^{i\theta}\times e^{i\alpha}$ le complexe $e^{i(\theta+\alpha)}$.

Exercice IV.4

Ecrire sous forme trigonométrique les produits suivants : $e^{i\frac{\pi}{4}}.e^{-i\frac{\pi}{6}}$, $e^{-i\frac{\pi}{6}}.e^{i\frac{\pi}{4}}$.

Exercice IV.5

Ecrire sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique le produit : $e^{i\frac{\pi}{2}}.e^{i\frac{\pi}{2}}$.
En déduire que $i^2 = -1$.

Remarque : **Le carré du nombre complexe i est égal à -1.**
On en déduit que l'équation $z^2 = -1$ a des solutions dans **C**, alors que cette équation n'a pas de solution dans **R**. Nous étudierons dans le paragraphe V la résolution complète de cette équation.

C - MULTIPLICATION DE DEUX COMPLEXES DANS LE CAS GENERAL

Exercice IV.6

Soit M un point quelconque du plan.

Soit h_3 l'homothétie de centre O et de rapport 3.

Soit $r_{\frac{\pi}{3}}$ la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

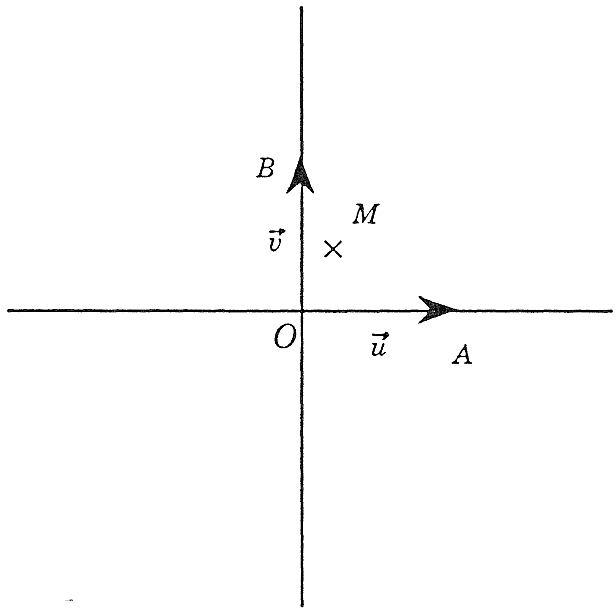
Construire les points M_1, M_2, M_3, M_4 définis par :

- M_1 image de M par h_3.

- M_2 image de M_1 par $r_{\frac{\pi}{3}}$.

- M_3 image de M par r_3.

- M_4 image de M_3 par $r_{\frac{\pi}{3}}$.



Remarque : Plus généralement si h_λ est l'homothétie de centre O et de rapport λ et r_α la rotation de centre O et d'angle α alors $h_\lambda \circ r_\alpha(M) = r_\alpha \circ h_\lambda(M)$ pour tout point M du plan.

Exercice IV.7

Dans le plan on considère les points $C\left(\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)$, $D\left(e^{-i\frac{\pi}{3}}\right)$, $E\left(\frac{3}{2}e^{i\pi}\right)$, $F\left(\frac{3}{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)$.

Soient h_2 l'homothétie de centre O, de rapport 2 et $r_{\frac{\pi}{3}}$ la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Ecrire les affixes des points C_1 , D_1 , E_1 , F_1, images respectives de C, D, E, F par $r_{\frac{\pi}{3}} \circ h_2$.

Affixe de C_1 :

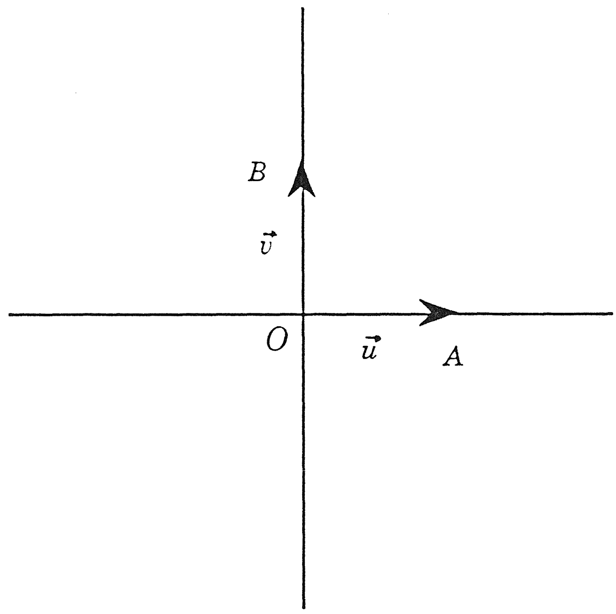
Affixe de D_1 :

Affixe de E_1 :

Affixe de F_1 :

Soit M_1 l'image de $M\left(\rho e^{i\theta}\right)$ par $r_{\frac{\pi}{3}} \circ h_2$.

Quelle est l'affixe z_1 de M_1 ?



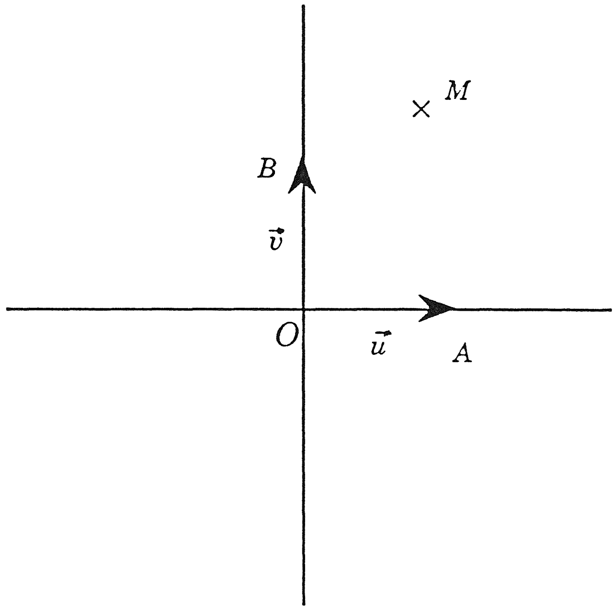
Remarque : z_1 est appelé **produit** de $\rho e^{i\theta}$ par $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ noté $\left(\rho e^{i\theta}\right) \times \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)$

On a donc la relation : $\rho e^{i\theta} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2\rho e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)}$

$2e^{i\frac{\pi}{3}} \times \rho e^{i\theta} = 2\rho e^{i\left(\frac{\pi}{3}+\theta\right)}$

Exercice IV.8

Soit M un point d'affixe z non nulle, construire le point M' d'affixe $\frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \times z$



Exercice IV.9

Soient h_λ *l'homothétie de centre O, de rapport* λ $(\lambda > 0)$ *et* r_α *la rotation de centre O, d'angle* α.

Quelle est l'affixe z_1 *de* M_1 *image de* $M\left(\rho e^{i\theta}\right)$ *par* $r_\alpha \circ h_\lambda$ *?*

Définition :

Etant donné deux nombres complexes non nuls : z de module ρ et d'argument θ, et z' de module λ et d'argument α, le nombre complexe de module $\rho\lambda$ et d'argument $\theta+\alpha$ est appelé **le produit de** z' **par** z. On écrit : $z \times z' = (\rho e^{i\theta})(\lambda e^{i\alpha}) = \rho\lambda e^{i(\theta+\alpha)}$.

D'où $|z \times z'| = |z| \times |z'|$ et $arg\ (z \times z') = arg\, z + arg\, z'$

Si $z = 0$ alors $0 \times z' = z' \times 0 = 0$ pour tout complexe z'.

Exercice IV.10

Effectuer les produits : $3e^{i\pi} \times 4e^{i\frac{\pi}{2}}$, $2e^{i\frac{\pi}{3}} \times e^{-i\frac{5\pi}{6}}$, $4e^{i\theta} \times 3e^{-i\theta}$.

Exercice IV.11

Déterminer λ *(réel strictement positif) et* α *(réel défini modulo* 2π*) tels que :*

a) $\lambda e^{i\alpha} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 1$

b) $\lambda e^{i\alpha} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} = -1$

c) $\lambda e^{i\alpha} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}} \in \mathbb{R}^*$

d) $\lambda e^{i\alpha} \times 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ *est un réel strictement positif.*

Exercice IV.12 *(Conséquence de la définition)*

Montrer que $z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$ *. (On dit que la multiplication de* $\mathbb{C}$ *est commutative).*

Montrer que $z_1 \times z_2 = 0$ *équivaut à* $z_1 = 0$ *ou* $z_2 = 0$

Montrer que $(z_1 \times z_2) \times z_3 = z_1 \times (z_2 \times z_3)$ *(On dit que la multiplication de* $\mathbb{C}$ *est associative).*

Produit de deux complexes et forme algébrique

Nous venons de définir le produit de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique. Dans les exercices on a aussi souvent besoin de calculer des produits de complexes écrits sous forme algébrique.

Le but de l'exercice suivant est de démontrer que pour tous réels x, y, x', y' on a :

$$(x + iy)(x' + iy') = xx' - yy' + i(xy' + x'y)$$

Exercice IV.13

Considérons les complexes non nuls z et z' tels que : $z = x + iy = \rho.e^{i\theta}$ *et* $z' = x' + iy' = \lambda.e^{i\alpha}$

On pose $Z = zz'$*. Ecrire Z sous forme trigonométrique.*

Ecrire Z sous forme cartésienne en fonction de ρ , λ , θ , α *puis en fonction de* x , y , x' , y' .

Vérifier que l'on obtient le même résultat en développant $(x + iy)(x' + iy')$ *et en utilisant la relation* $i^2 = -1$.

Remarque : A partir de ce résultat vous vérifierez que pour tous nombres complexes z , z', z'' on a : $z \times (z' + z'') = z \times z' + z \times z''$. On dit que la multiplication est *distributive* par rapport à l'addition.

Exercice IV.14

Soit $z = x + iy$ *où* x *et* y *sont des réels, démontrer l'égalité* $\boxed{z \times \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2}$

Exercice IV.15

Ecrire sous forme algébrique les produits suivants :

$(1 + 2i)(4 - 3i)$

$(3 + i)(3 - i)$

$\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4}i\right)(2 + 3i)$

$(2 + 5i)^2$

Exercice IV.16

Ecrire sous forme algébrique ou trigonométrique les nombres complexes suivants :

$(1+i)^8(1-i)^4$

$(-1+i)^{12}$

Exercice IV.17

Démontrer l'égalité $(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos3\theta + i\sin3\theta$

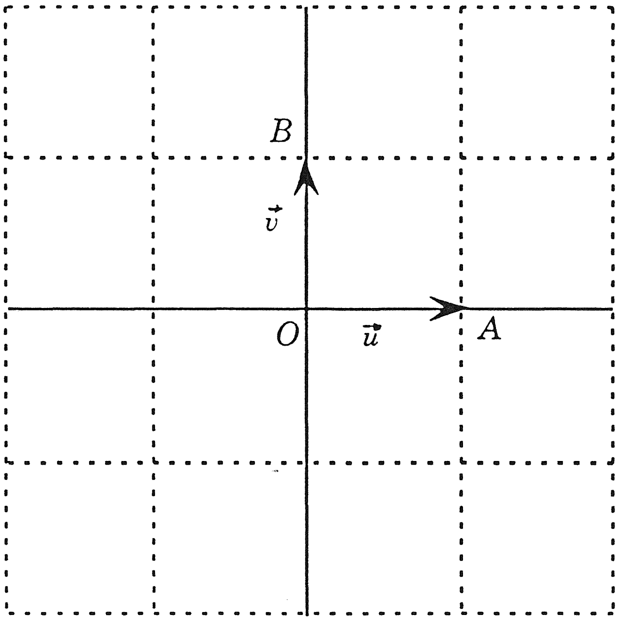
En déduire une expression de $\cos3\theta$ *et* $\sin3\theta$ *en fonction de* $\cos\theta$ *et* $\sin\theta$

> *Plus généralement pour tout entier naturel p*
>
> $\left(e^{i\theta}\right)^p = e^{ip\theta}$
>
> $(\cos\theta + i\sin\theta)^p = \cos p\theta + i\sin p\theta$
> *(Formule de Moivre)*

B - QUOTIENTS DE DEUX COMPLEXES

Inverse d'un complexe non nul

Exercice IV.18



Soit f l'application $\mathcal{P}$-{O} dans $\mathcal{P}$-{O} qui à chaque point M associe le point M' tel que :

$OM \cdot OM' = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$

Soit E d'affixe $1 + i$, construire son image E' par f.

Soit M d'affixe non nulle $z = \rho e^{i\theta}$. Déterminer sous forme trigonométrique l'affixe z' du point M'.

Calculer zz'.

Propriété :

> Soit z un nombre complexe non nul. Il existe un unique complexe z' noté $\frac{1}{z}$ et appelé inverse de z, tel que $zz' = 1$.
>
> *On a* $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$ et $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z$
>
> En particulier $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \left(\overline{e^{i\theta}}\right)$

Exercice IV.19

Soit $z = \rho e^{i\theta}$. Ecrire $\frac{1}{z}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique en fonction de ρ et θ.

On pose $z = x+iy$, x et y réels. Exprimer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ en fonction de x, de y et ρ.

En déduire que $\frac{1}{z} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Exercice IV.20

Donner la forme trigonométrique puis la forme algébrique du complexe $\frac{1}{i}$; $\frac{1}{1+\sqrt{3}i}$

Donner la forme algébrique de $\frac{1}{2 + 3i}$.

Quotient de deux complexes

Définition :

> Soient z et z' deux complexes avec $z' \neq 0$
> On appelle quotient de z par z' le complexe noté $\frac{z}{z'}$ tel que
> $$\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$$
> Si $z = \rho.e^{i\theta}$ et $z' = \lambda.e^{i\alpha}$ on a $\frac{z}{z'} = \rho.e^{i\theta} \times \frac{1}{\lambda} e^{-i\alpha} = \frac{\rho}{\lambda} e^{i(\theta-\alpha)}$
>
> On en déduit $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$ *et* $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z'$

Exercice IV.21

Ecrire sous forme cartésienne $\frac{1}{1 + i}$

En déduire la forme cartésienne de $\frac{2 - 3i}{1 + i}$

Remarque : Pour obtenir la forme cartésienne de $\frac{z}{z'}$, il suffit de multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z'}$.

Exercice IV.22

Ecrire sous forme cartésienne

$z_1 = \frac{3-i}{1-2i}$

$z_2 = \frac{4-2i}{i}$

$z_3 = \frac{\sqrt{2}+i}{i-1}$

Exercice IV.23

Soient a, b, c, d des nombres complexes non nuls tous différents d'images respectives A, B, C, D.

Interpréter à l'aide des nombres complexes les angles suivants :

$(\vec{u}, \overrightarrow{OA}) =$ $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) =$ $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) =$

$(\vec{u}, \overrightarrow{AO}) =$ $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) =$ $(\vec{u}, \overrightarrow{CD}) =$

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) =$ $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) =$

A la suite de cet exercice, on peut énoncer la propriété suivante :

Propriété :

Soients A, B, C, D quatre points du plan tels que $A \neq B$ et $C \neq D$, d'affixes respectives, a, b, c, d.

On a $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = arg\left(\frac{d - c}{b - a}\right)$

E - OPERATIONS ET CONJUGAISON

Exercice IV.24

Soient z et z' deux nombres complexes.

Comparer :

$\bar{z} + \bar{z'}$ *et* $\overline{z + z'}$

$\bar{z} \times \bar{z'}$ *et* $\overline{z \times z'}$

$\overline{\left(\frac{1}{z}\right)}$ *et* $\frac{1}{\bar{z}}$

$\frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$ *et* $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}$

Exercice IV.25 (Exercice de synthèse)

Soit $\mathscr{P}$ le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère trois nombres complexes non nuls, deux à deux distincts a, b et c tels que $|a| = |b| = |c|$, $a \neq -b$, $b \neq -c$ et $a \neq c$. On désigne respectivement par A, B, C et H les images de a, b, c et $a + b + c$. Le but de l'exercice est de montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.

1. i) Soit $w = \bar{b}c - b\bar{c}$. Exprimer $\bar{w}$ à l'aide w. En déduire que w est un nombre imaginaire pur.

ii) Montrer à l'aide de 1.i) que $(b + c)\left(\bar{b} - \bar{c}\right)$ et $\dfrac{b + c}{b - c}$ sont des imaginaires purs.

2. i) Exprimer en fonction de a, b et c, les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CB}$.

ii) Utiliser 2.i) et 1.ii) pour montrer que la droite (AH) est la hauteur passant par A du triangle ABC.

iii) Expliquer, sans calcul supplémentaire, pourquoi H est le point d'intersection des trois hauteurs du triangle ABC.

RESUME

Nous avons défini deux opérations sur $\mathbb{C}$: l'addition et la multiplication.

L'addition des complexes s'interprète géométriquement par l'addition vectorielle.

La multiplication d'un nombre complexe par le multiplicateur $ke^{i\alpha}$, $k \in \mathbb{R}^*_+$ s'interprète géométriquement :

- par une homothétie de centre O si le multiplicateur est réel,
- par une rotation de centre O si le multiplicateur est $e^{i\alpha}$,
- par la composée des deux si le multiplicateur est $ke^{i\alpha}$.

	Ecriture algébrique	Ecriture trigonométrique
z	$x + iy$	(pour $z \neq 0$) $\rho e^{i\theta}$
z'	$x' + iy'$	(pour $z' \neq 0$) λe^{ia}
$z + z'$	$(x + x') + i(y + y')$	Peu pratique sauf si $\rho = \lambda$ (cf exercice III.3)
$z \times z'$	$(xx' - yy') + i(xy' + yx')$	$\rho\lambda e^{i(\theta+\alpha)}$
$\dfrac{1}{z}$	$\dfrac{x - iy}{x^2 + y^2}$	$\dfrac{1}{\rho} e^{-i\theta}$
$\dfrac{z}{z'}$	$\dfrac{z\bar{z'}}{\lvert z'\rvert^2}$	$\dfrac{\rho}{\lambda} e^{i(\theta-\alpha)}$

Remarque : $zz' = 0$ si et seulement si $z = 0$ ou $z' = 0$

V - EQUATIONS DU SECOND DEGRE DANS $\mathbb{C}$, A COEFFICIENTS REELS

A - RESOLUTION DANS $\mathbb{C}$ DE L'EQUATION $z^2 = a$ avec a réel.

Exercice V.1

Déterminer sous forme trigonométrique les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = -3$.

Ecrire ces solutions sous forme algébrique.

Remarque : L'équation dans $\mathbb{R}$ $z^2 = -3$ n'a aucune solution ; en revanche l'équation dans $\mathbb{C}$ $z^2 = -3$ a deux solutions.

Exercice V.2

Soit a un réel non nul. Déterminer, en distinguant deux cas, sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique les complexes dont le carré est égal à a.

1er cas : $a \in R_+$

2ème cas : $a \in R_-$

Théorème :

> Soit un réel non nul, l'équation dans $\mathbb{C}$ $z^2 = a$ a deux solutions :
>
> si $a > 0$ ces solutions sont $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$
>
> si $a < 0$ ces solutions sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$

Remarque :

L'équation dans $\mathbb{C}$ $z^2 = 0$ a une seule solution qui est 0.

B - CAS GENERAL

Exercice V.3

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 5)^2 = -3$.

Exercice V.4

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 + 6z + 7 = 0$.
(On pourra utiliser la forme canonique de $2z^2 + 6z + 7$).

Exercice V.5 (Cas général)

Soient a, b, c trois nombres réels et $a \neq 0$. On considère l'équation du second degré, dans $\mathbb{C}$, d'inconnue z :
$az^2 + bz + c = 0$,

En utilisant la même méthode que celle de l'exercice V.4 démontrer que pour tout complexe z

$$az^2 + bz + c = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$ *avec $\Delta = b^2 - 4ac$ (forme canonique).*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$, en distinguant trois cas :

$\Delta = 0$

$\Delta > 0$

$\Delta < 0$

Propriété :

> Soient a un réel non nul et b et c des réels quelconques.
> L'équation dans $\mathbb{C}$ $az^2 + bz + c = 0$ admet :
>
> si $\Delta = 0$ une solution réelle $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$
>
> si $\Delta > 0$ deux solutions réelles $z_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
>
> si $\Delta < 0$ deux solutions complexes conjuguées
>
> $z_1 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $\overline{z_1} = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarque : Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ à coefficients réels a toujours deux solutions distinctes ou non. Ce qui revient a dire que **dans $\mathbb{C}$ tout trinôme du second degré à coefficients réels peut s'écrire sous forme d'un produit de facteurs du premier degré.**

Exercice V.6

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

$z^2 = -9$

$z^2 - 7 = 0$

$z^2 + 4 = 0$

$-3z^2 + 6z + 1 = 0$

$z^2 - 4z + 5 = 0$

Exercice V.7

Factoriser :

$z^2 - 4z + 5$

$z^2 + z + 1$

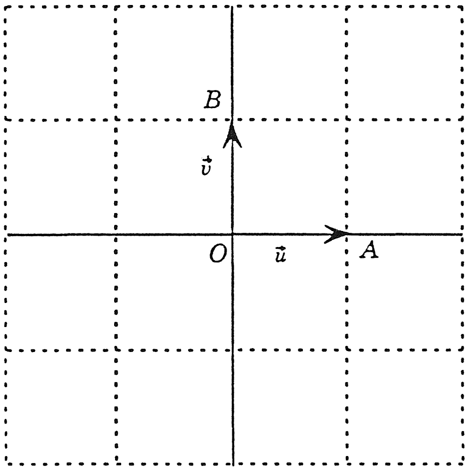
$13z^2 - 24z + 13$

LES COMPLEXES
UN OUTIL POUR FAIRE DE LA GEOMETRIE

I - NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATIONS DU PLAN

Dans tout ce chapitre, $(O, \vec{u}, \vec{v})$ sera un repère orthonormal direct du plan $\mathscr{P}$.

A - TRANSLATIONS



Exercice I.1

Soient T la translation de vecteur $\vec{V}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ *et M un point de coordonnées (x , y).*

Calculer les coordonnées cartésiennes de T(M).

Exercice I.2

Soient $\vec{V}$ *le vecteur d'affixe* $1 + 3i$ *et T la translation de vecteur* $\vec{V}$.

Soit M un point d'affixe z, calculer l'affixe z' de T(M) en fonction de z.

Exercice I.3

Soient $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longrightarrow z' = z + (3 - 2i)$ *et* $F : \mathscr{P} \longrightarrow \mathscr{P}$, $M(z) \longrightarrow M'(z' = f(z))$

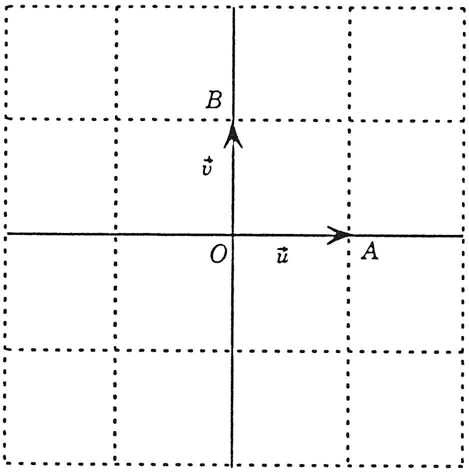
Démontrer que F est une translation dont on précisera le vecteur.

Remarque : On dit que f est **l'application** complexe associée à **l'application ponctuelle** F.

Théorème :

Une application ponctuelle F de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ est une translation si et seulement si son application complexe associée f est de la forme : $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longrightarrow z' = z + b$ b est alors l'affixe du vecteur de translation.

B - ROTATIONS



Exercice I.4

Soient R la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{6}$ et M le point de coordonnées (x , y). On note M' = R(M). Calculer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.

En déduire les coordonnées (x' , y') de M' en fonction de x et y.

Exercice I.5

Soient f : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et F son application ponctuelle associée.*

$$z \longrightarrow z' = e^{i\theta}z \ , \ \theta \in \mathbb{R}$$

1) Quels sont les points invariants par F ?

2) Soient $M \neq O$ et $M' = F(M)$. Démontrer que $OM = OM'$ et $(\overrightarrow{OM} \ , \ \overrightarrow{OM'}) = \theta$

3) Quelle est la nature de F ?

Théorème :

Une application ponctuelle de F de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{P}$ est une rotation de centre O et d'angle θ si et seulement si son application complexe associée f est de la forme

$$f : \quad \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longrightarrow z' = e^{i\theta}z$$

Exercice I.6

Soit F . $\mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ *définie par* $F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *avec* $\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$

1) Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M.

2) En déduire que F est une rotation que l'on précisera.

Exercice I.7

Soit R la rotation de centre I(2,1) et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

1) Calculer l'affixe z' de M' = R(M) en fonction de l'affixe z de M.

2) En déduire les coordonnées (x',y') de M' en fonction des coordonnées (x,y) de M.

Exercice I.8

Soient f : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et F et l'application ponctuelle associée à f.*

$$z \longrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + (1 + i)$$

1) Démontrer qu'il existe un point invariant et un seul M_0 *dont on précisera l'affixe* z_0.

2) Démontrer l'équivalence : $z' = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) z + 1 + i \Leftrightarrow z' - z_0 = \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z - z_0)$

3) Démontrer que si $M \neq M_0$ *et si* $M' = F(M)$ *on a* $M_0M = M_0M'$ *et* $\left(M_0M \, , \, M_0M'\right) = \frac{\pi}{3}$

4) Quelle est la nature de F ?

Exercice I.9 (Généralisation)

Soient f : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et F l'application ponctuelle associée à f.*

$$z \longrightarrow e^{i\theta} z + b \text{ (b élément de } \mathbb{C})$$

1) Quelle est la nature de F lorsque $\theta = 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ *?*

2) Quelle est la nature de F lorsque $\theta \neq 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$ *?*

Exercice I.10 *(Réciproque de I-9 2))*

Soit R une rotation d'angle θ. *Démontrer que l'application complexe associée à R est de la forme :*

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longrightarrow z' = e^{i\theta} z + b \text{ avec } b \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

C - EXERCICES D'APPLICATION

Exercice I.11 Composition de deux rotations de centres différents

1) On considère les rotations suivantes :

R_1 *de centre* Ω_1 $(2, -1)$ *d'angle* $\frac{\pi}{3}$ *et d'application complexe associée* f_1.

R_2 *de centre* Ω_2 $(3, 1)$ *d'angle* $\frac{\pi}{4}$ *et d'application complexe associée* f_2.

a) Soit M un point d'affixe z. On pose $M' = R_1(M)$ *et* $M'' = R_2(M') = R_2 \circ R_1(M)$

Exprimer l'affixe z' de M' et l'affixe z'' de M'' en fonction de z.

En déduire l'application complexe f associée à $R_2 \circ R_1$

Vérifier que $f = f_2 \circ f_1$

b) Déterminer de même l'application complexe associée à $R_1 \circ R_2$

c) Quelle est la nature de $R_2 \circ R_1$ *et* $R_1 \circ R_2$ *?*

d) A-t-on $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$ *?*

2) Soit R_3 *la rotation de centre* Ω_2 *et d'angle* $-\frac{\pi}{3}$. *Quelle est la nature de* $R_3 \circ R_1$ *et* $R_1 \circ R_3$ *?*

3) On note I le centre de $R_2 \circ R_1$ *et J le centre de* $R_1 \circ R_2$.

Déterminer les affixes de I et J.

Démontrer que I et J sont symétriques par rapport à $(\Omega_1 \Omega_2)$.

Exercice I.12 Rotation et triangle équilatéral

Dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct on considère les points A(2,1) et B(3,-2). On veut déterminer les coordonnées du point C tel que (A,B,C) soit un triangle équilatéral direct.

1) Démontrer que C est l'image de B par une rotation R de centre A. Quel est l'angle de R ?

2) En déduire les coordonnées de C.

Exercice I.13 Rotation et triangle rectangle isocèle

Soient $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan, A et B les points d'affixes respectives 1 et 2 + 3i.

1) Calculer l'affixe du point E tel que (E,B,A) soit un triangle rectangle isocèle de sommet E et de sens direct.

2) Calculer l'affixe du point F tel que (O,B,F) soit un triangle rectangle isocèle de sommet F et de sens direct.

3) On appelle I le milieu de [OA]. Démontrer que (I,E,F) est un triangle isocèle de sommet I.

Exercice I.13 Rotation et triangle rectangle isocèle

Soient $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormal direct du plan, A et B les points d'affixes respectives 1 et 2 + 3i.

1) Calculer l'affixe du point E tel que (E,B,A) soit un triangle rectangle isocèle de sommet E et de sens direct.

2) Calculer l'affixe du point F tel que (O,B,F) soit un triangle rectangle isocèle de sommet F et de sens direct.

3) On appelle I le milieu de [OA]. Démontrer que (I,E,F) est un triangle isocèle de sommet I.

Exercice V.14 Application complexe associée à une réflexion

1) Soient (D) la droite passant par O, de vecteur directeur $\vec{a}$ tel que $(\vec{u}, \vec{a}) = \frac{\pi}{3}\ (2\pi)$.
Soient M le point d'affixe z et M' son image par la réflexion d'axe (D).

a) Calculer l'affixe z' de M' en fonction de z.
b) En déduire la fonction complexe f associée à la réflexion d'axe (D).

2) Soient $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ *et F l'application ponctuelle associée à f.*

$$z \longrightarrow e^{i\frac{\pi}{4}}\bar{z}$$

a) Démontrer que l'ensemble des points invariants par F est une droite (D).

b) Vérifier que si $\vec{a}$ est un vecteur directeur de (D) on a $(\vec{u}, \vec{a}) = \frac{\pi}{8} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

c) Démontrer que F est la réflexion d'axe (D).

II - NOMBRES COMPLEXES ET CONFIGURATIONS

Dans tout le chapitre on considère le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice II.1

Soient a et b deux nombres complexes d'images respectives A et B.

Quelle est l'interprétation géométrique de $|b - a|$ *?*

On suppose maintenant $a \neq b$ *et on considère le point M d'affixe* $b - a$.

Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{OM}$ *?*

Quelle est l'interprétation géométrique de $\arg(b - a)$ *?*

A la suite de cet exercice, on peut rappeler la propriété suivante :

Propriété :

Si a et b sont deux nombres complexes d'images respectives A et B alors :

$$|b - a| = AB$$

De plus si $b \neq a$, $\quad \arg(b - a) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$

Exercice II.2

Soit C(2i), déterminer les ensembles suivants :

a) $E_1 = \{M(z) / |z - 2i| = 1\}$

b) $E_2 = \{M(z) / |z - 2i| = |z|\}$

c) $E_3 = \left\{M(z) / \left|\frac{z}{2i}\right| = 1\right\}$

d) $E_4 = \{M(z) / |z - 2i| = |z + 1 - i|\}$

Exercice II.3

Soit C(2i), déterminer les ensembles de points suivants :

a) $E_1 = \{M(z) \,/\, arg(z - 2i) = 0 + 2k\pi \,,\ k \in Z\}$

b) $E_2 = \left\{M(z) \;/\; arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \,,\ k \in Z\right\}$

c) $E_3 = \left\{M(z) \;/\; arg(z - 2i) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \,,\ k \in Z\right\}$

Propriété

> Soient A, B, C, D quatre points du plan d'affixes a, b, c, d tels que $A \neq B$, $C \neq D$.
>
> On a $(\overrightarrow{AB} \;,\; \overrightarrow{CD}) = arg\left(\dfrac{d - c}{b - a}\right)$
>
> Voir exercice IV.23 page 30.

Exercice II.4 *"Comment traduire..."*

En utilisant la propriété précédente compléter les équivalences suivantes :

(AB) // (CD)	*si et seulement si*	$\dfrac{d - c}{b - a}$ *est .....*
$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires et de même sens*	*si et seulement si*	$\dfrac{d - c}{b - a}$ *est .....*
$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires et de sens contraires*	*si et seulement si*	$\left(\dfrac{d - c}{b - a}\right)$ *est .....*
$\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont orthogonaux*	*si et seulement si*	$\dfrac{d - c}{b - a}$ *est .....*
(ABC) est un triangle rectangle en A	*si et seulement si*	*........ est un imaginaire pur*

Exercice II.5

Soit (OAB) un triangle équilatéral direct.

On note a et b les affixes de A et B déterminer $\frac{b}{a}$.

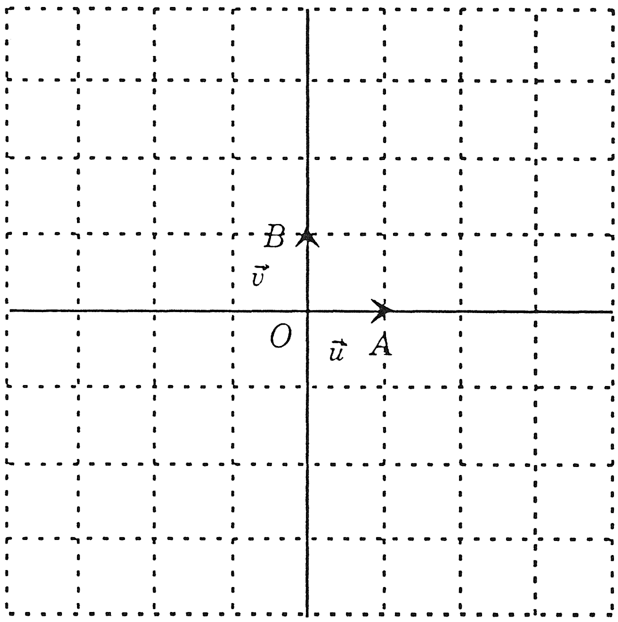
Exercice II.6

Soient A le point d'affixe $1 + i$ *, B le point d'affixe* $2i$ *et*

M un point d'affixe z tel que $\frac{z - (1 + i)}{z + 2i} = e^{i\frac{\pi}{3}}$

Que peut ont dire du triangle (AMB) ?

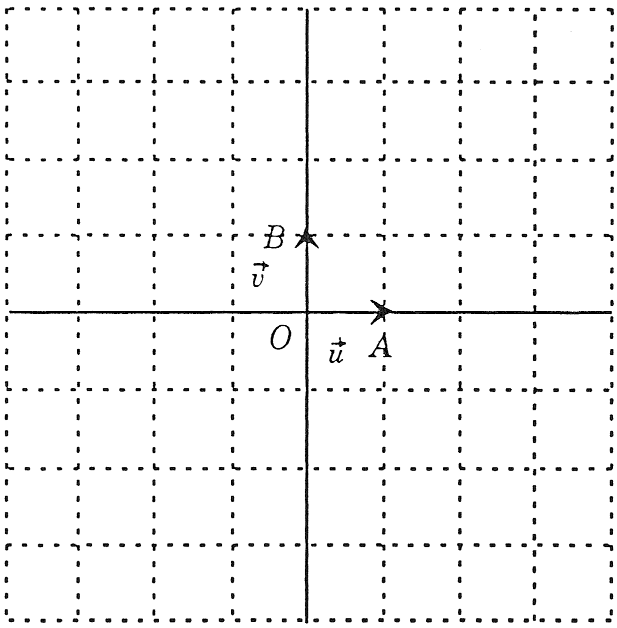
Construire alors ce triangle.



Exercice II.7

Soient A, B, C, D quatre points du plan complexe d'affixes respectives $1 - i$, $3 + 2i$, $-4 - i$, $-1 - 3i$

Démontrer que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.



Exercice II.8

Soient A,B,C trois points du plan complexe d'affixes respectives a, b, c tels que : $\dfrac{AB}{AC} = 2$ *et* $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{3}$

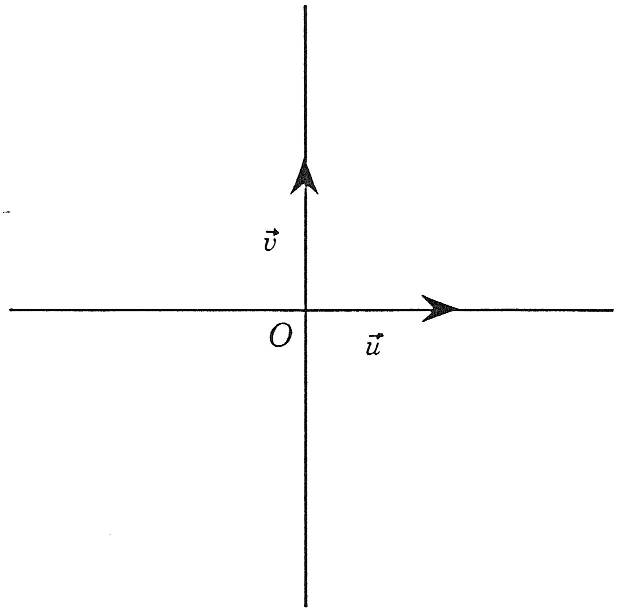
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre $\left(\dfrac{c - a}{b - a}\right)$

Exercice II.9

On considère les points A, B, C d'affixes respectives

$a = 3\,(1 + i)$; $b = 3\,i$; $c = \dfrac{3}{2}(-1 + i)$.

1) *Placer les points A, B, C.*



2) *a) Calculer* $\dfrac{b - c}{a}$ *et* $\dfrac{c}{a}$

b) Démontrer que (O, A, B, C) est un trapèze rectangle.

c) Donner une mesure de $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$.

Exercice II.10

Quel est l'ensemble E des points M(z) tels que : $\arg \dfrac{z - i}{z - (1 + i)} = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$

Quel est l'ensemble F des points M(z) tels que : $\dfrac{z - i}{z - (1 + i)} = e^{i\frac{-\pi}{2}}$

Exercice II.11

Déterminer l'ensemble E des points M(z) tels que $\dfrac{z+2}{z-2i}$ *soit un nombre réel.*

Déterminer l'ensemble F des points M(z) tels que $\dfrac{z-2}{z-2i}$ *soit un imaginaire pur.*

Déterminer l'ensemble G des points M(z) tels que $\dfrac{2z+4}{iz-2}$ *soit un nombre réel.*

Exercice II.12

Soient A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i.
On considère M_1 *et* M_2 *deux points d'affixes respectives* z_1 *et* z_2 *. On suppose* $z_1 \neq 0$ *et* $z_2 \neq 0$.

On pose $|z_1| = \rho_1 \quad |z_2| = \rho_2 \quad \arg z_1 = \theta_1 \quad \arg z_2 = \theta_2$

1) Traduire les phrases suivantes en faisant intervenir uniquement ρ_1 , ρ_2 , θ_1 , θ_2

PHRASE	*TRADUCTION*
M_1 *est sur (OA).*	
M_1 *est sur (OB).*	
O , M_1 , M_2 *sont alignés.*	
(OM_1M_2) *est rectangle en O et direct.*	
(OM_1M_2) *est isocèle de sommet O.*	
(OM_1M_2) *est rectangle en O et isocèle.*	
(OM_1M_2) *est équilatéral.*	
(OA) est bissectrice de $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.	
(OM_1M_2) *est rectangle en O.*	
(OM_1M_2B) *est un parallélogramme.*	

2) Associer à chaque propriété du tableau 2 le ou les numéros des phrases du tableau 1 qui caractérise cette propriété.

Tableau 1

Phrases

$\boxed{1}$ $z_1 + z_2$ *réel.*	$\boxed{5}$ $z_1 = -z_2$
$\boxed{2}$ $z_1 \times z_2$ *réel positif.*	$\boxed{6}$ $\lvert z_1 \rvert = \lvert z_2 \rvert$
$\boxed{3}$ z_2 *imaginaire pur.*	$\boxed{7}$ z_1 *réel*
$\boxed{4}$ $z_1 = i$	$\boxed{8}$ $z_2 - z_1 = i$
$\boxed{10}$ $\frac{z_1}{z_2}$ *réel*	$\boxed{9}$ $z_1 = z_2$
$\boxed{11}$ $z_1 \times z_2$ *réel*	$\boxed{12}$ $\frac{z_1}{z_2}$ *imaginaire pur*
$\boxed{13}$ $\frac{z_1}{z_2} = e^{ix}$ $(x \in R)$	$\boxed{14}$ $\frac{z_2}{z_1} = i$
$\boxed{15}$ $\frac{z_1}{z_2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$	$\boxed{16}$ $z_1 + z_2$ *imaginaire pur.*
$\boxed{17}$ $z_2 + z_1 = \frac{\pi}{3}$	$\boxed{18}$ $\left(\frac{z_2}{z_1}\right)^2 = -1$

Tableau 2

PROPRIETE	*NUMERO DES PHRASES CHOISIS*
M_1 *sur* (OA).	
M_2 *sur* (OB).	
O , M_1 , M_2 *alignés.*	
(OM_1M_2) *rectangle en O et direct.*	
(OM_1M_2) *isocèle de sommet O.*	
(OM_1M_2) *rectangle en O isocèle direct.*	
(OM_1M_2) *équilatéral direct.*	
(OA) *bissectrice de* $(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2})$.	
(OM_1M_2) *rectangle en O.*	
$(OM_1M_2\,B)$ *est un parallélogramme.*	

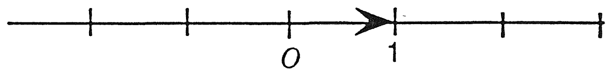
LES COMPLEXES
UN OUTILS POUR CALCULER

I - REELS ET COMPLEXES

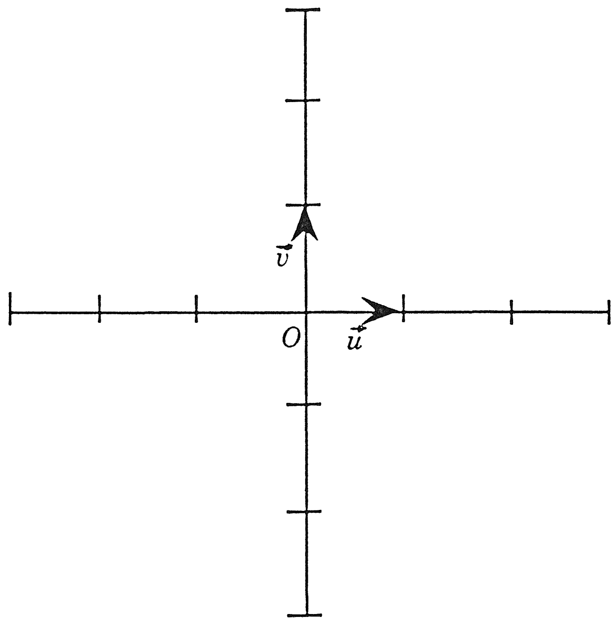
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$

Exercice I.1 Valeur absolue et module

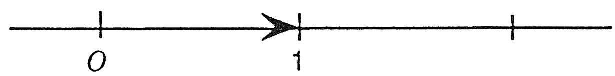
1) Représenter sur l'axe ci-contre l'ensemble des réels t tels que $|t| = 2$



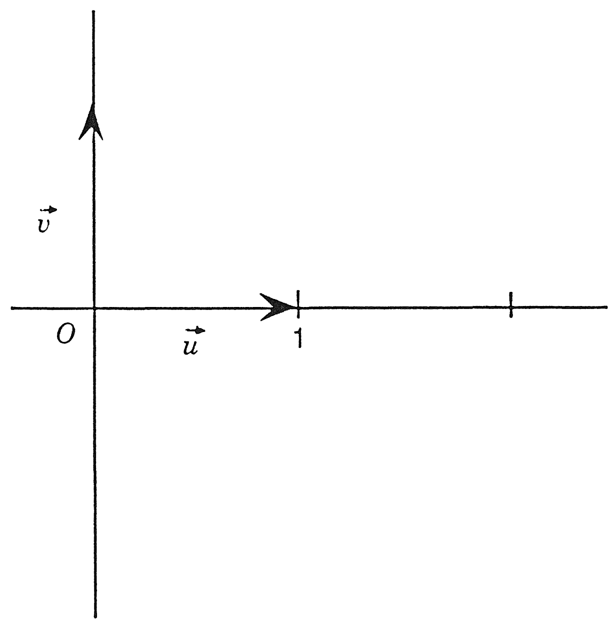
Représenter dans le repère ci-contre l'ensemble des ***complexes*** *t tels que* $|t| = 2$



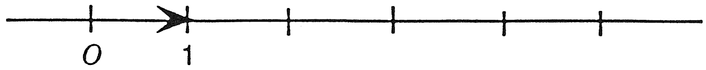
2) Représenter sur l'axe ci-contre l'ensemble des réels t tels que $|t - 1| = |t - 2|$.



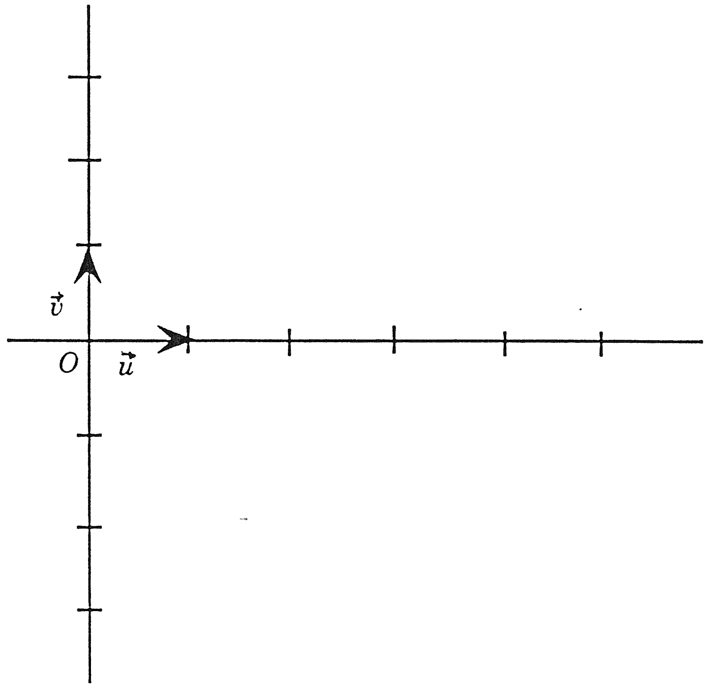
Représenter dans le repère ci-contre l'ensemble des complexes t tels que $|t - 1| = |t - 2|$



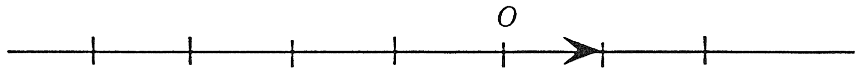
3) Représenter sur l'axe ci-contre l'ensemble des réels t tels que $|t - 4| \leq 1$.



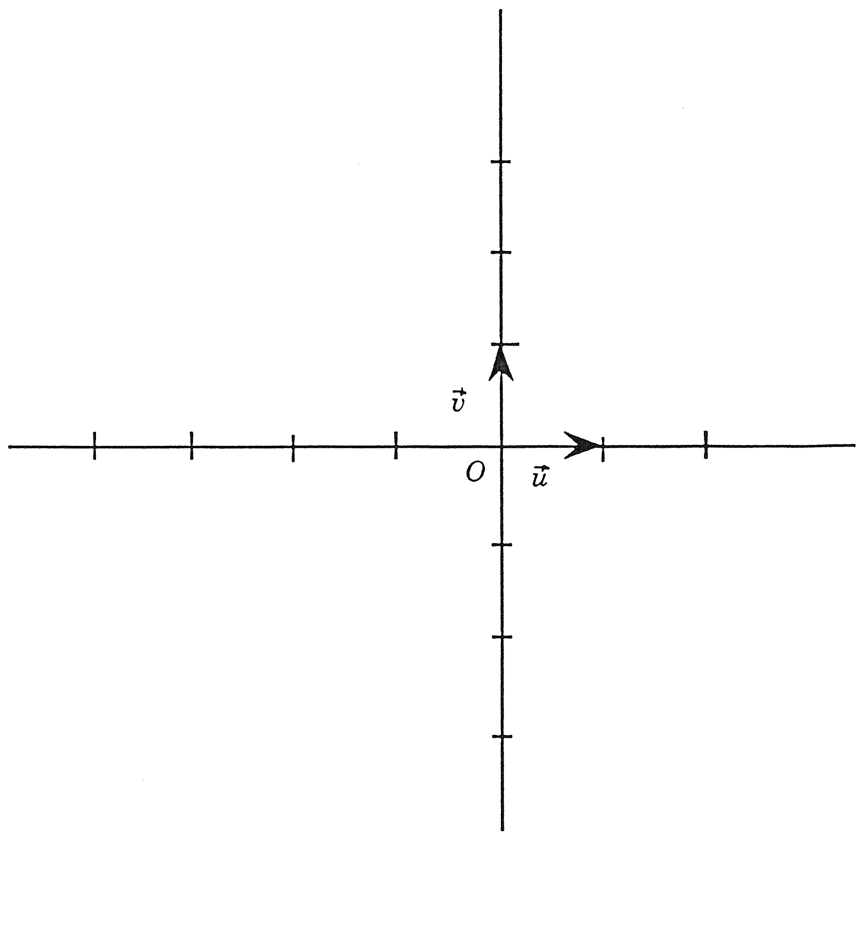
Représenter dans le repère ci-contre l'ensemble des complexes t tels que $|t - 4| \leq 1$



4) Représenter sur l'axe ci-contre l'ensemble des réels t tels que $|t + 2| = 1$.



Représenter dans le repère ci-contre l'ensemble des complexes t tels que $|t + 2| = 1$



Exercice I.2 *Autour de z^2*

1) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que z^2 soit un réel positif.

2) Déterminer l'ensemble des complexes z tels que z^2 soit un réel strictement négatif.

3) Reprendre 1) et 2) avec z réel.

Exercice I.3

1) Déterminer l'ensemble des réels z tels que $z^2 - 1 = 0$.

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que
$z^2 - 1 = 0$.

2) Déterminer l'ensemble des réels z tels que $z^2 + 1 = 0$.

Déterminer l'ensemble des complexes z tels que
$z^2 + 1 = 0$.

Exercice I.4

Voici des affirmations écrites dans $\mathbb{R}$ puis dans $\mathbb{C}$.

1 - Ont-elles un sens ? (Répondre dans le tableau à la place $\boxed{1}$)

2 - Si oui sont-elles vraies ou fausses ? Justifier. (Répondre dans le tableau à la place $\boxed{2}$)

Pour tout réel x, il existe un réel x' tel que $x + x' = 0$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Pour tout complexe z, il existe un complexe z' tel que* $z + z' = 0$.	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Pour tout réel x, il existe un réel x' tel que $xx' = 1$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Pour tout complexe z, il existe un complexe z' tel que* $zz' = 1$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Pour tout réel x, $x^2 \in \mathbb{R}^+$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Pour tout complexe z,* $z^2 \in \mathbb{R}^+$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Pour tout réel x, $\lvert x\rvert^2 = x^2$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Pour tout complexe z,* $\lvert z\rvert^2 = z^2$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Dans $\mathbb{R}$: $xx' = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *ou* $x' = 0$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Dans $\mathbb{C}$:* $zz' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ *ou* $z' = 0$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$

Dans $\mathbb{R}$: $\lvert x\rvert = \lvert x'\rvert \Leftrightarrow x = x'$ *ou* $x = -x'$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Dans* $\mathbb{C}$: $\lvert z\rvert = \lvert z'\rvert \Leftrightarrow z = z'$ *ou* $z = -z'$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Pour tout réel x , $x^2 \geq 0$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Pour tout complexe* z, $z^2 \geq 0$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Pour tout réel x, $x^2 + 1$ *n'est jamais nul.*	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Pour tout complexe* z, $z^2 + 1$ *n'est jamais nul.*	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Dans $\mathbb{R}$: *Si* $\lvert x\rvert \leq \lvert x'\rvert$ *alors* $x^2 \leq x'^2$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Dans* $\mathbb{C}$: *Si* $\lvert z\rvert \leq \lvert z'\rvert$ *alors* $z^2 \leq z'^2$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$
Dans $\mathbb{R}$: $\lvert x + x'\rvert \leq \lvert x\rvert + \lvert x'\rvert$ $\lvert xx'\rvert = \lvert x\rvert \lvert x'\rvert$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$	*Dans* $\mathbb{C}$: $\lvert z + z'\rvert \leq \lvert z\rvert + \lvert z'\rvert$ $\lvert zz'\rvert = \lvert z\rvert \lvert z'\rvert$	$\boxed{1}$ $\boxed{2}$

Exercice I.5 Pourquoi est-ce faux ?

Toutes les phrases suivantes sont fausses. Expliquer pourquoi.

$\boxed{1}$ *Pour tous nombres complexes a et b,* $\overline{a + bi} = a - bi$

$\boxed{2}$ *Pour tout point M du plan, son affixe z vérifie la relation* $OM^2 = z^2$.

$\boxed{3}$ *Deux nombres complexes ont même module si et seulement si ils sont égaux ou opposés.*

$\boxed{4}$ *z étant un nombre complexe :* $|z| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq z \leq 1$

$\boxed{5}$ *z étant un nombre complexe :* $z^2 \geq 2$ *équivaut à* $z \leq -\sqrt{2}$ *ou* $z \geq \sqrt{2}$

$\boxed{6}$ *z étant un nombre complexe,* $z - i$ *est un réel positif si et seulement si* $z \geq i$

$\boxed{7}$ *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{u}\,'$ *du plan d'affixe respective z et z' on a* $\vec{u} \cdot \vec{u}\,' = z\,z'$

$\boxed{8}$ *Pour tous complexe z et z',* $(z + z')^2 \geq 0$

$\boxed{9}$ *(ABC) est isocèle si et seulement si* $Z_{\overrightarrow{AB}} = Z_{\overrightarrow{AC}}$

II - NOMBRES COMPLEXES ET TRIGONOMETRIE

Les exercices de ce paragraphe seront rédigés sur une feuille séparée.

Exercice II.1

On considère les nombres complexes z_1, z_2 et z définis par $z_1 = \dfrac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ $\quad z_2 = 1 - i \quad$ *et* $\quad z = \dfrac{z_1}{z_2}$

1) Ecrire z sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.

2) En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\sin\dfrac{\pi}{12}$

Exercice II.2 Linéarisation de $\cos^3\theta$ et de $\sin^3\theta$

1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Vérifier que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2}$ *et* $\dfrac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2i}$ *sont des réels que l'on déterminera.*

2) Développer $\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3$ *et en utilisant des regroupements judicieux, en déduire une expression de $\cos 3\theta$ en fonction de $\cos 3\theta$ et $\cos\theta$.*

3) Développer $\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2i}\right)^3$ *et déterminer une expression de $\sin^3\theta$ en fonction de $\sin^3\theta$ et $\sin\theta$.*

4) En déduire une primitive de $\cos^3\theta$ et de $\sin^3\theta$.

5) Retrouver les formules "bien connues" : $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$ *et* $\sin 2x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ *en utilisant la méthode précédente.*

Exercice II.3 La somme de deux complexes de module 1 est de module 1 ?

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
On considère deux nombres complexes de module 1 : z_1 et z_2

1) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{6}}$ *et* $z_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ *. A l'aide d'un dessin, trouver le module de $z_1 + z_2$*

2) $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ *et* $z_2 = e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{7\pi}{6}\right)}$ *. A l'aide d'un dessin, trouver le module de $z_1 + z_2$*

3) Que peut-on conclure ?

Exercice II.4

Recherche de complexes de module 1 dont la somme est un complexe de module 1

1) Soient A le point défini par $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$ *et M un point du cercle trigonométrique.*

Soit P tel que : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OM}$

Est-il possible de trouver M tel que OP = 1 ?
Justifier graphiquement votre réponse et construire toutes les solutions.

2) On suppose que θ *appartient à* $[0\,,2\pi]$

a) Déterminer le module de $1 + e^{i\theta}$

b) Vérifier que $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$

Retrouver les résultats du a)

3) En déduire une conditiuon nécessaire et suffisante pour que la somme $1 + e^{i\theta}$ *soit un nombre complexe de module 1.*

4) Trouver une condition nécessaire et suffisante pour que la somme $e^{i\theta_1} + e^{i\theta_2}$ *soit un nombre complexe de module 1.*

Exercice II.5

Soit $\alpha \in\,]-\pi\,, +\pi]$*. Ecrire sous forme trigonométrique, en discutant suivant les valeurs de* α *, le nombre complexe :*
$1 + \sin\alpha + i\cos\alpha$ *.*

Exercice II.6

Soient x un réel et n un entier naturel non nul. On pose $z = e^{ix}$.

On considère $S_n = 1 + \cos x + \cos 2x + ... + \cos nx$.

1) Montrer que S_n *est la partie réelle de :* $1 + z + z^2 + ... + z^n$ *.*

2) Ecrire sous forme trigonométrique $1 + z + z^2 + ... + z^n$

En déduire S_n

3) En déduire : $\sin x + \sin 2x + ... + \sin nx$

III - EQUATIONS

A - EQUATIONS ET POLYNOMES

Les propriétés énoncées ci-dessous sont bien connues pour les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$ à coefficients réels, elles peuvent être admises pour fonctions polynômes définies sur $\mathbb{C}$. Les exercices III.1 et III.2 proposent une démonstration des deux premières. Ces exercices sont facultatifs.

Propriétés :

1. Un polynôme à coefficients complexes est nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
2. Deux polynômes à coefficients complexes sont égaux si et seulement si leurs coefficients de même degré sont égaux.
3. z_0 est une racine complexe d'un polynôme P non nul si et seulement si il existe un polynôme Q tel que : pour tout complexe z, $P(z) = (z - z_0)\, Q(z)$ et $deg Q = (deg\, P) - 1$

Exercice III.1

Soit un polynôme P à coefficients complexes c_0 , c_1 , c_2 , ... c_{n-1} , c_n.

Pour tout complexe z, $P(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \ldots\ldots + c_2 z^2 + c_1 z + c_0$.

D'autre part chaque coefficient c_k *s'écrit sous la forme* $a_k + ib_k$ *où* a_k *est la partie réelle de* c_k *et* b_k *la partie imaginaire de* c_k.

1) Démontrer que pour tout réel x on a $P(x) = R(x) + iQ(x)$ *, où R et Q sont deux polynômes à coefficients réels.*

2) On suppose que pour tout z, $P(z) = 0$.
a) Démontrer que R et Q sont deux polynômes nuls.

b) En déduire que les coefficients de P sont nuls.

Exercice III.2

Soient P et Q deux fonctions polynômes à coefficients complexes telles que pour tout complexe z :

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$
$Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + ... + b_1 z + b_0$

Soit R la fonction définie par $R(z) = P(z) - Q(z)$.

1) Exprimer les coefficients de R en fonction des coefficients de P et Q.

2) On suppose que pour tout complexe z, $P(z) = Q(z)$.
a)Démontrer que le polynôme R est nul.

b)En déduire que pour tout entier k compris entre 0 et n, $a_k = b_k$.

Exercice III.3

Déterminer sous forme trigonométrique les quatre solutions complexes de l'équation $z^4 = -1$

Écrivez $z^4 + 1$ *sous la forme d'un produit de facteurs complexes.*

En déduire la factorisation du polynôme $z^4 + 1$ *en produit de deux facteurs à coefficients réels.*

Exercice III.4

On considère le polynôme $P(z) = z^4 - z^3 + 4z^2 + 3z + 5$

1) Montrer que si z_0 *est une solution de l'équation* $P(z) = 0$ *alors* $\bar{z}_0$ *est aussi une solution.*

2) Montrer que $e^{2i\frac{\pi}{3}}$ *est une racine de* $P(z)$.

3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $P(z) = 0$.

4) Factoriser le polynôme $x^4 - x^3 + 4x^2 + 3x + 5$ *à l'aide de polynômes à coefficients réels.*

Exercice III.5

Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$

Ecrire $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$ *sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré à coefficients dans* $\mathbb{C}$.

Ecrire $z^4 - 7z^2 + 12 = 0$ *sous la forme d'un produit de deux facteurs du second degré à coefficients réels.*

Exercice III.6

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$ *l'équation* $z^2 - 4z + 29 = 0$

b) Sachant que l'équation $z^3 - (4 + 3i)\, z^2 + (29 + 12i)\, z - 87i = 0$ *admet une solution imaginaire pure, déterminer l'ensemble de ses solutions.*

B. EQUATIONS DIVERSES

Certaines équations peuvent être résolues en "séparant" la partie réelle et la partie imaginaire. Pour d'autres équations il est plus utile de penser à l'interprétation géométrique ou trigonométrique. Les exercices qui suivent proposent des exemples variés d'équations.

Exercice III.7

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations :

$z^2 = 3 + 4i$

$z^2 = 1 + i$

$z^3 = (1 - i)^2$

Exercice III.8

Résoudre dans C l'équation : $|z - i| = |z - 3|$ *et représenter l'ensemble des solutions dans le plan complexe.*

Déterminer z tel que $\begin{cases} |z - i| = |z - 3| \\ \arg z = \dfrac{\pi}{4} \quad [2\pi] \end{cases}$

Exercice III.9

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes. Un seul des trois systèmes suivants a des solutions dans $\mathbb{C}$, lequel ? Le résoudre.

$$(1) \begin{cases} z_1 z_2 = 2 \\ |z_1| = |z_2| \end{cases} \qquad (2) \begin{cases} |z_1| = |z_2| = 3 \\ z_1 z_2 = 9 \end{cases} \qquad (3) \begin{cases} |z_1| = |z_2| = 2 \\ z_1 z_2 = -4 \\ z_1 + z_2 = 2 \end{cases}$$

LES COMPLEXES AU BAC

"EQUATIONS"

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes les équations :

$$z^2 - 6z + 12 = 0 \qquad (1)$$

$$z^2 + 2z\sqrt{3} + 12 = 0. \qquad (2)$$

2. On note z_1 et z_2 les nombres complexes :

$$z_1 = 3 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = -\sqrt{3} + 3i.$$

a. Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b. Le plan étant muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm), placer les points A et B d'affixes respectives z_1 et z_2 puis le point E d'affixe $z_1 + z_2$. Quelle est la nature du quadrilatère OAEB ? Justifiez.

Bac

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = 0.$$

1. *a.* Déterminer le réel y tel que yi soit solution de (E).

   b. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z :

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - \sqrt{3}i)z - i = (z - i)(z^2 + az + b).$$

2. *a.* Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E') : $z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0$.

   b. En déduire les solutions de (E) sous forme algébrique et trigonométrique.

Bac

Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

1° Trouver les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

2° En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

3° Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrer que ces points sont sur un même cercle (C) dont on précisera le centre et le rayon.

Bac

On considère le nombre complexe $a = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

1. On note I, A, B, C, D les points du plan complexe d'affixes 1, a, a^2, a^3, a^4.
Vérifier que $a^5 = 1$ et montrer que IA = AB = BC = CD = DI.
Placer les points I, A, B, C et D dans le plan complexe (unité : 4 cm).

2. *a.* Vérifier que, pour tout nombre complexe z :
$$z^5 - 1 = (z - 1)(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$
et en déduire que :
$$1 + a + a^2 + a^3 + a^4 = 0. \qquad (1)$$
b. Montrer que $a^3 = \bar{a}^2$ et que $a^4 = \bar{a}$ et en déduire que :
$$(a + \bar{a})^2 + (a + \bar{a}) - 1 = 0. \qquad (2)$$
c. Résoudre l'équation :
$$4x^2 + 2x - 1 = 0. \qquad (3)$$
et en déduire, à partir de (2), la valeur exacte de $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Bac

Soit le nombre complexe $u = 1 + i$ et $\bar{u}$ son conjugué.

1. *a.* Mettre u et $\bar{u}$ sous forme trigonométrique.
b. Soit n un entier naturel. On pose : $S_n = u^n + \bar{u}^n$.
Déduire de *a.* que $S_n = \lambda_n \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right)$ où λ_n est un réel à préciser en fonction de n.
c. Pour quelles valeurs de n a-t-on $S_n = 0$?
d. Prouver que si n est pair, S_n est un entier relatif.

2. On suppose que n est un entier naturel pair et on pose $n = 2m$.
a. Écrire, par la formule du binôme, les développements de $(1 + i)^{2m}$ et $(1 - i)^{2m}$ à l'aide des puissances de i, puissances que l'on ne cherchera pas à simplifier dans cette question.
b. Pour p entier naturel, simplifier : $i^{2p+1} + (-i)^{2p+1}$
et $i^{2p} + (-i)^{2p}$
c. Exemple $n = 24$ (donc $m = 12$) :
En utilisant les résultats du 1 et ce qui précède, montrer que :
$$\sum_{p=0}^{12} (-1)^p C_{24}^{2p} = 2^{12}$$

Bac

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 1 cm).
On note A le point d'affixe $a = 5$, B le point d'affixe $b = 3 + 2i$ et M le milieu du segment [AB]. À l'extérieur du triangle OAB on construit les triangles AOA' et BOB' rectangles et isocèles de sommet O.

1. Placer les points A, B, M, A' et B' dans le plan $\mathcal{P}$.
2. Soient a' l'affixe de A' et b' l'affixe de B'.
   Montrer que $a' = -5i$ et $b' = -2 + 3i$.
   Déterminer l'affixe m de M.
3. Soit $w = \dfrac{b' - a'}{m}$.
   a. Mettre w sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
   b. Donner l'interprétation géométrique du module et de l'argument de w.
   En déduire que les droites (OM) et (A'B') sont perpendiculaires et que A'B' = 2OM.
4. On désigne par H' le projeté orthogonal de B' sur l'axe $(O; \vec{v})$.
   Calculer la longueur B'H'. En déduire l'aire du triangle OA'B'.

Bac

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on donne les points A et B distincts d'affixes respectives z_1 et z_2.

Soient A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

B' l'image de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

1° Exprimer les affixes z_1' et z_2' des points A' et B' en fonction de z_1 et z_2.

2° Quelle est l'affixe du milieu I de [A'B']?

3° Quelle est l'affixe du point H définie par $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB}$?

4° Déduire des questions précédentes que la médiane (OI) du triangle OA'B' est une hauteur du triangle OAB et que $OI = \frac{1}{2} AB$.

Bac

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C deux à deux distincts dont les affixes respectives sont les nombres complexes a, b, c.

1° M étant le point du plan d'affixe le nombre complexe z, exprimer, en fonction de z :

a) l'affixe z' du point M' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{3}$ (en radians);

b) l'affixe z'' du point M'' image de M par rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ (en radians).

2° Que peut-on dire du triangle ABC si les nombres complexes a, b, c vérifient :

a) $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i \sin\dfrac{\pi}{3}$;

b) $\dfrac{c-a}{b-a} = \cos\dfrac{\pi}{3} - i \sin\dfrac{\pi}{3}$.

3° Établir que le triangle ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

Bac

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{u})$ d'unité graphique : 2 cm. Soient A, B et C les points d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i; \quad z_B = -1 - i\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_C = -2.$$

1. *a.* Écrire z_A et z_B sous forme trigonométrique.
   b. Placer le point C et construire les points A et B dans P.
   c. Déterminer la nature du triangle ABC.

2. On pose $a = \dfrac{z_A}{z_B}$.
   a. Écrire a sous forme trigonométrique.
   b. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
   $z' = e^{\frac{5i\pi}{6}} z$.
   Caractériser géométriquement l'application f.

3. *a.* Déterminer les images des points A et B par f.
   b. En déduire l'image de la droite (AB) par f.

Bac

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :
   $$z^2 + 4z + 16 = 0.$$
   On notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et z_2 l'autre solution.
2. A et B sont les points du plan complexe d'affixes respectives z_1 et z_2.
   Déterminer l'affixe z_3 du point C tel que le triangle ABC soit équilatéral avec $\text{Re}(z_3) > 0$.
   Faire une figure, que l'on complétera au cours de l'exercice.
3. f est l'application du plan complexe dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que :
   $$z' = z - i.$$
   a. Préciser la nature de f.
   b. Déterminer l'affixe du point D tel que : $f(A) = D$
   et celle du point E tel que : $f(E) = C$.
   c. Quelle est la nature du quadrilatère ADCE ?

Bac

Spécialité

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1° Déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) d'affixe z vérifiant
$$\left|(1 - i\sqrt{3})\, z - \sqrt{3} - i\right| = 4.$$

2° Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformant le point A d'affixe i en O origine du repère et transformant le point B $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $-4i$.
Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.

3° En utilisant les résultats établis au 2° retrouver l'ensemble (C) défini au 1°.

Bac

"TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES"

Le plan complexe P est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ ayant comme unité graphique 2 cm.
On désigne par A et B les points d'affixes respectives -1 et i.

Soit f l'application de $P - \{A\}$ dans P qui, à tout point M de $P - \{A\}$ d'affixe z, associe le point $f(M)$ d'affixe Z telle que : $Z = i\dfrac{z-i}{z+1}$.

(On rappelle que : $\arg(zz') = \arg z + \arg z' + 2k\pi$, k entier relatif).

1. *a.* Soit G le point d'affixe $(-1+i)$. Déterminer $f(G)$.
   b. Déterminer le point M de $P - \{A\}$ tel que $f(M) = O$.
2. Donner une interprétation géométrique des arguments de $(z - i)$ et de $(z + 1)$.
   Préciser l'argument de i.
   En déduire une interprétation géométrique de l'argument de Z.
3. *a.* Déterminer et construire l'ensemble S_1 des points M de $P - \{A\}$ dont les images par f ont pour affixe un nombre réel.
   b. Déterminer et construire l'ensemble S_2 des points M de $P - \{A\}$ dont les images par f ont pour affixe un nombre imaginaire pur.

Bac

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm). On désigne par A et B les points d'affixes respectives i et -2.
À tout point M de $\mathcal{P}$, distinct de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{z+2}{z-i}.$$

1. On note I le milieu du segment [AB].
   Déterminer l'affixe du point I' associé à I.
   Placer les points A, B, I, I'.
2. Étant donné un nombre complexe z distinct de i, on pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, avec x, y, x', y' réels.
   a. Déterminer x' et y' en fonction de x et y.
   b. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M d'affixe z tels que z' soit réel.
   c. Déterminer et construire l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
3. *a.* Soit M un point de $\mathcal{P}$, distinct de A et B, d'affixe z. Interpréter géométriquement l'argument de z'.
   b. Retrouver les deux résultats suivants :
   – si z' est réel alors M, A, B sont alignés,
   – si z' est imaginaire pur alors M appartient au cercle de diamètre [AB].

Bac

Le plan P étant rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par f l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{1}{2}(z + |z|)$ et par F l'application de P dans P qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.

I– *a)* Déterminer les éventuels antécédents par f de $1+i$, $-1+i$ et 0.
b) Déterminer les nombres complexes z tels que $f(z) = z$.
c) f est-elle bijective ?

II– *a)* On écrit z sous la forme $z = re^{i\theta}$ avec $-\pi \leq \theta \leq \pi$.
Déterminer le module et un argument de $f(z)$.
b) Si M_1 et M_2 sont deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, que peut-on dire de $F(M_1)$ et $F(M_2)$?
c) θ étant fixé, r appartenant à $\mathbb{R}^+$, quel est l'ensemble des points d'affixe $z = re^{i\theta}$? On note Δ cet ensemble, définir l'image de Δ par F.
d) Soit D une droite passant par O et différente de l'axe des abscisses, quelle est son image par F ? Quelle est l'image de l'axe des abscisses ?
e) Soit A le point d'affixe 1 et M un point du cercle C de centre O et de rayon 1, montrer que A, M et $M' = F(M)$ sont alignés.
Préciser la position de M' par rapport à A et M.
En déduire l'image de C par F.

Deug Mass 1 A Rennes Oct. 89

Problème (Spécialité)

Le plan $\mathcal{E}$ étant rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ à tout point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x, y) on associe le nombre complexe z affixe de M.

A. 1° Soit deux points M_1 d'affixe z_1 et M_2 d'affixe z_2 ; montrer que M_1 et M_2 appartiennent à la même demi-droite d'origine O si, et seulement si,

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$$

(on pourra par exemple écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique).

2° En déduire que trois points M_1 d'affixe z_1, M_2 d'affixe z_2 et M_3 d'affixe z_3 sont sur la même demi-droite d'origine O si, et seulement si,

$$|z_1 + z_2 + z_3| = |z_1| + |z_2| + |z_3|.$$

B. Soit A_1, A_2 et A_3 trois points dont les affixes a_1, a_2 et a_3 vérifient :

$$|a_1| = |a_2| = |a_3| = 1.$$

Montrer que A_1, A_2 et A_3 sont les sommets d'un triangle équilatéral de centre O si, et seulement si $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. (On pourra considérer l'isobarycentre des points A_1, A_2, A_3.)

C. Soit B_1, B_2 et B_3 trois points dont les affixes b_1, b_2 et b_3 vérifient

$$\frac{b_1}{|b_1|} + \frac{b_2}{|b_2|} + \frac{b_3}{|b_3|} = 0.$$

$$\alpha_1 = \frac{b_1}{|b_1|}, \quad \alpha_2 = \frac{b_2}{|b_2|}, \quad \alpha_3 = \frac{b_3}{|b_3|}.$$

1° Montrer que le nombre

$$S = \bar{\alpha}_1(z - b_1) + \bar{\alpha}_2(z - b_2) + \bar{\alpha}_3(z - b_3)$$

est indépendante de z. Calculer $|S|$ et en déduire que pour tout z de $\mathbb{C}$

$$|b_1| + |b_2| + |b_3| \leqslant |z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3|.$$

2° Montrer que, pour que l'affixe z d'un point M vérifie la relation

$$|z - b_1| + |z - b_2| + |z - b_3| = |b_1| + |b_2| + |b_3|, \qquad (1)$$

il faut, et il suffit, que

$$(\widehat{\overline{OB_1}, \overline{B_1M}}) = (\widehat{\overline{OB_2}, \overline{B_2M}}) = (\widehat{\overline{OB_3}, \overline{B_3M}}) \pmod{2\pi}.$$

Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie (1) ?

3° Soit MB_1, MB_2 et MB_3 les distances respectives de M aux points B_1, B_2 et B_3. On pose $S(M) = MB_1 + MB_2 + MB_3$.
Démontrer que l'ensemble des réels $S(M)$, pour M appartenant à $\mathcal{E}$, a un plus petit élément.

D. Soit ABC un triangle donc chaque angle géométrique a une mesure inférieure à $\frac{2\pi}{3}$.

Déterminer par une construction géométrique simple le point M qui réalise le minimum de MA + MB + MC.

Problème "Minimiser MA + MB + MC"

1° *a)* α est un nombre réel. Résoudre l'équation

$$(S_{\alpha,1}) \quad \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^2 - 2z\cos\alpha + 1 = 0. \end{cases}$$

b) En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation

$$(S_{\alpha,n}) \quad \begin{cases} z \in \mathbb{C} \\ z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1 = 0, \end{cases}$$

dans laquelle n est un entier naturel non nul donné.

2° Pour tout entier naturel non nul n, pour tout réel α pour tout complexe z, on pose

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2z^n\cos\alpha + 1.$$

On admet que, pour tout z, α et n, on a

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2z\cos\frac{\alpha}{n} + 1\right) \times \dots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right]$$

$$\times \dots \times \left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right]$$

et, on note

$$P_\alpha(z) = \prod_{k=0}^{n-1}\left[z^2 - 2z\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + 1\right].$$

a) Calculer $P_\alpha(1)$ et en déduire que

$$\prod_{k=0}^{n-1}\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

b) Pour tout α élément de l'intervalle $]0, \pi[$ et pour tout naturel n supérieur ou égal à 2, on pose

$$H_n(\alpha) = \prod_{k=1}^{n-1}\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Montrer que, pour α non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2n}\right)}.$$

c) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$, lorsque α tend vers 0 ?

d) En déduire que pour tout naturel n supérieur ou égal à 2

$$\sin\frac{\pi}{n} \cdot \sin\frac{2\pi}{n} \cdot \dots \cdot \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

DEVOIR EN TEMPS LIBRE

(Spécialité)

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
A tout point $M(x,y)$ on associe son affixe complexe $z=x+iy$.

1) A,B,C,D sont 4 points distincts d'affixes a,b,c,d.

a) Démontrer que: $\arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\quad [2\pi]$.

b) Démontrer que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

- A,B,C,D sont cocycliques ou alignés ,
- $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)} \in \mathbb{R}$.

2) Démontrer que la relation: $z'=\frac{3+z}{1-z}$ où $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$ définit une bijection de $\mathbb{C}-\{1\}$ dans $\mathbb{C}-\{-1\}$.

Dans toute la suite du problème on désigne par O_1 et O_2 les points d'affixes 1 et −1 ; on pose $P_1=P-\{O_1\}$, $P_2=P-\{O_2\}$ et l'on considère l'application T de P_1 dans P_2 qui à tout point M d'affixe z associe M' d'affixe $z'=\frac{3+z}{1-z}$

3) a) A,B,C,D étant 4 points distincts appartenant à P_1 on désigne par A',B',C',D' leurs images par T ; a,b,c,d,a',b',c',d' sont les affixes de A,B,C,D,A',B',C',D' ;
Comparer $\frac{(c-a)(d-b)}{(c-b)(d-a)}$ et $\frac{(c'-a')(d'-b')}{(c'-b')(d'-a')}$
En déduire A',B',C',D' sont cocycliques ou alignés si et seulement si A,B,C,D sont cocycliques ou alignés.

b) On désigne par (C) un cercle ou une droite de P , on pose: $(C_1)=(C)\cap P_1$.
Quelle est la nature de l'image de (C_1) par T ?

4) a) Déterminer les points invariants par T ; on les désigne par H et K , H ayant une ordonnée positive.

b) Soit $M(z)$ un point de P_1 différent de H et K , $M'(z')$ l'image de M par T .On pose $q=\frac{(z'-i\sqrt{3})(z+i\sqrt{3})}{(z'+i\sqrt{3})(z-i\sqrt{3})}$
Démontrer que le nombre complexe q ne dépend pas de z et qu'il a pour module 1 ; quel est son argument?

5) t étant un réel donné, on désigne par C_t l'ensemble des points M de P_1 tels que: $(\overrightarrow{MH},\overrightarrow{MK})\equiv t\ [2\pi]$.

a) Donner la nature de C_t et de son image C'_t par T.

b) Tracer C_0 ,$C_{2\pi/3}$,$C_{4\pi/3}$,$C_{\pi/2}$ et leurs images par T .

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Troisième Trimestre 1995
N° de publication : 95-07

Deuxième Edition Inchangée
Juin 1997

I.R.E.M. DE RENNES - Université de RENNES I
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 63 42
Tél (commande) : 02 99 28 26 08
Fax : 02 99 28 16 38
e. mail : dirirem@ univ-rennes1. fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : LES COMPLEXES SANS COMPLEXE

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS : BOISSEAU Y. - DAL'BO F. - DUMONCEL G. - FILLEUL M. - HINAULT M.H. - LE BRAS J.P. - LE KER M.N. - ROUILLER J.

DATE : Première Edition : Septembre1995 - Deuxième Edition : Juin 1997

NIVEAU : Première et Terminale

PUBLIC CONCERNE : Lycée

MOTS-CLES :

- Nombres complexes
- Coordonnées polaires
- Géométrie
- Equations
- Trigonométrie

RESUME :

Ce fascicule contient un cours sur les nombres complexes et de nombreux exercices. Il est destiné à être utilisé directement par les élèves, soit sous forme de travail dirigé en classe, soit sous forme d'un travail personnel.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	64	1,5 Euros ~~Non~~ Relié ..... ~~15~~ F	50 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-019-X