

Université de Rennes 1
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue Etienne Marey
35042 RENNES CEDEX



LA DEMONSTRATION EN SECONDE



UNIVERSITE DE RENNES 1

DECEMBRE 1997
2ème Tirage

I.S.B.N. 2-85728-018-1

Cette recherche et la rédaction de ce document ont été réalisées par :

GIRARD Marie-Françoise
Lycée Jacques Cartier - ST MALO

HILT Dominique
Lycée Henri Avril - LAMBALLE

HOUDEBINE Jean
IREM - Université de RENNES I

JAMIL Joëlle
Lycée Emile Zola - RENNES

RENOUARD Françoise
Lycée Jacques Cartier - ST MALO

A également participé à la recherche :

BOUGEARD Roland
Lycée Henri Avril - LAMBALLE

La saisie et la mise en page ont été assurées par Danièle QUENTIN

la reprographie par Françoise LE BESCOND

la reliure par Françoise LE BESCOND et Gabrielle LOTHORE

et la couverture par Pierre-Yves GIRARD

SOMMAIRE GENERAL

INTRODUCTION	1
--------------------	---

CHAPITRE 1

POINTS DE VUE D'ENSEIGNANTS SUR LA DEMONSTRATION EN SECONDE	3
I - DES REDACTIONS QUI NOUS PARAISSENT SATISFAISANTES	6
II - DES REDACTIONS CONTESTABLES	8
III - LA FIGURE FAIT-ELLE PARTIE DE L'ENONCE DU PROBLEME ?.....	12
IV - L'OPINION DES ELEVES	13
EN GUISE DE CONCLUSION	13

CHAPITRE 2

FAIRE DECOUVRIR LA STRUCTURE DES DEMONSTRATIONS	15
Première Activité : "Rédigez en liberté"	18
I - PRESENTATION	18
II - L'EXPLICATION DE NOS CHOIX	25
III - COMMENTAIRES SUR LE FONCTIONNEMENT DE L'ACTIVITE ET SUR LES PRODUCTIONS DES ELEVES	26
IV - LE TRAVAIL DES ELEVES SUR LES DIX REDACTIONS	27
V - SUIVI DE CETTE EXPERIENCE	28
Deuxième Activité : "Démonstration à trous"	29
I - OBJECTIFS	29
II - MISE AU POINT DE LA FICHE	31
III - LES CONDITIONS D'UTILISATION DE CETTE FICHE	31
IV - ANALYSE DU TEXTE PROPOSE ET DES REPONSES DES ELEVES	32
V - LES EFFETS DE CETTE FICHE	33
Troisième Activité : "Vers une démonstration parfaite"	34

CHAPITRE 3

DEUX DIFFICULTES PARTICULIERES	37
"2 est-il supérieur ou égal à 1 ?"	39
I - LA DECOUVERTE DU PROBLEME	39
II - UNE SEQUENCE EFFICACE	42
III - CONCLUSION	43
Alignement	44
I - ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES	44
II - PREMIER ESSAI	47
III - DEUXIEME ESSAI	55
IV - ANALYSE DES ERREURS ET DES DIFFICULTES DES ELEVES	60

CHAPITRE 4

LA DIVERSITE DES POINTS DE VUE	67
I - DES CONTRAINTES POUR LES ENSEIGNANTS ET POUR LES ELEVES	69
II - LA NECESSITE DE L'ANALYSE	72
III - QUELQUES DIFFICULTES FREQUENTES EN SECONDE	79
IV - LES EVOLUTIONS CONSTATEES SUR LES COPIES DE NOS ELEVES	81
CONCLUSION	85

SOMMAIRE DES FICHES

FICHES ELEVES

REDIGER UNE DEMONSTRATION D'UN PROBLEME DONT ON CONNAIT LA SOLUTION	10
REDIGEZ EN LIBERTE	21-24
DEMONSTRATION A TROUS	30
ALIGNEMENT DES POINTS	48-50
TROUVER LA FAILLE DANS LE RAISONNEMENT	51
ECRIRE L'ENONCE	57
LE DEMONSTRATION LITIGIEUSE	58

FICHES PROFESSEURS

REDIGEZ EN LIBERTE	19-20
MODE D'EMPLOI DES FICHES N° 1 ET N° 2	52-53

INTRODUCTION

LA DEMONSTRATION EN SECONDE

L'enseignement de la démonstration en seconde ne se pose pas dans les mêmes termes qu'au collège. En effet, on constate qu'à ce niveau les élèves possèdent déjà une certaine maîtrise dans la rédaction de démonstrations simples. Ils connaissent bien les différentes expressions qui servent à articuler ce type de textes, ils savent que ce sont les théorèmes du livre qu'il faut utiliser. Mais les fautes rencontrées dans les démonstrations un peu plus complexes montrent que trop d'élèves n'ont pas clairement compris le rôle essentiel du "statut" des propositions dans les démonstrations et que le rôle de la figure n'est pas assez clair pour eux. Une autre difficulté vient du changement de contrat didactique entre la troisième et la seconde.

LE THEME DE CE TRAVAIL

Un petit sondage auprès des collègues nous a convaincus que la première question à aborder était : *"Qu'entend-on par démonstration bien rédigée ? Quel est le contrat avec les élèves de seconde à ce sujet ?"* Pour y répondre nous avons demandé à des collègues de rédiger des démonstrations qui pourraient servir de modèle pour des élèves de seconde. Nous avons découvert une diversité de points de vue plus grande que nous ne l'avions imaginée ; nous en parlons dans le chapitre 4. Nous avons alors essayé de dégager des points sur lesquels il peut y avoir un consensus de tous les enseignants et des points où chacun peut garder sa liberté. C'est l'objet de notre premier chapitre.

Il était alors plus facile d'aborder la deuxième question : *"Comment améliorer la rédaction des démonstrations de nos élèves de seconde ?"* L'analyse de copies d'élèves, l'observation de travaux de groupes, nous ont convaincus qu'il était nécessaire d'intervenir sur deux plans.

- D'abord faire mieux comprendre aux élèves la structure des démonstrations et en particulier le rôle essentiel qu'y joue le statut des propositions. Les fausses contraintes, que beaucoup d'élèves s'imposent et qui résultent sans doute d'un apprentissage par imitation, sont une cause importante d'échecs. Pour agir sur ce point, nous proposons dans le chapitre 2 une séquence d'enseignement qui fait travailler les élèves sur plusieurs rédactions d'une même démonstration. Cette séquence est bien adaptée par sa forme pour servir de support à un module.
- Ensuite certains obstacles spécifiques nous ont paru demander une action particulière. Nous avons travaillé sur deux d'entre eux, et nous proposons, dans le chapitre 3, des activités pour essayer d'aider les élèves à les surmonter.

APPRENTISSAGE DE LA DEMONSTRATION ET RESOLUTION DE PROBLEMES

Il est nécessaire de dissiper dès le départ un malentendu : l'objet de ce fascicule n'est pas la résolution de problèmes mais l'apprentissage de la démonstration. En d'autres termes, notre objectif est de trouver le moyen de faciliter et d'améliorer la rédaction de démonstrations par les élèves pour un problème dont ils connaissent l'essentiel de la solution, et non de les aider à trouver la solution de ce problème.

ANALYSER DES DEMONSTRATIONS

Pour répondre à nos deux questions, il était nécessaire d'analyser des démonstrations d'élèves et d'enseignants. L'expérience nous a montré la difficulté de repérer dans une copie tous les indices utiles pour faire un diagnostic. C'est pourquoi nous nous sommes efforcés d'expliciter notre démarche. Cela se traduit par une grille d'analyse qui est décrite dans le chapitre 4 ; nous espérons qu'elle aidera les enseignants à comprendre les difficultés et les progrès de leurs élèves.

L'OBSERVATION DES ELEVES

Une analyse même minutieuse des copies ne permet pas toujours de comprendre les mécanismes qui conduisent les élèves à l'erreur. C'est pourquoi nous nous sommes efforcés de faire des observations directes du travail de groupes d'élèves. Concrètement nous préparions une activité correspondant à nos objectifs, nous discussions longuement de tous les détails la concernant et en particulier de la consigne, nous essayions de prévoir ce que les élèves feraient effectivement, les obstacles qu'ils rencontreraient. Quand cette activité était proposée aux élèves, pendant que l'enseignant de la classe jouait son rôle habituel, quelques uns d'entre nous observaient un groupe d'élèves. Nous nous efforcions de ne pas intervenir, sauf peut être pour comprendre la démarche de l'un d'entre eux. Dans ces conditions, il nous était possible de valider ou de rejeter les hypothèses que nous avions émises lors de la mise au point de la fiche. Il nous arrivait aussi de découvrir des obstacles que nous n'aurions pas pu soupçonner autrement, ou de comprendre l'origine de certaines fautes observées sur les copies.

CHAPITRE 1

POINTS DE VUE D'ENSEIGNANTS SUR LA DEMONSTRATION EN SECONDE

Quand les élèves arrivent en seconde, ils sont capables d'écrire, pour un problème dont ils ont compris la solution, un texte qui ressemble à une démonstration. Mais il reste un travail important à faire auprès de beaucoup d'entre eux pour surmonter leurs difficultés à écrire un texte satisfaisant.

Pour que ce travail soit possible, il faut que les élèves aient les moyens de savoir ce qu'est "un texte satisfaisant" et leurs références en ce domaine sont les démonstrations des enseignants.

Malheureusement, les enseignants ne sont pas d'accord sur ce que l'on attend des élèves. En effet, quand on demande à des enseignants de mathématiques de rédiger une démonstration qui puisse servir de modèle à leurs élèves, on est très surpris par la diversité du résultat. Les uns produisent un texte de français sans aucun symbole, les autres un schéma de texte où les propositions sont reliées par des flèches ou des accolades. Les uns décrivent les étapes dans tous leurs détails et les autres rédigent un texte très court ne contenant que quelques éléments essentiels à leurs yeux. Les uns respectent scrupuleusement un certain ordre des propositions alors que les autres préfèrent commencer par la conclusion. Les uns font des textes sans aucun commentaire et les autres n'hésitent pas à y ajouter des commentaires heuristiques.

On est encore plus surpris par la vigueur des jugements portés par les uns sur la démonstration des autres : *"Ce n'est pas une démonstration !"* ou bien : *"A quoi sert tout ce baratin ?"* en passant par : *"Il faudrait peut-être écrire en français !"*...

Il y a derrière cela deux conceptions qui s'affrontent : les uns demandent implicitement une rédaction qui donne suffisamment d'indices pour savoir si l'élève a bien résolu le problème, les autres exigent au contraire un texte rigoureusement déductif.

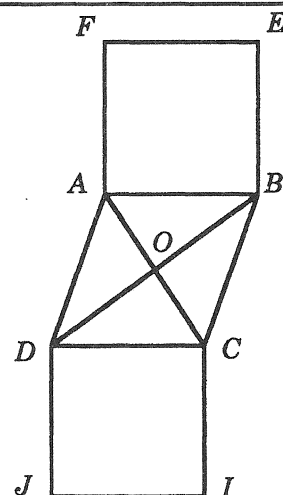
Nous avons découvert ces importantes disparités en demandant, à des collègues de lycées, de *"rédiger une démonstration de l'exercice suivant adaptée à un élève entrant en seconde"* ; une vingtaine d'entre eux ont répondu.

-Hypothèses * $ABCD$ est un parallélogramme de centre O

* $ABEF$ et $CDJI$ sont des carrés.

Démontrer que O est le milieu du segment $[EJ]$

(Sans utiliser de symétrie) ¹



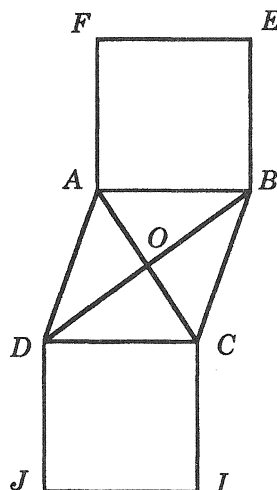
¹ Précision donnée, uniquement pour réunir des démonstrations comparables.

I - DES REDACTIONS QUI NOUS PARAISSENT SATISFAISANTES

Parmi les rédactions que nous ont proposées nos collègues, plusieurs nous ont paru correspondre à l'idée de "modèle" pour les élèves.

Nous en citons cinq en faisant apparaître la diversité des styles et les avantages de cette diversité du point de vue de l'apprentissage de la démonstration.

Copie A



* (BE) est perpendiculaire à (AB) et (DJ) est perpendiculaire à (DC) .
Comme $ABCD$ est un parallélogramme, (AB) et (DC) sont parallèles donc (BE) et (DJ) sont parallèles.

* $ABCD$ est un parallélogramme donc $AB = DC$
 $ABEF$ est un carré donc $AB = BE$
 $DCIJ$ est un carré donc $DC = DJ$
 par suite $BE = DJ$

Les vecteurs $\vec{BE}$ et $\vec{DJ}$ ont des supports parallèles, ont même longueur et sont de sens contraires donc $\vec{BE} = -\vec{DJ}$ ou $\vec{BE} = \vec{JD}$ ce qui prouve que $BEDJ$ est un parallélogramme.

Les diagonales $[EJ]$ et $[BD]$ ont le même milieu.
Comme O est le milieu de $[BD]$, c'est celui de $[EJ]$.

Copie B

Dans le carré $FEBA$, $(EB) \perp (AB)$.

Dans le parallélogramme $ABCD$, $(AB) \parallel (DC)$.

La droite (EB) est donc perpendiculaire à (DC) .

Dans le carré $DCIJ$, $(DJ) \perp (DC)$. Les droites (EB) et (DJ) étant perpendiculaires à une même droite, sont parallèles.

$EB = AB$ (côtés du carré $AFEB$).

$AB = DC$ (côtés opposés du parallélogramme $ABCD$).

$DC = DJ$ (côtés du carré $DCIJ$).

On en déduit : $DJ = EB$.

Les vecteurs $\vec{EB}$ et $\vec{DJ}$ ont même direction, même longueur et même sens d'après la construction : ils sont égaux.

Le quadrilatère $DJBE$ est un parallélogramme ; ses diagonales $[EJ]$ et $[DB]$ ont même milieu. O étant milieu de $[BD]$, diagonale du parallélogramme $ABCD$, est aussi milieu de $[EJ]$.

Dans la première, les théorèmes ne sont pas énoncés mais sont implicites, dans la seconde un théorème est sous-entendu et l'autre instancié, c'est-à-dire énoncé dans le cas particulier où on l'applique.

C'est là un sujet d'inquiétude pour les élèves entrant en seconde : faut-il ou non énoncer les théorèmes utilisés ?

Nous croyons qu'on a, en effet, une certaine liberté dans ce domaine ; il faut sans aucun doute énoncer ou suggérer les théorèmes les plus importants de la démonstration mais il n'est pas obligatoire de tous les énoncer.

Dans la copie suivante, nous avons apprécié les mots de liaison qui permettent de distinguer plus aisément causes et conséquences et de rompre la monotonie de la rédaction.

Copie C

- 1) Montrons que $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DJ}$.
ABEF et CDJI étant des carrés
 $(EB) \perp (AB)$.
 $(DJ) \perp (DC)$.

Or $(AB) \parallel (DC)$, le quadrilatère ABCD étant un parallélogramme.

On en déduit que $(EB) \parallel (DJ)$ et donc que $\overrightarrow{EB}$ a même direction que $\overrightarrow{DJ}$

ABEF étant un carré $EB = AB$

De même CDJI étant un carré $DJ = DC$

Or $DC = AB$ comme longueur des côtés opposés $[DC]$ et $[AB]$ du parallélogramme ABCD.

Donc $EB = DJ$ $\overrightarrow{EB}$ a même longueur que $\overrightarrow{DJ}$

De plus par construction $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont le même sens.

Les vecteurs $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont même direction, même longueur et même sens. On en déduit qu'ils sont égaux et par conséquent EBJD est un parallélogramme.

On sait que les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu.

Par conséquent O est le milieu de la diagonale $[BD]$ du parallélogramme ABCD.

$[BD]$ est aussi une diagonale du parallélogramme EBJD.

Donc O milieu de $[BD]$ est également milieu de $[EJ]$.

Copie D

Dans le parallélogramme ABCD, on a : $AB = DC$ et $(AB) \parallel (DC)$.

Dans le carré ABEF, on a : $AB = BE$ et $(AB) \perp (BE)$

Dans le carré CDJI, on a : $DC = DJ$ et $(DC) \perp (DJ)$

On a donc : $BE = DJ$

Les droites (BE) et (DJ) qui sont respectivement perpendiculaires aux droites parallèles (AB) et (CD) sont elles-mêmes parallèles.

Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont la même direction : $(BE) \parallel (DJ)$
la même longueur : $BE = DJ$

et sont de sens contraires (d'après la figure), donc ils sont opposés :

$$\overrightarrow{BE} = -\overrightarrow{DJ} \text{ ou } \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD}$$

Par suite BEDJ est un parallélogramme : ses diagonales $[BD]$ et $[EJ]$ ont le même milieu.

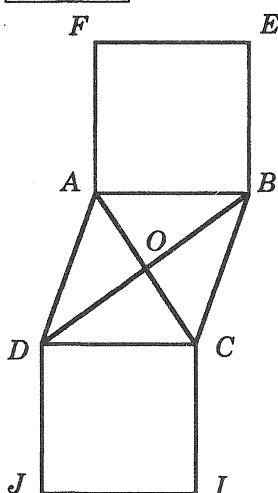
Or $[BD]$ est une diagonale du parallélogramme ABCD donc a pour milieu le centre O de ce parallélogramme.

O est donc le milieu de $[EJ]$.

Dans cette copie tout est écrit et démontré. Il est précisé que le sens des vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ est donné par la figure. Dans les copies B et C, cette information est remplacée par : "par construction". Cette remarque sera reprise et développée dans le paragraphe III.

Par contre, nous pensons que globalement, les enseignants considèrent que les hypothèses doivent être écrites et non déduites de la figure car alors la différence est trop mince entre ce qui est vraiment donné et ce qui nécessite une démonstration. Or, cette différence est parfois imperceptible pour certains élèves.

Copie E



Pour prouver que O est le milieu de $[EJ]$, prouvons d'abord que $BEDJ$ est un parallélogramme.

Nous avons :

* $ABCD$ est un parallélogramme donc $(AB) \parallel (DC)$ et $AB = DC$ [1]

* $ABEF$ est un carré donc $(BE) \perp (AB)$ et $BE = AB$ [2]

* $CDJI$ est un carré donc $(DJ) \perp (DC)$ et $DC = DJ$ [3]

De [1], [2] et [3] on déduit $(BE) \parallel (DJ)$ et $BE = DJ$.

* Par suite, le quadrilatère non croisé $BEDJ$ ayant deux côtés parallèles et de même longueur est un parallélogramme.

Conclusion : $BEDJ$ étant un parallélogramme, ses deux diagonales $[DB]$ et $[EJ]$ ont même milieu.

Or O , centre du parallélogramme $ABCD$, est le milieu de $[DB]$. Par suite, O est aussi milieu de $[EJ]$.

Nous y avons apprécié l'annonce immédiate de l'objectif de l'exercice, ce qui permet de faire apparaître clairement la structure de la démonstration et ses différents pas, même si ces pas sont imbriqués.

Ce type de rédaction est en fait plus proche de la démarche réelle que l'on suit au cours d'une recherche et permet de suivre plus aisément la logique du raisonnement. Elle est donc particulièrement satisfaisante pour le lecteur.

II - DES REDACTIONS CONTESTABLES

Nous cherchons à expliciter ici les raisons qui nous font rejeter certaines rédactions.

Copie F

(Copie complète)

Les deux segments $[BE]$ et $[JD]$ sont égaux et parallèles.

$EBJD$ est donc un parallélogramme de centre O milieu de $[DB]$ et de $[JE]$.

Notre première réaction a été de nous exclamer : "Non seulement, rien n'a été démontré, mais ces deux lignes comportent de graves erreurs".

Examinons d'abord la phrase : " O milieu de $[DB]$ et de $[JE]$ ". Dans ce pas de démonstration, " O milieu de $[DB]$ " est une hypothèse alors que " O milieu de $[JE]$ " est une conclusion. Rien dans le texte ne distingue le statut de ces deux propositions, ce qui nous paraît inacceptable dans une copie d'enseignant. Notre rôle ne consiste-t-il pas justement à aider nos élèves à distinguer hypothèse et conclusion dans un pas de démonstration ?

D'autre part cette copie comporte une erreur de langage : "les segments $[BE]$ et $[JD]$ sont égaux". Si les longueurs BE et JD sont bien égales, les segments ne le sont pas !

Après analyse il nous a semblé qu'en seconde, une démonstration devait contenir des indices permettant de repérer :

- les données de l'énoncé qui sont effectivement utilisées dans la démonstration. Ici il n'y a aucun indice pour aucune des données utilisées.
- chacun des pas de démonstration. Bien sûr dans ce texte chacun des pas de démonstration est présent par un élément, mais cela ne permet pas de le repérer. Par exemple la première phrase se présente au mieux comme le résumé de deux pas de démonstration, un dont la conclusion est le parallélisme, un autre l'égalité. Or, au niveau de seconde, c'est sans doute huit pas de démonstration qui sont nécessaires, comme le font apparaître les autres rédactions proposées par les enseignants.

On peut considérer ce texte comme une rédaction donnant l'idée de la solution du problème. On pourrait d'ailleurs exploiter comme tel ce type de texte, en donnant la fiche page suivante comme travail à des élèves qui auraient un peu de mal à résoudre le problème.

Copie G

* $(AB) \parallel (CD)$ [1] car côtés opposés d'un parallélogramme.

** $(BE) \perp (AB)$ [2] car $ABEF$ et $CDJI$ carrés.

$(JD) \perp (CD)$ donc d'après [1] $(JD) \perp (AB)$ [3]

*** [2] et [3] $\Rightarrow (BE) \parallel (JD)$ [4]

de plus $ABEF$ et $CDJI$ étant des carrés

$AB = BE$
 $DC = JD$

et comme $AB = DC$
 car $ABCD$
 parallélogramme

alors $BE = JD$ [5]

Enfinement [4] et [5] $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD} \Rightarrow BEDJ$ parallélogramme $\Rightarrow O$
 milieu de la diagonale $[BD]$ est aussi milieu
 de $[EJ]$.

Il est sûr que l'emploi du symbole $\Rightarrow$ est à exclure d'une rédaction de seconde. D'une part, il risque de renforcer la confusion que font trop facilement les élèves de seconde entre une proposition de la forme $A \Rightarrow B$ et un pas de démonstration dans lequel A est l'hypothèse, $A \Rightarrow B$ résulte de l'application d'un théorème, et B est la conclusion. On en a un exemple typique au milieu de cette démonstration : [2] et [3] $\Rightarrow (BE) \parallel (JD)$ [4]

D'autre part, il conduit tout naturellement à des rédactions, comme celle de la dernière partie de ce texte, qui ne nous conviennent nullement. En effet, sa présentation sous forme d'une suite d'implications ne met pas clairement en évidence que " O milieu de la diagonale $[BD]$ " est une hypothèse. Pour bien le faire apparaître, il aurait fallu placer après la conclusion partielle " $BEDJ$ est un parallélogramme", une proposition du type " Or on sait que O est milieu de $[BD]$ ".

Pour ce qui est de l'usage des numéros pour désigner des propositions, il présente l'avantage de bien faire apparaître que ces propositions ont successivement deux statuts. Dans un premier temps elles sont la conclusion d'un pas de démonstration, pour devenir un peu plus tard la proposition d'entrée d'un nouveau pas. Cet usage présente l'inconvénient de conduire à des rédactions dans le style de : [2] et [3] $\Rightarrow (BE) \parallel (JD)$ [4]. Remarquons d'ailleurs que dans cet extrait on peut se demander si [4] représente $(BE) \parallel (JD)$ ou l'implication entière.

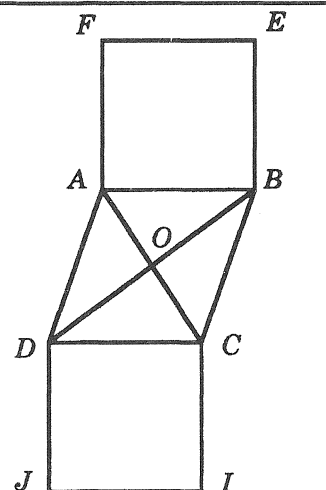
**REDIGER UNE DEMONSTRATION D'UN PROBLEME
DONT ON CONNAIT LA SOLUTION**

Voici un énoncé de problème :

Hypothèses * ABCD est un parallélogramme de centre O

* ABEF et CDJI sont des carrés.

Démontrez que O est le milieu du segment [EJ].



Voici un texte indiquant les grandes étapes de la solution du problème :

Les deux segments [BE] et [JD] sont parallèles et de même longueur.

EBJD est donc un parallélogramme de centre O, milieu de [BD] et donc de [JE].

Rédigez la démonstration.

Enfin la présentation en style télégraphique laisse supposer que la structure de la démonstration va être très apparente. Ici il n'en est rien ; montrons le par deux exemples :

- la disposition des lignes $(BE) \perp (AB)$ [2] car $ABEF$ et $CDJI$ carrés.
 $(JD) \perp (CD)$ donc d'après [1] $(JD) \perp (AB)$ [3]
 ne permet pas de distinguer clairement l'hypothèse " $CDJI$ est un carré" et la conclusion " $(JD) \perp (CD)$ " de l'un des pas de la démonstration.
- la présentation $AB = BE$ }
 $DC = JD$ } et comme $AB = DC$ alors $BE = JD$ [5]
 car $ABCD$ parallélogramme
 Finalement [4] et [5] $\Rightarrow \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD} \Rightarrow BEDJ$ parallélogramme.

fait penser que chaque ligne est un pas de démonstration. Or la troisième ligne en confond deux qui sont très différents.

Copie H

Les deux carrés sont égaux et leurs côtés sont parallèles. Donc leurs diagonales sont égales et parallèles, en particulier $AE = JC$ et $(AE) \parallel (JC)$.

Le quadrilatère $AECJ$ est un parallélogramme (deux côtés à la fois parallèles et de même longueur).

O est le milieu de diagonale $[AC]$: il est aussi le milieu de l'autre diagonale $[EJ]$ du parallélogramme $AECJ$.

Donc E, O et J sont alignés et O est le milieu de $[EJ]$.

Cette rédaction peut paraître attrayante à certains, au premier abord, en raison de sa forme concise. Cependant elle n'est pas sans défaut. Nous y avons d'abord trouvé un théorème inventé : "*Deux carrés isométriques et dont les côtés sont parallèles, ont leurs diagonales égales et parallèles*". Ce théorème ne fait partie en aucun cas de la panoplie d'un élève, que ce soit à l'entrée en seconde aussi bien qu'à la fin de la terminale. Nous avons d'ailleurs proposé à plusieurs enseignants de seconde de démontrer cette propriété et nous avons à chaque fois obtenu une démonstration de plus de 10 lignes.

De plus, nous voilà une nouvelle fois confrontés au problème de l'égalité :

- "*les deux carrés sont égaux*" : comme dans la démonstration F, il y a ici confusion entre égalité des figures et égalité de leurs dimensions. Nous rejetons donc cette rédaction.
- "*les diagonales sont égales*" nous paraît plus acceptable si toutefois "diagonale" se traduit par "longueur de diagonale" (comme le rayon d'un cercle), mais dans la phrase "*les diagonales sont parallèles et égales*", la confusion entre segments, droites et longueurs est intolérable.

Enfin, nous y avons trouvé une dernière ligne tout à fait inutile en guise de conclusion, puisqu'elle est la répétition de ce qui est écrit une ligne avant.

III - LA FIGURE FAIT-ELLE PARTIE DE L'ENONCE DU PROBLEME

Certains enseignants ont été sensibilisés par le problème de convexité, d'autres ne l'ont pas du tout abordé. Dans notre esprit, il n'intervenait pas dans l'exercice du fait que nous propositions la figure.

Pour éliminer ce problème, était-ce suffisant de donner la figure, ou aurait-il fallu ajouter une hypothèse telle que : *"Deux carrés ABEF et CDJI situés de part et d'autre de ABCD"* ?

Dans les 17 copies examinées, nombre de nos collègues ont abordé la question et ce, sous différentes formes :

Pour six d'entre eux :

"Les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ et $\overrightarrow{DJ}$ ont des supports parallèles, ont même longueur et sont de sens contraires : donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{JD}$."

Pour trois autres :

"BEDJ est un quadrilatère non croisé".

Pour deux autres :

"(BE) // (DJ) et BE = DJ avec E et J situés de part et d'autre de ABCD".

Les six derniers n'ont absolument pas parlé de convexité et ont donc considéré la figure comme une hypothèse supplémentaire.

Certains nous ont interpellés ; voici quelques exemples :

- *"Je crois que le problème de convexité ne s'est pas posé aux élèves jusque là. En fait, ici implicitement, on autorise l'utilisation de la figure".*
- *"La démonstration considère comme hypothèse le résultat : $\overrightarrow{JD} = \overrightarrow{BE}$ car le texte n'a pas dit : carrés situés de part et d'autre... et encore moins : symétriquement... Il faudra bien tôt ou tard considérer cela comme hypothèse".*
- *"Imaginons que la figure n'ait pas été donnée. En collège, on dirait : construis le carré à l'extérieur du parallélogramme. Ce n'est pas non plus très rigoureux. Si on dit : dans le demi-plan de frontière (DC) qui ne contient pas O, on peut l'utiliser dans la démonstration".*

Cette question concernant la convexité est donc une de celles pour lesquelles nous devons nous mettre d'accord sur ce qui est exigible ou acceptable, nécessaire ou suffisant ; d'où la question à laquelle nous n'avons pas de réponse : *jusqu'où peut-on "lire" une figure ?*

IV - L'OPINION DES ELEVES

Dans une séquence ultérieure, nous avons demandé à des élèves leurs remarques sur les copies F, G et E (sans toutefois préciser qu'il s'agissait de copies d'enseignants).

Voici ce que nous avons obtenu :

Copie F : Rien n'est démontré.

Copie G : Cette copie ne leur a pas plu à cause de l'excès de symboles et de numéros.

Copie E : Les élèves l'ont globalement appréciée, seule a été reprochée la rapidité du : "*on déduit*", après l'utilisation du : "*De* 1 , 2 et 3".

Nous constatons, qu'en général, les élèves semblent apprécier les démonstrations longues, ceci étant, sans doute, l'héritage du collège.

Il nous semble donc important de les habituer à différents styles de rédactions, plus ou moins longues, plus ou moins explicites, avec des théorèmes complètement énoncés ou non, avec des pas de démonstrations séparés ou non.

Ils sont aussi très sensibles à la mise en page des démonstrations. Une bonne présentation faisant clairement apparaître la structure peut donc être une aide supplémentaire pour les élèves.

EN GUISE DE CONCLUSION

Dans tous les cas, il est impératif, quand un enseignant propose une démonstration pouvant servir de modèle pour des élèves de seconde, qu'il s'impose les exigences suivantes :

- les données du problème qui sont nécessaires dans la démonstration doivent être expressément indiquées ou du moins suggérées.
- les pas de démonstration doivent être tous repérables et on doit veiller à ce que chacun ait une conclusion annoncée par une expression adaptée.
- les théorèmes utilisés dans la démonstration peuvent être énoncés, suggérés ou absents ; il nous semble qu'il y a une certaine liberté de choix, mais il faut expliciter ce choix aux élèves.
- les mots ou les formes qui indiquent le statut de chaque proposition ne doivent présenter aucune ambiguïté.
- on doit disposer d'une variété suffisante de mots et de formes ; l'aspect stéréotypé engendre une imitation qui risque de remplacer la réflexion.
- les résultats intermédiaires qui ne sont pas utilisés aussitôt après avoir été obtenus doivent être réénoncés (éventuellement sous forme abrégée), au moment de leur utilisation comme données d'un nouveau pas de démonstration.

CHAPITRE 2

FAIRE DECOUVRIR LA STRUCTURE DES DEMONSTRATIONS

A la lecture des copies de professeurs et d'élèves sur une même démonstration, apparaît une très grande disparité :

- pour les professeurs, les exigences ne sont pas les mêmes suivant qu'ils enseignent en collège ou en lycée mais les différences entre les enseignants de seconde peuvent aussi être considérables : pour la même démonstration, on peut passer de trois lignes à une demi-page.
- chez les élèves, certains types de phrases ou de mots reviennent systématiquement et on peut assez vite les regrouper suivant leur formation antérieure, ce qui conduit à penser qu'ils retiennent finalement trop l'aspect superficiel d'une rédaction en privilégiant la forme par rapport au fond.

La question se pose en seconde de savoir si les élèves perçoivent les différentes façons de s'exprimer comme équivalentes et si certaines d'entre elles ne sont pas des obstacles à la compréhension de la démonstration. L'emploi de formes très stéréotypées est en effet souvent un indice du manque de maîtrise.

La structure d'un texte démonstratif cherche à mettre en évidence le statut des propositions qu'il contient. Les unes sont des hypothèses, les autres des conséquences, d'autres encore sont des théorèmes ou bien des résultats intermédiaires. Beaucoup d'élèves et aussi certains enseignants pensent implicitement que la meilleure manière de faire apparaître ce statut est l'ordre dans lequel on va placer les propositions. Ceci est doublement dommageable. D'une part, on risque d'oublier que ce sont les mots de liaison qui sont en fait les indicateurs essentiels de ces statuts. D'autre part, on va se restreindre de manière très artificielle sur la liberté d'écriture ; on va dévaloriser des démarches tout à fait satisfaisantes et très naturelles chez les élèves comme les remarques heuristiques ou l'utilisation du "parce que".

C'est pourquoi nous avons pensé qu'une activité "Rédigez en liberté" présentée en début d'année à nos élèves leur permettrait de se libérer de leur peur devant la rédaction d'une démonstration, notamment en géométrie, et de faire preuve de plus d'initiative dans la recherche de la solution. Puis, dans le courant de l'année, il est souhaitable pour varier les activités proposées aux élèves, de les faire travailler sur une "fiche à trous", exercice qui conduit à mieux cerner le statut des propositions et par suite, à faire un meilleur usage des mots de liaison. Enfin, il ne faut pas oublier de leur montrer de temps en temps les limites de leur liberté, en obligeant certains à produire une copie "presque parfaite" au bout d'un certain nombre d'essais, à condition bien sûr qu'ils soient réceptifs à ce genre d'exercices.

PREMIERE ACTIVITE : "REDIGEZ EN LIBERTE"**I - PRESENTATION**

Cette activité a pour objectif principal de faire travailler les élèves sur dix rédactions différentes de la même démonstration pour leur faire mieux sentir les libertés et les contraintes. Pour cela nous avons choisi l'exercice suivant dont la démonstration est suffisamment complexe (utilisation de trois théorèmes : triangle inscrit dans un demi-cercle, parallèles et perpendiculaires, hauteur et médiatrice dans un triangle isocèle), mais ne pose pas de problème de connaissances à des élèves en début de seconde.

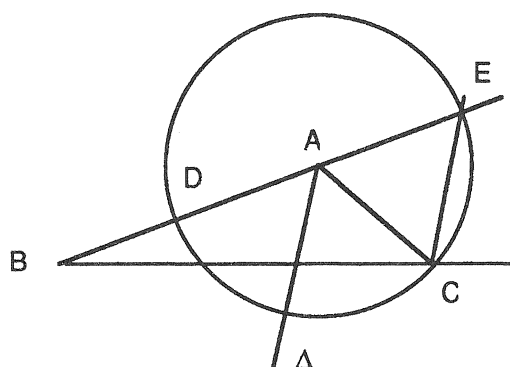
Enoncé

ABC est un triangle tel que $AB > AC$.

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon AC coupe la droite (AB) en D et E.

On mène par A la droite Δ parallèle à la droite (CE).

Démontrer que Δ est la médiatrice du segment [DC].



La séquence est décrite dans la fiche-professeur de la page suivante.

"REDIGEZ EN LIBERTE"

FICHE PROFESSEUR

L'objectif de cette activité est de faire sentir aux élèves toutes les libertés qu'ils ont pour écrire une démonstration, mais aussi toute la rigueur qui est nécessaire dans l'usage des mots qui servent à l'articulation du texte.

Durée : Il faut prévoir environ deux heures de travaux dirigés et une heure et demie en classe complète.

Matériel à prévoir : Affiches ou transparents, feutres.

PREMIERE SEANCE :

Production des affiches (1 h en travaux dirigés)

- Exposer le but et le déroulement de l'activité.
- Répartir les élèves par groupes de 3 ou 4 élèves.
- Distribuer un texte de problème par élève.
- Consigne : chaque groupe rédige une démonstration avec le plus de soin possible sur une affiche (ou un transparent).

DEUXIEME SEANCE :

Débat sur les affiches (30 min à 1 h en classe complète)

- Organiser un débat sur les différentes rédactions des élèves : ces derniers critiquent les différentes rédactions apparaissant sur les affiches.
- Eviter si possible d'intervenir ou de donner une indication sur les remarques faites par les élèves ; par contre on pourra noter ces dernières sur le support utilisé.
- A la fin de la séance, leur dire de rédiger individuellement, pour la fois suivante, une solution utilisant le triangle isocèle.

TROISIEME SEANCE :

Reconnaître les théorèmes (1 h en travaux dirigés)

- Objectif : obliger les élèves à tout lire attentivement, faire apparaître les différentes formulations d'un théorème et leur faire découvrir qu'un théorème peut être utilisé sans être énoncé.
- Travail en groupes (les mêmes qu'à la première séance).
- Distribuer à chaque élève les fiches "Rédigez en liberté" (voir pages suivantes).
- Prévoir 30 min pour la lecture du texte de la rédaction N° 5 et la production d'une feuille par groupe, relevée à la fin de l'heure et sur laquelle apparaissent les réponses aux questions 1-a)b)c). Le bilan sera fait à la séance suivante.
- A la fin de la séance, demander aux élèves de rédiger une réponse à la deuxième question qui sera discutée en classe entière la fois suivante.

DERNIERE SEANCE :

Débat et bilan (1 h en classe complète)

- Le professeur rappelle les résultats obtenus dans les différents groupes. Il doit mettre en évidence que tous les théorèmes sont présents dans chaque rédaction, indépendamment de la forme utilisée. Si cet objectif n'est pas atteint pour certains élèves, il est préférable de laisser le débat en suspens pour le reprendre un peu plus tard, par exemple en module.
- Pour le débat concernant la question 2) de la fiche élève, voici quelques points que nous avons voulu faire apparaître :
 - * objectif annoncé ou non.
 - * ordre dans un pas de démonstration : cause-conséquence (emploi du donc, on en déduit que...) ou conséquence-cause (emploi du car, en effet, ...).
 - * usage ou non des symboles.
 - * théorèmes plus ou moins explicités.
 - * pas de démonstration plus ou moins séparés.
 - * ordre global différent (conclusion en début dans la rédaction N° 2).
 - * textes assez courts pour les deux.
 - * vocabulaire peu varié pour les deux.

"REDIGEZ EN LIBERTE"

Voici dix rédactions de la même démonstration. Votre travail est le suivant :

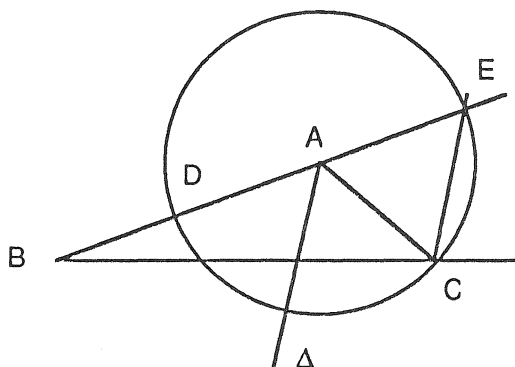
- 1 -
 - a) Citez tous les théorèmes utilisés dans la rédaction N° 5.
 - b) On s'intéresse au premier théorème rencontré dans cette rédaction.
Quelles sont les rédactions dans lesquelles ce théorème est utilisé ?
 - c) Refaites le même travail pour chacun des autres théorèmes.
- 2 - Comparez les rédactions N° 1 et N° 2 en exprimant les ressemblances et les différences sous forme de phrases bien rédigées.

Exemple : Dans la rédaction N° 1, on démontre que [ED] est un diamètre alors que dans la rédaction N° 2, on l'admet sans démonstration.

Enoncé

ABC est un triangle avec $AB > AC$.
Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon AC coupe la droite (AB) en D et en E.
On mène par A la droite Δ parallèle à (CE).

Démontrer que Δ est la médiatrice du segment [CD].



Rédaction N° 1

La droite (DE) passe par le centre A du cercle $\mathcal{C}$, donc les points D et E sont diamétralement opposés.

Le triangle DCE est inscrit dans le cercle de diamètre [ED] ; il est donc rectangle en C. On a donc : $(CE) \perp (CD)$. Or $\Delta \parallel (CE)$, donc $\Delta \perp (CD)$.

Dans le triangle ACD, isocèle en A car $AC = AD$ (rayon du cercle), la droite Δ est hauteur, donc également médiatrice de [CD].

Rédaction N° 2

Pour démontrer que Δ est la médiatrice de $[CD]$, je vais prouver que ACD est un triangle isocèle et que Δ est une hauteur de celui-ci.

* ACD est isocèle car C et D sont des points du cercle $\mathcal{C}$ de centre A .

* Δ est perpendiculaire à (CD) : en effet Δ est parallèle à (EC) et (EC) est perpendiculaire à (CD) car C est un point du cercle de diamètre $[ED]$.

Rédaction N° 3

Montrons d'abord que (EC) est perpendiculaire à (CD) : comme les points E et D sont les points d'intersection de la droite (AB) avec le cercle $\mathcal{C}$ de centre A , $[ED]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, alors en joignant le point C , situé sur le cercle, aux extrémités du diamètre $[ED]$, on obtient un triangle rectangle en C . On a donc (EC) perpendiculaire à (CD) .

Montrons que Δ est la médiatrice de $[CD]$.

Les deux droites Δ et (EC) étant parallèles et (EC) étant perpendiculaire à (CD) , on en déduit que Δ est perpendiculaire à (CD) .

De plus le triangle ACD est isocèle de sommet A puisque $[AC]$ et $[AD]$ sont des rayons du cercle $\mathcal{C}$; on en conclut que Δ , hauteur du triangle ACD , est aussi médiatrice de $[CD]$.

Rédaction N° 4

$[ED]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$	}	donc $(EC) \perp (CD)$
C est un point de ce cercle		

$(EC) \perp (CD)$ et $\Delta \parallel (EC)$	donc $\Delta \perp (CD)$
--	--------------------------

Dans le triangle ACD	}	donc ACD est isocèle en A
$AC = AD$ (rayon du cercle)		

Δ est la hauteur issue de A	}	donc : Δ est la médiatrice de $[CD]$
ACD est isocèle		

Rédaction N° 5

Démontrons d'abord que Δ est perpendiculaire à (CD) .

Le segment $[DE]$ est un diamètre du cercle $\mathcal{C}$ et C est un point de ce cercle, or on sait qu'un triangle formé par un point d'un cercle et les extrémités d'un diamètre est rectangle et a pour hypoténuse ce diamètre. On peut donc en déduire que le triangle CED est rectangle en C et ainsi (EC) et (CD) sont perpendiculaires.

Par hypothèse nous savons aussi que (EC) et Δ sont parallèles ; or lorsque deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Par conséquent Δ est perpendiculaire à (CD) .

Prouvons maintenant que Δ est la médiatrice de $[CD]$.

Le triangle ACD est isocèle de sommet A , car $[AC]$ et $[AD]$ sont des rayons du cercle, de plus Δ étant perpendiculaire à (CD) est la hauteur relative à la base. Or, dans un triangle isocèle, la hauteur relative à la base est aussi la médiatrice de cette base.

Ainsi Δ est la médiatrice de $[CD]$.

Rédaction N° 6

Pour démontrer que Δ est la médiatrice de $[DC]$, notons d'abord que CDA est un triangle isocèle de sommet A car $AC = AD$ (rayon du cercle).

D'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{ll} (CE) \perp (CD) & \text{car } CED \text{ étant un triangle inscrit dans un demi-cercle de} \\ & \text{diamètre } [ED] \text{ est rectangle en } C. \\ (CE) \parallel \Delta & \text{par hypothèse.} \end{array} \right.$$

Par suite $\Delta \perp (CD)$; donc Δ est la hauteur du triangle isocèle CAD relative à la base $[CD]$; alors dans ce triangle isocèle CAD , la hauteur Δ est aussi la médiatrice de $[CD]$.

Rédaction N° 7

Démontrons que dans le triangle ACD , qui est isocèle en A , puisque $[AC]$ et $[AD]$ sont des rayons de $\mathcal{C}$, la droite (Δ) est la hauteur relative à $[CD]$.

- * Le triangle ECD est rectangle en C car il est inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ et $[DE]$ est un diamètre de $\mathcal{C}$. Par conséquent (EC) est perpendiculaire à (CD) .
- * Δ étant parallèle à (EC) est donc perpendiculaire à (CD) : c'est donc la hauteur relative à $[CD]$ dans le triangle ACD .

Dans un triangle isocèle, la hauteur relative à la base est la médiatrice de cette base : donc Δ est la médiatrice de $[CD]$.

Rédaction N° 8

Le triangle EDC est rectangle en C car il est inscrit dans le cercle de diamètre [ED].

De plus Δ est perpendiculaire à (CD) ; en effet les droites (EC) et Δ sont parallèles et (CD) est perpendiculaire à (EC).

Δ est donc la médiatrice de [CD] car elle est la hauteur issue de A du triangle ACD qui est isocèle de sommet A.

Rédaction N° 9

[ED] étant un diamètre de $\mathcal{C}$ et C un point de ce cercle, on a donc (EC) perpendiculaire à (CD).

Comme (EC) est perpendiculaire à (CD) et Δ parallèle à (EC), on a donc Δ perpendiculaire à (CD).

Dans le triangle ACD, AC et AD sont égales (rayon du cercle), on a donc : ACD est isocèle de sommet A.

Δ est la hauteur issue de A et ACD est isocèle, on a donc : Δ est la médiatrice de [CD].

Rédaction N° 10

Comme le triangle ECD est inscrit dans le cercle de diamètre [ED], il est rectangle en C. Donc la droite (EC) est perpendiculaire à la droite (CD). Δ étant parallèle à (CE) est perpendiculaire à (CD) d'après le théorème : "si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre".

Or C et D sont deux points du cercle $\mathcal{C}$ de centre A ce qui prouve que $AC = AD$ et que le triangle ADC est isocèle de sommet A.

Par suite, Δ étant la hauteur relative à la base [CD] du triangle isocèle ACD est en même temps la médiatrice de [CD].

II - L'EXPLICATION DE NOS CHOIX

1 - Choix de la séquence

Nous avons opté pour le travail de groupes au départ pour être sûrs que le problème soit résolu par tous et pour permettre à chacun de participer à une rédaction de démonstration.

La discussion et la critique sont plus faciles sur des démonstrations produites par les élèves que sur celle de leur professeur. Cette discussion permettra à l'enseignant de découvrir rapidement les représentations implicites des élèves.

La difficulté, à la troisième séance, est de faire travailler les élèves sur les dix textes que nous proposons. Nous avons au départ posé la question sous la forme : *"Énoncez tous les théorèmes utilisés dans les démonstrations"*, mais cette tâche était trop vague et trop vaste. Nous avons alors essayé de distinguer au niveau de la consigne, les théorèmes explicitement énoncés de ceux qui étaient sous-entendus ; mais il est très difficile de se faire comprendre. Il vaut mieux que cette remarque apparaisse au cours de la discussion.

2 - Choix des rédactions

Nous voulions faire comprendre aux élèves certaines libertés : on peut écrire le texte dans l'ordre que l'on souhaite ; on peut employer des mots de liaison variés, mettre la conclusion au début, développer les détails ou les sous-entendre, ajouter des indications heuristiques sur le but que l'on souhaite atteindre. On constate que, par exemple, l'idée qu'une démonstration commence obligatoirement par une donnée et se termine par la conclusion reste fortement ancrée chez quelques-uns.

Nous avons donc choisi des rédactions qui, à nos yeux, sont parfaitement correctes en faisant varier certains paramètres :

- ajout ou suppression de certains détails comme : *"[DE] passe par le centre, donc [DE] est un diamètre"*.
- ordre : en remontant comme dans le texte 2, en descendant comme dans le texte 1, dans le désordre comme dans le texte 7.
- on annonce le résultat dans les textes 3 et 5.
- variété des mots de liaison : car, or, donc, en effet, comme, alors, on obtient, on en déduit, on en conclut, de plus on sait que, on peut donc en déduire, lorsque, notons d'abord que, utilisation du participe présent.
- le texte contient des symboles ou non.
- texte long ou texte court.
- structure apparente (texte 9) ou non (texte 10).
- énoncé explicite des théorèmes ou non.

III - COMMENTAIRES SUR LE FONCTIONNEMENT DE L'ACTIVITE ET SUR LES PRODUCTIONS DES ELEVES

La première séance est réservée à la réalisation de l'affiche. Ce travail est très bien accueilli par les élèves qui s'y investissent avec sérieux. Lorsque cette activité est réalisée en début d'année, cela leur permet de se connaître plus vite et l'enseignant peut les cerner plus rapidement.

Pour certains groupes, une aide est nécessaire pour la recherche de la solution ; le manque d'efficacité de ces groupes s'explique, soit par l'apparition de conflit de pouvoir, soit par un travail uniquement individuel.

Les textes produits par les élèves sont en général de bonne qualité. On remarque qu'ils se montrent cependant assez négligents dans leur ponctuation quand ils écrivent eux-mêmes, par contre ils sont exigeants quand ils étudient les démonstrations des autres.

On y rencontre souvent des notations incorrectes, notamment pour les droites, les segments et les longueurs.

On y note des tournures maladroites telles que : *"Un triangle inscrit dans un cercle, ayant pour côté le diamètre du cercle et le sommet sur le cercle est rectangle"*. La signification du mot *"inscrit"* ne semble pas claire puisqu'il est précisé que le sommet est sur le cercle.

Certaines expressions sont discutables. Citons-en quelques-unes :

- *" Δ est la médiatrice du triangle ADC"*.
- *"Comme ADC est isocèle en A et que Δ est perpendiculaire à (DC), donc Δ est une hauteur du triangle ADC en A. Et, comme la hauteur d'un triangle isocèle est en même temps la médiatrice, donc Δ est la médiatrice de [CD]"*. En effet, il y a plusieurs hauteurs !
- *" Δ est la hauteur issue de A, or dans un triangle isocèle la hauteur issue du sommet principal est aussi médiatrice du segment opposé. Donc Δ est hauteur et médiatrice du segment [CD]"*.

Ces erreurs ne sont pas importantes mais elles peuvent cacher des fautes conceptuelles : médiatrice du triangle, [CD] est le diamètre du cercle.

Certains recopient l'énoncé (c'était imposé en troisième).

Certains n'emploient pas de mots de liaison.

Quant aux théorèmes, beaucoup sont énoncés correctement et, au moment de la confrontation à la deuxième séance, les énoncés incorrects sont rapidement repérés et rejetés avec des arguments de bonne qualité. Les fautes rencontrées sont de différents types :

- des énoncés faux : *"Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle"* ; *"Si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une l'est à l'autre"*.

- des énoncés incomplets : *"Dans un triangle isocèle, la hauteur et la médiatrice sont confondues"*, *"Tout triangle inscrit dans un demi-cercle est rectangle"*.
- des énoncés surchargés : *"Dans un triangle isocèle, la hauteur partant du sommet principal est aussi la médiatrice, la médiane et la bissectrice de ce sommet"*. Dans ce pas de démonstration, il suffisait de dire que la hauteur était médiatrice de la base. D'autre part, il faut noter que le statut des mots "médiatrice", "médiane", "bissectrice" n'est pas assimilé.
- des fautes fondamentales de résolution : *"La droite issue du sommet d'un triangle isocèle est en même temps la médiatrice, la bissectrice, la hauteur et la médiane, donc Δ est la médiatrice"*.
- une confusion entre théorème direct et réciproque : *"Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, elles sont parallèles"* au lieu de *"Si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre"*.
- des fautes de français : *"Tout triangle inscrit dans un demi-cercle dont un côté est un diamètre est rectangle"*; *"Lorsqu'un triangle est inscrit dans un demi-cercle et dont un des côtés est le diamètre du cercle, alors ce triangle est rectangle"*.

Dans l'ensemble, on peut penser que les structures du texte démonstratif sont presque acquises, puisque la plupart du temps, les pas comportent bien les données et la conclusion, introduites par des mots de liaison adaptés, sans stéréotype.

IV - LE TRAVAIL DES ELEVES SUR LES DIX REDACTIONS (Troisième séance)

1 - Les théorèmes de la rédaction 5

Ils reconnaissent parfaitement les trois théorèmes utilisés dans cette rédaction. Certains énoncent comme théorèmes : *"Le centre d'un cercle est équidistant de tous les points de ce cercle"*, *"Si deux points sont sur un cercle, ils sont équidistants du centre de ce cercle"*, *"Tout triangle ayant deux côtés de même longueur est isocèle"*, alors que la plupart distinguent théorème et définition.

Pour énoncer le théorème du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle, on constate que, en majorité, les élèves transforment de manière significative le texte de la démonstration (rédaction 5) pour en faire un énoncé, ce qui est le signe d'une certaine maîtrise de l'écriture d'énoncés. On note encore une bonne variété des formes utilisées.

Quand au théorème "Des droites perpendiculaires et parallèles", il est recopié ou légèrement modifié.

Le théorème de "La hauteur est médiatrice dans un triangle isocèle" est généralement recopié mais également complété par "médiane et bissectrice". L'introduction d'éléments inutiles dans le problème montre certainement une difficulté dans la compréhension de la structure d'un pas de démonstration.

2 - Le théorème du triangle rectangle inscrit dans un demi-cercle

Dans un premier temps, les élèves nomment beaucoup de rédactions, qui à leur avis, ne contiennent pas ce théorème, mais rapidement il y a de nombreux changements. Il semble que les premiers indices de repérage soient les mots du théorème: "cercle", "diamètre", "inscrit", "triangle".

Il y a un pas à franchir entre "triangle rectangle" et "droites perpendiculaires".

3 - La comparaison des rédactions 1 et 2

Pour beaucoup, la rédaction 2 ne comporte pas de conclusion ; il faudra institutionnaliser le fait que l'ordre dans la rédaction d'une démonstration n'est pas toujours : hypothèse, théorème, conclusion.

En début de classe de seconde, les élèves ont une préférence pour les rédactions longues où tous les théorèmes sont énoncés explicitement. Ils sont marqués par des formulations utilisées dans leur scolarité antérieure.

V - SUIVI DE CETTE EXPERIENCE

Pour étudier l'impact qu'a eu cette activité sur les élèves, deux tests ont été proposés.

Dans deux classes, dès le mois d'octobre, une semaine après la correction orale d'un exercice, celui-ci a été repusé en interrogation écrite avec la consigne : "A rédiger avec soin et en liberté". Ce test a permis de juger la rédaction et non la démonstration puisque, par exemple sur une classe de 33 élèves, 22 ont réussi la démonstration, 9 ne sont pas allés jusqu'au bout et deux n'ont rien fait.

La rédaction est meilleure que d'habitude, elle est plus variée. Les indices de réussite sont :

- l'apparition plus nette des pas de la démonstration avec une meilleure utilisation des mots de liaison.
- l'annonce des objectifs de la démonstration par quelques élèves.
- l'utilisation par environ un tiers de la classe des théorèmes de façon instanciée et non explicite.
- le rappel plus fréquent des résultats antérieurs.

Dans une autre classe, l'exercice de l'activité : "*Rédigez en liberté*" est repropusé en interrogation écrite au mois d'avril ; les rédactions de quelques élèves "avant et après" ont été examinées. Des remarques identiques sont faites : le texte d'avril est généralement plus court ; les hypothèses qui étaient énoncées en début d'exercice, ne le sont plus, mais rappelées au moment utile. La structure de la démonstration est plus nette, l'organisation des pas plus variée. Il y a moins de propositions inutiles.

Bien sûr, il est difficile de généraliser ce constat et exagéré de faire preuve de trop d'optimisme. Tout ce travail est de longue haleine et ne peut pas toujours donner matière à des activités de ce type car les différentes parties du programme ne s'y prêtent pas nécessairement.

Il est d'autre part important de signaler que ce travail a été apprécié par nos élèves. En effet, tout au long de l'année, ils ont fréquemment fait référence à cette activité : *"Rédigez en liberté"*.

DEUXIEME ACTIVITE : "DEMONSTRATION A TROUS"

I - OBJECTIFS

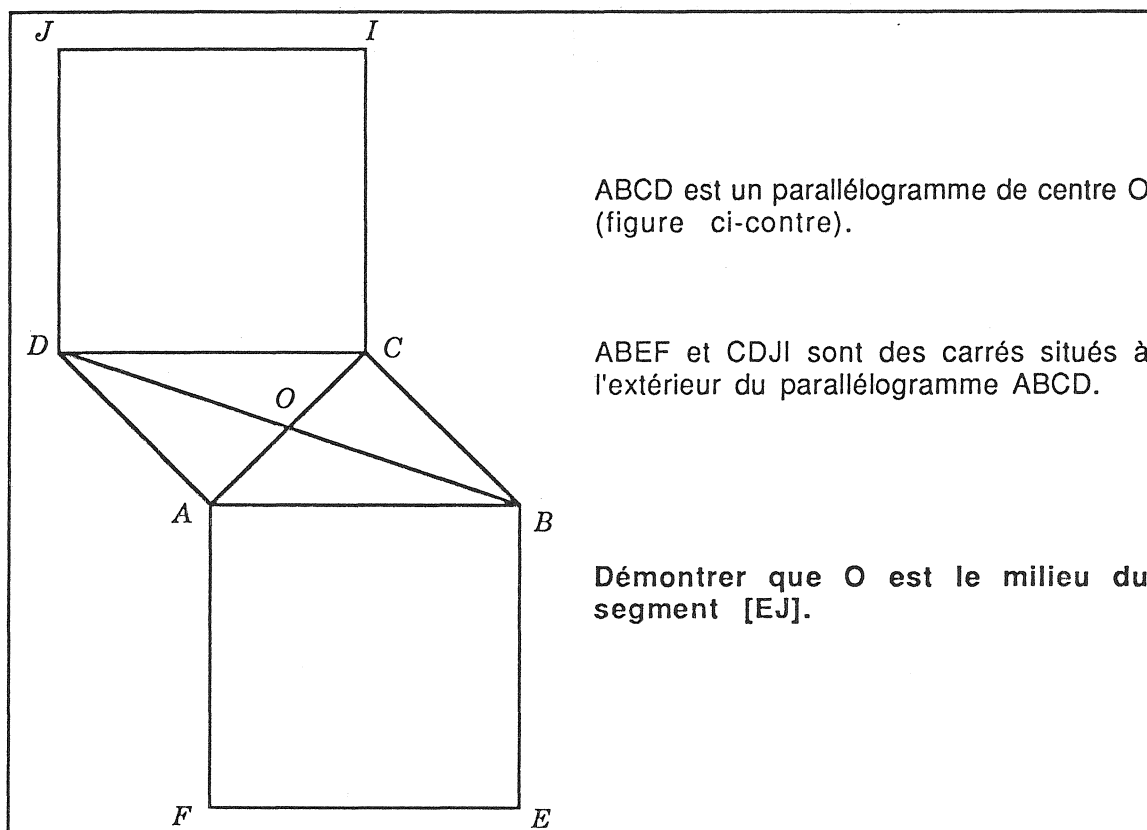
Cette activité permet d'appréhender l'organisation d'une démonstration qui n'est pas rédigée dans l'ordre et d'étudier la structure d'un pas.

En effet, on ne peut comprendre une démonstration que si on connaît les degrés de liberté que l'on a, grâce aux mots de liaison.

L'objectif de cette fiche est de faire découvrir aux élèves la rigueur nécessaire dans l'usage des mots servant à l'articulation du texte.

DEMONSTRATION A TROUS

Voici un énoncé de problème :



Compléter la démonstration suivante :

O est le milieu de [BD] ----- ABCD est un parallélogramme de centre O. Pour montrer que c'est aussi le milieu de [EJ], il ----- montrer que EBJD est un parallélogramme. Cette propriété sera bien vérifiée ----- $EB = DJ$ et $(EB) \parallel (DJ)$.

Montrons d'abord, par une suite d'égalités, que $EB = DJ$. ----- dans le carré ABEF, les côtés sont égaux et donc $EB = AB$. On démontrerait ----- dans le carré DCIJ, que $DC = DJ$. Enfin, ----- dans le parallélogramme ABCD $AB = DC$. Donc ----- .

Montrons maintenant que $(EB) \parallel (DJ)$: pour cela ----- que (AB) est parallèle à (CD) ----- ABCD est un parallélogramme. ----- ABEF et DCIJ sont des carrés, $(DJ) \perp (DC)$ et $(EB) \perp (AB)$. ----- $(AB) \parallel (DC)$, ----- $(DJ) \perp (AB)$ ----- "si deux droites sont parallèles, toute droite perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre".

On en déduit bien que $(EB) \parallel (DJ)$ en ----- le théorème : "si deux droites sont perpendiculaires à une troisième droite, elles sont parallèles".

II - MISE AU POINT DE LA FICHE

Après un travail sur le texte lui même, les deux questions qui se sont posées ont été les suivantes :

- les élèves trouveront-ils les mots qui conviennent, ont-ils un vocabulaire suffisant, ce vocabulaire est-il disponible pour l'écriture d'une démonstration ?
- quelles modalités pédagogiques doit-on utiliser pour l'exploitation de la fiche ?

Pour cette deuxième question les expériences menées nous conduisent à la proposition du paragraphe III ci-après.

Pour éclairer la première question nous avons proposé deux versions de la fiche. Dans la première, la consigne était simplement de compléter la démonstration, dans la deuxième, les mots de liaison que nous voulions voir apparaître étaient proposés aux élèves. Les résultats de cette expérience nous ont conduits à deux conclusions :

- d'une part, il est évident que l'écrasante majorité des élèves de seconde maîtrise bien l'utilisation des mots de liaison dans le langage courant (ce n'est sans doute pas le cas en quatrième) et que devant ce texte de démonstration ils n'ont aucune difficulté à proposer des expressions très variées. Les erreurs viennent d'une utilisation non conforme aux statuts des propositions et non d'une difficulté de vocabulaire.
- d'autre part, la tâche est rendue beaucoup plus difficile pour les élèves quand on leur propose des mots de liaison, en particulier parce qu'une utilisation douteuse en début de texte de certaines expressions les conduit en fin de texte à des fautes grossières car ils veulent utiliser les expressions qu'il leur reste.

Les expressions auxquelles nous avons pensé sont : car, il suffit de, si, en effet, de même, on sait que, $EB = DJ$, notons, puisque, comme, mais, donc, d'après le théorème, appliquant.

III - LES CONDITIONS D'UTILISATION DE CETTE FICHE

La fiche est proposée en travail de groupes. Cet aspect est essentiel ; en effet, un élève peut avoir des difficultés à trouver seul des mots qui lui paraissent adaptés pour certains des trous du texte, alors que cela ne se produit pas pour les groupes d'élèves .

Après un travail d'un quart d'heure à une demi-heure, l'enseignant ramasse les copies. Au cours d'une séance ultérieure proche, il fait une correction sous forme de débat. Pour cela il place sur un rétroprojecteur le texte à trous, puis il met une à une les réponses des élèves en commençant par les mauvaises et en demandant à chaque fois l'avis de la classe. L'expérience montre que les erreurs sont toujours relevées et que de bons arguments sont trouvés par les élèves. En une demi-heure environ l'accord se fait.

IV- ANALYSE DU TEXTE PROPOSE ET DES REPONSES DES ELEVES

Les trous correspondent à des expressions de liaison sauf le septième.

Le premier trou (O milieu de [BD] car ABCD est un parallélogramme de centre O) a conduit à beaucoup d'erreurs pour la fiche où les mots de liaison n'étaient pas proposés, et à une seule erreur dans l'autre cas. On peut interpréter ce fait : les élèves rencontrent si rarement dans les démonstrations des livres ou de leurs enseignants les mots "car" "parce que", "puisque", "en effet" qu'ils hésitent à les utiliser.

Dans le deuxième trou, (pour montrer que c'est aussi le milieu de [EJ] il suffit de montrer que ...) le mathématicien attend "il suffit de". Mais on sait que dans le langage courant l'expression "il faut" viendrait aussi naturellement. Cette deuxième expression correspond en effet à la démarche heuristique que l'on pourrait paraphraser : "la bonne méthode, la méthode naturelle est de montrer". Au lieu de rejeter ce "il faut" sans appel, il semble préférable d'expliquer le sens qu'il peut avoir et les raisons qui font préférer "il suffit" au mathématicien dans une démonstration. Les réponses des élèves confirment cette analyse : il n'y a aucune faute pour la fiche avec les mots, alors que dans l'autre fiche "il faut" est très largement majoritaire.

Pour le troisième trou, (Cette propriété sera bien vérifiée si $EB = DJ$ et $(EB) \parallel (DJ)$), une première lecture peut conduire à "car". Un seul indice contre ce mot se trouve avant le trou : le futur dans "cette propriété sera". Mais cet indice n'est pas décisif car les négligences de temps dans les démonstrations d'enseignants ne sont pas rares. C'est en fait la suite qui doit faire rejeter "car" au profit de "si". En effet on y démontre longuement que $EB = DJ$ et que $(EB) \parallel (DJ)$, et donc ces deux propositions ne sont pas considérées à cet endroit de la démonstration comme acquises. Le fait que moins du quart des élèves fassent la faute attendue montre que la maîtrise du français et de la démonstration n'est pas loin d'être acquise.

Le quatrième trou (En effet, dans le carré ABEF, les côtés sont égaux et donc $EB = AB$) est l'objet de peu d'erreurs.

Presque la moitié des élèves emploient pour le cinquième trou (On démontrerait de même dans le carré DCIJ, que $DC = DJ$) "donc" ou "en effet". Ici encore on peut penser que cette erreur est favorisée par une vue trop stéréotypée de la démonstration. Une démonstration est une suite de déductions et sa structure est de ce fait linéaire. L'expression "de même" indique au contraire une démarche parallèle. Il est fréquent au collège que ce type de démarche soit dissimulé par la globalisation de deux pas de démonstrations en un seul, ce qui donnerait ici : "Dans les carrés ABEF et DCIJ les côtés sont égaux, donc $EB = AB$ et $DC = DJ$ ". R. DUVAL a noté qu'en quatrième cette globalisation est pour certains un obstacle à la compréhension de la structure des démonstrations.

Les erreurs dans le cinquième et le sixième trous (enfin, on sait que dans le parallélogramme ABCD, $AB = DC$) semblent étroitement liées ; par exemple "en effet" est suivi de "de même". Notons cependant l'emploi de "que" dans le sixième trou, qui aurait dû être défavorisé par le point.

Il y a très peu d'erreurs dans le septième trou.

Le huitième et le neuvième trous sont liés (Pour cela notons que (AB) est parallèle à (CD) puisque ABCD est un parallélogramme). Il y a très peu d'erreurs pour la fiche sans mot. Les erreurs pour la fiche avec mots s'expliquent sans doute par la nécessité de ne pas réutiliser certains termes. La même situation se produit pour les treizième et quatorzième trous (D'après le théorème "si deux ... et en appliquant le théorème ...).

Les difficultés constatées pour les trous 10, 11 et 12 (comme ABEF et DCIJ sont des carrés, $(CD) \perp (DC)$ et $(EB) \perp (AB)$. Mais $(AB) \parallel (DC)$, donc $(DJ) \perp (AB)$) s'expliquent de deux façons : d'une part, le pas de démonstration correspondant au théorème cité est particulièrement complexe puisqu'il comporte trois données. D'autre part, les trois pas préliminaires qui permettent d'obtenir ces trois données ne sont pas complètement isolés dans le texte. Cela conduit à des fautes graves comme l'utilisation devant $(DJ) \perp (AB)$ de "si" ou de "mais" qui transforme cette conclusion en une donnée. Le débat clarifie aisément cette situation.

L'absence de conclusion "O est donc bien le milieu de [EJ]" est volontaire. Il est fréquent en effet de rencontrer des démonstrations où le résultat est énoncé avant et n'est pas répété à la fin. C'est à l'occasion du débat que cela pourra être expliqué aux élèves, en précisant sans doute que pour eux il est préférable de redire la conclusion.

Le mot "mais" est souvent mal utilisé, surtout dans la fiche avec les mots. Il est vrai que ce mot est peu utilisé au collège, dans les démonstrations.

Certains élèves sont gênés par la ponctuation et la grammaire. Quelques phrases n'ont pas de verbe. Il faut dire que certains collègues, de lycée comme de collège, écrivent leurs démonstrations en style télégraphique.

En conclusion trois faits sont particulièrement évidents :

- les élèves sont souvent prisonniers d'une tournure de démonstration et cela les conduit à des fautes.
- certains mots sont moins connus des élèves et demandent une mise au point.
- les élèves sont capables en seconde de faire des progrès très rapides dans la rédaction des démonstrations si on analyse avec eux les obstacles qu'ils rencontrent.

V - LES EFFETS DE CETTE FICHE

Il semble que cette fiche modifie de manière très sensible les comportements des élèves. Ils écrivent des démonstrations moins stéréotypées et avec beaucoup moins de fautes.

Un résultat inattendu est l'effet sur les enseignants. Les conditions actuelles de l'enseignement les conduisent en effet tout naturellement à s'enfermer peu à peu dans des formes de démonstrations très stéréotypées. Le travail avec les élèves sur cette démonstration leur redonnent le goût de la liberté d'expression, et il semble que cela contribue à améliorer les performances des élèves.

TROISIEME ACTIVITE : "VERS UNE DEMONSTRATION PARFAITE"

Lorsque nous corrigeons des copies, nous nous demandons ce que l'élève va pouvoir retenir au moment de la correction. Beaucoup d'entre eux attendent la note et regardent les remarques formulées sans trop de sérieux !

Aussi, pour un élève qui a visiblement compris le problème posé mais dont la démonstration est très incomplète, ne pourrait-on pas lui demander de faire un schéma de sa démonstration, lui montrer ses défauts sur ce schéma puis lui faire réécrire et éventuellement lui faire recommencer jusqu'à ce qu'elle soit "parfaite" ?

Le risque est de se heurter souvent à la lassitude des élèves dans cette démarche. C'est pourquoi, il ne faut pas hésiter à transformer cette tâche en une activité comme celle que nous allons décrire ci-dessous, activité qui peut se présenter au sujet de l'exercice traité au chapitre I ou de la démonstration à trous :

ABCD est un parallélogramme de centre O (figure ci-contre).

ABEF et CDJI sont des carrés situés à l'extérieur du parallélogramme ABCD.

Démontrer que O est le milieu du segment [EJ].

Voici la copie d'un élève (première rédaction)

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \text{ (texte)}$$

Donc FEBA et DCIJ sont deux carrés isométriques et donc :

$\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{EB}$ abs DJBE est un parallélogramme et [BD] et [EJ] sont ses deux diag comme elles se coupent en leur milieu et que O est le milieu de [BD], O est le milieu de [EJ]

Une séance de travaux dirigés a été consacrée à l'étude de cette démonstration par l'ensemble des élèves de la classe. Chacun d'eux en a eu une photocopie et il a été précisé que le but cherché, à savoir "O milieu de [EJ]" était atteint avec rigueur mais que par contre, il y avait trop d'affirmations non démontrées au départ.

Après cinq minutes de réflexion personnelle, le débat a pu être engagé. Les remarques ont été très diverses, de "e au lieu de E", "diag." jusqu'à "pourquoi as-tu affirmé que $\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{EB}$?" en passant par : "que signifie : (texte) ?"

Au fur et à mesure de la discussion, l'élève qui avait produit cette copie a pu apporter les renseignements demandés avec l'aide de certains autres. Après quinze minutes environ, les élèves ont été regroupés par trois et ont eu une vingtaine de minutes pour mettre au point une rédaction commune. Le principal intéressé a tenu à rendre la copie personnelle suivante :

Comme ABCD est un parallélogramme :

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

donc (AB) et (DC) sont parallèles.

- Comme FEBA et DCIJ sont deux carrés :

Dans FEBA : (EB) et (AB) sont perpendiculaires,

et dans DCIJ : (DJ) et (DC) sont perpendiculaires.

- A deux droites, (EB) et (DJ) perpendiculaires à deux droites parallèles, (AB) et (DC), sont parallèles.

- Comme (EB) et (DJ) sont parallèles et que les deux carrés ABEF et DCIJ sont isométriques (puisque $AB = DC$), abs $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DJ}$.

Donc DJBE est un parallélogramme et [DB] et [EJ] sont ses deux diagonales ; comme elles se coupent en leur milieu et que O est le milieu de [DB] abs O est le milieu du segment [EJ].

Cette expérience a pu se dérouler avec profit car l'élève était demandeur et son comportement au sein de la classe très positif. Il est bien sûr difficile de généraliser une telle activité mais intéressant de savoir que des occasions semblables peuvent se présenter à nous à n'importe quel moment de l'année.

CHAPITRE 3

DEUX DIFFICULTES PARTICULIERES

Au cours de notre travail nous avons rencontré deux difficultés qui nous paraissent relever de la démonstration, mais qui sont aussi spécifiques de contextes particuliers. En essayant de concevoir des séquences pour les surmonter, nous avons peu à peu découvert qu'elles étaient plus profondes que nous ne le pensions. Ce chapitre est le reflet de notre travail à ce sujet.

"2 EST-IL SUPERIEUR OU EGAL A 1 ?"

I - LA DECOUVERTE DU PROBLEME

Quel professeur de mathématiques n'a jamais entendu dans sa classe :

"Oui mais, on ne peut pas dire que $x^2 + 1 \geq x^2$ puisque $x^2 + 1$ n'est jamais égal à x^2 " ?

Et chaque professeur, bien entendu, de donner une réponse avec de bons arguments logiques... qui doivent convaincre tous les élèves. Et pourtant, bien souvent, quelques jours (semaines) plus tard, la même exclamation retentit de nouveau ; nouvelles explications, avec des variantes. Si la situation se renouvelle encore plusieurs fois, on se laisse aller à la colère, au découragement, en se disant que certains élèves ne comprendront jamais. Il faut se rendre à l'évidence : nos discours ne servent à rien.

Notre réflexion aboutit à l'idée qu'une façon de faire évoluer les élèves est de créer dans la classe une contradiction qui les oblige à réviser leurs conceptions, sans que l'enseignant leur impose son point de vue. Nous décidons alors de tester, dans une classe de première A1 où le problème a déjà été évoqué plusieurs fois, la séquence suivante :

Chaque élève répond individuellement, par écrit, à la première question :

$2 \geq 1$: Vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ? **Justifiez votre réponse.**

Le professeur récupère les réponses et pose alors la deuxième question :

$2 \in [1, +\infty[$: Vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ? **Justifiez votre réponse.**

De nouveau, les réponses sont collectées et le professeur demande alors aux élèves de comparer les questions posées, ce qui donne lieu à un débat dans la classe. Pour clore ce débat, il demande à chacun de répondre de nouveau à la première question, en précisant s'il a changé d'avis.

Voici les résultats à la première question : sur 30 élèves,

16 répondent : VRAI, avec les arguments suivants :

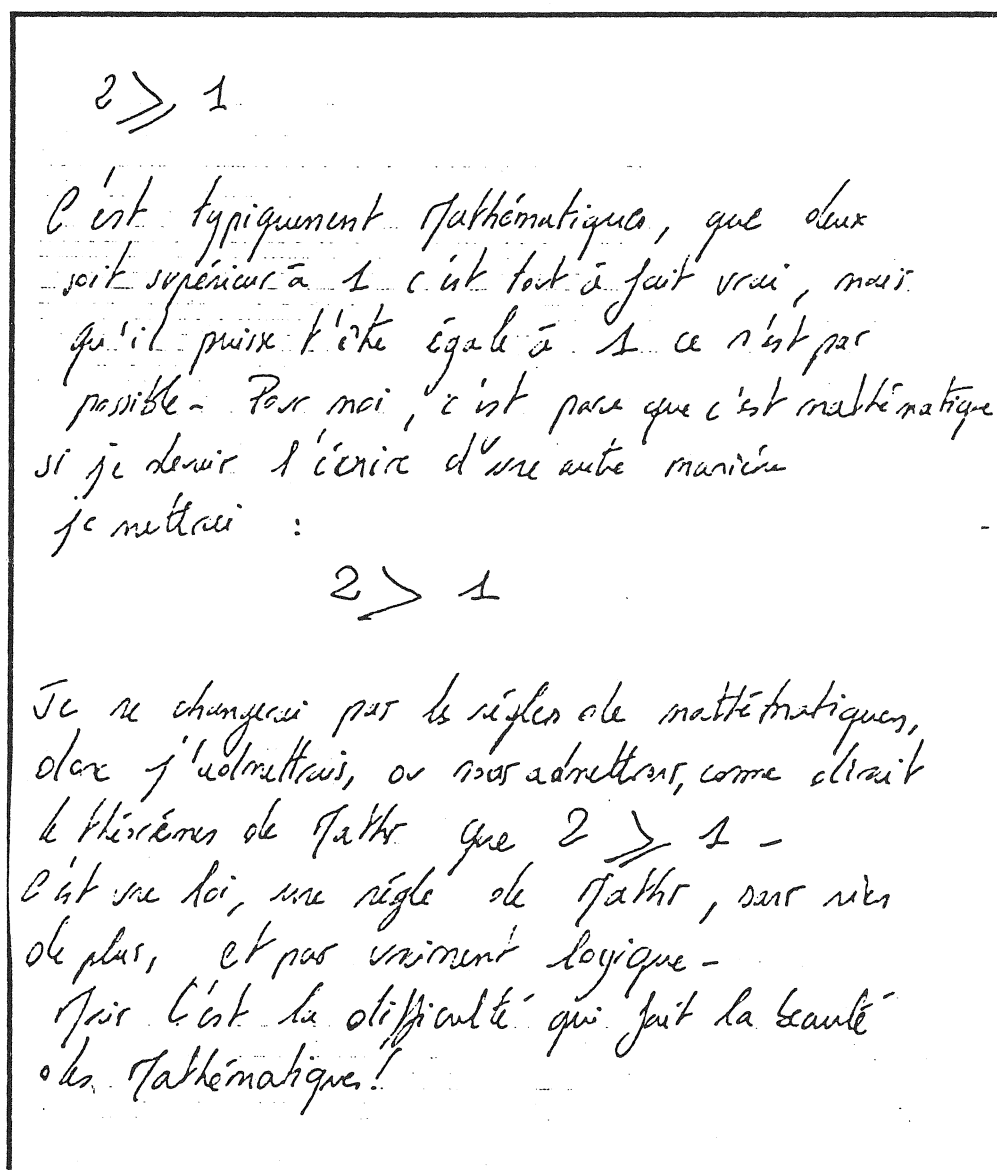
- * pour 10 : une des deux phrases " $2 > 1$ " ; " $2 = 1$ " est vraie.
- * pour 3 : $2 - 1 \geq 0$ est vraie.
- * pour 1 : $2 \in [1, +\infty[$.
- * pour 2 : arguments très confus.

10 élèves répondent : FAUX car $2 \neq 1$.

4 élèves répondent : NI VRAI, NI FAUX, car $2 > 1$ est vrai mais $2 = 1$ est faux.

Il est intéressant de remarquer que pour montrer que " $2 \geq 1$ ", trois élèves utilisent " $1 \geq 0$ ". Pour ces élèves, il est naturel de penser que "1 est positif". Le rôle de "0" est en effet très spécifique. Dans le même ordre d'idée, nous avons remarqué que l'équation " $x^2 + 1 \geq 0$ " ne pose pas de problèmes aux élèves alors que " $x^2 \geq -1$ " leur paraît bien moins évidente et provoque souvent des réponses du genre "c'est impossible".

Un extrait de copie mérite d'ailleurs d'être cité :



Visiblement, pour cette élève, le professeur lui demande de croire que $2 = 1$. Elle sait bien que ce résultat est faux mais "c'est des maths, alors...". Ce genre d'argument, couramment utilisé par les "nuls en math", n'est pas à négliger car c'est grâce à lui que ces élèves se donnent l'autorisation de ne pas comprendre. Il est sans doute utile de regarder de plus près quels arguments nous permettront d'emporter leur conviction.

Ceci dit, le débat semble avoir été profitable, puisqu'en fin de séquence, 24 élèves sur 30 pensent que $2 \geq 1$ est vrai. On trouve même, dans une copie, la réflexion : *"j'ai changé d'avis, ça devient plus logique sous forme de représentation en intervalle que sous la forme $2 \geq 1$ ".* Et, dans une autre copie : *" $2 \geq 1$ est vrai ; je n'ai pas changé d'avis, mais cette fois, j'ai compris".*

Malgré tout, il reste encore un certain nombre d'élèves à convaincre.

Nous décidons alors de renouveler l'expérience dans une classe de seconde, classe où la question " $x^2 + 1 \geq x^2$ " n'a jamais été évoquée, en reposant la même question :

$2 \geq 1$: Vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ?

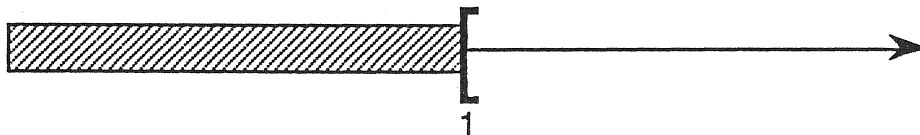
La surprise est de taille : sur 34 élèves,

- * 18 répondent FAUX car $2 > 1$ mais $2 \neq 1$.
- * 15 répondent NI VRAI, NI FAUX car $2 > 1$ mais $2 \neq 1$.
- * 1 répond VRAI car $2 > 1$ est vrai, donc 2 est bien supérieur ou égal à 1.

Deux constatations s'imposent :

- l'affirmation $2 \geq 1$ n'est vraiment pas naturelle. Un bref sondage en salle des professeurs ne fait que confirmer cette constatation : il n'y a guère que les professeurs de Mathématiques qui donnent une bonne réponse.
- le même argument conduit les uns à conclure "faux", et les autres "ni vrai, ni faux" : surprenant !

La suite du débat éclaire quelque peu les choses : tous les élèves admettent sans difficulté l'équivalence entre " $x \geq 1$ " et " $x \in [1, +\infty[$ ". De même, $2 \in [1, +\infty[$ est une évidence. Notons que les connaissances sur les intervalles sont assez solides et que beaucoup d'élèves s'appuient sur des schémas du type :



On pourrait croire alors que $2 \geq 1$ sera vrai pour tous : il n'en est rien. Deux causes principales peuvent être trouvées à cette difficulté :

- dans le langage courant, taire une partie de l'information est souvent considéré comme un mensonge. N'est ce pas un faux témoignage de dire : *"Cette voiture était verte ou jaune"*, alors qu'on sait pertinemment qu'elle est verte ?

Ici chacun sait que $2 > 1$; pourquoi écrire $2 \geq 1$, qui est moins précis ?

- l'autre est d'ordre linguistique et logique. Le sens du mot "ou" est plus difficile à maîtriser qu'il n'y paraît. Bien que l'énoncé " $x \geq 1$ " comporte le mot "ou", cette expression est ressentie comme la juxtaposition de deux conditions : " $x > 1$ " et " $x = 1$ ". Pour certains, cela conduit à dire qu'il n'est ni vrai ni faux puisque l'une est vraie et l'autre fausse. Pour d'autres, " $2 \geq 1$ " devient " $2 > 1$ et $2 = 1$ " qui est évidemment fausse. Dans les deux cas, le "ou" n'est même pas entendu.

II - UNE SEQUENCE EFFICACE

Nous proposons donc une séquence à effectuer dès que le problème se pose et à ce moment là seulement.

Elle se déroule en quatre étapes: les trois premières lors d'une première séance, la quatrième lors d'une seconde.

1 - Première séance (Environ 20 minutes)

Elle est constituée de trois questions qui sont écrites les unes après les autres au tableau, les élèves y répondant par écrit : avant de poser une nouvelle question, l'enseignant collecte les réponses à la précédente.

Question N 1 : " $2 \geq 1$ "
Est-ce vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux. Pourquoi ?

Question N 2 : " $2 \in [1, +\infty[$ "
Est-ce vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux. Pourquoi ?

Question N 3 : (A faire éventuellement par groupes de 2 ou 3).
Ecrire " $x \in [1, +\infty[$ " puis " $2 \in [1, +\infty[$ " sous forme d'inégalités.

2 - Deuxième séance (Un autre jour)

Les élèves ont pu discuter entre eux et confronter leurs idées. Le professeur leur parle alors des résultats obtenus à la première séance. Nous avons pu remarquer qu'un grand nombre de ceux qui affirment que " $2 \geq 1$ " n'est pas vrai admettent par contre que " $2 \in [1, +\infty[$ " l'est.

Un débat peut alors intervenir entre les élèves, il est suivi de la quatrième question.

Question N 4 : " $2 \geq 1$ "
Est-ce vrai ? Faux ? Ni vrai, ni faux ?
Avez-vous changé d'avis ?

III - CONCLUSION

Ce genre de séquence a plus ou moins bien marché car les groupes-classes varient d'une année sur l'autre : ils peuvent être actifs et permettre un débat riche et varié, ou au contraire être assez passifs et ne pas laisser naître un débat cognitif intéressant.

De toute façon, on ne peut espérer convaincre toute une classe, le principal est de faire réfléchir les élèves, le cheminement se faisant à longue échéance ; il est intéressant toutefois de préciser que dans une classe de terminale dont les élèves avaient fait une activité de ce type en première, le problème ne s'est pas reposé, ce qui laisse supposer que la réflexion s'est faite pour une grande partie d'entre eux.

Il semble utile de mettre au point d'autres situations ayant le même objectif. On peut au cours de la résolution (éventuellement graphique), d'une équation de la forme " $x \geq \sqrt{x}$ " demander aux élèves ce qu'ils pensent de " $2 \geq \sqrt{2}$ ". Ceci nous permettra, un tant soit peu, d'évaluer les effets de notre fiche.

ALIGNEMENT

C'est au hasard de discussions informelles qu'a germé l'idée d'inclure ce thème dans notre recherche. En effet, il apparaît que les démonstrations faisant intervenir l'alignement sont fréquemment mal rédigées par les élèves, et de surcroît, certaines fautes reviennent sans cesse dans les copies, malgré nos explications répétées. Cette situation correspond exactement au sujet de notre recherche : "comment améliorer la rédaction des démonstrations par les élèves ?"

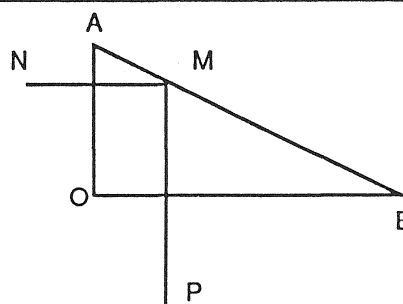
Nous allons d'abord présenter quelques fautes typiques, extraites de copies d'élèves de seconde. Nous exposerons les grandes étapes de notre travail, pour terminer par une analyse plus détaillée des causes d'erreur.

I - ETUDE DE QUELQUES EXEMPLES

1 - Premier exemple

AOB est un triangle rectangle en O ; M un point du segment [AB], distinct de A et B. On trace le symétrique N de M par rapport à (AO), et le symétrique P de M par rapport à (BO).

Montrer que O est le milieu de [NP].



Pour cet exercice, deux méthodes différentes de résolution contiennent chacune une erreur caractéristique.

Première rédaction

Comme N est le symétrique de M par rapport à (AO), alors (AO) est la médiatrice de [MN]. O, appartenant à (AO), est équidistant de M et N, donc $OM = ON$.

De même, comme P est le symétrique de M par rapport à (BO), alors (BO) est la médiatrice de [MP], et $OM = OP$.

Donc $ON = OP$ et O est le milieu de [NP].

Deuxième rédaction

M et P sont symétriques par rapport à (OB) donc (MP) est perpendiculaire à (OB). De plus, AOB est rectangle en O, donc (OB) est perpendiculaire à (AO). Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, elles sont parallèles ; donc $(AO) \parallel (MP)$.

Dans le triangle MNP, (AO) passe par le milieu de [MN], parce que M et N sont symétriques par rapport à (AO). Or, si une droite passe par le milieu d'un côté d'un triangle, et si elle est parallèle à un autre côté, alors elle coupe le troisième côté en son milieu. Donc (AO) coupe [NP] en son milieu O.

Dans les deux cas, la faute est évidente : ni l'égalité de longueurs " $ON = OP$ ", ni l'affirmation " (AO) passe par le milieu de $[NP]$ ", ne signifient que O est le milieu de $[NP]$. Il manque, pour conclure correctement, un pas de démonstration montrant que " O, N et P sont alignés".

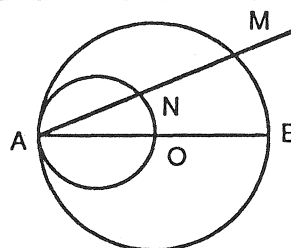
Il est important d'analyser ces erreurs car elles sont fréquentes : quand on donne cet exercice en seconde, les trois quarts des élèves proposent l'une des deux rédactions ci-dessus. Bien qu'à l'évidence, la rédaction ne parle pas d'alignement, rien ne permet de savoir si l'élève y a pensé ou non, s'il omet volontairement d'en parler, et pourquoi. La question se pose alors de savoir si les remarques du genre "tu as oublié de prouver l'alignement" ou "démonstration incomplète" que nous noterons sur les copies apportent une aide à l'élève. Peut-être sera-t-il surpris par nos exigences surtout si l'enseignant n'a pas sanctionné une autre rédaction dans laquelle un alignement a été oublié.

2 - Deuxième exemple

C est un cercle de diamètre $[AB]$, de centre O ,
et C' le cercle de diamètre $[AO]$.

M est un point de C distinct de A et B , et la
droite (AM) recoupe C' en N .

Montrer que N est le milieu de $[AM]$.



Voici une réponse d'élève (en début de seconde) :

- * *Considérons le cercle C' : d'après les hypothèses, on sait que N est un point du cercle C' , et que $[AO]$ est son diamètre. Or, dans un cercle, un point pris sur celui-ci et joignant les deux extrémités d'un diamètre de ce cercle forme un triangle rectangle. Donc $(AN) \perp (NO)$.*
- * *Considérons le triangle AMO : $[AO]$ et $[MO]$ sont deux rayons de C . Donc AMO est un triangle isocèle. Or dans un triangle isocèle, la hauteur est aussi médiatrice. Donc (NO) coupe $[AM]$ en son milieu N .*

Cet élève a parfaitement résolu le problème, et sa rédaction, malgré quelques maladroresses de style, est globalement satisfaisante.

Examinons cependant le texte de plus près. A deux reprises l'élève utilise l'alignement des points A, M et N sans qu'on puisse savoir s'il a pensé : "*je sais que A, M et N sont alignés parce que c'est indiqué dans l'énoncé*" plutôt que : "*je le vois sur la figure*".

- D'abord quand il écrit "*dans le triangle isocèle, la hauteur est aussi médiatrice. Donc (NO) ...*". Il considère bien que (NO) est la hauteur du triangle AMO . Or la conclusion précédente étant $(ON) \perp (AN)$ et non $(ON) \perp (AM)$; il s'est donc servi de l'alignement sans qu'aucun indice ne l'indique dans le texte.
- Il n'y a pas davantage d'indice dans la conclusion " *(NO) coupe (AM) en son milieu N* " qui utilise également cet alignement.

Bien sûr ceci n'a rien de choquant et il ne semble pas raisonnable de faire à l'élève une remarque à ce sujet, encore moins de le sanctionner. Cependant s'il y a bien pour lui une utilisation abusive de la figure, comprendra-t-il pourquoi ce texte est accepté sans problème alors qu'on lui refuse les rédactions précédentes.

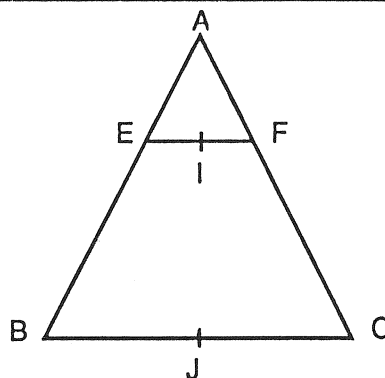
Un autre "oubli" courant chez les élèves va être mis en évidence sur un nouvel exemple.

3 - Troisième exemple

Dans un triangle ABC, on construit les points E et F tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$;
et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$.

Soit I le milieu de [EF] et J le milieu de [BC].

Montrer que A, I, J sont alignés.



Ce qui peut donner :

Comme $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$, alors, d'après la réciproque du théorème de Thalès, (EF) est parallèle à (BC).

Dans le triangle ABJ, on a donc $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et (EI) // (BJ) ;
donc, d'après le théorème de Thalès, on en déduit :

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AJ}$ et donc A, I et J sont alignés.

L'erreur est, ici, l'emploi du théorème de Thalès, sans en avoir contrôlé les hypothèses et donc l'utilisation implicite de l'alignement des points A, I et J, dans le but de démontrer.... cet alignement.

Comme dans les exemples précédents, le poids de la figure est en grande partie la cause de cette erreur que l'on retrouve fréquemment, même chez des "experts" en mathématiques.

Pour plusieurs élèves de seconde, la distinction entre "données de l'énoncé" et "conjectures faites sur la figure" est loin d'être établie ; l'erreur peut donc être due à un emploi abusif de la figure. Mais il se peut aussi que la cause de l'oubli soit tout autre, et que tout simplement, pour cet élève, l'alignement ne soit pas nécessaire dans la démonstration.

Ces trois exemples recouvrent assez bien les différents types d'erreurs que l'on rencontre dans les copies au sujet de l'alignement. Pour résumer :

- * une droite en remplace une autre.
- * le milieu est assimilé à l'équidistance.
- * difficulté d'emploi de l'expression "passe par le milieu de".
- * difficulté d'emploi du théorème de Thalès.

Ces erreurs ont d'ailleurs une caractéristique commune : l'alignement n'y est pas vraiment oublié, mais plutôt utilisé inconsciemment. Il nous a donc semblé important de consacrer du temps pour cerner un peu mieux les causes de ces erreurs et tenter d'y remédier.

II - UN PREMIER ESSAI

Nous avons tout d'abord pensé que l'oubli de l'alignement pouvait avoir trois causes :

- les élèves ne pensent pas ou ne voient pas la nécessité de le démontrer car ils font confiance à la figure.
- ils ne sont pas habitués à prouver des alignements, donc ils ne mobilisent pas rapidement les méthodes pour le faire.
- ils maîtrisent mal le raisonnement et oublient de vérifier les conditions d'emploi de certains théorèmes.

D'où l'idée d'une première séquence à l'aide de la fiche N° 1, dont l'objectif était d'apprendre aux élèves :

- * à se méfier d'une figure.
- * à prouver l'alignement par des méthodes variées.
- * à repérer, dans une démonstration, une faute du type "alignement non vérifié".

La fiche N° 2 a servi de test quelque temps plus tard et nous a permis de tirer un premier bilan.

FICHE N° 1

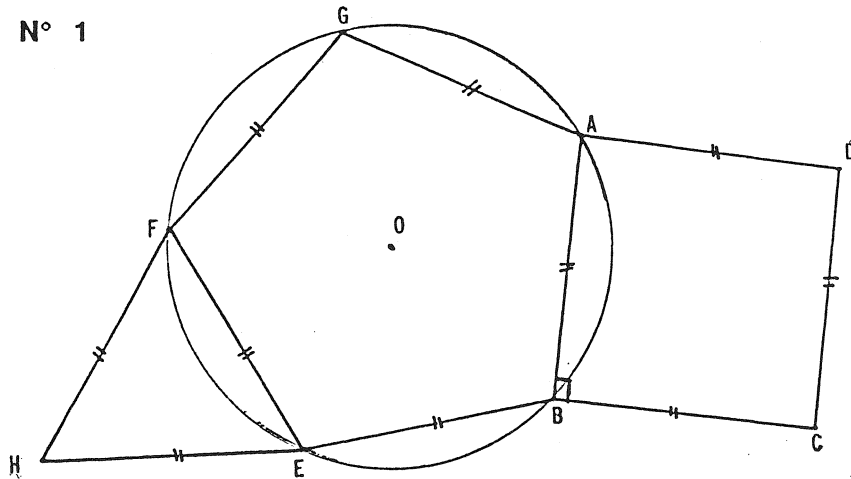
ALIGNEMENT DES POINTS

Exercice N° 1

ABCD est un carré ; ABEFG est un pentagone régulier, EHF est un triangle équilatéral.

H, E et C sont-ils alignés ?

Figure N° 1

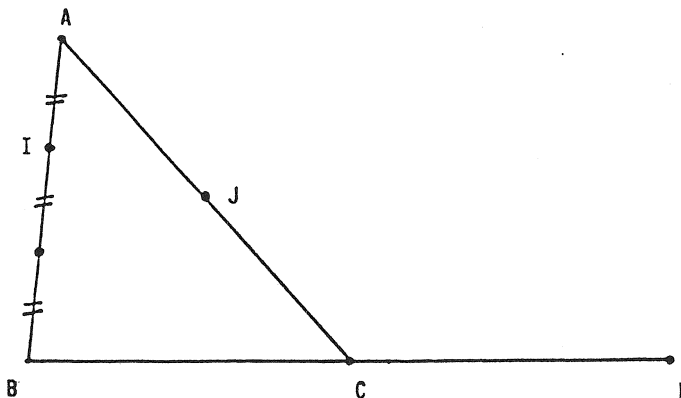


Exercice N° 2

Sur la figure N° 2, I est tel que $\vec{AI} = \frac{1}{3} \vec{AB}$, J est le milieu de [AC] et C celui de [BK].

I, J et K sont-ils alignés ?

Figure N° 2



- Nous te demandons ici de trouver différentes méthodes pour démontrer l'alignement de I, J et K.
- Tu dois rédiger au moins trois solutions avec des méthodes différentes pour la prochaine séance.

FICHE N° 1 (suite)**ALIGNEMENT DES POINTS****Exercice N° 3**

A, B, F sont trois points non alignés.

a) Construire les points E et C tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AF}$.

b) Démontrer que (EF) // (BC).

c) Soient I et A' les milieux de [EF] et [BC].

Démontrer que A, I et A' sont alignés.

Voici deux démonstrations des questions b) et c), ton travail est le suivant :

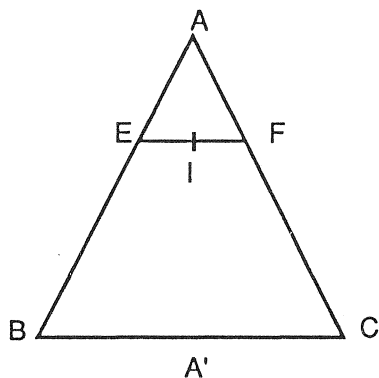
Pour la première démonstration il y a une faute dans les quatre dernières lignes, tu dois trouver l'endroit précis où elle se trouve, puis tu dois expliquer en quoi consiste la faute, sans chercher à la corriger ; évidemment tu mets ton explication par écrit.

Dis nous aussi ce que tu penses de la deuxième démonstration.

FICHE N° 1 (suite)

ALIGNEMENT DES POINTS

DEMONSTRATION N° 1



b) Dans le triangle ABC nous avons $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$ donc avec le théorème réciproque de Thalès nous pouvons dire que les droites (EF) et (BC) sont parallèles.

c) Dans le triangle ABA' nous savons donc d'après b) que (EI) est parallèle à (BC) (ou (A'B)). Donc avec le théorème de Thalès (direct), comme nous avons $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, nous avons aussi $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'}$.

Ceci prouve que $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AA'}$ sont colinéaires, donc que A, I et A' sont alignés.

DEMONSTRATION N° 2

b) D'après les hypothèses nous avons $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$; donc nous pouvons écrire que :

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \quad (\text{relation de Chasles})$$

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} \quad (\text{car } \overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AE})$$

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\text{Donc } \overrightarrow{EF} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \quad (\text{toujours avec la relation de Chasles})$$

$\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BC}$ étant colinéaires on a alors (EF) // (BC)

c) Comme I est le milieu de [EF] on a $\overrightarrow{EI} = 0,5 \overrightarrow{EF}$
et comme A' est le milieu de [BC], on a $\overrightarrow{BA'} = 0,5 \overrightarrow{BC}$

$$\begin{aligned} \text{On a donc : } \overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + 0,5 \overrightarrow{EF} \\ &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + 0,5 \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{BC} \right) \\ &= \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + 0,5 \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{3} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA'}) = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'} \end{aligned}$$

Ce qui établit que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AA'}$, ces vecteurs étant colinéaires, nous avons donc démontré que les points A, I et A' sont alignés.

FICHE N° 2

TROUVER LA FAILLE DANS LE RAISONNEMENT

Instructions

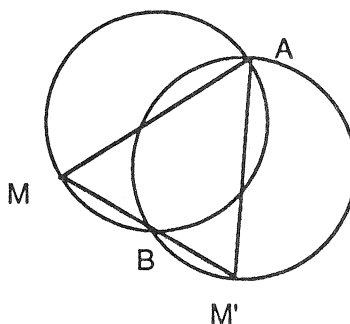
Voici un exercice et deux démonstrations fausses de cet exercice. Tu dois localiser l'endroit précis où est commise la faute, dire pourquoi il y a faute sans chercher à donner une rédaction correcte de l'exercice.

Données

Les deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même rayon, se coupent en A et B ; [AM] et [AM'] sont des diamètres de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{C}'$.

Question

Montrer que B est le milieu de [MM'].



DEMONSTRATION N° 1

- Le triangle ABM est inscrit dans un demi-cercle de diamètre [AM] donc il est rectangle en B, (AB) est donc la hauteur issue de A dans le triangle AMM'.
- De plus le triangle AMM' est isocèle de sommet A (les diamètres [AM] et [AM'] ayant même longueur).
- Le triangle étant isocèle, en A, la hauteur issue de A ici (AB) est aussi la médiatrice de [MM'].
- La médiatrice d'un segment coupe celui-ci en son milieu d'où B est le milieu de [MM'].

DEMONSTRATION N° 2

- Les triangles ABM et ABM' étant inscrits dans des demi-cercles de diamètres [AM] et [AM'] sont rectangles en B.

Avec le théorème de Pythagore dans chacun de ces triangles :

$$\begin{cases} AM'^2 = BM'^2 + AB^2 \\ AM^2 = BM^2 + AB^2 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} BM'^2 = AM'^2 - AB^2 \\ BM^2 = AM^2 - AB^2 \end{cases} \text{ mais } \begin{cases} AM'^2 = (2r)^2 \\ AM^2 = (2r)^2 \end{cases} \text{ (r rayon des cercles)}$$

$$\text{d'où } BM'^2 = 4r^2 - AB^2 \text{ et } BM^2 = 4r^2 - AB^2$$

On en déduit donc que $BM'^2 = BM^2$ et que $\boxed{BM = BM'}$

Cette dernière égalité nous montre alors que B est le milieu de [MM'].

MODE D'EMPLOI DES FICHES N° 1 et N° 2**MODE D'EMPLOI FICHE N° 1****Exercice 1**

- Objectifs :**
- Apprendre à se méfier d'une figure.
 - Trouver une méthode pour prouver l'alignement ou non de trois points.
- Déroulement :**
- Liberté de recherche (10 min).
 - Aides pour démarrer : (selon les demandes des élèves).
 - * Trouver la mesure des angles des triangles AOB ; BOC ; ... ; GOA.
 - * Trouver la mesure de $\widehat{HEC}$.

Exercice 2

- Objectif :**
- Trouver un outil pour prouver l'alignement de trois points.
- Déroulement :**
- Liberté de recherche (10 min).
 - Recherche de méthodes (débat avec les élèves pour qu'ils aient des pistes pour travailler).
 - * Parallélisme de (IJ) et (IK) en utilisant le milieu de [BI].
 - * Avec vecteurs $\vec{IJ}$ et $\vec{IK}$ en fonction de $\vec{BC}$ et $\vec{BA}$).
 - * Par l'analytique (repère (B, $\vec{BC}$, $\vec{BA}$)).
 - * Avec le théorème de Thalès (délicat à rédiger sans vecteur).
 - Les élèves rédigent leurs solutions par au moins trois méthodes sur feuille à la maison.
 - Nous essayons de relever des démonstrations avec des fautes caractéristiques, que nous proposons aux élèves.
 - Ceux-ci doivent les trouver et corriger en débat avec la classe entière.

MODE D'EMPLOI DES FICHES N° 1 et N° 2 (suite)**MODE D'EMPLOI FICHE N° 1 (suite)****Exercice 3**

- Objectifs :**
- Analyser un raisonnement.
 - Déceler une erreur de raisonnement.
 - Etre capable de donner la cause de cette erreur.

- Déroulement :**
- A faire après la correction de l'exercice N° 2.
 - Les élèves répondent individuellement sur leur feuille (20 min maximum).
 - On corrigera l'exercice, la séance suivante, avant le test final.

Démonstration 1

Ici l'erreur apparaît lorsque le triangle ABA' est utilisé ; on admet implicitement $I \in (AA')$ lorsque nous disons que nous appliquons le théorème de Thalès.

Démonstration 2

Elle prouve clairement l'alignement de A, A', I .

MODE D'EMPLOI FICHE N° 2

Cette fiche est le test final, les élèves répondent individuellement sur la feuille (durée du test : 20 min maximum).

Bilan de ce premier essai

Pour l'exercice 1 de la fiche N° 1, les élèves pensent assez rapidement à utiliser les angles, et le calcul présente peu de difficultés. Devant le résultat -un angle de 177° - beaucoup sont surpris. Certains recommencent leurs calculs, jusqu'au moment où l'un d'eux pense à relire attentivement le texte pour constater que la question est : "les points sont-ils alignés ?". Plus de problème alors, sauf pour quelques-uns qui concluent : " $177 \approx 180$, donc les points sont alignés". Cette réponse met en évidence une mauvaise compréhension de la notion VRAI-FAUX en mathématiques ; pour ces élèves, l'angle obtenu est vraiment trop proche de 180° pour conclure au non-alignement.

Dans l'exercice 2 de la fiche N° 1, nous avons revu plusieurs méthodes et nous avons profité de cette occasion pour décomposer devant les élèves des erreurs typiques, par exemple l'emploi du théorème de Thalès alors qu'on ne sait pas que les points sont alignés, erreur que l'on retrouve justement dans l'exercice 3 de la fiche N° 1. On pouvait dès lors s'attendre à de bons résultats pour cet exercice 3, ce qui n'a pas vraiment été le cas. Les résultats sont très variables d'une classe à l'autre (de 5% à 65%), suivant le temps déjà consacré au calcul vectoriel et au théorème de Thalès. Presque tous les élèves reconnaissent que la démonstration 2 est correcte (en corrigeant parfois la rédaction). Par contre, beaucoup ont du mal à localiser l'erreur dans la démonstration 1 et surtout à expliquer clairement en quoi elle consiste. Ceci prouve bien qu'il ne suffit pas d'avoir sous les yeux une bonne solution pour comprendre en quoi une autre est mauvaise.

Le test final : "*Trouver la faille dans le raisonnement*" devait permettre de contrôler chez les élèves une certaine "sensibilisation à l'alignement". Nous voulions en particulier tester les progrès dans la capacité à repérer une erreur du type "alignement utilisé sans avoir été prouvé". On constate à ce sujet assez peu de changement. Les élèves qui avaient déjà clairement repéré l'erreur de l'exercice 3 réussissent bien le test, à part quelques exceptions. Mais il y a peu de progrès pour les autres.

Ce test permet de faire une autre constatation intéressante : l'erreur de la démonstration 1 du test ("une droite en remplace une autre") est repérée à 65%, alors que l'erreur de la démonstration 2 ("milieu assimilé à équidistance") est repérée à 43%. Plus d'un élève sur deux pense que B est milieu de [MM'] dès que $BM = BM'$! Cette différence sensible met en évidence une difficulté propre à l'égalité de longueurs : plusieurs élèves ont bien mis en évidence dans la démonstration 1 que l'alignement de M, B, M' n'est pas une donnée, et cependant, ils ne voient aucune erreur dans la démonstration 2. Nous analyserons plus longuement cette difficulté dans le paragraphe IV.

En y regardant mieux, l'absence de progrès entre l'exercice 3 de la fiche N° 1 et le test n'est pas étonnante, car les erreurs introduites dans ces différents exercices ne sont pas du même type, et n'ont donc pas les mêmes causes. Un apprentissage spécifique à chacune est peut-être nécessaire.

Malgré ses nombreuses imperfections, cette fiche a rempli en partie ses objectifs :

- les exercices 1 et 2 permettent de revoir différentes méthodes de démonstrations d'alignement.
- l'exercice 3, s'il n'est pas efficace pour apprendre aux élèves à déceler une erreur, permet par contre au professeur de repérer les élèves en difficulté sur ce sujet, et de les regrouper pour un travail spécifique. C'est aussi le rôle du test final. Reste à élaborer cet apprentissage ; c'est ce que nous tentons de faire dans ce qui suit.

III - DEUXIEME ESSAI

A plusieurs reprises, nous avons proposé aux élèves des exercices faisant intervenir milieux et alignement, nous avons décortiqué devant eux les fautes de raisonnement, et il s'en trouve toujours pour refaire la faute au contrôle suivant. Le problème est bien là :

- comment convaincre un élève que sa démonstration contient une erreur ?
- comment l'amener à réaliser quelle est l'erreur ?

Puisque décortiquer l'erreur ne suffit pas, nous avons pensé que l'élève admettra que sa solution est fausse si cette solution le conduit à une contradiction flagrante.

Voici donc la séquence que nous avons mise au point et testée.

1 - Première heure

(En module ou en travaux dirigés)

ELABORATION D'UN TEXTE D'EXERCICE PAR LES ELEVES

A partir d'une solution d'exercice, on demande aux élèves de retrouver l'énoncé, énoncé qui va servir ensuite pour toute la séquence.

On distribue aux élèves la fiche "*Ecrire l'énoncé*"

Déroulement de la séance :

- 10 minutes : travail individuel ; les élèves sont bien dispersés dans la classe.
- 10 minutes : par groupes de 3 ou 4, les élèves comparent leur texte et se mettent d'accord sur un texte commun, qu'ils recopient sur un transparent ou une affiche.
- 15 minutes : chaque groupe, à tour de rôle, délègue un élève pour présenter son texte. Toutes les productions sont ainsi critiquées, pour aboutir à un texte convenant à tous.
- 20 minutes : les élèves sont de nouveau dispersés, et on leur demande de résoudre maintenant l'exercice par une méthode non vectorielle, et de rédiger leur solution sur une feuille à rendre au cours suivant.

COMMENTAIRES SUR CETTE PREMIERE SEANCE

La plupart des productions de groupes sont satisfaisantes. On y relève surtout des maladresses de style, ou des erreurs de notations (droite pour segment,...). Cependant, pour un ou deux groupes, on trouve des erreurs de fond, comme : "..... la droite (AE) coupe [BC] en son milieu I.....". Ici, le milieu de [BC] est bien perçu comme une donnée, mais l'alignement A, I, E "vu sur la figure" prend aussi force de donnée.

Les erreurs sont vite reconnues par ceux qui les ont commises, et l'accord se fait facilement sur le texte final.

Pour la nouvelle méthode de résolution, plusieurs prouvent que ABEC est un parallélogramme (ce qui est une méthode vectorielle déguisée). D'autres pensent à prouver que $AI + IE = AE$. Enfin beaucoup proposent une solution avec "la droite des milieux" dans ADE, avec, la plupart du temps, une erreur voisine de celle rencontrée dans la copie suivante :

Démonstration : ABCD est un carré, donc [AD] est parallèle à [BC]. On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de [DE]. Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté [AD] et elle passe par le milieu d'un autre côté [DE], donc elle coupe le troisième côté [AE] en son milieu.
Donc, I est le milieu de [AE]

C'est sur cette erreur que nous allons travailler dans la suite. Si donc aucune copie ne contient ce type de faute, l'activité peut se terminer là.

2 - Deuxième heure

- 1 - Les élèves reçoivent la fiche "*La démonstration litigieuse*" et y travaillent individuellement (environ 5 minutes). Puis ils se remettent en groupes.
- 2 - Le professeur demande alors à quelques élèves d'énoncer leurs constatations : tous voient que la donnée "I milieu de [BC]" ne sert pas. Certains font remarquer qu'on se sert de " $I \in (BC)$ " pour affirmer que "(CI) est parallèle à (AD)", mais ils sont d'accord que la donnée "milieu" ne sert pas.
- 3 - Le professeur écrit alors (au tableau ou sur transparent) :

La démonstration n'utilise pas la donnée "I est milieu de [BC]". On peut donc penser que cette démonstration reste vraie même si on change la place de I sur [BC].

Puis il demande oralement "*êtes-vous d'accord ?*". Il projette alors un transparent avec la figure de l'exercice où I est situé au tiers de [BC], et dit : "*on vient de prouver que ce point (en montrant I) est milieu de [AE].*"

Il écrit alors au tableau : "*chaque groupe explique l'erreur en quelques phrases*".

ECRIRE L'ENONCE

Vous trouvez sur une feuille de papier le texte suivant :

En utilisant la relation de Chasles, nous pouvons écrire :

$$\vec{IA} + \vec{IE} = \vec{IB} + \vec{BA} + \vec{IC} + \vec{CE} \quad (1)$$

Or le point I est le milieu du segment [BC], donc :

$$\vec{IB} + \vec{IC} = \vec{O} \quad (2)$$

De plus, le point E est le symétrique de D par rapport à C, donc

$$\vec{CE} = -\vec{CD} \quad (3)$$

Compte tenu de (2) et (3), l'égalité (1) devient :

$$\vec{IA} + \vec{IE} = \vec{BA} - \vec{CD}$$

Or le quadrilatère ABCD est un carré, donc $\vec{BA} = \vec{CD}$, et nous obtenons finalement $\vec{IA} + \vec{IE} = \vec{O}$ ce qui prouve que I est le milieu du segment [AE].

Quel énoncé d'exercice vous paraît correspondre à cette rédaction de solution ?

LA DEMONSTRATION LITIGIEUSE

Dans cet encadré, voici l'énoncé de l'exercice étudié la dernière fois, et la démonstration proposée par l'un de vous.

Enoncé

ABCD est un carré, I est le milieu de [BC] et E est le symétrique de D par rapport à C.

Montrer que I est le milieu de [AE].

Démonstration

ABCD est un carré, alors [AD] est parallèle à [BC]. On sait que E est le symétrique de D par rapport à C, donc C est le milieu de [DE].

Dans le triangle ADE, la droite (CI) est parallèle à un côté [AD] et elle passe par le milieu d'un autre côté [DE], donc elle coupe le troisième côté [AE] en son milieu.

Donc, I est le milieu de [AE].

Voici le travail que tu dois faire :

- 1 - Tu soulignes d'une couleur différente chaque donnée de l'énoncé.
- 2 - En gardant la couleur choisie pour chaque donnée, tu soulignes, dans la démonstration, l'endroit où cette donnée est utilisée.
- 3 - Que constates-tu ?

COMMENTAIRES

Le but était de créer une situation de conflit cognitif pour obliger les élèves à réagir ; de ce point de vue l'objectif est atteint. Plusieurs sont vraiment déconcertés.

La formulation volontairement ouverte de la dernière question permet d'observer la démarche des élèves : où vont-ils rechercher l'erreur ?

Les attitudes sont extrêmement variées :

- * certains sont en plein désarroi et regardent aussi bien l'énoncé que la démonstration.
- * certains n'ont pas reconnu le théorème des milieux et passent un long moment à comprendre cette phrase.
- * la plupart ont réalisé que l'erreur est due au non-emploi de la donnée "I milieu de [BC]" et essaient de l'intercaler un peu partout, sans se demander d'abord où elle est utile.
- * plusieurs finissent pas se rendre compte que l'erreur se situe à la fin, mais sont incapables d'en formuler clairement la cause.
- * certains essaient de modifier la rédaction, en utilisant un autre "théorème" : dans le triangle ADE, si C est le milieu de [DE], si (CI) est parallèle à (AD) et si $CI = \frac{AD}{2}$, I est le milieu de [AE].
- * quelques groupes finissent quand même par énoncer :
 "(BI) passe par le milieu de [AE] ne veut pas dire que I est le milieu de [AE]".
 "On ne sait pas que I est sur (AE)".

Cette différence de comportement vient bien sûr de la différence de compréhension de la phrase : "la démonstration reste vraie si on change la place de I sur [BC]". Pour être d'accord avec cette phrase, il faut déjà maîtriser la relation entre la présence d'une donnée dans l'énoncé et l'utilisation de cette donnée dans la démonstration : une donnée, présente dans l'énoncé mais non utilisée, peut être supprimée sans changer la validité de la démonstration. Les élèves qui ont compris cela vont bien saisir la contradiction : si la donnée "I milieu de [BC]" ne sert pas, on peut la supprimer, et la démonstration, encore valable, prouve que tout point de [BC] est milieu de [AE] ... ce qui est absurde. Donc cette donnée doit servir.

Il est certain qu'aucun élève n'a fait explicitement ce raisonnement avant de répondre oui ou non à la question "Etes-vous d'accord ?" Certains de ceux qui ont répondu "oui" l'ont fait implicitement. Et ces élèves vont sans doute chercher l'erreur dans la démonstration.

Plusieurs répondent : non. Mais certains "non" signifient :

"c'est impossible que I soit aligné avec A et E si I n'est pas milieu de [BC]". Autrement dit, ils ne se prononcent pas sur la validité d'une démonstration n'utilisant pas certaine donnée lorsqu'on supprime cette donnée du texte. Ils ne se prononcent que sur la cohérence entre la conclusion de la démonstration et la réalité de la figure ainsi obtenue. Ce "non" signifie : "si on supprime cette donnée, I n'est pas milieu de [AE]" ; ces élèves vont aussi chercher à intercaler dans la démonstration la donnée "oubliée".

D'autres "non" signifient : "la démonstration n'est plus valable si on enlève une donnée ; on n'a pas le droit de changer le texte". Pour eux, c'est le prof qui fait une erreur en modifiant le texte. Pour ces élèves, il n'y a pas de contradiction apparente et cette activité ne les a sans doute pas persuadés de l'existence d'une faute de démonstration.

Les observations montrent aussi que les élèves sont "dressés" à utiliser toutes les données : "si on nous la donne, c'est que ça sert". Pour eux, la démonstration est fausse, simplement parce qu'elle n'utilise pas toutes les données.

On peut penser que la majorité des élèves a été convaincue de l'existence d'une erreur, mais cette fiche ne semble pas encore le bon moyen de leur apprendre à déceler une erreur. En fait, la tâche était ici assez difficile, pour plusieurs raisons :

- l'erreur se situe tout à la fin, et elle découle de l'emploi d'un théorème délicat (difficulté que nous reprendrons dans le paragraphe suivant).
- tout ce qui est écrit est juste ; il faut seulement rajouter une étape (l'alignement de A, I et E).
- cet alignement n'est pas facile à prouver.

IV - ANALYSE DES ERREURS ET DES DIFFICULTES DES ELEVES

Sans avoir atteint le but de notre recherche : "pourquoi l'alignement est-il si souvent oublié ?", on voit plusieurs causes, non spécifiques d'ailleurs aux problèmes d'alignement, qui concourent à créer la difficulté :

- le rôle de la figure : pour certains élèves, elle sert d'argument ; ils "constatent" un résultat, donc ce résultat est vrai.
- d'autres utilisent la conclusion comme donnée, avec ce raisonnement : puisque le prof demande de démontrer tel résultat, ce résultat est certainement vrai, donc on peut l'utiliser.

Dans ces deux cas bien sûr, c'est le rôle même de la démonstration qui n'est pas compris. Cette difficulté peut sans doute être surmontée partiellement en posant aux élèves des questions plus ouvertes, dont la réponse n'est pas évidente, et qui motivent la démonstration.

Il reste enfin deux sources de difficultés que nous allons évoquer plus longuement :

- la notion de milieu.
- l'emploi de certains théorèmes.

1 - Le milieu, notion complexe

En quoi la notion de milieu est-elle plus complexe qu'il n'y paraît au premier abord ?

Examinons deux extraits de copies d'élèves pour le problème suivant :

ABC est un triangle isocèle de sommet A, I est le milieu de [AC], D est le symétrique de B par rapport à I. Montrer que $CA = CD$.

Première copie

Je vais prouver que ADCB est un parallélogramme.

On sait que D est le symétrique de B par rapport à I, donc $IB = ID$. De plus, I est le milieu de [AC] ; [AC] et [BD] se coupant en leur milieu I, ADCB est donc un parallélogramme.

Deuxième copie

Montrons que ADCB est un parallélogramme.

On sait que $AI = IC$ car I est milieu de [AC].

On sait que $BI = ID$ car D est symétrique de B par rapport à I.

Or on sait qu'un quadrilatère qui a ses diagonales qui se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc ADCB est un parallélogramme.

Dans ces démonstrations, c'est bien la donnée "milieu" qui est utile deux fois, mais les élèves éprouvent le besoin de la transformer en "longueurs égales", pour finalement utiliser un théorème nécessitant des milieux. Comme si l'information " $IB = ID$ " était pour eux plus précise que "I est milieu de [BD]".

Il semble que pour les élèves, du moins pendant un certain temps, la phrase, "I est milieu de [BD]" comporte une information essentielle : " $IB = ID$ " et une information secondaire : "les points I, B, D sont alignés". Tout se passe comme si la question "montrer que I est milieu de [BD]" faisait disparaître le reste du plan : puisque la question parle du segment [BD], on a changé d'univers ; on travaille maintenant sur la droite ou le segment [BD] et là, il suffit de prouver une égalité de longueurs.

Voici, à ce propos, un extrait de dialogue avec une classe, suite à un exercice où il s'agissait de montrer que A est le milieu de [EB].

Prof *Est-ce que le texte dit que les points sont alignés ?*

Elève *Non.*

Prof *Est-ce qu'il fallait le démontrer ?*

Elève *Non. Puisque vous demandez de prouver que A est milieu de [EB], c'est qu'il est sur [EB]. Vous n'auriez quand même pas demandé ça pour un autre point !*

Cette réponse s'explique sans doute en partie par le passé des élèves. Les premières recherches qui leur sont proposées en collège sont souvent des situations où l'alignement fait partie des données, et il ne reste qu'à prouver l'égalité de longueurs à l'aide des nouveaux outils qu'ils viennent d'acquérir (Pythagore ...).

Il est vrai aussi qu'on n'énonce jamais de théorème du style : "Un point I est le milieu du segment [AB] si A, I, B sont alignés et si $IA = IB$."

Notre première tâche est donc de repérer les élèves qui fonctionnent sur le modèle "milieu = équidistance". Ils sont vite d'accord sur le fait que l'alignement n'est pas dans les données (si c'est le cas). Il est alors très utile de les faire s'exprimer, oralement ou par écrit, en posant la question : "Pourquoi n'as-tu pas démontré l'alignement ?"

La discussion qui en découle permettra de préciser le contrat :

- l'égalité de longueurs caractérise la médiatrice et non le milieu.
- tout ce qui n'est pas dit dans les données doit être démontré.
- parfois, lorsque l'alignement fait partie des données, on n'en parle pas dans la démonstration, mais c'est une négligence.

Mais il est certain que ce modèle est fortement enraciné et que la faute reviendra encore. Seul un travail de longue haleine permettra de la supprimer.

2 - Emploi d'un théorème délicat

Certains théorèmes sont l'occasion de plus de fautes que d'autres. C'est le cas par exemple du théorème des milieux. Pour comprendre les raisons de ce phénomène nous avons fait une enquête auprès des enseignants sur les énoncés qu'ils utilisent en classe, étudié des copies et des démarches d'élèves et analysé le contenu mathématique du théorème.

Voici un énoncé de ce théorème :

Théorème

Dans un triangle ABC, si I est le milieu de [AB] et J le milieu de [AC], la droite (IJ) est parallèle à (BC), et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Ce sont 6 propositions qui sont articulées dans ce théorème :

I sur le segment [AB]

J sur le segment [AC]

AI = IB

AJ = JC

(IJ) // (BC)

$IJ = \frac{BC}{2}$

Avec 6 propositions il est naturel de rencontrer plusieurs réciproques. Il y en a en fait trois, dont deux s'expriment plus naturellement en termes de vecteurs à cause de problème d'orientation. Voici un énoncé simple de chacune d'elles :

Réciproque 1 : Si I milieu de [AB], (IJ) // (BC) et J sur [AC] alors J milieu de [AC] et $IJ = \frac{BC}{2}$.

Réciproque 2 : Si I milieu de [AB] et $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ alors J milieu de [AC].

Réciproque 3 : Si I sur [AB] et J sur [AC], si $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ alors I et J sont les milieux de [AB] et [AC].

Souvent la première réciproque est considérée comme étant le théorème. La troisième réciproque est refusée par la plupart des enseignants, alors qu'elle est énoncée par quelques uns.

Les énoncés des enseignants et des élèves sont en fait très divers. Pour chacun de ces théorèmes la conclusion comporte deux des six propositions énoncées ci-dessus.

On rencontre naturellement des énoncés dont la conclusion ne comporte qu'une des propositions. Par exemple voici un énoncé dérivé du théorème :

Dans le triangle ABC, si I milieu de [AB] et J milieu de [AC] , (IJ) est parallèle à (BC).

Les énoncés peuvent ne comporter aucun nom de point. Par exemple :

Pour le théorème :

La droite qui joint les milieux de deux cotés d'un triangle est parallèle au troisième côté.

Ou encore :

Le segment qui joint les milieux de deux côtés d'un triangle a pour longueur la moitié du troisième côté.

Pour la réciproque 1 :

La droite qui passe par le milieu d'un côté et est parallèle à un autre côté passe par le milieu du troisième côté.

Les énoncés peuvent être exprimés en termes de vecteurs, partiellement ou complètement, comme le montrent ces deux énoncés du théorème :

Dans le triangle ABC, si I milieu de [AB] et J milieu de [AC], $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

Dans le triangle ABC, si $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

A l'inverse, certains enseignants se permettent d'énoncer la réciproque 2 sans vecteur et sans précision sur les problèmes de "sens".

Si I milieu de [AB], si (IJ) // (BC) et $IJ = \frac{BC}{2}$ alors J milieu de [AC]

Dans la réciproque 1 on rencontre trois formulations assez différentes :

En termes de projection :

Dans la projection de (AB) sur (AC) parallèlement à (BC), le milieu I de [AB] se projette sur le milieu J de [AC].

En termes d'intersection de droites :

Dans un triangle ABC, si I est le milieu de [AB], la parallèle à (BC) passant par I coupe [AC] en son milieu.

En termes de points alignés :

Dans un triangle ABC, si I est le milieu de [AB], si J est aligné avec A et C, et (IJ) // (BC), alors J est le milieu de [AC].

Un énoncé un peu inattendu pour la réciproque 3, le point A y étant défini après coup :

Si $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$, si A est le point d'intersection de (IB) et de (JC),
I et J sont les milieux de [AB] et [AC].

On trouve un énoncé faux qui est proche de ce dernier :

Dans un triangle ABC, si $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$, I et J sont les milieux de [AB] et de [AC].

Des variations plus mineures de langage apparaissent : l'allusion au triangle peut disparaître, au lieu de parler de "parallèle à un côté" on dit "parallèle au support d'un côté", au lieu de "qui passe par" on rencontre "menée par", au lieu de "J est sur [AB]" on écrit aussi "J est sur (AB)". Dans les énoncés en forme de "si alors", le "alors" peut disparaître. Les noms des points peuvent changer, et aussi la disposition de la figure, quand il y en a.

3 - Les difficultés des élèves

La première difficulté des élèves devant un théorème compliqué est de bien comprendre sa structure, et donc son rôle : quelles en sont les données, quelle est la conclusion, autrement dit que permet-il de prouver ? Il semble qu'en entrant en seconde la plupart des élèves ont bien compris qu'un théorème est un outil permettant d'aboutir à une conclusion, et l'emploient à bon escient dans le cas de théorèmes simples (voir "rédigez en liberté"). Mais s'ils maîtrisent mal son contenu, ils risquent fort de mal l'employer. Ainsi le théorème des milieux et ses réciproques permettent de prouver soit un parallélisme, soit une égalité de longueurs, soit un milieu, mais pas un alignement qui figure toujours dans les hypothèses. L'existence de plusieurs réciproques raisonnables crée une certaine confusion. Le nombre important d'hypothèses est également une difficulté, car il est plus difficile de penser à vérifier toutes les hypothèses avant d'appliquer le théorème dans une démonstration. La variété des énoncés, leur complexité linguistique sont aussi une grande difficulté. Par exemple, l'expression "coupe le troisième côté en son milieu" ne peut être considérée du point de vue du langage comme équivalente à "si J est sur $[AC]$, J est le milieu de $[AC]$ " car la séparation hypothèse-conclusion est moins nette dans le premier cas. On observe dans ce cas l'oubli de vérifier que J est sur $[AC]$ pour conclure que J est le milieu de $[AC]$.

Un phénomène identique peut être observé pour un théorème plus simple et très familier pour les élèves : "les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu". Celui-ci peut aussi s'énoncer : "Dans un parallélogramme le milieu d'une diagonale est aussi le milieu de l'autre". Beaucoup d'enseignants considèrent en première analyse que ces deux énoncés sont équivalents. Pourtant ils ne comportent pas en fait les mêmes hypothèses ni la même conclusion ni les mêmes quantificateurs. Le texte de démonstration : "On sait que $ABCD$ est un parallélogramme ; comme I est le milieu de $[AC]$, c'est aussi le milieu de $[BD]$ " correspond au deuxième énoncé, le premier conduisant en principe à une démonstration en deux pas : "On sait que $ABCD$ est un parallélogramme, donc $[AC]$ et $[BD]$ ont même milieu. Comme I est le milieu de $[AC]$, c'est aussi le milieu de $[BD]$ ". Bien sûr peu d'enseignants vont s'intéresser à cette nuance. Il n'empêche qu'elle peut contribuer à mettre un flou dans l'esprit de certains élèves sur le point essentiel : "quand on veut utiliser un théorème dans un pas de démonstration, on s'assure que les hypothèses sont dans les données ou déjà démontrées, puis on énonce la conclusion".

Notons enfin que les figures prototypes associées à ce théorème ont en général deux parallèles horizontales et il n'est pas étonnant que les élèves ne reconnaissent pas la situation quand les parallèles sont dans une autre direction. Comment aider les élèves à s'y retrouver ? Certains énoncés, pourtant corrects, ne font pas partie de la "panoplie" admise par l'ensemble des collègues, et il faut donc prévenir les élèves du danger d'inventer un énoncé en se fiant à leur intuition.

Par contre, il ne paraît pas souhaitable d'obliger les élèves à adopter tous la même formulation pour un théorème donné. Au contraire, un travail effectif (analyse, classement) à partir d'énoncés proposés par les élèves eux-mêmes nous semblent plus pertinent. On constate à ce sujet que certains élèves ont besoin de l'appui d'un énoncé appris par coeur. Même si pour certains d'entre eux cela s'avère très efficace, il est nécessaire de ne pas renoncer à travailler avec eux sur d'autres formulations. D'une part cela permettra aux meilleurs de s'adapter plus facilement aux diverses formulations qu'ils rencontrent dans leur scolarité, d'autre part, pour les plus en difficulté, ce sera une occasion de réfléchir au contenu mathématique du théorème.

En conclusion, il apparaît que l'oubli de l'alignement dans une rédaction recouvre en fait plusieurs situations distinctes :

- * le "contrat" est mal compris : l'élève considère que l'alignement est admis implicitement et qu'il suffit de démontrer une égalité de longueurs ; ou encore que l'observation de la figure remplace une démonstration.
- * l'élève a du mal à analyser la formulation d'un théorème compliqué et à y repérer les hypothèses.
- * l'élève se laisse piéger par la figure et oublie de vérifier une hypothèse.

Ces quelques résultats ne prétendent pas faire le tour de la question, mais espèrent fournir des pistes permettant de mieux comprendre les comportements des élèves dans bon nombre de situations.

CHAPITRE 4

LA DIVERSITE DES POINTS DE VUE

La démonstration est sans doute le domaine des mathématiques où la diversité des points de vue constitue le plus grand obstacle à l'apprentissage. Nous avons déjà vu dans le chapitre 1 que même ceux des enseignants étaient très variés. Cette diversité résulte en particulier des contraintes auxquelles les enseignants se sentent soumis et qu'ils imposent, en retour, à leurs élèves. Nous en parlerons dans le premier paragraphe.

Comment les élèves vont-ils pouvoir se construire, dans ces conditions une idée solide et cohérente de ce qu'est la démonstration ? Toutes nos observations montrent bien que ce n'est pas parce que l'élève de seconde ne sait pas raisonner qu'il a des difficultés en mathématiques, mais plutôt parce qu'il ne comprend pas la forme de la rationalité des mathématiques. C'est pourquoi le travail essentiel est de la lui faire mieux comprendre. Un discours normatif est ici de peu d'efficacité. Si l'on veut éviter les discussions superficielles, il nous paraît indispensable de se donner des moyens d'analyse. C'est l'objet du paragraphe 2. Le dernier paragraphe essaiera de les utiliser pour comprendre les difficultés et les progrès des élèves.

I - DES CONTRAINTES POUR LES ENSEIGNANTS ET POUR LES ELEVES

La démonstration enseignée aujourd'hui en seconde se veut le reflet de la démarche du mathématicien moderne. En fait elle en diffère sensiblement. D'abord la règle qui veut que seuls les théorèmes déjà démontrés explicitement puissent être utilisés dans une démonstration est rarement respectée par le mathématicien qui s'autorise à utiliser tous les résultats que la communauté mathématique, à laquelle il s'adresse, est prête à accepter comme valide. Cela lui évite en particulier de démontrer des évidences. D'autre part, il n'est pas rare de rencontrer une grande liberté d'écriture : la démonstration est parsemée de considérations heuristiques, méthodologiques, historiques, les notations varient avec les auteurs, enfin beaucoup de pas de démonstrations sont à peine esquissés, beaucoup sont sous-entendus.

Cette différence est inévitable. Pour faire apparaître clairement aux yeux des élèves les particularités des textes démonstratifs, il est nécessaire de ne leur présenter que des textes dont les structures soient très apparentes. Cependant cela va entraîner des exigences vis-à-vis des élèves qui relèvent plus de contraintes sociales que de raisons réellement mathématiques. Ces exigences peuvent être institutionnelles, mais elles ne sont trop souvent que les lubies nuisibles de quelques-uns (enseignants, inspecteurs, correcteurs d'examens). Voici quelques exemples dont nous avons discuté :

1 - Les énoncés de théorèmes

Comme nous le notions plus haut, un élève rédigeant une démonstration en seconde n'a pas le droit d'utiliser un théorème qui n'a pas été explicitement énoncé pendant le cours. On comprend aisément la nécessité de cette contrainte, mais elle engendre deux types de difficultés.

D'une part les enseignants ne respectent pas toujours ce principe. Par exemple dans un problème de géométrie dans l'espace certains résultats seront admis sans démonstration, comme des résultats connus, alors que, rencontrés dans un problème plan, ils auraient fait l'objet d'une longue démonstration. Ainsi devant un cube sur lequel on a tracé la médiane d'une face on admettra que la longueur de cette médiane est égale au côté, alors que, dans la figure plane composée d'un carré et de sa médiane, le même résultat fera l'objet d'une démonstration (par exemple avec les vecteurs). En fait la rigueur vis-à-vis de ce principe évolue dans la scolarité. Par exemple en quatrième on fera une longue démonstration pour montrer qu'un trapèze isocèle admet un axe de symétrie, alors qu'en terminale on l'admettra sans problème. Que faire alors en seconde ?

D'autre part, certains énoncés de théorèmes sont rejetés par les uns et acceptés par les autres. Par exemple la réciproque du théorème des milieux qui s'énonce :

*"si $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \vec{BC}$ et si I est sur $[AB]$ et J sur $[AC]$,
alors I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ "*

est souvent proposée par les élèves, alors qu'elle est considérée comme hors programme. Cependant nous nous sommes aperçus que quelques enseignants l'énoncent explicitement, à l'occasion de la résolution d'un problème. Les élèves vont-ils être gênés par cette incohérence ? En tout cas elle peut jouer un rôle institutionnel très grave puisque, le jour du bac, une copie utilisant cette réciproque peut être sanctionnée ou non.

2 - L'ordre de la démonstration

Beaucoup d'enseignants pensent qu'une démonstration doit être rédigée "dans l'ordre". C'est ajouter une contrainte très artificielle. D'une part, l'utilisation du "car" ou du "parce que" est très naturelle chez les élèves et souvent performante. D'autre part, écrire des démonstrations dans l'ordre peut conduire les élèves à utiliser des mots de liaison peu variés et cela ne contribue pas à leur faire comprendre toute l'importance dans les démonstrations du statut des propositions.

3 - Les notations

Les notations que nous utilisons actuellement sont évidemment des conventions. Elles ont changé et elles changeront encore. Par exemple, il y a une trentaine d'années la notation AB pouvait désigner indifféremment le segment, la droite ou la distance. C'est pourquoi de nombreuses fautes de notations des élèves ne peuvent pas être considérées comme de véritables erreurs mathématiques. Mais on sait aussi que la maîtrise des notations est une aide pour éviter certaines erreurs et pour clarifier certains concepts. Il n'est donc pas étonnant que les enseignants aient des attitudes très diverses qui vont d'une rigueur sans faiblesse à une grande tolérance. La solution est peut être dans une attitude plus nuancée qui sait distinguer les fautes graves des négligences sans conséquence : par exemple écrire $[AB] // [CD]$ au lieu de $(AB) // (CD)$ est sans doute une erreur anodine ; par contre " *I est le milieu de (AC)* " peut être le signe d'une confusion essentielle entre la droite et le segment. De même, comprendre que les expressions " *OA est le rayon du cercle*" et " *$[OA]$ est un rayon du cercle*" n'ont pas le même sens, peut être très important pour la compréhension d'un énoncé.

4 - Les usages

Il est normal que beaucoup d'usages dépendent de chaque enseignant. Par exemple, pour l'application du théorème des milieux, on verra certains enseignants dans certaines classes demander systématiquement d'indiquer le triangle dans lequel le théorème est appliqué, pendant que d'autres ne l'exigeront pas.

Par contre, nous pensons qu'il faut condamner fermement toutes les règles très artificielles imposées par quelques-uns. Par exemple, nous ne pouvons être d'accord avec un enseignant qui déclare qu'il mettra zéro à toute démonstration qui ne respecte pas des consignes du genre :

- *"l'hypothèse doit être soulignée en rouge et la conclusion en vert".*
- *"il faut écrire toutes les données du problème avant de commencer la démonstration, il faut les numéroter".*
- *"quand on nomme un triangle rectangle il faut mettre le sommet de l'angle droit en premier".*
- *"quand on nomme un triangle isocèle c'est le sommet commun aux deux côtés égaux qu'il faut nommer en premier".*

De la même manière on ne peut accepter que certains enseignants introduisent sans précautions des notations inusuelles ; par exemple " $I = m [AB]$ " pour " I est le milieu de $[AB]$ ", ou encore " $\vec{AB} = (1,2)$ " pour " $\vec{AB}$ sont $(1;2)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ " ne sont pas des notations suffisamment fréquentes pour qu'on puisse les utiliser dans l'énoncé d'un contrôle. Remarquons pour cette dernière notation que $\vec{AB} = (1,2)$ peut conduire après un changement d'unité à $\vec{AB} = (2,4)$, puis à $(1,2) = (2,4)$ formule évidemment troublante ; d'autre part, la notation $(1,2)$ peut être lue comme un nombre décimal, ce qui conduit à préférer $(1;2)$, enfin l'ordre des composantes doit respecter celui choisi pour le repère.

Citons encore des notations à éviter, ne serait-ce que pour tenir compte du rejet violent de certains correcteurs d'examens : cela peut aller de notations inattendues

comme " $\widehat{ABC}$ " pour " $\triangle ABC$ " à des problèmes plus profonds comme l'emploi de " $(x^2)' = 2x$ " pour " $\text{la dérivée de la fonction } x \mapsto x^2 \text{ est la fonction } x \mapsto 2x$ ". Beaucoup d'enseignants n'hésitent pas à faire ce dernier abus quand il y a beaucoup de notations ou de calculs. Il faut dire que le plus souvent il n'y a pas d'ambiguïté sur ce que cela signifie. Notons cependant que, dans un tel contexte, l'utilisation de " $\cos'x$ " et " $\exp'x$ " pour désigner la valeur de la dérivée du cosinus et de l'exponentielle en x , peut conduire certains élèves à écrire " $\cos'2x$ " ou " $\exp'2x$ " pour désigner les dérivées des fonctions $x \mapsto \cos 2x$ et $x \mapsto \exp 2x$, alors que selon les usages ces notations désignent plutôt les valeurs des dérivées du cosinus et de l'exponentielle au point $2x$.

Il y a malheureusement beaucoup de cas où la communauté enseignante est plus partagée, même si les recommandations des programmes essaient de lever les ambiguïtés. Citons, en particulier, quelques problèmes posés par l'énoncé d'une inégalité : les instructions officielles indiquent que " $x < y$ " doit se lire "*x est strictement inférieur à y*" et que " $x \leq y$ " doit se lire "*x est inférieur à y*". Il n'empêche que beaucoup d'enseignants et beaucoup d'élèves liront la seconde inégalité : "*x est inférieur ou égal à y*" et que "*moins de 10 francs*" voudra dire pour la plupart " < 10 " même si le strictement n'est pas explicitement exprimé. De même l'expression "*demi-plan*" ou "*demi-droite*" est parfois comprise comme "*demi-plan fermé*" ou "*demi-droite fermée*", parfois "*demi-plan ouvert*" ou "*demi-droite ouverte*". L'emploi des mots "*égal*" et "*isométrique*" est aussi l'objet de bien des discussions.

Citons encore un dernier exemple : si tout le groupe est tombé d'accord pour dire que le passage de $\vec{AF} = \frac{3}{4} \vec{AB}$ à $\vec{FB} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ est une évidence qui ne demande pas de justification, il ne nous a pas paru évident de répondre à la question : "*faut-il demander une justification dans le cas où on déduit $\vec{FB} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ de la formule $3\vec{FB} = \vec{AF}$?*"

Il est donc clair que chacun doit réfléchir à ses exigences pour voir si elles ont un véritable fondement mathématique ou si elles résultent simplement de contraintes sociales. Un élève ne peut être que rassuré si on lui explique clairement qu'une correction dont il ne comprend pas le bien fondé est légitimée par des raisons de convenances ou de commodité, voire d'efficacité dans la communication, et non à cause d'une faute mathématique.

II - LA NECESSITE DE L'ANALYSE

Comprendre le point de vue d'un élève sur la démonstration à travers l'analyse d'une copie, comprendre les progrès qu'il a pu faire en comparant deux copies, déterminer les points qu'il faut travailler avec lui, ne peut se faire sans une analyse assez fine des copies. Rappelons qu'il ne s'agit pas ici de juger la manière dont le problème a été résolu, mais, la résolution étant considérée comme acquise, la manière dont la démonstration a été rédigée. Dans un premier paragraphe nous proposons une grille d'analyse, que nous utilisons dans la partie III à titre d'exemple pour comparer deux copies d'un même élève. Le deuxième paragraphe sera consacré à une réflexion sur la correction des copies. Rappelons qu'il est aussi nécessaire de se donner les moyens d'analyser les textes mathématiques que rencontrent les élèves et qui vont jouer un rôle essentiel dans l'apprentissage de la démonstration. C'est ce que nous avons fait, à propos du théorème des milieux dans le chapitre précédent.

1 - Une grille d'analyse pour les démonstrations de seconde

L'intérêt d'une grille d'analyse est d'éviter des oublis et des confusions entre des phénomènes de nature différente. Elle ne doit en aucun cas être un carcan dans lequel on s'enferme. La grille ci-dessous, n'est donc qu'une proposition que chacun peut adapter à son point de vue, à son tempérament, à sa classe. Elle s'inspire largement de la grille proposée par R. Duval dans un atelier de l'Université d'été "Des activités ou des problèmes en mathématiques : conception et utilisation" (Rennes 1990). Elle est bien utile pour analyser les copies des élèves mais aussi celles des enseignants et des livres.

a) La structure

Avant de faire l'analyse d'une démonstration d'élève, il est nécessaire d'essayer de comprendre comment il a organisé son texte. Pour cela il semble que le plus facile est de partir des propositions pour lesquelles il y a des indices dans le texte indiquant qu'il s'agit de conclusions. Puis pour chacune de celles-ci on cherchera comment est organisé dans le texte le pas qui mène à cette conclusion. Ce travail fait, plusieurs types de fautes apparaissent.

b) Les fautes de résolution de problème

Souvent, après cette analyse préliminaire, on s'aperçoit qu'en fait l'élève n'a pas tous les éléments qui lui permettraient de résoudre le problème. Il n'est pas, dans ces conditions, capable de rédiger une bonne démonstration. Il est très important de repérer cette situation car l'action à entreprendre auprès de l'élève n'est pas de même nature.

C'est sans doute dans cette rubrique qu'il faut classer les difficultés révélées par les démonstrations sur la compréhension de certains concepts. Par exemple il apparaît clairement dans certains textes que la médiatrice n'est pas conçue comme associée à un segment, mais à un triangle, que la médiane est associée à un sommet et non au côté qu'elle traverse ("la médiane de A").

c) La structure de chaque pas

L'examen de chacun des pas de démonstration peut faire apparaître des fautes très variées qu'il faut soigneusement distinguer :

- utilisation d'un résultat non démontré et qui ne fait pas partie des données.
- utilisation d'une hypothèse étrangère au théorème, ou d'un énoncé de théorème dont les hypothèses sont trop riches. On a rencontré par exemple : *"Dans un triangle rectangle la droite qui joint les milieux d'un côté de l'angle droit et de l'hypoténuse est parallèle au 2ème côté de l'angle droit"*.
- utilisation d'un théorème dans lequel il manque une hypothèse. En voici deux exemples :
"Tout triangle inscrit dans un cercle est rectangle",
"Si $a < b$, $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ " (oubli que a et b sont de même signe).
- utilisation d'un théorème dont la conclusion est déformée.
- utilisation d'un théorème bon mais inventé pour les besoins de la cause. Nous avons par exemple rencontré dans une copie d'enseignant : *"si deux carrés ont leurs côtés égaux et parallèles, ils ont leurs diagonales parallèles"*.
- utilisation d'un théorème inadapté au contexte : par exemple, l'utilisation du théorème des milieux pour montrer que deux droites sont perpendiculaires.

On trouve aussi des indices défavorables comme la démonstration d'une conclusion qui ne sert en rien la conclusion finale. Les éléments inutiles sont souvent un indice de difficultés importantes. Par exemple dans une démonstration où seules la hauteur et la médiatrice nous intéressaient, on a souvent rencontré des énoncés du type : *"dans un triangle isocèle, la hauteur partant du sommet principal est aussi la médiatrice, la médiane et la bissectrice de ce sommet"*.

Quand un pas ne comporte pas de faute, on peut examiner s'il est entièrement explicite : données du problème citées explicitement, rappel d'un résultat déjà démontré, énoncé d'un théorème, conclusion clairement identifiable. Pour un élève en difficulté le fait de ne pas tout expliciter est souvent un indice défavorable, alors qu'il peut s'agir d'une recherche de concision naturelle pour un élève qui domine la question.

d) Les expressions qui structurent le texte

Il faut se rappeler que la structure proprement dite de la démonstration est indiquée dans le texte par des expressions, des mots ou des dispositions dont le rôle principal est de préciser le statut des propositions : hypothèse, théorème, résultat déjà démontré, résultat intermédiaire, objectif du prochain pas, conclusion. Il est clair qu'il y a une grande variété dans la formulation, qui donne une grande liberté d'expression. Il est nécessaire de repérer d'abord les "vraies fautes", c'est-à-dire les expressions qui donnent des indications fausses sur le statut des propositions, comme l'emploi d'un "donc" pour annoncer une donnée. Il faut bien les distinguer des simples maladresses. Par exemple, on trouve souvent :

"si le triangle ABC est isocèle, alors sa hauteur est confondue avec sa médiane"

au lieu de :

"comme le triangle ABC est isocèle, sa hauteur est confondue avec sa médiane".

Nous estimons qu'il n'y a ici qu'une simple maladresse qui consiste à énoncer le théorème utile au lieu de marquer nettement que : *"le triangle ABC est isocèle"* est une donnée du problème.

La structure du texte peut être mise en évidence par sa présentation dans la page, par des accolades ou par des symboles, comme par exemple dans la copie G du chapitre 1. C'est toujours la question : *"est-ce que le statut de chacune des propositions est bien clair ?"* qui doit être le guide pour l'analyse de ces présentations.

Cette analyse doit être complétée par une étude plus globale : le texte est-il pauvre en expressions qui indiquent sa structure, comporte-t-il des stéréotypes (répétitions très fréquentes de la même formulation pour des pas semblables), les expressions sont-elles variées ?

e) Les fautes de français

Il est évident que beaucoup de fautes sont de ce type. Il faut les distinguer soigneusement car elles ne sont pas de même nature. La longueur des phrases, leur complexité vont y jouer un rôle essentiel. On ne peut sans dommage les négliger, car pour beaucoup d'élèves, l'apprentissage de la démonstration passe par la prise de conscience qu'il s'agit d'un texte. Il faut bien faire une distinction entre les usages et les fautes incontestables : par exemple, il n'est pas d'usage de dire "*notre triangle*" mais il n'y a là rien d'incorrect. Ou encore : "*le triangle EDC est rectangle face au diamètre [DE]*" est une manière imagée de dire que : "*EDC est rectangle parce qu'il est inscrit dans un demi-cercle*". De même l'emploi de l'expression : "*on mène par A la parallèle à (CD)*", alors que dans l'énoncé tout est déjà tracé, n'est-il pas une survivance des nombreux programmes de construction écrits en 6ème et en 5ème. En revanche, un élève qui écrit : "*si deux droites sont perpendiculaires, toute parallèle à l'une l'est à l'autre*" commet une erreur mathématique en utilisant à mauvais escient le "l".

f) Les notations

Rappelons qu'il ne s'agit pas ici de fautes de démonstration. Là aussi comme nous l'avons dit plus haut les usages jouent un rôle très important.

g) Les éléments qui ne font pas partie intégrante de la démonstration

Une démonstration peut comporter de tels éléments. On peut annoncer en début d'un paragraphe le résultat que l'on veut démontrer, ou en début de démonstration le plan que l'on compte suivre. On peut indiquer comment on a trouvé la solution du problème. On peut ajouter des commentaires sur l'importance d'un résultat, sur son aspect surprenant qui peut d'ailleurs conduire parfois à émettre un doute sur sa validité. Si ces éléments sont pertinents ils constituent un indice très favorable de la maîtrise de l'élève.

2 - La correction des copies

La plupart des enseignants passent beaucoup de temps à corriger les démonstrations de leurs élèves. Ils essaient de leur indiquer les fautes mais aussi ce qu'ils auraient dû écrire. L'efficacité de ce travail très astreignant est loin de satisfaire les enseignants. Nous allons essayer de comprendre les raisons de cette relative inefficacité, puis de proposer des moyens de modifier cet état de choses.

a) Comment un élève peut-il comprendre la correction ?

Pour qu'un élève puisse se servir de la correction il faut d'abord qu'il comprenne clairement la signification de toutes les remarques qu'elle contient. Plutôt que de faire une analyse théorique de cette difficulté nous allons prendre la correction très soignée d'une copie que vous trouverez page suivante et en faire une petite analyse en utilisant les idées de la grille.

La principale difficulté pour l'élève est de repérer que les remarques de l'enseignant peuvent se situer à des niveaux très différents.

D'abord il y a deux remarques concernant les fautes essentielles que comporte cette démonstration :

- "*il manque le principal de la démonstration : le parallélisme de (ON) et (BM)*". L'élève en effet utilise cette hypothèse de manière explicite dans le dernier pas de sa démonstration alors qu'elle n'est pas dans les données du problème et qu'elle n'a pas été démontrée.
- "*il est inutile que le triangle soit rectangle*". La faute est différente, puisqu'il s'agit de l'énoncé d'un théorème avec une hypothèse inutile. Il peut être difficile d'expliquer à l'élève que cet énoncé, qui est bon (rajouter une hypothèse ne rend jamais un théorème faux), est à proscrire d'une démonstration. Pourtant il y a au moins deux bonnes raisons : d'une part la règle est que les seuls énoncés admis sont ceux qui sont dans le cours et celui-ci n'y est pas, mais surtout il faut lutter contre la tendance très dangereuse de cacher son ignorance de la structure réelle de la démonstration en mettant le maximum d'informations. Remarquons que : "*nous pouvons appliquer l'énoncé des milieux*" est une phrase qui a été barrée par l'enseignant bien qu'elle intervienne normalement dans une bonne démonstration.

Deux remarques demandent à l'élève une plus grande précision :

- "*de diamètre [AB]*". On peut estimer qu'il s'agit ici d'une faute mineure si l'on admet que "*inscrit dans un demi cercle*" veut dire que l'un des côtés est le diamètre du demi cercle.
- de même un peu plus loin, "*d'un*" indique mieux que le premier côté peut être choisi quelconque dans l'application du théorème des milieux.

La remarque "*à reprendre clairement*" fait allusion à la complexité excessive de la phrase qui entraîne d'ailleurs une faute ou au moins une lourdeur de français (proposition relative suivie d'une proposition au participe présent). De même, l'ajout de "*et est*" correspond à une faute de français puisque le verbe sous entendu devant parallèle ne peut être "*passe*".

Une remarque tient à une différence de style entre l'enseignant et l'élève : "*notre*" est rejeté pour "*le*". On comprend le souci de l'enseignant de faire disparaître cette personnalisation, mais il n'y a ici aucune faute de mathématiques ou de français. De plus, il vaut mieux laisser l'élève libre de son style si l'on veut obtenir des progrès rapides sur l'essentiel.

Enfin une faute d'orthographe commise par l'élève dans le passage "*si une droite par du milieu*" empêche l'enseignant de comprendre et le conduit à remplacer le passage par "*si une droite passe par le milieu*".

de diamètre $[AB]$

~~le~~

~~ou~~

il est inutile que le triangle soit rectangle

d'un

et est

d'un

le

()

[]

A répondu clairement

il mesure le principal de la démonstration : le problème de (ON) et (BM) .

[BA] est un

16

~~no~~

el
X

algorithme de calcul de la

no

de la

el

travaux de

[]

()

le (no) et l'ensemble de : notation de la ligne de la
• (MB)

CORRECTION D'UNE COPIE D'ELEVE EN DEBUT DE SECONDE

(C_1) est le cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O .

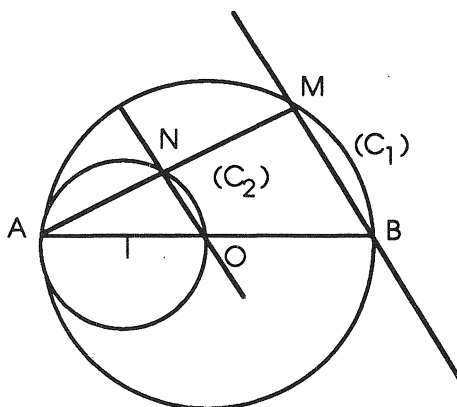
(C_2) est le cercle de diamètre $[AO]$ et de centre I .

M est un point du cercle (C_1) distinct de A et B .

Le segment $[AM]$ recoupe le cercle (C_2) en N .

Démontrer que N est le milieu de $[AM]$.

A rédiger avec soin et "en liberté" !



Démontrons que N est le milieu du segment $[AM]$

- Montrons d'abord que le triangle AMB est un triangle rectangle :
 puisque AMB est inscrit dans un demi-cercle alors,
 AMB est un triangle rectangle en A .
- Puisque notre triangle AMB est rectangle alors nous pouvons appliquer l'énoncé des milieux : dans un triangle rectangle si une droite passe par le milieu du 1^{er} côté, parallèle au second, alors elle coupe son troisième côté ^{perpendiculairement} en son milieu. Donc nous pouvons dire que la droite NO qui part de AB , ^{milieu par hypothèse} étant parallèle à $[MB]$ coupe $[AM]$ en son milieu.

Conclusion : N est le milieu du segment $[AM]$

Aucune remarque n'indique à l'élève les points que l'enseignant considère comme positifs. Pourtant les mots de liaison utilisés font apparaître assez clairement l'organisation des pas, et le fait d'annoncer ce qu'on va démontrer est un point positif.

Cette brève analyse montre bien que certains élèves devant cette correction vont être incapables d'interpréter les remarques pour faire des progrès.

b) Que faire ?

La principale raison de la difficulté qu'ont les élèves à comprendre et utiliser la correction de leur copie vient de ce qu'ils n'ont pas les moyens d'effectuer un véritable travail sur cette correction. Il faut donc chercher des moyens d'action avec le double objectif que l'élève comprenne mieux le sens des corrections et qu'il ait une véritable activité.

Une idée, déjà appliquée par beaucoup d'enseignants, est d'adapter la correction au niveau de l'élève. Par exemple, il est sans doute inutile de corriger certaines fautes mineures de notations pour un élève dont les démonstrations comportent des grosses fautes de raisonnement. Cette idée peut être un peu plus systématique : par exemple, on peut convenir avec un élève ou avec la classe que l'on ne corrigera pendant un certain temps qu'une sorte d'erreurs. De cette manière la complexité des objectifs du prof se dégagera plus clairement : corriger les vraies fautes de démonstration, mais aussi les fautes de français, les fautes de notations, les non-respects de certains usages etc...

Pour qu'un élève travaille sur la correction, il faut créer une véritable motivation. Un bon moyen de l'obtenir est de partir du principe que la démonstration rédigée par l'élève est le point de départ du travail et que le jugement, c'est-à-dire la note ne tiendra compte que des améliorations apportées à ce texte initial. Concrètement on fait une correction d'une première copie en donnant simplement des suggestions sur les fautes possibles (une des pistes est d'indiquer la nature de la faute en utilisant une grille comme celle du paragraphe précédent). On fait une correction au tableau, puis on demande aux élèves de modifier les copies en tenant compte des indices donnés. Ce travail sur les copies corrigées peut être fait sur sa propre copie comme sur celle d'un camarade en travail individuel ou en travail de groupes. C'est un travail de ce type qui est donné dans le chapitre 2 page 34 : **vers une démonstration parfaite**, où, à partir d'une copie particulièrement "*intéressante*", un travail en classe entière est engagé.

La production de textes de démonstration en groupes est un autre moyen. Pour réussir il est nécessaire de bien séparer la rédaction de la résolution du problème. L'ensemble des élèves doit connaître clairement les idées qui permettent la résolution au moment du travail de rédaction. Les textes produits sont bien meilleurs, et les discussions entre les élèves au cours de la rédaction sont très formatrices. Enfin au moment de la correction la discussion est facilitée.

En conclusion, il nous semble qu'il est plus efficace de corriger moins de copies, mais de faire autour de chaque correction un travail plus approfondi. Il est nécessaire de changer l'objectif de la correction. Le but essentiel ne doit pas être de repérer ce qui est faux pour mettre une note, mais au contraire de découvrir ce qui est déjà maîtrisé et de le faire savoir à l'élève et de lui indiquer dans quelles directions il doit aller pour faire des progrès.

III - QUELQUES DIFFICULTES FREQUENTES EN SECONDE

1 - Les mathématiques ne sont pas raisonnables

Pour certains élèves très en difficulté les mathématiques ne sont pas une activité rationnelle. Dans leur esprit il ne s'agit pas de se comporter en être intelligent essayant de résoudre des problèmes ayant un sens, mais de faire ce que le prof souhaite à propos d'activités dépourvues de signification. Les propos rapportés page 40 à propos de $2 \geq 1$ montrent bien un exemple de cette attitude qui ne peut conduire qu'à l'échec.

Il est bien sûr très difficile de concevoir les actions à entreprendre. Nous l'avons tenté dans le chapitre 3. L'idée qui nous a paru la meilleure est de créer des occasions pour débattre de points qui sont douteux pour les élèves. C'est l'expérience qui permet de choisir un terrain où la discussion puisse aisément aboutir. La question (abordée à l'occasion de la fiche page 21) de savoir si un théorème a été utilisé dans une démonstration même s'il n'a pas été énoncé explicitement, s'est avérée un bon sujet, alors qu'un débat sur "*qu'est ce qu'un théorème*", à l'occasion de cette fiche, s'est terminé dans la confusion.

2 - Résolution de problème et rédaction de démonstration

Un obstacle un peu moins évident est la confusion que beaucoup font entre la résolution du problème et la rédaction d'une démonstration. Beaucoup d'élèves pensent que le texte qu'on leur demande de rédiger doit simplement bien mettre en évidence les grandes étapes de la résolution du problème. Cela conduit à de nombreux malentendus. Par exemple :

- quand un élève écrit "*d'après le théorème des milieux*" il n'est pas sûr qu'il ait fait un choix entre le théorème et l'une de ses réciproques. Il exprime simplement que ce théorème est l'une des idées essentielles de la résolution. Dans cette perspective il a bien du mal à comprendre que l'enseignant considère que de confondre un théorème et sa réciproque est une faute très grave.
- de même cela explique certains énoncés incompréhensibles ; par exemple "*toute droite parallèle à l'une est perpendiculaire à l'autre*" ne veut-il pas dire "*il faut utiliser des propriétés bien connues des perpendiculaires et des parallèles*" ?

Ce n'est sans doute pas en obligeant les élèves à énoncer explicitement le théorème utilisé sous sa forme la plus générale que l'on va les aider à surmonter cette difficulté. Il semble plus opportun de les orienter vers un énoncé instancié du théorème, c'est-à-dire explicitement adapté à la situation du problème. Par exemple plutôt que de proposer :

"On vient de montrer que $(AB) \perp (CD)$, et on sait d'autre part d'après l'énoncé que $(CD) \parallel (EF)$. Or, on a le théorème "si deux droites sont parallèles toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre". Donc $(EF) \perp (AB)$ ".

Il vaut sans doute mieux remplacer la phrase du milieu par :

"Or si $(AB) \perp (CD)$ et $(CD) \parallel (EF)$ on sait que $(AB) \perp (EF)$ ".

On constate d'ailleurs que les élèves qui s'expriment de cette manière sont souvent moins en difficulté.

La démonstration fastidieuse de résultats évidents, comme le fait qu'un trapèze isocèle a un axe de symétrie, ne semble pas non plus un bon moyen de faire saisir la véritable nature de la démonstration. C'est plutôt en partant d'un problème difficile dont chacun connaît déjà la solution, et en travaillant sur des textes exprimant cette solution que peuvent apparaître naturellement les différences entre une démonstration, où le statut de chaque proposition est soigneusement précisé, d'un texte indiquant les étapes essentielles de la solution du problème.

3 - L'évolution du contrat didactique

Le passage de troisième en seconde correspond, à l'évidence, à une modification importante du contrat didactique en ce qui concerne la démonstration. Alors qu'en troisième on demande aux élèves d'être très explicites dans les énoncés des théorèmes utilisés dans leurs démonstrations, on les incitera en seconde à n'énoncer que les théorèmes les plus importants.

Pour faire comprendre ce contrat, beaucoup d'enseignants pensent qu'il faut proposer à leurs élèves quelques démonstrations types. Cela conduit très souvent à des malentendus catastrophiques. C'est en effet l'acquisition d'une certaine liberté d'écriture qui est le bon objectif. Nos observations viennent ici confirmer celle de R. Duval ; ceux qui, en début de seconde, montrent une certaine originalité dans l'écriture, s'adaptent très facilement à toutes les contraintes que leur imposent plus ou moins les enseignants.

4 - Des difficultés particulières

Certains contenus entraînent des difficultés particulières. Au cours de notre travail, nous en avons étudié deux : les problèmes d'alignement et les inégalités larges. Elles doivent faire l'objet d'un travail spécifique avec l'élève.

A propos des problèmes d'alignement, on peut se poser la question plus générale de l'enseignement de certaines méthodes de démonstration spécifiques à certains contenus, dans le cas présent la méthode du point dédoublé. Il s'agit, pour la clarté de la démonstration de nommer de deux manières différentes, suivant la façon dont il est construit, un point qui est unique sur la figure, puis de montrer que ces deux points sont confondus. L'apprentissage d'une telle méthode peut-il être un objectif en seconde ? Quelles sont les activités adaptées à cet apprentissage ? Notre travail du chapitre 3 apporte quelques éclaircissements à ces questions.

L'introduction de ce type de méthodes à propos de démonstration d'alignement, sans utiliser de transformation, semble assez artificielle à beaucoup d'élèves (surtout s'ils ont déjà une certaine maîtrise des vecteurs qui permet généralement d'éviter cette formulation), et peu cherchent à la reproduire. Cependant quelques uns se risquent à appliquer cette nouvelle méthode avec profit. L'occasion qui paraît la meilleure est de l'introduire à propos de problèmes où il s'agit de démontrer que le transformé d'un point par une rotation (ou une homothétie) coïncide avec un autre point. Il semble naturel pour les élèves de nommer le transformé d'un nom et le point avec lequel il coïncide d'un autre nom, car il est difficile de rédiger la démonstration d'une autre façon.

5 - Une difficulté facile à surmonter

L'incompréhension du mot *hypothèse* est pour certains élèves une véritable difficulté. Elle entraîne en effet l'incompréhension de certaines questions : par exemple dans l'étude d'une démonstration la question "*souligne les hypothèses*" conduit des élèves à souligner les conclusions, car il retiennent pour le sens du mot "*hypothèse*" celui qu'ils ont rencontré en sciences naturelles, c'est-à-dire un synonyme de "*conjecture*". Mais si cette difficulté est incontestable, il ne s'agit pas d'une difficulté profonde. Les élèves ont l'habitude d'utiliser des mots dont le sens varie avec le contexte et il suffit le plus souvent d'une courte discussion où le mot *hypothèse* est rapproché du mot *donnée* pour résoudre le problème. Simplement, les enseignants de seconde doivent se rappeler que cette difficulté existe et intervenir très explicitement plusieurs fois dans l'année pour rappeler le sens du mot *hypothèse* en mathématique.

IV- LES EVOLUTIONS CONSTATEES SUR LES COPIES DE NOS ELEVES

Après avoir proposé à nos élèves de seconde des activités d'apprentissage, nous souhaitons étudier l'évolution de leur point de vue sur la démonstration. Pour cela nous leur avons proposé de rédiger en avril une démonstration qu'ils avaient déjà rédigée au début d'octobre. Nous indiquons dans ce paragraphe ce que nous a apporté la comparaison de ces deux copies, mais aussi ce que chaque enseignant connaît de ses élèves.

Chaque élève a d'une certaine manière son style. Celui-ci n'est guère modifié par les recommandations des enseignants. Il semble que l'abandon de son propre style pour calquer celui de l'enseignant soit plutôt un facteur d'échec.

Beaucoup d'élèves craignent d'oublier quelque chose dans leurs démonstrations. Cela les conduit à rédiger des démonstrations comportant des éléments inutiles : conclusions qui ne sont jamais utilisées par la suite, théorème trop complet pour la situation. En seconde, suivant le niveau auquel est parvenu l'élève, deux phénomènes contradictoires peuvent se produire.

Les uns, ayant compris la spécificité des démonstrations, rédigent en arrivant en seconde des démonstrations très détaillées. Ils évoluent facilement vers un texte plus succinct mais bien structuré.

Les autres rédigent au début de l'année des textes plus orientés vers la description de la résolution du problème que de la démonstration. Ils sautent alors souvent des étapes essentielles de la démonstration. Découvrant peu à peu la nature de la démonstration, leurs textes vont être plus complets mais comporter souvent des choses inutiles en fin d'année.

Pour les problèmes d'alignements sur lesquels nous avons fait travailler nos élèves, les progrès sont évidents : il ne reste, dans un lot de copies, que deux erreurs.

L'un des moyens de faire apparaître la structure de la démonstration aux yeux des élèves est d'y inclure des indications sur les objectifs de chacune des étapes. On constate en effet que ceux qui le font sont rarement en difficulté. Notre travail semble avoir porté ses fruits : d'une part la plupart de ceux qui le font en début d'année continuent à le faire à la fin. Ceux qui y renoncent semblent le faire par souci de brièveté. Un nombre non négligeable d'élèves se mettent à le faire.

Le changement de contrat qui veut que les théorèmes soient moins explicites dans les démonstrations est en général bien compris. Les énoncés de théorèmes comme la transitivité du parallélisme disparaissent, les énoncés plus importants comme le théorème des milieux ne sont le plus souvent qu'instanciés.

Dans certaines copies on observe en début d'année des expressions comme "je construis". Celles-ci disparaissent.

On observe pour ceux qui faisaient peu de fautes au début de l'année un progrès considérable sur la rapidité d'écriture.

Comparaison de deux copies

Nous vous proposons, pour terminer, d'analyser les deux copies d'un même élève à quelques mois d'intervalle.

Copie du mois de septembre (page 77) : elle a été réalisée à la suite d'un travail de résolution de problème en petits groupes.

Copie du mois d'avril (page 83) : le même texte de problème est proposé, mais cette fois sans préparation particulière.

La première copie est marquée par une plus grande liberté d'écriture : variété dans les formulations employées, complexité des phrases, personnalisation. La seconde est au contraire très stéréotypée, avec ses formulations "puisque...alors", ses tirets et le donc précédant la conclusion. Les expressions qui annoncent ce que l'on va démontrer ont disparu. Il y a ici d'une certaine manière une régression, mais elle était sans doute inévitable car cet élève, qui ne semblait pas avoir de difficulté à écrire un texte décrivant la résolution d'un problème, avait besoin de prendre conscience de la spécificité des textes démonstratifs, et en particulier du fait qu'on ne peut utiliser un résultat qui n'est ni démontré ni exprimé dans l'énoncé.

On peut remarquer ici que cet élève qui avait une grande liberté d'écriture n'a pas eu de mal à s'adapter à un style plus conforme à l'usage.

La première copie comporte deux fautes graves :

- d'une part, l'utilisation du résultat (ON) // (BM) sans le démontrer ni même indiquer qu'on pourrait le démontrer. Cette faute a disparu du deuxième texte et on peut penser que la structure très simple de ce texte a été un facteur essentiel de progrès.
- d'autre part, il énonce un théorème des milieux avec une hypothèse inutile (le triangle rectangle). On peut remarquer que dans son second texte il n'y a plus de théorème explicitement énoncé. Cela est une évolution naturelle au cours de la classe de seconde car on demande aux élèves de faire preuve d'une plus grande concision. Cependant dans ce second texte les énoncés implicites des théorèmes utilisés sont clairement apparents.

Dans les deux copies les mots ou les expressions qui structurent le texte sont employés à bon escient. Mais ils sont beaucoup plus riches dans le premier où l'on trouve "*nous pouvons appliquer*", "*nous pouvons dire*" et un participe présent.

La structure de chacun des pas de démonstration est claire dans les deux textes. La différence vient de ce que dans le deuxième texte les hypothèses du pas sont systématiquement annoncées par un "puisque".

DEUXIEME COPIE DE YANN
EN AVRIL (Seconde)

(C_1) est le cercle de diamètre $[AB]$ et de centre O .

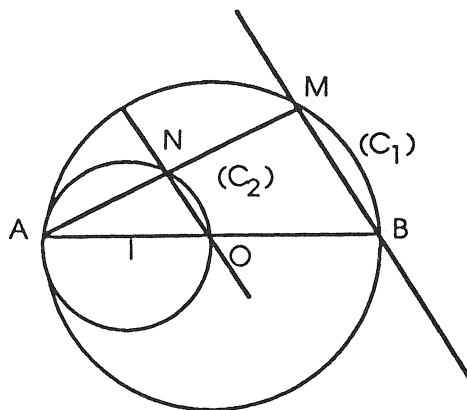
(C_2) est le cercle de diamètre $[AO]$ et de centre I .

M est un point du cercle (C_1) distinct de A et B.

Le segment $[AM]$ recoupe le cercle (C_2) en N .

Démontrer que N est le milieu de $[AM]$.

A rédiger avec soin et "en liberté" !



- puisque M appartient à (C_1) et $[AB]$ est le diamètre de (C_1)
 alors le triangle MBA est rectangle en M , alors $\widehat{AMB} = 90^\circ$
 - puisque N appartient à (C_2) et $[AO]$ est le diamètre de (C_2)
 alors le triangle NOA est rectangle en N . Alors $\widehat{ANO} = 90^\circ$
 - puisque N appartient à $(A\Gamma)$ et $\widehat{ANO} = \widehat{AMB} = 90^\circ$ alors
 la droite $[NO]$ et $[MB]$ sont parallèles.
 D'après le théorème de milieux: puisque O est le milieu de
 $[AB]$ dans le triangle AMB et $[NO]$ est parallèle à $[MB]$ alors
 la droite partant de O , parallèle à $[MB]$ coupe $[AM]$ en
 son milieu. Donc N est le milieu du segment $[AM]$

CONCLUSION

Nos réflexions sur le comportement des élèves devant la démonstration nous ont apporté plusieurs convictions :

LAISSER LES ELEVES S'EXPRIMER

Il est indispensable de laisser aux élèves du temps pour chercher le problème et pour exprimer leurs idées avec leur vocabulaire, par oral, par écrit, seul ou en groupes et pour en discuter. Ils pourront alors prendre en compte nos propositions et nos corrections.

Il ne faut pas officialiser une seule façon de s'exprimer, et en particulier pour les démonstrations, ne pas leur proposer des rédactions stéréotypées. Il n'y a rien de plus déroutant pour un élève que de se plier aux exigences de leur nouveau professeur. Laissons les uns utiliser des notations déjà acquises, et les autres s'exprimer avec des phrases. Par exemple pourquoi imposer de conclure la résolution d'une équation par " $S = \left\{ -2 ; \frac{1}{3} \right\}$ " plus que par la phrase "cette équation a pour solutions les réels : -2 et $\frac{1}{3}$ " ? Le principal est que chacun comprenne le sens de ce qu'il dit et de ce qu'il écrit. Le témoignage ci-dessous montre que cela modifie profondément notre façon de faire.

Pour présenter une notion nouvelle (la notion de fonction par exemple), après le travail préparatoire, j'ai demandé aux élèves de formuler eux-mêmes leur définition. J'ai lu toutes les définitions proposées, j'ai pu discuter avec chacun, demander des précisions, faire reformuler, ré-expliquer... Enfin seulement, on a mis au point une définition commune à tous.

Il y a eu aussi une fiche "compléter par donc ou par car". Un travail de groupes a donné lieu à beaucoup de discussions. Pour chaque phrase, au moins un groupe était en désaccord avec les autres, mais ces derniers ont toujours trouvé les arguments pour convaincre ; je n'ai pas eu à intervenir.

CORRIGER LES COPIES AUTREMENT

C'est sans doute sur la correction des devoirs que nous avons le plus évolué. Nous avons été obligés d'admettre le peu d'efficacité des corrections habituelles. Il faut bien inventer autre chose. Voici quelques unes de nos tentatives :

Dans une classe de première B après un devoir sur les trinômes, avec des résultats très disparates, il m'a semblé inefficace de fournir ma correction. J'ai donc décidé de faire corriger ces copies par les élèves eux-mêmes : je les ai groupés par deux, un "bon" et un "moins bon", et ai confié deux copies pour qu'ils les corrigent et les notent, en utilisant tous les documents qu'ils voulaient. La tâche est plus difficile qu'il n'y paraît. J'ai pu alors observer dans nombre de groupes la naissance de vrais débats, comprendre les erreurs de certains. Quelques élèves ont enfin pu éliminer des erreurs qui jusqu'alors étaient systématiques. J'ai alors recorrecté les copies : il n'y avait souvent rien à rectifier, parfois des réajustements à proposer. Cette expérience très positive ne m'a pris qu'un peu moins d'une heure de classe.

Pour un devoir de géométrie à la maison, j'ai demandé à mes élèves de rendre un plan détaillé de leur démonstration. J'ai mis en évidence des étapes oubliées, des passages inutiles... , ils ont repris la rédaction ensuite. Quelques-uns ont bien corrigé leurs erreurs, certains ont choisi une méthode différente. Bien sûr plusieurs ont refait exactement les mêmes erreurs ou de nouvelles, mais cela m'a donné une idée de travail en module.

Après un devoir de début d'année, en seconde, particulièrement raté, j'ai corrigé les copies et apporté quelques aides aux élèves : contre-exemples, indications de pas manquants, remplacements d'une expression par une autre... j'ai ensuite demandé à chaque élève de refaire son devoir chez lui. Sur toutes les copies j'ai alors obtenu des progrès conséquents.

FAIRE PROGRESSER LES ELEVES

Les élèves veulent progresser et réussir, si on ne les décourage pas! Mais il faut choisir avec soin le sujet des devoirs pour qu'il teste précisément ce que l'on souhaite. Au moment de la correction des copies ce n'est plus l'évaluation qui est notre préoccupation principale mais les progrès de nos élèves. Aussi avant de "jouer du stylo rouge" et de barrer une expression ou une phrase, nous nous efforçons de comprendre l'idée de l'élève. Rappelons nous comment une simple faute d'orthographe peut conduire à un contre sens dans la lecture d'une copie (cf page 76). L'élève a-t-il compris une telle correction ? A moins qu'il ait osé demander des explications ! ...

Pour chaque paquet de copies il faut analyser les erreurs. Il faut faire quelque chose des erreurs répétées, regrouper les élèves qui les font, préparer un travail sur certaines. Peu à peu elles prennent leur signification, comme le montre le témoignage ci-dessous.

La plupart des erreurs sont maintenant "explicables" : je reconnais telle confusion, un contrat mal compris ... Pour la correction des copies, je tiens une fiche pour chaque élève, où je note quand c'est possible le type de l'erreur commise, par exemple : argument-figure "je constate que", argument non valable (par exemple c'est un losange parce que les diagonales sont de même longueur), argument incomplet, confusion avec des théorèmes voisins

Bien sûr, cela ne diminue pas la quantité de travail !

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. HOUDEBINE
"Démontrer ou ne pas démontrer, voilà la question"
Repères I.R.E.M.
N° 1 - Octobre 1990

- [2] R. DUVAL et M.A. EGRET
"L'organisation déductive du discours"
Annales de didactique et de sciences cognitives
N° 2 - 1989
I.R.E.M. de Strasbourg

- [3] M.A. EGRET et R. DUVAL
"Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration"
Annales de didactique et de sciences cognitives
N° 2 - 1989
I.R.E.M. de Strasbourg

- [4] R. DUVAL et M.A. EGRET
"Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif"
Repères I.R.E.M.
N° 12 - Juillet 1993

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Deuxième Trimestre 1995
N° de publication : 9506

Deuxième Tirage
Décembre 1997

I.R.E.M. DE RENNES - Université de RENNES I
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 26 34
Tél : 02 99 28 26 08 (commande)
Fax : 02 99 28 16 38
e. mail : dirirem@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : LA DEMONSTRATION EN SECONDE

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS : GIRARD M.F. - HILT D. - HOUDEBINE J. - JAMIL J. - RENOARD F.

DATE : Première Edition : Juin 1995 - Deuxième Tirage : Décembre 1997

NIVEAU : Seconde

PUBLIC CONCERNE : Enseignants de Troisième et de Seconde

MOTS-CLES :

- Démonstration
- Correction de copies
- Modules
- Alignement

RESUME :

Ce document analyse trois points qui accentuent les difficultés des élèves de seconde dans la rédaction des démonstrations.

- La diversité des points de vue des enseignants.
- Une mauvaise connaissance par les élèves des contraintes et des libertés qu'ils ont.
- Des difficultés spécifiques à certains contenus : l'alignement, les inégalités larges.

Divers outils sont proposés : des activités, des séquences, des grilles d'analyse pour les productions des enseignants et des élèves (démonstrations, énoncés des théorèmes, corrections).

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	89	3 € 40,00 F	1ère Edition : 350 Ex. 2ème Tirage : 200 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-018-1