Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX

CAPACITES

METHODOLOGIQUES

EN

TROISIEME-SECONDE

I.R.E.M. de RENNES

JANVIER 1994

Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX

CAPACITES METHODOLOGIQUES EN TROISIEME-SECONDE

I.R.E.M. de RENNES JANVIER 1994

I.S.B.N. 2-85728-009-2

On participé à la rédaction de document :

DEVE Odile	Lycée Colbert - LORIENT
KERANFLECH Jean-Yves	Lycée Colbert - LORIENT
LE DOUJET Maryse	Lycée Victor Hugo - HENNEBONT
LE GOFF Simone	Collège Le Ronquédo - QUEVEN
LE RU Anne	Collège de Kérolay - LORIENT
MACE Bernard	Lycée Colbert - LORIENT
MARMORET Jean-Claude	Lycée Colbert - LORIENT
VALLEE Monique	Collège de Kérolay - LORIENT

La saisie et la mise en page de ce document ont été effectuées par Danièle QUENTIN (IREM de RENNES).

Le tirage de ce document a été effectué par Françoise LE BESCOND (IREM de RENNES) et la reliure par Suzanne BOURON (IREM de RENNES).

SOMMAIRE

INTRODUCTION

La période Troisième-Seconde est déterminante pour l'acquisition de "méthodes" par les élèves, qu'il s'agisse de compétences transdisciplinaires (apprendre une leçon, prendre des notes, lire un texte en fonction d'un but précis...) ou d'opérations mentales (faire preuve d'analyse critique, anticiper, conjecturer...) ou encore de techniques spécifiques aux mathématiques (comment démontrer une égalité, traiter un problème par une méthode algébrique, rôle des parenthèses, ...).

Dans le contexte actuel, on pense évidemment en évoquant cela, aux objectifs de l'enseignement modulaire en Seconde. Cela ne faisait pas partie, au départ, des préoccupations du groupe, qui a fonctionné en 1990/1991 et 1991/1992. Mais il est vrai que, lorsque les séances de Travaux Dirigés n'étaient pas en complémentarité avec une autre discipline, on pouvait déjà travailler dans l'esprit des "modules".

Deux points importants sont à souligner et sous-tendent les travaux du groupe. Tout d'abord, même si cela est évident, un discours du professeur ne remplace pas la mise en activité de l'élève (individuellement ou par petits groupes) pour la mise en relief des compétences visées et (ou) leur acquisition. Cependant une synthèse (venant le plus souvent du professeur) est en général nécessaire en fin de séquence.

D'autre part, et cela était peut être moins évident, il est efficace d'alterner les problèmes de large envergure (allant jusqu'aux problèmes ouverts) et les exercices plus pointus. Cela exclut en général <u>dans les activités d'apprentissage</u> :

1) Le problème découpé en mini-questions (type épreuve de contrôle ou d'examen) où l'élève n'a aucun intérêt à conserver une vue d'ensemble.

2) La batterie d'exercices semblables que l'on fait faire (ou corriger) l'un à la suite de l'autre.

Ce compte-rendu propose quelques pistes de recherche et quelques exemples. Il a pour ambition d'aider ceux qui souhaitent mieux prendre en compte l'hétérogénéité de leur classe et avancer dans l'individualisation de leur enseignement.

Chapitre 1

Quelques propositions pour améliorer des compétences (prise de notes, lecture d'un texte, réponse à la question posée, nécessité d'une justification, acquisition de savoir-faire, auto-évaluation).

Chapitre 2

Quelques propositions pour apprendre à préparer la résolution d'un problème. (Lire un texte, reconnaître des types de problèmes, aborder un problème en partant de la conclusion, établir un plan de solution, argumenter).

Chapitre 3

Quelques propositions pour améliorer la remédiation :
- l'erreur comme moyen de s'approprier la règle,
- des exemples de fiches de remédiation,
- gérer ses erreurs.

CHAPITRE 1

COMPETENCES GENERALES

Ces quelques compétences méthodologiques que nous qualifions de générales sont nécessaires dans diverses matières de notre enseignement et nous nous devons d'aider nos élèves à les acquérir car, pour la plupart, elles leur seront utiles dans leur vie professionnelle et dans la vie quotidienne tout simplement.

Nous donnons dans ce chapitre quelques pistes avec des exemples empruntés en général au domaine mathématique.

I - PRISE DE NOTES, VOCABULAIRE

1 - Prise de notes

Il faut que l'objectif principal de la séance soit la prise de notes, plus que le contenu mathématique servant de support. Et les élèves doivent en être avisés.

On pourra ensuite faire l'inventaire de ce que les élèves ont noté, avec en général deux remarques :

- Ils veulent en prendre le maximum.
- Ils prennent tout ce qui est écrit au tableau et en particulier les calculs en détail, au détriment de ce qui est dit mais non écrit.

Une discussion peut aboutir à un consensus sur ce qu'il aurait été utile de prendre en notes (pas nécessairement la même chose pour tous) et on peut faire une comparaison lors d'une autre séance.

2 - Vocabulaire

Un carnet répertoire alphabétique permet d'y inscrire des remarques sur certains mots usuels et surtout de rapprocher (ou de bien distinguer) des expressions telles que :

- inconnue, variable,
- exemple, contre-exemple,
- équation, égalité,
- simplifier,
- transposer,
- supprimer (le dénominateur),
- d'où, si ... alors, donc, puisque, ...

3 - Elaboration de fiches méthodes

Beaucoup d'enseignants en sentent la nécessité pour les élèves et il en existe dans certains manuels et certains documents (voir par exemple les "objectifs de référence en classe de seconde"). Mais rien ne vaut la fiche fabriquée par l'élève lui-même sur un thème précis à partir de feuilles bien distinctes de son cahier. Il est souhaitable, surtout au début, que le professeur y jette un oeil et qu'il y ait confrontation entre les propositions pour en dégager une ou mieux, plusieurs synthèse(s).

Voici un exemple obtenu en seconde après la lecture du texte d'une vingtaine d'exercices, la consigne étant de lire tous les textes, d'en faire quelques uns (chacun avait sa liste) et de dégager plusieurs techniques.

Il serait intéressant de comparer ce que pourrait contenir cette fiche en classe de Troisième et en classe de Seconde.

COMMENT OBTENIR $\boxed{LE}$ COEFFICIENT DIRECTEUR D'UNE DROITE

Rappel :

Toute droite non parallèle à (Oy) a une équation du type $y = mx + p$.
Le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.
Le nombre réel m est le coefficient directeur.

1 - ***Si on connaît une équation de la droite*** :

On met l'équation sous la forme $y = mx + p$

2 - ***Si on connaît un vecteur directeur de la droite*** :

On cherche un vecteur directeur de la forme $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

Ex : $\vec{V} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \end{pmatrix}$ *autre vecteur directeur* $\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$ *d'où coefficient directeur* $-\frac{5}{3}$

Remarque : *Une droite parallèle à (Oy) n'a pas de coefficient directeur.*

3 - ***Si on connaît deux points de la droite*** :

On se ramène à la technique N° 2.

Ex : $A\ (2,4)$ $B(-3,6)$ $\vec{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ $m = -\frac{2}{5}$

$A(x_1,y_1)$

$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_2-x_1 \\ y_2-y_1 \end{pmatrix}$ $\boxed{m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{\textit{différence des ordonnées}}{\textit{différence des abscisses}}}$

$B(x_2,y_2)$

4 - ***Si on connaît la représentation graphique*** :

On met en évidence un vecteur directeur
(de préférence : $\vec{V} = \vec{i} + m\vec{j}$ c'est-à-dire $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$)

5 - ***Si on connaît une droite parallèle, ou une droite perpendiculaire*** :

On applique la formule

$m = m'$ (droite parallèles)

ou

$mm' = -1$ (droites perpendiculaires)

II - LECTURE D'UN TEXTE (pour le comprendre)

Premier exemple :

Les deux oiseaux et le poisson
(D'après Diabolo Maths. Ed. Belin, cité par "Terracher" (Hachette)

Sur les deux rives d'un fleuve poussent deux palmiers l'un en face de l'autre : l'un a 10 m de haut, l'autre 15 m et leurs troncs sont éloignés de 25 m. Au sommet de chaque palmier est perché un oiseau. Soudain, les deux oiseaux aperçoivent simultanément un poisson qui émerge de l'eau entre les deux palmiers. Il se jettent sur lui à la même vitesse et l'atteignent en même temps.

A quelle distance du palmier le plus haut le poisson a-t-il apparu ?

DEROULEMENT DE L'ACTIVITE

(Alterner la recherche individuelle, en groupe, le débat collectif, l'exposition individuelle de l'argumentation).

1) Lire le texte en entier, en se méfiant des "faux amis"
   (Ex : - Au moins 10 et moins de 10.
   - Inverse et réciproque).

2) Dégager les notions essentielles en distinguant données et questions posées.

3) Schématiser la situation (figures, tableaux, arbres, organigrammes...).

4) Transposer d'un langage à un autre.

5) Mobiliser les connaissances qui vont permettre une meilleure compréhension du texte et qui vont, en mathématiques, aider à la résolution du problème.

Remarque : L'analyse de la démarche peut évidemment être entreprise beaucoup plus tôt. Ainsi, on peut calquer les points 1) 2) 3) 4) 5) à l'exercice suivant, donné en 5ème.

Les élèves de 5ème ayant eu moins de 9 au dernier devoir auront une heure de soutien.

En 5ème A, il y en a 8 sur 24.

En 5ème B, il y en a 50%.

En 5ème C, il y en a 18 sur 27.

Quelle est la classe où le groupe de soutien sera le moins important ?

Des élèves disent, d'emblée "on ne peut pas répondre à la question, puisqu'on ne connaît pas le nombre d'élèves de la 5ème B".

Le déroulement de l'activité a conduit les élèves à poser une seconde question, distincte de la première : "Quelle est la classe qui a le moins besoin de soutien ?"...

III - RÉPONSE À LA QUESTION POSÉE

a) La formulation des exercices doit être claire pour que l'élève sache ce que l'on attend de lui.

b) La réponse doit être conforme à la demande du texte.

Premier exemple :

Dans la fiche proposée, on écrit dans les deux premiers exercices la forme que devra prendre la réponse. On peut espérer que l'élève saura transposer pour les deux autres exercices. Mais il n'est sans doute pas souhaitable d'expliciter, a priori, l'objectif.

1 – *Résoudre le système :* $\begin{cases} 2x+3y=18 \\ 3x-y=5 \end{cases}$

Conclusion : (,) est la solution du système

2 – *Une fraction est telle que : si on retranche* 9 *au numérateur elle devient* $(-\frac{3}{2})$ *et si on ajoute* 5 *au dénominateur elle devient* $\frac{1}{3}$.

Quelle est cette fraction ?

Conclusion : la fraction cherchée est :

3 – *Un rectangle est tel que :*

a) *Si on ajoute* 3 *à sa longueur et* 2 *à sa largeur son aire est augmentée de* 24.

b) *Si on ajoute* 3 *à sa largeur et on retranche* 1 *à sa longueur son aire est augmentée de* 2.

Quelles sont les dimensions de ce rectangle ?

4 – *Déterminer l'application affine dont la représentation graphique est la droite* (AB) *avec* $A\left(\frac{2}{3}\,;\,6\right)$ *et* $B(-3\,;\,-5)$.

Deuxième exemple :

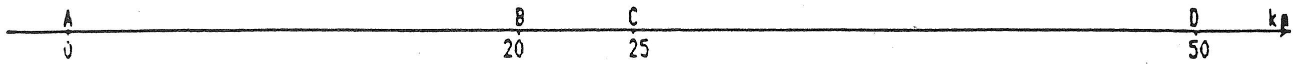
L'élève ne doit pas se contenter de suivre pas à pas les indications mais maîtriser la démarche ; il devrait être capable de la réinvestir dans des exercices du même type et d'élaborer un texte contenant les questions intermédiaires.

Une société de distribution en pleine expansion projette de faire construire un nouvel entrepôt. Ses livreurs interviennent essentiellement sur quatre grandes surfaces de vente A, B, C et D situés sur le même axe routier comme l'indique le schéma.

A est considéré comme l'origine de l'axe.

Cette société nous demande d'étudier la situation pour l'aider à décider du lieu d'implantation de l'entrepôt.

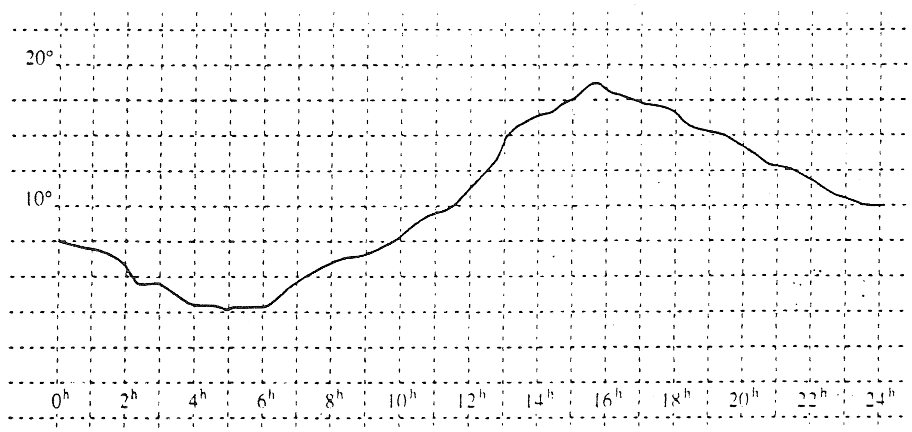
On doit compter chaque semaine : 15 *chargements pour A,* 10 *pour B,* 6 *pour C et* 20 *pour D.*



1) *Combien de kilomètres seront parcourus chaque semaine si l'entreprôt est implanté en A ? en B ? en C ? en D ?*
2) *Exprimer les distances EA, EB, EC et ED en fonction de l'abscisse x du point E, suivant la position de E sur [AD].*
3) *Calculer en fonction de x la distance totale d(x) parcourue en une semaine, pour* $E \in [AB]$, *puis pour* $E \in [BC]$, *puis pour* $E \in [CD]$.
   (On obtiendra trois expressions différentes)
4) *Dresser le tableau de variation de la fonction distance d.*
5) *Représenter graphiquement la fonction d sur l'intervalle* [0 , 50] *en prenant comme unité* 1 *cm pour* 5 *km en abscisses, et* 1 *cm pour* 200 *km en ordonnées.*
6) *Conclure : quelle est la meilleure implantation possible pour l'entrepôt ? Quelle est alors la distance hebdomadaire totale parcourue ?*
7) *Si la direction se contente de limiter la distance totale parcourue à* 2000 *km, où peut-elle implanter l'entrepôt ?*

<u>Troisième exemple</u> : **FONCTION INTRODUITE PAR UN TRACE GRAPHIQUE**
(Faire élaborer le texte entier par une partie des élèves et le faire lire par les autres).

Un thermomètre enregistreur a fourni, pour une journée donnée en un lieu fixé, le tracé ci-dessous.



La température, pour une journée donnée en un lieu fixé, est dépendante (ou fonction) de l'heure. L'enregistrement obtenu est la représentation graphique de cette fonction sur un intervalle de temps d'une journée. Un tel graphique permet de lire certains résultats.

a) *Quelle était approximativement la température à* 8 *heures ? à* 13 *heures ? à* 20 *heures ?*
b) *A quelle(s) heure(s) de la journée, la température était-elle égale à* 15° ?
c) *Durant quelle période de la journée, la température a-t-elle dépassé* 15° ?
d) *Quelles ont été les températures minimale et maximale de la journée et à quelle heures ont-elles été atteintes ?*
e) *Durant quelles (x) période(s) la température a-t-elle été croissante ? décroissante ?*

IV - FAIRE SENTIR LA NÉCESSITÉ D'UNE JUSTIFICATION

Cela peut être rapproché de "réaliser une analyse critique". Il ne s'agit donc pas nécessairement de fournir une justification, même si en général, cet objectif intervient dans un deuxième temps.

Les exemples les plus pertinents viennent de la confiance aveugle dans l'observation d'une figure géométrique (ou, ce qui est équivalent) dans les résultats fournis par la calculatrice. Cependant, dans l'un comme dans l'autre cas, il ne s'agit pas de provoquer une attitude de doute permanent. Il est donc indispensable de préciser (après coup) que ces exercices avaient pour but de montrer la nécessité d'une justification.

$\boxed{I}$ *On veut calculer* $X = 12345678^2 - 12345677^2$
(*Ou bien* $X = 1234567^2 - 1234566^2$ *suivant la calculatrice*).

a) *Que donne la calculatrice ? Est-ce la valeur exacte ?*
b) *Vérifier que :* $5^2 - 4^2 = 5 + 4$
$8^2 - 7^2 = 8 + 7$
$13^2 - 12^2 = 13 + 12$
c) *Que peut-on conjecturer ? (énoncé mathématique et (ou) phrase en français).*
d) *Démontrer la propriété entrevue plus haut.*
e) *Donner la valeur exacte de X.*

$\boxed{II}$ *Les nombres suivants sont-ils égaux ?*

a) $X = \frac{1}{6}$ $\quad Y = \frac{1}{15} + \frac{1}{10}$

b) $X = \frac{489451}{847754}$ $\quad Y = \frac{2314756}{4009275}$

c) $X = \sqrt{2}$ $\quad Y = \frac{941664}{669857}$

d) $X = \frac{489451}{847754}$ $\quad Y = \frac{978902}{1695508}$

$\boxed{III}$ On peut faire en sorte que la solution d'un problème soit constituée des points de coordonnées (-4 ; 7) et (5 ; -9) et demander aux élèves de justifier leur observation d'alignement de ces deux points avec l'origine.

De façon générale il est souhaitable de poser parfois la question sous forme interrogative. On peut remplacer *"Démontrer que les points sont alignés"* par *"les points sont-ils alignés ?"* et ne pas le faire uniquement quand la réponse est *"non"*.

La présentation d'un exercice sous forme de Q.C.M. favorise aussi la prise de conscience de cette nécessité d'une jusification.

V - ACQUISITION DE SAVOIR-FAIRE

1 - L'élève doit apprendre à se formuler des consignes

Beaucoup d'élèves échouent parce qu'ils ne perçoivent pas bien ce qui est demandé.

- Consignes-Critères *"j'aurai réussi si ..."*
  Par exemple : A quoi saurai-je que je sais ma leçon ?

- Consignes-Structures *"pour cela, je dois..."*
  Il s'agit des passages incontournables pour réaliser la tâche.

- Consignes-Procédures *"pour y parvenir, je peux ..."*
  Il s'agit des stratégies différenciées permettant l'exécution".

d'après Ph. Meirrieu.

2 - On peut proposer à l'élève une liste d'objectifs à atteindre assortie d'exercices

Exemple 1 (voir page suivante) :

Liste d'objectifs concernant les fonctions numériques, en Seconde. Dans la deuxième colonne, on peut mettre la référence d'exercices d'application directe testant ces objectifs. Dans la troisième colonne, on peut mettre des indications sur le degré d'acquisition de l'objectif.

Remarque : Cette liste d'objectifs peut être fournie a priori par le professeur ou au contraire être dégagée lors d'une synthèse, en classe, à partir des exercices. Il convient évidemment de varier, plutôt que d'adopter toujours la même organisation.

FONCTIONS NUMERIQUES

Reconnaître si une courbe donnée est (ou non) la représentation graphique d'une fonction.		
Avoir une bonne approche des différents modes de génération d'une fonction.		
Lire le (ou les) antécédents d'un réel lorsque f est définie graphiquement.		
Déterminer les antécédents d'un réel lorsque la fonction est définie explicitement.		
Lire l'image d'un réel lorsque f est définie graphiquement.		
Déterminer l'image d'un réel lorsque f est définie explicitement.		
Déterminer les formules définissant f lorsque celle-ci est donnée par sa représentation graphique.		
Calculer $f(a)$, $f(-x)$ $f(-x+2)$, $f(3x)$ lorsqu'on connaît explicitement $f(x)$.		
Savoir déterminer $f(x)$ lorsqu'on nous donne une séquence machine ; savoir programmer une fonction.		
Déterminer par le calcul l'ensemble de définition d'une fonction.		
Reconnaître graphiquement l'ensemble de définition d'une fonction.		
Reconnaître graphiquement l'ensemble des images d'une fonction.		
Exprimer $f(x)$ lorsque f est une fonction affine par morceaux, et définie par sa représentation graphique.		
Construire point par point, la représentation graphique d'une fonction.		
Construire point par point, la représentation graphique d'une fonction affine par morceaux.		
Reconnaître sur la représentation graphique d'une fonction f, si elle est paire, impaire, périodique.		
Savoir compléter la représentation graphique d'une fonction paire, impaire,périodique.		
Démontrer par le calcul qu'une fonction est paire, impaire, périodique.		
Reconnaître sur la représentation graphique d'une fonction le sens de variation d'une fonction et dresser le tableau de variations.		
Déterminer par le calcul le sens de variation d'une fonction et dresser le tableau de variations.		
Reconnaître sur la représentation graphique un maximum, un minimum.		
Lire sur un tableau de variation, un maximum, un minimum.		
Connaître, variations et représentations graphiques des fonctions : $x \to ax+b$; $x \to \lvert x \rvert$; $x \to x^2$; $x \to \cos x$; $x \to \sin x$.		
Résoudre graphiquement une équation du type $f(x) = k$ avec k constante. *Résoudre graphiquement une inéquation du type $f(x) \leq k$, $f(x) \geq k$ ...*		
Résoudre un problème en réalisant un graphique.		

Exemple 2 :

A l'issue du problème, le professeur dévoile ses objectifs et les confronte, avec les élèves, aux aides qu'il avait proposées.

ABCD est un rectangle et M est un point situé à l'extérieur de ce rectangle.
d_1 est la perpendiculaire à (AM) passant par C.
d_2 est la perpendiculaire à (BM) passant par D.

Les droites d_1 et d_2 se coupent en O.

Prouver que (OM) est perpendiculaire à (AB).

Voici trois propositions d'aides suivant les objectifs du professeur :

$\boxed{A}$

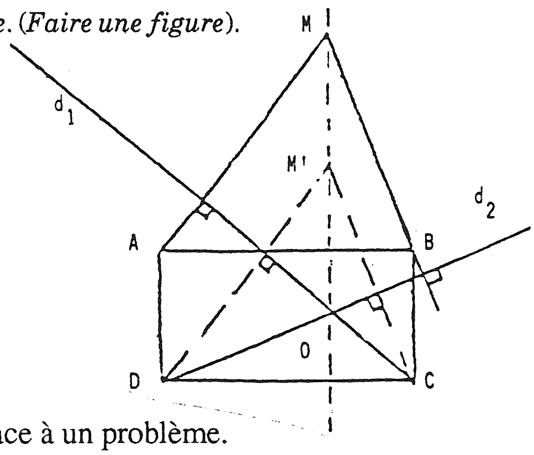
- *Faire une figure.*
- *Aide N° 1 : Construire les images des droites (AM) et (BM) par la translation t de vecteur $\overrightarrow{AD}$.*
- *Aide N° 2 : Soit M' l'image de M par t. Considérer les hauteurs du triangle DCM'.*

$\boxed{B}$

- *Questions de cours préliminaires.*
  * *Définition et propriété des hauteurs d'un triangle.*
  * *Image d'une droite par une translation.*
  * *Images de deux droites sécantes en M par une translation.*
- *Utiliser ces propriétés pour résoudre le problème. (Faire une figure).*
- *Aide : Utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.*

$\boxed{C}$

- *On donne la figure suivante.*



Aide : utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{AD}$.

OBJECTIFS

$\boxed{A}$
- Observer le comportement de l'élève face à un problème.
- Tester l'aptitude à imaginer des pistes pour la résolution.

$\boxed{B}$
- Tester certaines connaissances.
- Tester l'aptitude à les utiliser pour résoudre un problème.
- Tester l'aptitude à organiser une démarche.

$\boxed{C}$
- Tester l'aptitude à "lire" une figure.
- Tester l'aptitude à traduire des propriétés indiquées sur la figure et à les exploiter.
- Tester l'aptitude à organiser une démarche.

$\boxed{A}\boxed{B}\boxed{C}$
- Tester l'aptitude à communiquer, à organiser la rédaction de la solution, une fois le problème résolu.

VI - AUTO-EVALUATION

A A propos des fiches concernant les savoir-faire (voir, par exemple, page 12) , deux étapes :

1 - Découverte des savoir-faire à acquérir, les identifier, les formuler.

2 - Acquisition des savoir-faire.

Il s'agit ici de développer le premier point, tout comme au chapitre 2 (page 20), il s'agit, dans le même esprit, d'activités prévues pour reconnaître la nature d'un problème.

- Pour la fiche concernant le chapitre "fonctions numériques", le professeur propose une liste établie de savoirs-faire et des exercices couvrant les savoir-faire du chapitre.

  Avant toute résolution, l'élève se pose la question "qu'est-il demandé de faire dans cet exercice ?" Ou bien, dans le libellé, la question est clairement formulée, l'élève essaie alors de s'en imprégner (pour un repérage ultérieur), ou bien il la formule d'une autre façon, puis, la liste des savoirs-faire étant donnée, il indique la référence dans la deuxième colonne afin de pouvoir s'y reporter en cas de besoin. Alors,, seulement intervient la résolution.

  Ultérieurement, à l'occasion d'autres exercices, ou d'autres problèmes, il faut amener l'élève à identifier les savoirs-faire qui interviennent.
  La troisième colonne est prévue pour l'auto-évaluation en cours d'année, mais, cette fois en ce qui concerne l'acquisition de la "technique" correspondant au savoir-faire (point sur lequel nous ne nous attardons pas ici).

- Le but de cettre démarche est que, lorsqu'un chapitre nouveau est abordé et des exercices proposés, l'élève puisse seul,
  * extraire et formuler les savoirs-faire nouveaux,
  * en dresser la liste pour les repérer dans des exercices ou probèmes futurs,
  * vérifier ensuite s'il a acquis ou non ce savoir-faire, ceci, au cours de l'année, et afin que cela devienne une démarche naturelle dans les années à venir.

- L'acquisition de repérage et de formulation de savoir-faire ne peut être que progressive. De la part du professeur, un suivi de ce travail est essentiel. Il y a nécessité d'un aspect répétitif. Car il est certain que ce type d'activités est déroutant pour l'élève dont l'objectif primordial est "trouver la solution". La première fois où le professeur donne, comme recherche une série d'exercices sur un chapitre précis, avec la liste déjà constituée des savoir-faire correspondants, la consigne étant "repérer, identifier dans chaque exercice le ou les savoir-faire ; ne pas résoudre l'exercice", les élèves sont déroutés car "ce n'est pas faire des mathématiques".

  La prise de conscience est progressive et l'élève en ressent les bienfaits lors de la résolution d'un problème ; il sent alors qu'il possède un bagage intéressant, un acquis, qui lui permet d'aborder avec plus d'assurance le problème où bien d'autres aspects entrent en jeu.

$\boxed{B}$ Q.C.M.

Dans chaque cas une, et une seule, des réponses est exacte.,

$\boxed{1}$
L'équation $2x = 0$ *a pour solution :*
- $x = -2$ □
- $x = \frac{1}{2}$ □
- $x = 0$ □

$\boxed{2}$
L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 = 1$ *est :*
- $\{1\}$ □
- $\{-1\}$ □
- $\{-1 ; 1\}$ □

$\boxed{3}$
L'ensemble des solutions de l'équation $(x - 1)^2 = 0$ *est :*
- $\{-1 ; 1\}$ □
- $\{1\}$ □
- $\{-1\}$ □

$\boxed{4}$
L'ensemble des solutions de l'équation $x^2 - x = 0$ *est :*
- $\{0\}$ □
- $\{1\}$ □
- $\{0 ; 1\}$ □

$\boxed{5}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $2x + 1 > 0$ *est :*
- $\left]-\frac{1}{2} \quad +\infty\right[$ □
- $\left[-\frac{1}{2} \quad +\infty\right[$ □
- $\left]+\infty \quad -\frac{1}{2}\right[$ □

$\boxed{6}$
L'ensemble des solutions de l'inéquation $x^2+1 \geq 0$ *est :*
- $\mathbb{R}$ □
- $\emptyset$ □
- $[-1 ; +1]$ □

$\boxed{7}$
Si x est strictement supérieur à 1 *alors :*
- $x^2 < x$ □
- $\sqrt{x} < x$ □
- $x < \frac{1}{x}$ □

$\boxed{8}$
Pour tout nombre x supérieur à 2 *:*
- $x > 4$ □
- $x \geq -1$ □
- $\frac{1}{x} > \frac{2}{3}$ □

$\boxed{9}$
Pour tout nombre x inférieur strictement à -1 *:*
- $x - 1 > 0$ □
- $x^2 - 1$ □
- $-1 \leq x^2 \leq 1$ □

$\boxed{10}$
Pour tout nombre x vérifiant $0 \leq x < 1$ *:*
- $x^2 \geq x^3$ □
- $\sqrt{x} < x$ □
- $\frac{1}{x} < 1$ □

Remarque : On peut parfois, à titre de remdiation faire bâtir, par les élèves eux-mêmes, un Q.C.M. se rapportant justement aux points où ils ont commis des erreurs.

C Il est parfois efficace, comme dans cette fiche de susciter l'erreur pour que l'élève prenne conscience du risque.

NB : Dire que l'énoncé est VRAI signifie qu'il est vérifié dans tous les cas.
Dire que l'énoncé est FAUX signfie qu'il existe au moins un cas où il ne se vérifie pas.

Dans chacun des cas, indiquez seulement dans la colonne adéquate V ou F.

	V	F		Evaluation
1 $\frac{1}{21\times 13} = \frac{1}{21} \times \frac{1}{13}$				
2 $\frac{15}{21\times 13} = \frac{15}{21} \times \frac{15}{13}$				
3 $-5^3 = (-5)^3$				
4 $3 - \frac{x+5}{7} = \frac{21-x+5}{7}$				
5 $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = 2 - \sqrt{5}$				
6 *Pour 3 nombres non nuls* $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{\frac{b}{c}}$				
7 *$-x$ est un nombre négatif.*				
8 *L'opposé de l'inverse de x est égal à l'inverse de l'opposé de x.*				
9 *L'opposé d'un produit est égal au produit des opposés des facteurs.*				
10 *Le carré d'une somme est égal à la somme des carrés des termes.*				
11 *Le cube d'un produit est égal au produit des cubes des facteurs.*				

Dans ce qui suit, entourez la bonne réponse ; le ? signifie qu'aucune des réponses précédentes n'est la bonne.

12 $21^3 + 21^2 = \begin{cases} 21^5 \\ 21^6 \\ (2\times 21)^5 \\ ? \end{cases}$	15 $\frac{13^{12}}{13^{14}} = \begin{cases} 13^3 \\ 13^{26} \\ \frac{12}{14} \\ ? \end{cases}$	18 $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \begin{cases} 5 \\ 7 \\ 12 \\ ? \end{cases}$
13 $21^7 \times 21^3 = \begin{cases} 21^{21} \\ 21^{10} \\ 21^4 \\ ? \end{cases}$	16 $\frac{14^n}{2} = \begin{cases} 7^n \\ 2^{n-1}\times 7^n \\ 2\times 7^n \\ ? \end{cases}$	19 $\sqrt{144+25} = \begin{cases} 17 \\ 13 \\ 60 \\ ? \end{cases}$
14 $\frac{13^6}{21^3} = \begin{cases} \left(\frac{13}{21}\right)^2 \\ \left(\frac{13}{21}\right)^3 \\ ? \end{cases}$	17 $(2a)^{-1} = \begin{cases} -2a \\ 2\times\frac{1}{a} \\ \frac{0,5}{a} \\ ? \end{cases}$	20 $\sqrt{64} = \begin{cases} -8 \\ 8 \\ 8\,et\,-8 \\ ? \end{cases}$

CHAPITRE 2

PROCESSUS D'APPRENTISSAGE EN MATHEMATIQUES

I - SE PREPARER A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME

II - ACQUISITION D'UNE NOTION NOUVELLE OU D'UNE TECHNIQUE NOUVELLE

I - SE PREPARER A LA RESOLUTION D'UN PROBLEME

1 - Lire un texte

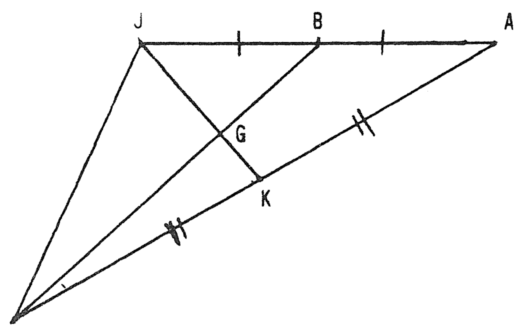
Il a été beaucoup écrit sur la question et cela fait appel à une capacité générale ; chacun se reportera donc à ses écrits de référence ! Cependant, il est utile de rappeler que c'est une acquisition indispensable sur le chemin de la résolution d'un problème. Contentons nous de dire, en ce qui concerne les mathématiques, que nous aurons à coeur, parmi les activités aidant à cette acquisition, de favoriser les exercices permettant de passer d'un langage à un autre, ce qui, bien sûr ne peut pas se faire sans une bonne compréhension du texte.

<u>Exemple</u> :

Perdu dans le brouillard
(D'après *Jeux et stratégies N° 40*)
cité dans "Terracher (Hachette), classe de 2nde

Après un instant de panique, Charles se mit à nager jusqu'à la rencontre d'une bouée jaune auprès de laquelle il repris des forces. A ce moment, une éclaircie lui permit d'entrevoir une bouée bleue vers laquelle il se dirigea, et qu'il dépassa d'une distance égale à celle qu'il venait de parcourir.
Une nouvelle éclaircie laissa apparaître alors une bouée rouge vers laquelle il se dirigea. A mi-chemin, il obliqua vers la bouée jaune qu'il vit à nouveau. Au tiers de son chemin vers la bouée jaune, il remarqua la bouée bleue à 15 m environ de sa position.

A quelle distance se trouvait-il de la bouée rouge ?



Après la lecture du texte, les élèves vont être amenés à "décoder" et à transposer d'un langage à un autre. Il est donc indispensable qu'ils fassent des remarques telles que :

- *"De la bouée jaune, il entrevoit une bouée bleue vers laquelle il se dirige ... parcourir".*

  Il parcourt donc une distance JA et B est le milieu de $[JA]$.

- *"Une nouvelle éclaircie ... une bouée rouge vers laquelle il se dirigea. A mi-chemin il oblique ... nouveau".*
  (Notons au passage le mot "oblique" qui expliquera pourquoi R n'est pas aligné avec J et A).

  Il oblique donc en un point K milieu de $[AR]$.

- *"Au tiers de son chemin vers la bouée jaune ... position".*
  Soit G le point de $[JK]$ tel que $KG = \frac{1}{3} KJ$
  $GB = 15$.

Après la traduction du texte en langage mathématique, il est aisé pour l'élève de résoudre l'exercice.

N.B. : On pourra pour d'autres exemples consulter "Hachette 2nde" (collection Perspectives - p 13).

Remarque : Ce type d'exercice doit être réalisé en classe. Dans un premier temps, il y a recherche individuelle (éventuellement à l'intérieur d'un groupe de 3, 4 élèves) puis confrontation, avant ou après l'élaboration d'un (ou plusieurs) texte(s) commun(s). Il faut évidemment éviter la recherche de "LA" meilleure solution et au contraire dégager l'intérêt des diverses démarches.

Une séance de travaux dirigés, ou mieux, de "modules" semble préférable à la classe entière.

2 - Reconnaître des types de problème

Il peut être utile après lecture d'un texte d'essayer d'identifier la nature du problème.

Rappelons que les activités préparant les élèves à formuler eux-mêmes les "savoirs-faire" exigés dans un exercice (vu au chapitre 1) les aideront dans cette reconnaissance de la nature du problème.

Reprenons un exemple :

Exercice 1

ABCD étant un parallélogramme, construire M tel que $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{CA}$

Exercice 2

Etant donné un quadrilatère ABCD, montrez que :

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{DA} = 2\overrightarrow{CA}$

Savoir-faire de l'exercice 1 : *"Construire un point défini à l'aide d'une relation vectorielle"*.
Savoir-faire de l'exercice 2 : *"Démontrer une égalité vectorielle"*.

La nature du problème n'est donc pas la même...

On pourrait, en seconde, classer les problèmes sous $\boxed{\text{les rubriques}}$:

1 Démontrer.

2 Calculer.

3 Résoudre.

4 Représenter.

5 Conjecturer.

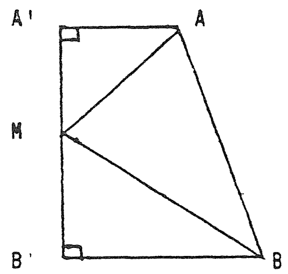
6 Autres cas (par exemple : classer...) (plus rares).

Très souvent, de part la formulation, la nature du problème est relativement claire, encore qu'on rejoigne ici les questions de "lecture d'un texte", "répondre à la question posée". Par exemple à l'exercice "résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système $\begin{cases} \left(\sqrt{2}-1\right) x + y = 1 \\ x + \left(\sqrt{2}+1\right) y = \sqrt{2}+1 \end{cases}$ des élèves de seconde répondent "les droites sont parallèles". Ils n'ont pas saisi le sens de la question "Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ " et n'ont pas répondu en clair à la question posée.

Nous proposons donc ici, une liste d'exercices où il s'agit d'identifier la nature du problème. Le libellé fait que la réponse n'est peut-être pas toujours immédiate, ceci volontairement afin de faire réfléchir. Il est bien entendu qu'au moment d'un contrôle, le texte sera volontairement explicite.

$\boxed{1}$

Quelle est la position de M sur [A'B'] pour que MA = MB ?



$\boxed{2}$

a) ***Vérifier les égalités suivantes***

$5^2 - 4^2 = 9$; $5^2 - 4^2 = 5 + 4$
$8^2 - 7^2 = 15$; $8^2 - 7^2 = 8 + 7$
$10^2 - 9^2 = 19$; $10^2 - 9^2 = 10 + 9$

b) ***Proposer des valeurs numériques pour les points d'interrogations***

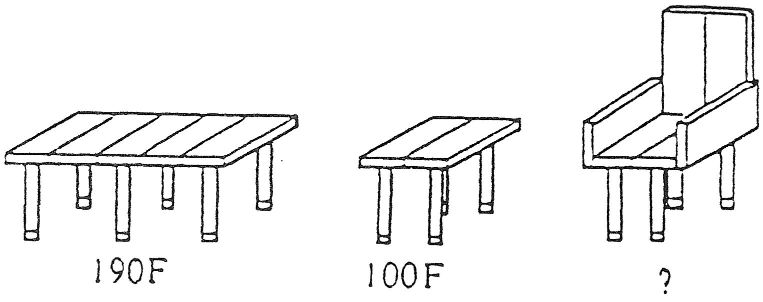
$38^2 - 37^2 = ? + ?$
$315^2 - ? = ?$

c) ***Peut-on écrire un théorème généralisant les observations précédentes ? Si oui, le démontrer.***

$\boxed{3}$

Ce marchand de meubles en kit est très logique quand il fixe ses prix.

D'après vous, combien devrait coûter le fauteuil ? *(D'après "Jeux et Stratégies").*



4

On veut acheter x disques à 90 F chacun et y calculatrices à 180 F chacune avec $x > 1$ et $y > 1$ et pour une dépense totale inférieure à 900 F.

1) *Montrer que résoudre ce problème revient à chercher tous les couples d'entiers (x,y) vérifiant le système*
$$\begin{cases} x > 1 \\ y > 1 \\ y < -\frac{1}{2}x + 5 \end{cases}$$

2) *Montrer graphiquement l'existence de 4 solutions et donner ces solutions.*

5

Soit ABC un triangle. Placer les points I, J, K, L, M et N définis par :

$\vec{AI} = -2\vec{BC}$; $\vec{AJ} = \frac{1}{2}\vec{BC}$; $\vec{BK} = \frac{2}{3}\vec{AC}$; $\vec{BL} = (-2)\,\vec{CA}$

$\vec{CM} = (-3)\,\vec{AB}$; $\vec{NC} = 2\vec{AB}$

6

La charge d'un électron vaut $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

Quelle est l'intensité I d'un courant continu qui correspond au passage de $n = 12 \times 10^{24}$ électrons à travers une section d'un fil conducteur pendant 120 secondes.

Rappel : $I = \frac{n \times e}{t}$ où t est en secondes et I en ampères.

7

Soit ABC un triangle. Construire les points I et J définis par :

$\vec{AI} = \vec{AB} + \vec{AC}$; $\vec{AJ} = \vec{AB} - \vec{AC}$

a) ***Exprimez $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{AC}$. En déduire que les droites (IJ) et (AC) sont parallèles.***

b) ***Quelle est la nature du quadrilatère ACBJ ?***

8

Soient 3 points A, B, C non alignés du plan.

Déterminer le point M tel que $2\vec{MA} - 3\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{AB}$.

9

Déterminer les réels x tels que $|x - 2| < \frac{1}{2}$

10

Soit $(o, \vec{i}, \vec{j})$ *un repère du plan.*

1) *Donner un vecteur directeur, le coefficient directeur, et deux points de la droite (D) d'équation :* $3x - 2y + 4 = 0$.

2) *Donner l'équation réduite de la droite* Δ *dont on connaît le coefficient directeur* $m = 3$ *et un point* $A\ (-2,3)$.

3) *Soit les points* $A\ (-2,3)$ *et* $B\ (5,-1)$.
Donner le coefficient directeur et un vecteur directeur de la droite (AB).

11

Résoudre graphiquement le système d'inéquations :

$$\begin{cases} 3x - y + 4 \geq 0 \\ 2y > 3 \end{cases}$$

12

Soit un rectangle ABCD et les points E et F tels que $\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ *et* $3\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FB}$.

Etablir le parallélisme des droites (EF) et (DB).

13

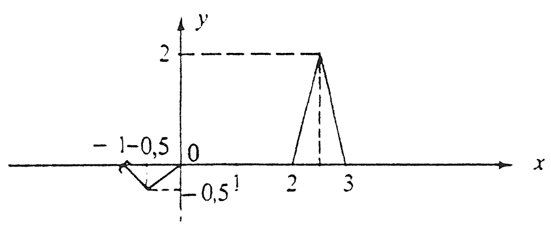
Tel modèle de voiture coûtait 80 000 F au 01.01.1990.
Après deux augmentations de même taux, ce prix est maintenant de 83 232 F.

Déterminer le taux commun de ces deux augmentations.

14

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.
On la suppose périodique, de période 2.

Compléter la courbe pour les abscisses comprises entre −2 et 5.



15

ABC est un triangle de centre de gravité G.
A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [BC], [AC] et [AB].

En utilisant seulement ces sept points, exprimer sous la forme $\vec{u}$ ou $k\vec{u}$ les sommes suivantes :

$\vec{AB} + \vec{AC}$; $\vec{BC} + \vec{AG}$; $\vec{A'A} + \vec{B'A} + \vec{C'A}$

16

On enlève 1 au carré d'un nombre entier impair.

Obtient-on toujours un multiple de 8 ?

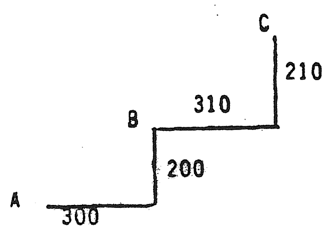
17

Trois villes A, B, C sont situées le long d'une route rectiligne.
A et B sont distantes de 900 m, B et C sont distantes de 1200 m et B est entre A et C.
Une personne habite entre A et C à x mètres de A.
Elle fait quotidiennement deux allers-retours entre sa maison et la ville A, 1 entre sa maison et la ville B et 3 entre sa maison et la ville C.

Quelle est, en fonction de x, la distance parcourue par jour par cette personne ?

18

Les points A , B et C sont-ils alignés ?



19

Si l'on augmente de 3 mètres la longueur du côté d'un carré, son aire augmente de 45 mètres carrés.

Quelle est l'aire de ce carré ?

20

$\frac{1}{4} = \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} + \frac{1}{40} + \frac{1}{50} + \frac{1}{60} + \frac{1}{\otimes}$

Retrouver le nombre caché sous la tache.

On pourra ainsi classer ces exercices :

Rubrique 1 Exercices N° 2 - 7 - 12 - 16 - 18

2 Exercices N° 7 - 6 - 10 - 15 - 17

3 Exercices N° 1 - 3 - 8 - 9 - 11 - 13 - 19 - 20

4 Exercices N° 4 - 5 - 11 - 14

5 Exercices N° 2 - 7 - 16 - 18

Bien entendu, la classification n'est pas universelle et n'est pas fondamentale, en soi. Ce qui est important, c'est que les "élèves se posent des questions en cas de blocage et fassent appel à une démarche qu'ils choisissent parce qu'elle est souvent efficace dans ce qu'ils pensent être ce type de problème.

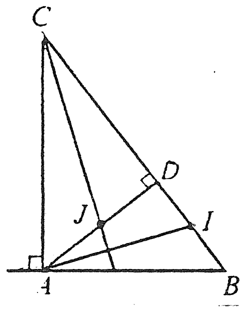
En particulier il est primordial de faire la différence entre "démontrer une égalité" où on part en général de l'un des deux membres et "résoudre une équation", (qu'elle soit numérique, vectorielle, géométrique) où on transforme en général l'écriture de cette équation.

3 - Aborder un problème en partant de la conclusion

Voici un exemple de géométrie où il peut être intéressant de partir de la conclusion (si la géométrie analytique n'a pas été abordée).

Le triangle ABC est rectangle en A, et D est le pied de la hauteur issue de A. On désigne par I le milieu de [B, D] et par J celui de [A, D].

Montrer que les droites (AI) et (CJ) sont perpendiculaires.



Bien mettre en évidence hypothèse et conclusion.

Avoir toujours sous les yeux la figure.

<u>Hypothèses</u>	<u>Conclusion</u>
(AD) hauteur du triangle ABC	
ABC triangle rectangle en A	(AI) $\perp$ (CJ)
I milieu de [BD]	
J milieu de [AD]	

*** Passer en revue les outils dont on dispose pour montrer que deux droites sont perpendiculaires.**

$\boxed{1}$ Hauteurs et médiatrices d'un triangle.

$\boxed{2}$ Tangente à un cercle.

$\boxed{3}$ Rectangle, carré.

$\boxed{4}$ Diagonales d'un losange.

$\boxed{5}$ Deux droites étant parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.

$\boxed{6}$ Angle de mesure 90°.

$\boxed{7}$ Pythagore.

(selon le moment de l'année, la liste se complète...).

*** On regarde ensuite hypothèses et figure et on va essayer de "trouver la bonne piste". Dans un premier temps, il va y avoir élimination...**

Elimination de $\boxed{2}$ (pas de cercle apparent dans la figure).

de $\boxed{3}$ (au premier abord, on ne voit pas de rectangle, carré

de $\boxed{4}$ ... ni de losange) : 2 angles droits de la figure ne font pas partie d'un même quadrilatère.

de $\boxed{5}$ toujours dans un premier temps, on ne voit pas encore de droites parallèles.

de $\boxed{6}$ de prime abord l'idée de calculer la mesure de l'angle formé par (AI) et (CJ) ne semble pas devoir être retenue.

de $\boxed{7}$ le libellé du texte ne semble pas appeler à des calculs de longueurs.

Par contre, un regard sur hypothèses et figure fait que l'on peut être attiré par la piste "hauteurs ou médiatrices".

Durant ce premier travail, il est intéressant que l'élève ait réellement écrit les pistes possibles sur son brouillon et les ait barrées au fur et à mesure, sans les effacer. Le professeur agit de même au tableau.

*** Comment exploiter l'idée ou la piste ?**

"Hauteurs ou médiatrices" on peut encore hésiter car dans le texte, il y a des milieux et des angles droits.

De toutes façons, l'idée qui nous guide est "les 3 hauteurs (ou les trois médiatrices) d'un triangle sont concourantes" donc il faut trouver le triangle.

Le premier angle droit est en D, la droite (AD) est perpendiculaire à (CB), aussi penserait-on plutôt en termes de hauteur, le côté correspondant serait (CI) ou (CB) donc triangle CAI ou triangle CAB.

La deuxième hauteur pourrait être (CA) ou (BA) et donc triangle CAB mais ... à nouveau un regard sur la conclusion, on veut prouver que (CJ) perpendiculaire à (AI).

Donc idée retenue : "hauteurs du triangle CAI".

*** Il s'agit ensuite de découvrir les étapes de la démarche. Partons toujours de la conclusion.**

- Pour que l'élève ne s'y trompe pas, le professeur peut adopter la disposition suivante : il fait figurer au tableau une flèche descendante (comme ci-dessous) et commence à écrire en bas de cette flèche :

"$(CJ)\perp(AI)$" (numéroté 4 dans le schéma ci-dessous).

Il conseille à l'élève de faire de même.

- Donc pour démontrer que "$(CJ)\perp(AI)$" il faudrait démontrer que (CI) est hauteur du triangle CAI, le professeur écrit au dessus de 4 :

"(CJ) hauteur du triangle CAI" (numéroté 3 dans le schéma).

- (CJ) serait une hauteur du triangle CAI ; puisque (AD) serait alors la hauteur issue de A dans ce triangle, quelle serait la dernière hauteur ? Réponse : (IJ). Il faudrait donc démontre que $(IJ)\perp(AC)$. Au dessus de 3, on écrit :

"$(IJ)\perp(AC)$" (numéroté 2 dans le schéma).

- On revoit à nouveau la liste "démontrer que 2 droites sont perpendiculaires" avec toujours un regard sur la figure et les hypothèses et en général les élèves pensent très vite qu'il faut démontrer que (IJ) // (AB) au dessus de 2 ont écrit :

"(IJ) // (AB)" (numéroté 1 dans le schéma).

1) (IJ) // (AB)
2) $(IJ)\perp(AC)$
3) (CJ) hauteur du triangle CAI
4) $(CJ)\perp(AI)$

Maintenant l'élève sait qu'il lui faut démontrer :

1) (IJ) // (AB) ; 2) $(IJ)\perp(AC)$ ...
Il a ainsi établi un plan de solution.

*** Et si la piste retenue nous avait conduits à une impasse ?**

Peut-être n'avons nous pas choisi le bon outil ? Revoir la liste qui n'a pas été effacée, parfois aussi on se rendra compte que l'on n'avait pas terminé la liste des outils.

* * * *

Ce type de recherche ne peut être profitable pour l'élève que s'il est à type répétitif, à chaque fois en particulier qu'il est "bloqué" : je ne sais pas où commencer, je ne vois pas". Il ne faut pas bien sûr que cela soit occasion de "lourdeur" pour l'élève qui a l'intuition de la démarche, surtout pas ! Mais dans ce cas, le professeur peut très bien demander à cet élève d'établir une liste de questions intermédiaires pour son camarade qui n'a pas réussi (nous y reviendrons au moment du plan de solution).

Insistons sur le fait qu'au début, il est indispensable d'écrire systématiquement au tableau la liste d'outils et de la rayer au fur et à mesure, alors seulement en cours d'année, lorsque l'élève aura acquis le réflexe, cette liste se déroulera rapidement dans sa tête, et en pensée il éliminera les éléments de la liste à ne pas retenir.

Remarque 1 : Dans la phase que nous n'abordons pas ici et qui concerne la présentation de la démonstration, nous n'excluons pas la possibilité de l'élève présentant son travail de la façon suivante "pour démontrer 4) ... il suffit que je démontre 3) car ... et pour ... il suffit que je démontrer 1)" en argumentant correctement. Mais là n'est pas l'objet de ce paragraphe.

Remarque 2 : Nous avons mis les détails de la démarche bien que cela ne se passe jamais deux fois de façon identique, mais pour insister sur le dialogue permanent entre le professeur et les élèves. Toute la difficulté est de jouer le rôle de guide tout en laissant la bride sur le cou.

Là encore après l'étude approfondie en classe de deux exercices relevant de cette démarche, l'élève doit en avoir dégagé une synthèse à laquelle il devra faire référence en cas de difficulté. Ce qui n'exclut pas le retour en arrière avec beaucoup, soit pour la suggérer, soit pour aider à la réaliser.

4 - Etablir un plan de solution

Il s'agit essentiellement de trouver un "plan de travail" ou "un plan de solution" et d'exclure dans un premier temps toute rédaction ou argumentation. C'est une activité faite en classe, puis d'autres exercices du même type sont proposés en recherche à la maison, et il est souhaitable aussi d'en proposer en évaluation.

Exemple 1 :

Reprenons comme premier exemple l'exercice de "Aborder un problème en partant de la conclusion". Ici, nous ne nous attardons pas sur les divers moyens de trouver le plan (l'un des moyens peut être "partir de la conclusion"), mais sur la nécessité pour l'élève d'avoir établi son plan de travail, en s'assurant qu'il est réalisable.

Voici, pour cet exercice des plans de solution qui ont été proposés, (avec des formulations un peu différentes).

Plan N° 1

1) Prouver que $(IJ) // (AB)$.
En déduire $(IJ)\perp(AC)$.

2) Dans le triangle CAI, donner deux hauteurs.

3) Quelle est la troisième hauteur du triangle CAI ?
En déduire $(AI)\perp(CJ)$.

Plan N° 2
(Formulation légèrement différente)

1) Prouver que $(IJ) // (AB)$.

2) Prouver que $(IJ)\perp(AC)$.

3) Démontrer que I est l'orthocentre du triangle CAI.

4) Déduire de ce qui précède que $(CJ)\perp(AI)$.

Plan N° 3
(Si l'élève possède l'outil analytique)

Repère choisi $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

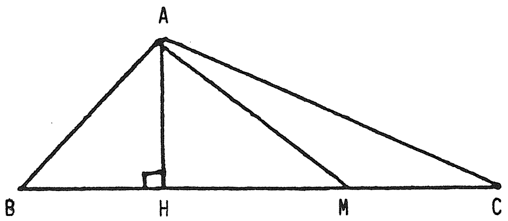
1. Calculer les coordonnées de D (en traduisant $\overrightarrow{AD}$ orthogonal à $(\overrightarrow{BC})$ et $D \in (BC)$).

2. Calculer les coordonnées de I et J.

3. Prouver que $(CJ) \perp (AI)$.

Exemple 2 :

L'aire d'un triangle est 48 m^2.
La hauteur et la médiane issues d'un même sommet mesurent respectivement 6 cm et 8 cm.
Prouver que ce triangle est rectangle.



(Figure non à l'échelle)

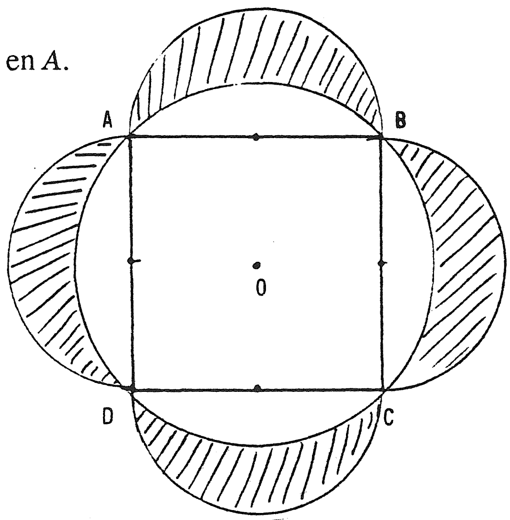
Plan de travail :

1. Calcul de BC $(\mathcal{A} = \frac{1}{2} BC \times AH)$
2. Calcul de $\frac{1}{2} BC$
3. Comparaison de AM et de $\frac{1}{2} BC$
4. En déduire que le triangle est rectangle en A.

Exemple 3 : (Proposé en test)

Le carré ABCD est inscrit dans un cercle de centre O. [AB] a pour longueur a.
Les demi-cercles ont pour centre les milieux des côtés du carré.

Le but de l'exercice est de trouver les étapes pour calculer l'aire de la partie hachurée.



Etablir un plan de solution pour le calcul de cette aire notée $\mathcal{A}$; on utilisera des notations et un vocabulaire adéquats, afin de permettre une bonne compréhension de la démarche. On ne demande aucun calcul.

Exemple 4 :

Soient trois points, P, Q, R tels que $\overrightarrow{PR} = -3\overrightarrow{PQ}$ $\boxed{1}$
Déterminer le rapport de l'homothétie de centre R qui transforme Q en P.

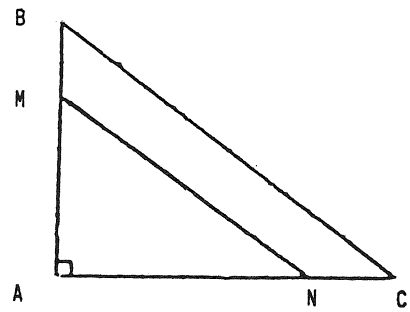
Plan de solution

$\boxed{1}$ Transformer l'égalité vectorielle $\boxed{1}$ en ne faisant intervenir que les vecteurs $\overrightarrow{RQ}$ et $\overrightarrow{RP}$.

$\boxed{2}$ Ecrire cette égalité vectorielle sous la forme $\overrightarrow{RP} = k\overrightarrow{RQ}$

$\boxed{3}$ Conclure.

Exemple 5 :



$AB = 12$ $\quad BC = 20$

M est un point du segment [AB].
La parallèle à (BC) passant par M coupe (AC) en N.

Où doit–on placer M pour que le triangle AMN et le trapèze BCNM aient le même périmètre ?
(On posera $AM = x$*)*

Plusieurs plans sont possibles. Par exemple :

$\boxed{1}$ Calcul de MN (en fonction de x)
$\boxed{2}$ Calcul de AC (en fonction de x)
$\boxed{3}$ Calcul de AN (en fonction de x)
$\boxed{4}$ Calcul de $p(AMN)$ (en fonction de x)
$\boxed{5}$ Calcul de BM (en fonction de x)
$\boxed{6}$ Calcul de NC (en fonction de x)
$\boxed{7}$ Calcul de $p(BMNC)$ (en fonction de x)
$\boxed{8}$ Résolution de l'équation : $p(AMN) = p(BMNC)$

Autre possibilité : $\boxed{2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{3}$ $\boxed{1}$ $\boxed{6}$ $\boxed{4}$ $\boxed{7}$ $\boxed{8}$

Dans ce type d'activités, il est essentiel d'indiquer qu'on ne demande ni calculs, ni argumentation, ni rédaction.

Le but visé est d'éviter que les élèves partent dans toutes les directions sans savoir s'ils vont aboutir ou non.

D'autre part, il est important d'éviter que les élèves développent essentiellement des capacités exécutives, ce qui est le risque avec des problèmes "à tiroirs".

On peut aussi envisager en classe une confrontation des différents plans de travail basée prioritairement sur la justification de l'inefficacité de tel ou tel autre et secondairement sur la justification de l'efficacité du sien propre.

5 - Argumenter

Que doit-on exiger d'un élève lorsqu'il rédige la solution d'un problème ? Question qui a fait et fera couler beaucoup d'encre...

Ne pourrait-on dire cependant que toute affirmation doit s'appuyer

1) soit sur une hypothèse, une donnée initiale,

2) soit sur une propriété, une définition, un théorème,

3) soit sur le résultat d'une question précédente.

L'idée fondamentale est que l'élève sache le pourquoi de ce qu'il écrit et ne fonce pas tête baissée, yeux fermés, en espérant que "ça va passer" !! Alors, lorsque le réflexe est acquis, que l'élève écrive le pourquoi ou ne l'écrive pas, ... ce n'est plus le point le plus important.

On ne peut pas faire unanimité sur la question. Certains sont favorables, en 1er cycle, et en seconde - du moins durant un bon trimestre - d'exiger des élèves, à l'occasion de toute résolution de problème, toutes les justifications afin qu'ils acquièrent le réflexe ; dans cette période d'apprentissage, il est important que le professeur écrive lui aussi les justifications au tableau. C'est astreignant, mais n'oublions pas qu'à cette période de la vie scolaire de l'élève, ce qui est écrit est toujours pour lui plus important que ce qui est dit. Alors, très progressivement, lorsque l'élève sera convaincu du bien-fondé des justifications, il sera possible de donner les justifications oralement.

Cela suppose donc, au départ, soin et vigilance, à l'occasion de la résolution de tout problème (traité en classe, ou à l'occasion d'une correction), sinon l'élève ne pourra pas comprendre pourquoi parfois on argumente et parfois on n'argumente pas.

Voici par ailleurs, dans la recherche de l'acquisition de cette maîtrise de l'argumentation, quelques pistes complémentaires.

- donner des exercices où les étapes de la démonstration sont détaillées mais non justifiées,

- donner des exercices où il manque des étapes dans la rédaction et demander à l'élève de les retrouver,

- donner des propositions de rédactions d'élèves et voir en quoi elles sont correctes ou non, voir ce qui est inutile ou ce qui manque.

En résumé, on peut dire qu'il doit exister un apprentissage des techniques et règles de l'argumentation en mathématiques, comme par exemple pour la dissertation en français.

Et il ne suffit évidemment pas d'augmenter la difficulté du sujet à traiter pour obtenir une amélioration de la maîtrise.

6 - Conclusion

Ces activités, qui ne sont pas limitatives doivent aider l'élève à acquérir des méthodes afin de pouvoir traiter un problème avec plus d'assurance. En conclusion, voici un plan que l'on peut proposer aux élèves (voir "Objectifs de référence en classe de Seconde").

"Comment aborder un problème et le traiter"

1 Aborder une activité
Lire le texte, mettre en évidence les mots-clés, les mots inconnus.

2 Organiser son action
Que demande-t-on ? Quelle est la nature du problème ?

3 Retrouver une situation de référence, un outil de référence.

4 Proposer un plan de solution.

5 Réaliser
Mettre en oeuvre le plan 4
Préciser les savoir-faire utilisés.
Valider son résultat.

6 Communiquer
Argumenter, s'exprimer, rédiger.

II - ACQUISITION D'UNE NOTION NOUVELLE OU D'UNE TECHNIQUE NOUVELLE

INTRODUCTION

Avant toutes choses il est nécessaire que des exercices soient faits pour montrer à l'élève la nécessité d'introduire une nouvelle notion ou une nouvelle technique. Prenons l'exemple connu de l'étude du volume d'une boîte parallélépipédique (exemple qui peut être pris dans l'approche de la notion de fonction et de ce qui s'y rattache). Dans cet exemple, au cours de l'exercice, on demande à l'élève de démontrer ce qu'il pressent, à savoir que pour tout x de l'intervalle $[0,6]$, $V(x) \leq V(2)$.

Question : Nature du problème.

Réponse : Résoudre une inéquation.

Question : Peut-on résoudre une inéquation ?

Réponse : Oui, une inéquation du 1er degré.

Question : Est-ce le cas ?

Réponse : Non.

D'où la nécessité de trouver une technique pour résoudre une telle inéquation, d'où les idées qui arrivent petit à petit : "sachant étudier le signe d'une expression du 1er degré, on pourrait étudier le signe d'un produit de facteurs du 1er degré -puisqu'on sait étudier le signe d'un produit"... donc "transformons l'inéquation $V(x) \leq V(2)$ en une inéquation équivalente $V(x) - V(2) \leq 0$ et ensuite il faudrait pouvoir transformer l'expression $V(x) - V(2)$ en un produit de facteurs du 1er degré"... On arrive ainsi à la nécessité de trouver des techniques de factorisation complémentaires à celles vues en troisième si celles-ci ne répondent pas aux besoins présents.

Cette nécessité de "sauter un obstacle" pour introduire une notion nouvelle ou une technique nouvelle se fait bien sentir par exemple en seconde lorsqu'on introduit l'équation générale d'une droite sous la forme $ax + by + c = 0$. Les élèves "s'accrochent" aux techniques de troisième. L'élégance et la rapidité des nouvelles méthodes ne sont pas toujours convaincantes, sans doute l'apport nouveau ne répond-il pas à un besoin nouveau ?

Remarque : Il va de soi que tous les élèves n'étant pas capables de se poser eux-mêmes, *sans aide*, les questions que l'on voudrait les voir se poser, il convient de doser et d'individualiser les aides mais si l'objectif est de leur faire franchir un obstacle, il est évident qu'on ne doit pas les transporter à bout de bras de l'autre côté en décomposant excessivement en aides élémentaires. L'aide devrait le plus souvent consister à les amener à se poser une question pour laquelle ils choisiront la réponse entre deux ou trois possibilités.

A cet égard la constitution progressive d'un fichier méthodologique est particulièrement efficace.

En ce qui concerne des règles nouvelles de calcul on pourrait proposer le schéma suivant ($\boxed{2}$ et $\boxed{3}$ peuvent être menés de front, en les distinguant).

$\boxed{1}$ Apprendre les règles.

$\boxed{2}$ Penser à les appliquer.

$\boxed{3}$ Savoir les appliquer.

$\boxed{4}$ But Final : les faire fonctionner par réflexe.

Nous allons proposer :

A - Une activité sur les puissances.

B - Une activité sur le calcul vectoriel

avec, dans chaque cas, les étapes suivantes :

1 - Exercices résolus où on donne toutes les étapes du calcul et l'énoncé de la règle correspondante.
2 - Exercices où toutes les étapes de calcul sont indiquées mais il faut identifier la règle ou la propriété utilisée.
3 - Exercices à traiter où il faut donner les étapes et les règles utilisées à chaque étape.
4 - Exercices qui visent à effectuer les calculs proposés : on ne demande plus alors les justifications, à la limite des étapes peuvent être "sautées" mais l'élève est conscient de sa démarche et la notion est acquise. C'est le but final "faire fonctionner par réflexe". (Nous n'avons pas donné ici d'exercices de type 4).

Cette démarche nous semble propice pour un bon nombre de techniques nouvelles, principalement de calcul.

Nous proposons en C une activité, dans le même esprit, mais plus spécifique, sur la factorisation et en D une activité sur les équations en troisième.

DES PROPOSITIONS

A - PUISSANCES

Avant d'arriver à l'exercice définitif "effectuer les calculs proposés" on peut envisager trois degrés dans les activités proposées (acquisition ou remédiation).

1 - Les étapes sont données et, à chaque étape, la règle de calcul utilisée est énoncée

<u>Exemple</u>

Ecrire sous forme d'un nombre entier les nombres suivants :

$a = (3^2)^3 \quad b = (-2)^4 \times (-3^2)$
$c = 10^3 \times 10^{-1} \quad d = 10^3 + 10^2$

Mettre $B = \dfrac{a^{-2} \times a^{7}}{a^6}$ *sous forme d'une puissance de a.*

* $\boxed{a=(3^2)^3}$

$a = 3^{2\times 3}$

car $(a^n)^p = a^{n\times p}$ pour a réel non nul, n et p entiers.

$a = 3^6$

$a = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

car $a^n = \underbrace{a\times a\times a\ldots\times a}_{n\,fois}$ *pour a réel non nul et n entier positif.*

---

* $\boxed{b=(-2)^4\times(-3^2)}$

$(-2)^4 = (-2) \times (-2) \times (-2) \times (-2)$

car $a^n = \underbrace{a\times a\times a\ldots\times a}_{n\,fois}$ *a réel et n entier positif.*

$(-2)^4 = + (2 \times 2 \times 2 \times 2)$

car $(-a)\,(-b) = + ab$
Le produit d'un nombre pair de réels positifs est un réel positif.
Le produit d'un nombre impair de réels positifs est un réel positif.
On en déduit d'ailleurs que pour
n pair , $(-a)^n = a^n$
n impair $(-a)^n = -a^n$

D'où $(-2)^4 = + 16$
Parailleurs
$(-3^2) = - (3^2) = - (3 \times 3)$
$(-3^2) = -9$

<u>Attention</u> : ne pas confondre -3^2 avec $(-3)^2$
Bien voir que -3^2 traduit "l'opposé de 3^2"
comme on dit -7 qui traduit "l'opposé de 7"
ou $-(2 \times 5)$ qui traduit "l'opposé de (2×5)"

$b = (16) \times (-9)$

car $a \times (-b) = - [a \times b]$

$b = -(16 \times 9)$
$b = -144$

---

* $\boxed{c=10^{-3}\times 10^{-1}}$

$c = 10^{3+(-1)}$

car $a^n \times a^p = a^{n+p}$ pour a réel et n et p entiers.

$c = 10^2$
$c = 10 \times 10$

car $a^2 = a \times a$
ou encore (conséquence pratique) :
$10^2 = 1\underbrace{00}_{2\,zéros}$ $\qquad 10^5 = 1\underbrace{00000}_{5\,zéros}$

$c = 100$

---

* $\boxed{d=10^3+10^2}$

$d = 1000 + 100$
$d = 1100$

en appliquant le dernier résultat ci-dessus.
<u>Attention</u> : nous ne connaissons pas de règle pour le calcul de $a^n + a^p$ ...

---

* $\boxed{B=\dfrac{a^{-2}\times a^7}{a^6}}$

$B = \dfrac{a^{-2+7}}{a^6}$

car $a^n \times a^p = a^{n+p}$

$B = \dfrac{a^5}{a^6}$

$B = a^{5-6}$

$B = a^{-1}$

car $\dfrac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ pour a réel non nul, n et p entiers.

2 - Les étapes sont indiquées mais il faut donner la règle ou la propriété utilisée

Ecrire sous forme d'entiers ou de fractions irréductibles (positif ou négatif)

* $\boxed{A = \dfrac{2^8 \times 3^8 \times 6^{-1}}{6^7}}$

$A = \dfrac{2^8 \times 3^8 \times 6^{-1}}{6^7}$

↓...

$A = \dfrac{(2 \times 3)^8 \times 6^{-1}}{6^7}$

↓...

$A = \dfrac{6^8 \times 6^{-1}}{6^7}$

↓...

$A = \dfrac{6^{8-1}}{6^7}$

↓...

$A = \dfrac{6^7}{6^7} \qquad A = 1$

* $\boxed{C = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}}$

$C = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

↓...

$C = \left(3^{-1}\right)^{-3}$

↓...

$C = 3^{(-1)\,(-3)}$

↓...

$C = 3^{3}$

↓...

$C = 3 \times 3 \times 3$

$C = 27$

ou bien

$C = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

↓...

$C = \dfrac{1^{-3}}{3^{-3}}$

↓...

$C = \dfrac{1}{3^{-3}}$

↓...

$C = 3^{-(-3)}$

↓...

$C = 3^3$

↓...

$C = 27$

3 - Il faut donner les étapes et les règles utilisées à chaque étape

$\boxed{\textit{Et maintenant, Vrai ou Faux ?}}$

$$(-2)^3 = -8 \ ; \ 3^{-2} = \frac{1}{9} \ ; \ (-3)^{-2} = -\frac{1}{9} \ ; \ (-2^4) = -16 \ ; \ -3^2 = -9$$

$$(-5)^2 = 25 \ ; \ 2^3 \times 10^{-3} = 0{,}008 \ ; \ 5^2 \times 1^{-3} = 0{,}025 \ ; \ \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = -8$$

$$\frac{-5^{\,2}}{3^{-2}} = -15^2 \ ; \ 5^6 \times 7 = 35^6 \quad ; \ 2^{(2^4)} = 65.536 \ ; \ (10^{-3})^5 \times 10^4 = 10^{11}$$

$$A = \frac{(-35)^2 \times 6^{10} \times 7^5}{14^2 \times (-21)^5 \times 5^2} = -2^8 \times 3^5 \qquad B = \frac{10^2 \times 10^{-8}}{10^6} = 0$$

$$C = \frac{10^5 \times 1000^3 \times (0{,}001)^4}{100^{-2} \times \left(\frac{1}{1000}\right)^{-5}} = 10^{-9}$$

$$D = 0{,}000571 \times 10^3 - 5710 \times 10^{-4} + 5{,}71 = 5{,}71$$

$$E = (-2)^5 \times 4^{-3} \times \left(\frac{1}{8}\right)^5 \times \frac{1}{16^{-4}} = 1 \qquad F = \frac{10^{10}\ (10^2 - 1)}{10^{10} - 10^5} = 10^5$$

Le degré $\boxed{1}$ (cf. page 34) a été l'objet de vives discussions au sein du groupe à propos de l'éternelle question : "quand l'élève est en difficulté, comment l'amener à prendre conscience des propriétés justifiant les étapes ?".

Est-il plus efficace de lui présenter chacune des propriétés ou de lui demander de trouver cette propriété dans la liste qu'il a sous les yeux ? Autrement dit, le degré $\boxed{1}$ (cf. page 34) est-il efficace ou vaut-il mieux passer tout de suite au degré $\boxed{2}$ (cf. page 36) ?

Si un contrôle est possible (professeur, parent, camarade) on peut passer à $\boxed{2}$ (cf. page 36). Sinon on peut conseiller comme démarche la plus profitable pour $\boxed{1}$ (cf. page 34) de lire à son rythme la partie gauche et de ne découvrir la partie droite qu'après avoir écrit au brouillon une argumentation.

Remarque : Il est important d'accepter, dans les degrés $\boxed{1}$ (cf. page 34) et $\boxed{2}$ (cf. page 36), de suivre les étapes imposées. On ne demande pas à l'élève d'en proposer d'autres. Il faut aussi acquérir la capacité de s'adapter.

B - CALCUL VECTORIEL

1 - Exercices résolus avec les étapes et avec rappel des propriétés utilisées

$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$

↓ *Pour tous points M, N et P :* $\boxed{\vec{MN} + \vec{NP} = \vec{MP}}$ *(relation de CHASLES)*

$\vec{u} = \vec{AC} + \vec{CD}$

↓ *idem*

$\vec{u} = AD$

$\vec{v} = \vec{AB} - \vec{AM}$

↓ *Pour tous points M et N* $\boxed{-\vec{NM} = \vec{MN}}$

$\vec{v} = \vec{AB} + \vec{MA}$

↓ *Pour tous vecteurs* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ $\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$

$\vec{v} = \vec{MA} + \vec{AB}$

↓ *Relation de CHASLES*

$\vec{v} = \vec{MB}$

$\vec{x} = \vec{AB} - \vec{BC} + \vec{CA}$

↓ $-\vec{NM} = \vec{MN}$

$\vec{x} = \vec{AB} + \vec{CB} + \vec{CA}$

↓ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

↓ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$\vec{x} = \vec{CA} + \vec{AB} + \vec{CB}$

↓ *relation de CHASLES*

$\vec{x} = \vec{CB} + \vec{CB}$

↓ $\boxed{a\,\vec{u} + b\,\vec{u} = (a+b)\,\vec{u}}$ *(et* $\boxed{\vec{u} = 1\,\vec{u}}$*)*

pour tout vecteur $\vec{u}$ *et pour tous réels a et b.*

$\vec{x} = 2\vec{CB}$

$\vec{w} = 3(\vec{u} - 2\vec{v}) + 5(\vec{v} - \vec{u})$

↓ $a(\vec{u} + \vec{v}) = a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$

$\vec{w} = 3\,\vec{u} + 3(-2\,\vec{v}) + 5\,\vec{v} + 5(-\,\vec{u})$

↓ $a(b\,\vec{u}) = (ab)\vec{u}$

$\vec{w} = 3\,\vec{u} - 6\,\vec{v} + 5\,\vec{v} - 5\,\vec{u}$

↓ $a\,\vec{u} + b\,\vec{u} = (a+b)\,\vec{u}$ *et* $\boxed{(-1)\vec{u} = -\vec{u}}$

$\vec{w} = -2\,\vec{u} - \vec{v}$

2 - Indiquer pour chaque étape la propriété utilisée

$\vec{u} = 5(\vec{AC} + \frac{13}{10}\vec{AC}) + \frac{1}{2}\vec{BC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + 5(\frac{13}{10}\vec{AC}) + \frac{1}{2}\vec{BC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + \frac{13}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + \frac{13}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}(\vec{BA} + \vec{AC})$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + \frac{13}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{BA} + +\frac{1}{2}\vec{AC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{13}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BA} + 7\vec{AC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} + \frac{1}{2}(-\vec{AB}) + 7\vec{AC}$

↓ ....

$\vec{u} = 5\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AB} + 7\vec{AC}$

↓ ....

$\vec{u} = \frac{9}{2}\vec{AB} + 7\vec{AC}$

3 - Simplifier les expressions suivantes en donnant les étapes et les règles utilisées à chaque étape

$\vec{u} = \vec{BC} - \vec{BA} + \vec{BD} - \vec{BC}$

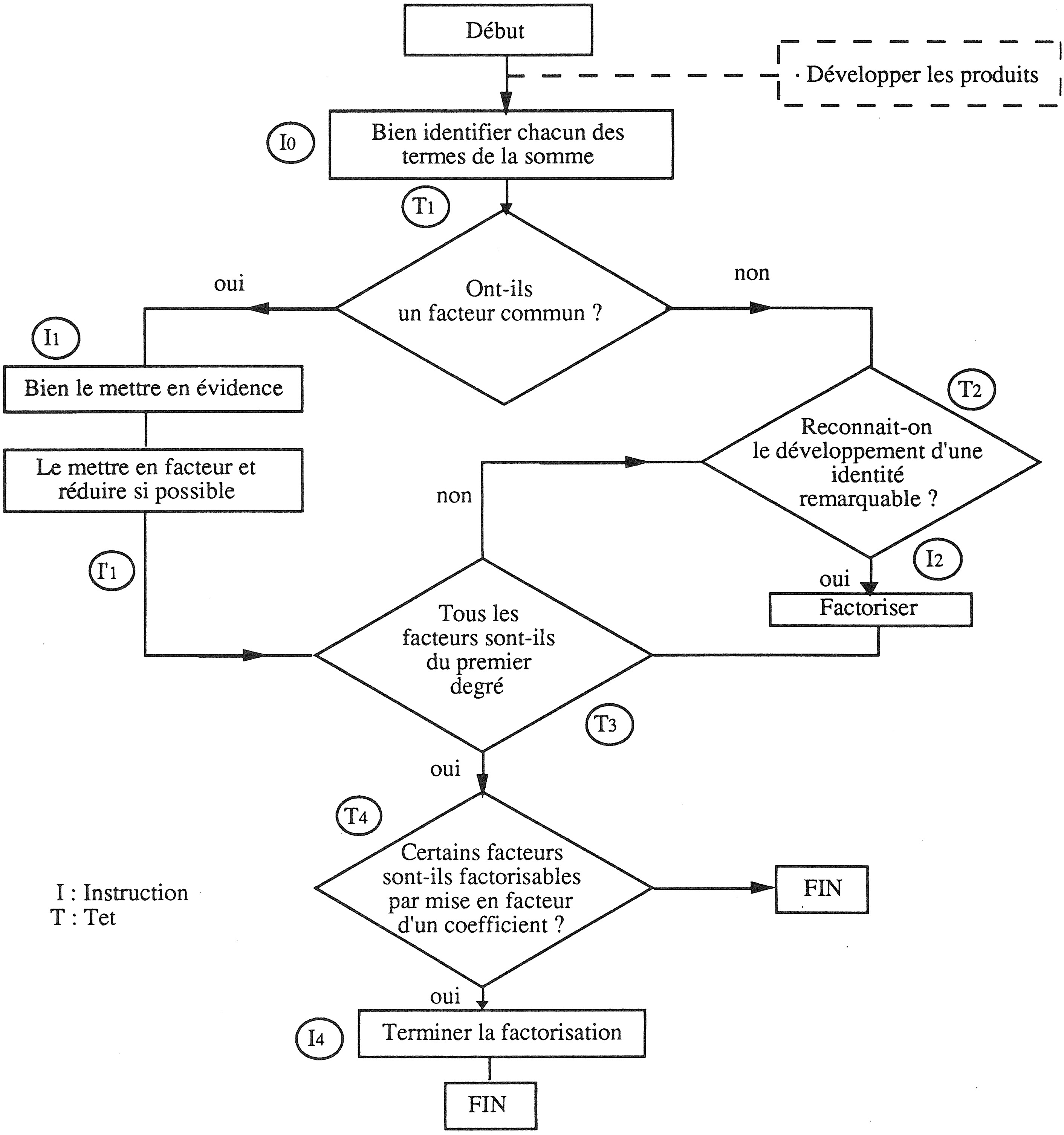
$\vec{v} = \vec{CD} - \vec{FE} + \vec{GH} - \vec{EH} - \vec{GF} - \vec{DK} + \vec{CK}$

$\vec{w_1} = 3(\vec{i} - \frac{2}{9}\vec{j}) - \frac{2}{3}(3\vec{i} - \vec{j})$

$\vec{w_2} = \frac{-3}{4}(2\vec{i} + \vec{j}) + 2(\frac{5}{2}\vec{i} - \frac{3}{4}\vec{j})$

C_1 - LA FACTORISATION EN CLASSE DE TROISIEME

1 - Organigramme



L'objectif de cet organigramme (ou d'un autre, présenté éventuellement de façon totalement différente) est que l'élève se l'approprie sans qu'il lui paraisse utile d'y revenir consciemment. Dès lors, il paraît indispensable qu'il participe activement à sa construction, faite par exemple comme une synthèse de plusieurs exercices déjà réalisés.

C_2 - LA FACTORISATION EN CLASSE DE SECONDE

1 - Fiche - Méthode

Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Ne pas oublier d'y ajouter aussi $a(b+c) = ab + ac$

Factoriser

- Factoriser c'est transformer une somme en un produit.
- Les identités remarquables pourront être utiles. Il faudra les utiliser aussi dans le sens produit $\leftarrow$ somme, c'est-à-dire ne pas mettre toujours dans le premier membre l'expression à transformer.
- Méthode (à faire dégager par les élèves après l'analyse de plusieurs exercices).

Etape 0 Déterminer le nombre n de termes de l'expression.

Etape 1 Reconnaissance d'un facteur commun ; chacun des n termes apparaît sous la forme $C \times A_1$, $C \times A_2$, ... $C \times A_n$
(On mettra C en facteur, dans le deuxième terme on devra retrouver n facteurs et on réduira le deuxième terme, ou on continuera de factoriser ce deuxième terme).

Etape 2 (Si l'étape 1 n'est pas possible).
Utilisation d'une identité remarquable sur l'ensemble de l'expression.

Etape 3 Si les étapes 1 et 2 n'ont pas été possibles, faire des regroupements de termes pour des mises en facteur partielles (en utilisant les méthodes des étapes 1 et 2) puis repartir à l'étape 1, voire à l'étape 2.

Etape 4 Si aucune des étapes précédentes n'a été possible, on développe, on réduit l'expression et on repart à l'étape 1.

Complément : Comment "contrôler que la factorisation effectuée est correcte"

- On peut calculer la valeur de l'expression pour une (ou des) valeurs de x en prenant l'expression donnée, puis l'expression factorisée.
Si le résultat n'est pas identique, la factorisation est fausse. Mais si le résultat est identique, cette vérification n'est pas suffisante pour prouver que la factorisation est juste.
- Si l'on veut *prouver* que le résultat est juste, il faut développer l'expression donnée et l'expression factorisée et obtenir ainsi la même expression.

2 - *Exercices (il s'agit évidemment d'exercices en classe et non de contrôle)*

La démarche dans les exercices est la suivante :

1 - Reconnaissance de l'étape.

2 - S'entraîner par étapes.

3 - But final : faire fonctionner par réflexe ou automatisme.

a) Indiquez dans chacun des cas suivants à quelle étape (voir fiche méthode sur factorisations) se placer pour factoriser . N'effectuer aucun calcul.

<u>Exemples</u> :

$f(x) = 4x^2 - 20x + 25$

Etape 0 : 3 *termes*
Etape 1 : ?
Etape 2 : *oui*

$f(x) = (1 - 4x)^2 - (4 - x)^2$

Etape 0 : 2 *termes*
Etape 1 : ?
Etape 2 : *oui*

$f(x) = 2(3x - 7)^2 - (3x - 7)(2x + 1) - 2(3x - 7)(3x + 1)$

Etape 0 : 3 *termes*
Etape 1 : *oui*

$f(x) = (x + 1)^2 = x^2 - 1$

Etape 0 : 3 *termes*
Etapes 1 *et* 2 : ?

$f(x) = (x + 1)^2 + (x^2 - 1) \leftarrow$

Etape 3 : *oui*
Etape 0 : 2 *termes*
Etape 1 : *oui*

N.B. Pour les étapes 1 et 2 il ne doit pas y avoir hésitation. Parfois, par contre, l'élève hésitera entre les étapes 3 et 4, mais il doit savoir que s'il "manque" l'étape 3 et passe à l'étape 4, il "perdra" parfois sa factorisation. Ce n'est pas irrémédiable car s'il est passé un peu vite à l'étape 4 et que cela conduit à une impasse, comme il doit s'être assuré qu'il ne s'agit pas des étapes 1 et 2, il sait qu'il est alors à l'étape 3 et peut se mettre au travail.

b) S'entraîner par étapes (ne pas oublier de regarder au préalable le nombre de termes de l'expression)

Etape 1 — Factorisation après identification d'un facteur commun.

$f(x) = 125x^3 - 625x^2$
$f(x) = 2(3 - 4x)(x + 2) - (3 - 4x)(2x - 1) + 3(3 - 4x)(1 - x)$
$f(x) = (2x + 3)(x - 5) - (2x + 3)(2x - 1)$

Etape 2 — Factorisation en appliquant une identité remarquable sur l'ensemble de l'expression.

$f(x) = 81x^2 - 36x + 4$
$f(x) = (2x - 7)^2 - (5x - 3)^2$
$f(x) = x^2 - 2x\sqrt{2} + 2$
$f(x) = 9x^2 - 7$

Etape 3 — Factorisations partielles ... puis retour à la case départ !

$f(x) = x^2(x - 4) + 2x(x - 4) - 4 + x$
$f(x) = (2x - 1)(x + 3)^2 - 8x + 4$
$f(x) = 4x^2 - 9y^2 + 9 - 12x$

Etape 4 — $f(x) = (x - 3)(2x + 1) + (x + 3)(2x - 1)$

c) Factorisations sans indication préalable

C'est-à-dire qu'ayant fait les exerices de 1 (reconnaissance de l'étape avant de démarrer), puis les exercices de 2 (où on se sera entraîné dans chaque "catégorie"), il faut maintenant arriver à factoriser sans aide. Si vous n'arrivez pas, essayer de cerner le pourquoi : est-ce parce que vous ne reconnaissez pas l'étape, ou est-ce parce que reconnaissant l'étape, vous n'arrivez pas à "réaliser", auquel cas, il faudra se reporter aux exercices adéquats de 2.

D - EQUATIONS EN TROISIEME

(Exemple de fiche d'aide-méthode)

$$\underbrace{2x + 4}_{1ère\ membre} = \underbrace{\frac{2}{3}x - 5}_{2ème\ membre}$$

Equation du 1er degré : $3x = 4 - 5x$

$\frac{2}{3}x + 2x^2 = 6x + 2x^2 + \frac{1}{7}$

$\frac{x}{2} + \frac{3}{4}x = 1$

Equations du 2ème degré

$(x + 2)(x + 3) = 3x - 1$

$2x^2 + 6 = 3x - 11$

Résolution d'équations

1 - Equation du 1er degré (du type ax = b)

Rappels	$ax = b$ $(a \neq 0)$	$Ox = 3$	$Ox = 0$
	une seule solution $x = \frac{b}{a}$	aucune solution	tous les nombres sont solutions

Règles à utiliser   développement, réduction, transposition.

Exemples $4x - 7 = \frac{7}{2}(x - 2)$; $6(x - 3) - 3(x - 2) = 4(3 - x) + 5$; $\frac{2x+1}{3} - \frac{x-1}{5} = \frac{7x-2}{15}$

2 - Il y a des "x^2" : transformer l'équation pour obtenir une équation dont le second membre est nul

Deux cas possibles :

1) En réduisant le premier membre on obtient une expression au premier degré c'est le cas 1.

2) En réduisant le premier membre on obtient une expression du second degré. On ne peut résoudre (en troisième) que si on peut mettre ce premier membre sous forme d'un produit : il faut factoriser le premier membre.

Exemples

1) $x(3x + 2) = 4 + 3x^2 - 2x$
$x(3x + 2) - (4 + 3x^2 - 2x) = 0$

il y a des x^2
(mentalement : les termes en x^2 s'annulent on développe, on réduit → cas 1).

2) $(x + 1)(2x + 5) = (x + 1)^2$
$(x + 1)(2x + 5) - (x + 1)^2 = 0$

Sur un brouillon ou mentalement : les termes en x^2 ne s'annulent pas. C'est une équation du second degré.

On factorise le premier membre pour obtenir équation produit.

Exercice

Indique la méthode à utiliser pour résoudre les équations suivantes (on ne demande pas la résolution).

Exemple

a) $9x^2 - 4 = 0$ "il y a des x^2" ; ils ne s'annulent pas : on factorise.
b) $3x = 4 - 5x$ cas *1*.
c) $\frac{1}{3}x - 2x^2 + x(2x - 3) = 0$ il y a des x^2 ; ils s'annulent cas *1*.

- $\frac{1}{3}x + 1 = \frac{1}{3}$
- $x^2 - 2x = 0$
- $(3x + 2) + x(3x + 2) = 0$
- $\frac{x+3}{5} - \frac{x-2}{3} = 0$
- $10(x - 3) - (9x + 1) = 5(x - 3) - 4(x + 4)$
- $(x + 1)^2 = 4$
- $(x + 3)^2 = (x + 3)(5x - 1)$
- $(3x + 5)(x - 8) = 0$
- $x^2 + 1 = 0$
- $x^2 + x + 1 = 0$

EN CONCLUSION

Les travaux visant à l'acquisition d'une notion nouvelle peuvent être utilisés plus tard comme base de remédiation, soit dans leur totalité, soit en partie, selon les insuffisances de l'élève. Cela demande au préalable un travail de recherche du binôme élève-professeur pour cerner le point de difficulté afin d'y remédier. Par exemple, l'élève peut très bien savoir appliquer ses identités remarquables, très bien reconnaître un facteur commun dans une expression, mais, malgré tout, se trouver démuni devant la question "factorisez l'expression..." où il répond souvent "je ne sais pas, je ne vois pas". Il faudra alors particulièrement mettre l'accent sur le travail "Reconnaissance de l'étape", et ceci, insistons encore, sans effectuer les calculs, puisque dans le cas présent l'obstacle se situe au niveau de "VOIR", "RECONNAITRE".

N'oublions pas, par ailleurs, que lors de la résolution d'équations d'un degré supérieur à un, où il est possible de présenter une démarche du même style pour cette nouvelle acquisition, on retrouvera à une étape donnée la nécessité de savoir factoriser. Si là encore, l'obstacle identifié est la factorisation, on pourra utiliser l'activité correspondante comme remédiation.

CHAPITRE 3

REMEDIATIONS

I - L'ERREUR COMME MOYEN DE S'APPROPRIER LA REGLE

1) PRENDRE CONSCIENCE DE SON ERREUR

Nos élèves commettent des erreurs, qui nous désespèrent parfois, surtout quand elles se reproduisent. On constate trop souvent que, même après une correction acceptée par l'élève, celui-ci répète la même erreur un peu plus tard. En fait l'élève n'a pas compris pourquoi son calcul ou son raisonnement est faux. Il a en général admis sa faute, d'une part parce que c'est un constat du professeur, et d'autre part parce que la solution qu'on lui propose lui paraît correcte. Et malgré sa bonne volonté, s'il n'a pas compris quand ou comment il s'est trompé, il risque de récidiver.

Pour lui faire prendre conscience de son erreur, ce qui va au-delà du simple constat, il faut l'amener à trouver "tout seul" ce qui ne va pas, et dissocier cette première phase de la correction proprement dite.

Ainsi, on peut essayer de lutter contre les "théorèmes - élèves" : "faux amis" du type :"$(a + b)^2 = a^2 + b^2$", "hybrides" du type : "$a^n \times b^p = (a \times b)^{n+p}$", ou autres. Lorsque l'élève aura senti pourquoi ce qu'il a écrit est faux, et seulement à ce moment-là, il faudra lui faire retrouver la règle de calcul ou le théorème à appliquer.

C'est en ce sens que l'erreur est positive puisque, ainsi perçue, elle permet à l'élève de bien délimiter le champ d'application de la règle, les limites, les contraintes, et il peut ainsi "s'approprier la règle".

Pour illustrer ceci, voici un exercice que l'on peut proposer en classe de cinquième, après que les élèves aient "appris" à simplifier une fraction :

$$\frac{3 \times 4}{3 \times 7} \; ; \; \frac{5 \times 2}{3 \times 2} \; ; \; \frac{6 \times 5}{7 \times 6} \; ; \; \frac{6 + 4}{11 + 4} \; ; \; \frac{35}{60} \; ; \; \frac{21}{51} \; ; \; \frac{9 + 5}{35}$$

L'élève qui ne commet aucune faute a probablement bien intégré la règle, du moins quand elle s'applique à des valeurs numériques.

Pour un autre, il se peut que cela ne soit pas aussi clair et qu'il écrive par exemple "$\frac{6 + 4}{11 + 4} = \frac{6}{11}$", ayant effectivement réalisé une "simplification". Avant de lui indiquer ce qu'on attendait de lui, il convient de le faire s'interroger sur ce qu'il a écrit. On peut par exemple lui demander :

- de rechercher une autre façon de procéder (en effectuant les opérations dans l'ordre où elles sont indiquées).
- de comparer cette "simplification" avec les précédentes.

Il faut qu'il se rende compte qu'il a appliqué à des sommes une règle valable pour des produits, et que cela ne fonctionne pas. Alors on peut espérer que "simplifier une fraction" évoquera pour lui "écrire chacun des termes sous la forme d'un produit", le facteur commun intervenant ensuite.

Les autres erreurs rencontrées ici pourront être traitées de la même façon.

On peut reprendre cet exercice en classe de quatrième en y ajoutant des fractions plus complexes, par exemple $\frac{4 + 2 \times 5}{1 + 2 \times 3}$. Là encore, il s'agit de provoquer l'erreur pour que l'élève qui la commet puisse l'analyser et la comprendre, pendant qu'il en est encore temps, c'est-à-dire avant que de mauvais réflexes se soient ancrés dans son esprit. En classe de troisième ou de seconde, le calcul littéral risque d'amener des erreurs du type : "$\frac{2x+1}{x+2} = \frac{3}{2}$" , "$\frac{2a+b}{4a+1} = \frac{a+b}{2a+1}$", ou autres. On reprendra alors des simplifications avec des valeurs numériques, pour que l'élève prenne conscience qu'on ne peut simplifier un quotient qu'en divisant par un même nombre chacun de ses deux termes.

2) <u>PREVENIR LES MAUVAIS REFLEXES</u>

Voici un autre exercice que l'on peut proposer en seconde afin, là encore, de prévenir les mauvais réflexes de certains élèves :

a) Calculez : 22,3 − 11,4 ; 22,9 − 11,5 ; 21,2 − 11,8

b) Soit x et y deux nombres tels que $21 \leq x \leq 23$ *et* $11 \leq y \leq 12$
Donner un encadrement de $x - y$.

c) Les résultats des deux questions précédentes sont-ils cohérents ?

d) Peut-on soustraire membre à membre deux inégalités de même sens ?

e) Quelle est la plus grande valeur de $x - y$? La plus petite ?

f) Quelle règle énonceriez-vous pour encadrer $x - y$?
(Brouillon et effaceur interdits, pour éviter le "bricolage").

Beaucoup d'élèves, même les bons, s'ils n'ont jamais encadré une différence, vont donner, à la question b), l'encadrement $10 \leq x - y \leq 11$, qui, à première vue, est parfaitement plausible. A la question c), la plupart d'entre eux vont se rendre compte que $x - y$ n'est pas toujours compris entre 10 et 11. Ils vont réaliser qu'ils ont fait une erreur.

La question d) permet d'identifier la nature de l'erreur. L'élève va peut-être se dire qu'il est allé trop vite, que son instinct l'a trompé. La question e) conduit l'élève à corriger lui-même son erreur.

Ce travail, mené individuellement par chacun des élèves, sera sans doute plus profitable qu'une activité faite en commun sous l'égide du professeur, pendant laquelle chaque élève n'aura peut-être pas eu l'occasion ou le temps de s'interroger sur sa propre façon de percevoir les choses. Il pourra être intéressant cependant de discuter avec la classe des différentes remarques obtenues à la question c) ou des solutions proposées à la question e).

Mettre ainsi l'accent sur les erreurs commises par nos élèves, au besoin les provoquer, afin d'en tirer le meilleur parti possible, c'est aussi une façon d'être plus proche des élèves en difficulté. Si l'élève sent qu'il n'y a pas que la bonne solution qui importe, mais que l'on s'intéresse également à sa propre façon de penser ou de faire, il se sentira moins dévalorisé et pensera que la partie n'est peut-être pas perdue.

D'autre part, en recherchant avec l'élève les causes de son erreur, on lui fait aussi sentir qu'à chaque phase d'un calcul ou d'un raisonnement, il doit se demander : "ai-je le droit de faire cela ? Quelle est la propriété ou l'hypothèse me permettant d'écrire cela ?" et l'on rejoint ainsi nos préoccupations du chapitre 2 (I-5).

<u>Remarque</u> : Comme toujours, une synthèse est souhaitable en particulier pour que l'élève privilégie quelques règles générales plutôt qu'une multitude de règles adaptables à la situation trop précise. Dans le cas présent, cette synthèse peut se baser sur la fiche suivante.

INEGALITES

On doit savoir lire une inégalité sous les deux formes : $a \leq b$ $b \leq a$

$\boxed{I}$

Peut-on <u>ajouter</u> deux inégalités de même sens ?

C'est-à-dire : si $\begin{array}{c} a \leq b \\ a' \leq b' \end{array}$ *a-t-on toujours* $a + a' \leq b + b'$?

Peut-on <u>soustraire</u> deux inégalités de même sens ?

C'est-à-dire : si $\begin{array}{c} a \leq b \\ a' \leq b' \end{array}$ *a-t-on toujours* $a - a' \leq b - b'$?

Peut-on <u>multiplier</u> deux inégalités de même sens ?

C'est-à-dire : si $\begin{array}{c} a \leq b \\ a' \leq b' \end{array}$ *a-t-on toujours* $a \,.\, a' \leq b \,.\, b'$?

Si les 4 nombres sont POSITIFS, la réponse est OUI.

C'est-à-dire : si $\begin{array}{c} a \leq b \\ a' \leq b' \end{array}$ avec a,b,a',b' POSITIFS, alors, on a toujours $a \,.\, a' \leq b \,.\, b'$

Peut-on <u>diviser</u> deux inégalités de même sens ?

C'est-à-dire : si $\begin{array}{c} a \leq b \\ a' \leq b' \end{array}$ *a-t-on toujours* $\dfrac{a}{a'} \leq \dfrac{b}{b'}$?

Remarque : Même si les 4 nombres sont positifs, la réponse est NON

$\boxed{II}$

On peut <u>ajouter</u> le même nombre à chaque membre d'une inégalité.

Si $a \leq b$ *alors* $a + X \leq b + X$

On peut <u>multiplier</u> par le même nombre POSITIF chaque membre d'une inégalité.
Si $a \leq b$ *et* $K > O$ *alors* $Ka \leq Kb$
Si on multiplie par un nombre NEGATIF, l'inégalité change de sens
Si $a \leq b$ *et* $K < O$ *alors* $Ka \geq Kb$

$\boxed{III}$ $(a \leq b)$ *équivaut à* $(a - b) \leq 0$	*Si* $b > 0$, $(a \geq b)$ *équivaut à* $\left(\dfrac{a}{b} \leq 1\right)$
$(a \leq b)$ *équivaut à* $-a \geq -b$	*Si* $b > 0$ *et* $d > 0$ $\left(\dfrac{a}{b} \leq \dfrac{c}{d}\right)$ *équivaut à* $(ad \leq bc)$.

II - DES EXEMPLES DE FICHES DE REMEDIATION

a) Comme nous l'avons dit au chapitre 2, conclusion du II, les activités concernant des processus d'apprentissage peuvent être utilisées comme base de remédiation,

- en partie ou en totalité,
- pour un élève en particulier, ou pour un groupe d'élèves.

b) Comment utiliser les fiches de remédiation ?

* Suivant les cas, et suivant les réactions prévisibles des élèves, on les utilisera :

- soit d'une façon "lourde", en une seule fois,
- soit par petites séquences successives mais sur une période.

(La deuxième procédure nous paraît en général plus efficace).

* Les fiches de remédiation peuvent être utilisées en totalité, ou en partie, suivant les besoins.

c) Voici quelques exemples visant des aspects peut-être plus "ponctuels" et qui peuvent souvent être utilisés à un moment précis de l'apprentissage d'une notion nouvelle :

1 - "Qu'est-ce qui joue le rôle de ?"

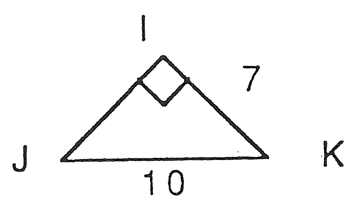
2 - Pour les allergiques à l'abstraction.

3 - A propos des priorités dans l'ordre des opérations.

1 - "Qu'est-ce qui joue le rôle de ..."

PRESENTATION DE LA DEMARCHE

- *Développer* $(3x + 2y)^2$
- *Factoriser* $x^2 - 9\ (x - 5)^2$
- *Exprimer que le point H est le transformé de C dans l'homothétie de centre E et de rapport* 3.
- *Calculer IJ sachant que* $JK = 10$ *et* $IK = 7$.



On peut estimer que dans les quatre exercices précédents, les erreurs commises par les élèves n'ont pas toutes la même origine et il est souhaitable qu'ils prennent conscience que bien souvent, l'erreur provient de ce que l'on franchit trop rapidement plusieurs étapes en même temps. Dans les quatre exercices précédents, la fiche *"Qu'est-ce qui joue le rôle de"* peut être d'une efficacité certaine pour la remédiation. Elle a pour but de permettre à certains d'analyser la démarche qu'ils réalisent (le plus souvent sans s'en rendre compte) et d'offrir à d'autres une aide (facultative) pour exécuter certains exercices. Elle ne sert que de support à l'explication et en général les élèves conservent une mémoire visuelle des étapes plutôt que le texte (c'est d'ailleurs préférable).

1 - Après plusieurs exercices, de types différents, dans lesquels sont apparues des erreurs relevant de *"Qu'est ce qui joue le rôle de ... ?"* on fait, en classe entière, une synthèse en proposant cette fiche à tous les élèves en indiquant toutefois son caractère facultatif.

2 - Quelque temps après, il convient de dégager ceux pour lesquels la fiche sera particulièrement utile.

Cela peut être fait par :

- un test passé dans cet objectif. Par exemple, sans qu'il n'ait jamais été question d'homothétie, on peut poser la question suivante :
  "On dit que M a pour transformé M' dans l'homothétie de centre O et de rapport k lorsque $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.
  Exprimer que, dans l'homothétie de centre E et de rapport 3, *le point H est le transformé du point C.*

- une observation faite à propos d'un exercice exécuté dans une autre intention. Par exemple:
  Calculer IJ dans le triangle rectangle JIK sachant que JK = 10 *et IK* = 7 (*triangle rectangle en I*).

L'élève qui calcule IJ par $IJ^2 = 10^2 + 7^2$ (et fait ce type d'erreurs assez souvent) a sans doute besoin de la séquence de remédiation proposée.

3 - On peut envisager une séquence de 1H (ou 1H30) dans le cadre des modules pour l'acquisition de cette capacité. Cette séquence contient deux parties :

- reprendre (pour chacun d'eux) les exercices pour lesquels des erreurs de ce type ont été relevées.
- en faire de nouveaux.

Il faut aussi distinguer entre deux types d'élèves :

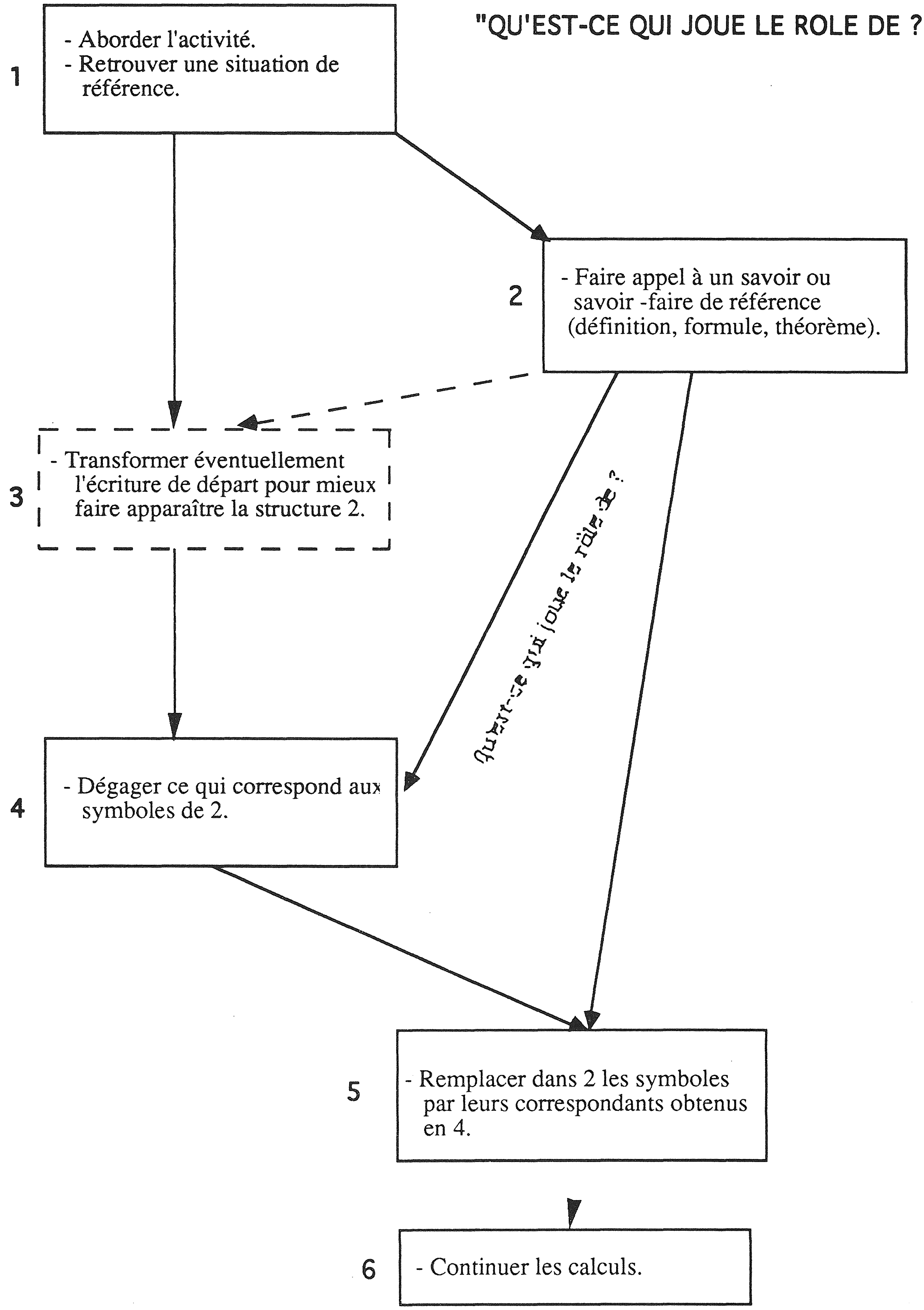
- ceux qui savent faire mais vont trop vite. La fiche leur sert essentiellement à prendre un rythme convenable.
- ceux qui ne comprennent pas ce qui leur est demandé et la fiche permet alors de focaliser sur l'étape qu'ils ne comprennent pas.

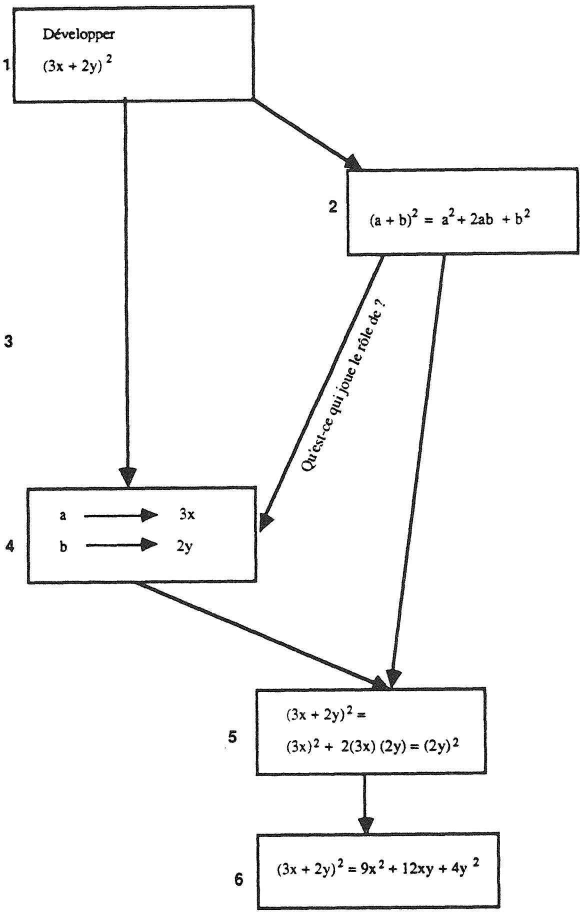
Il va de soi qu'on ne peut pas espérer voir cette classe d'erreurs disparaître. L'intention est de faire acquérir une méthode à laquelle on se référera à chaque fois qu'une faute de ce type aura été observée. Il suffira alors dans la plupart des cas de demander à l'élève de remplir lui-même une fiche muette (c'est-à-dire dont les rectangles sont vides), qu'il doit avoir constamment à sa disposition).

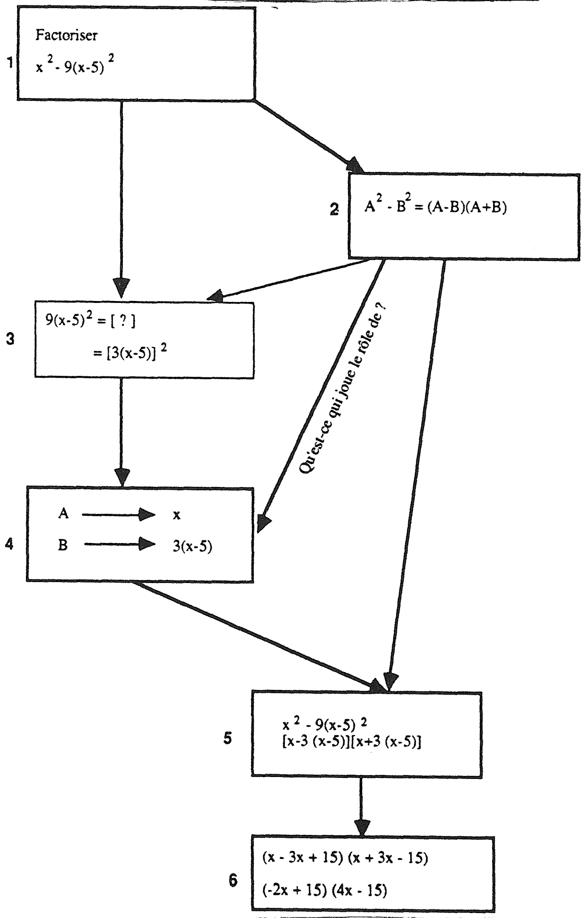
On peut penser que <u>tous</u> les élèves à la fin de la seconde, doivent être capables de faire les exercices (avec ou sans l'aide de la fiche) ne contenant pas l'étape N° 3. Il s'agit d'une tâche exécutive demandant quand même des capacités d'adaptation.

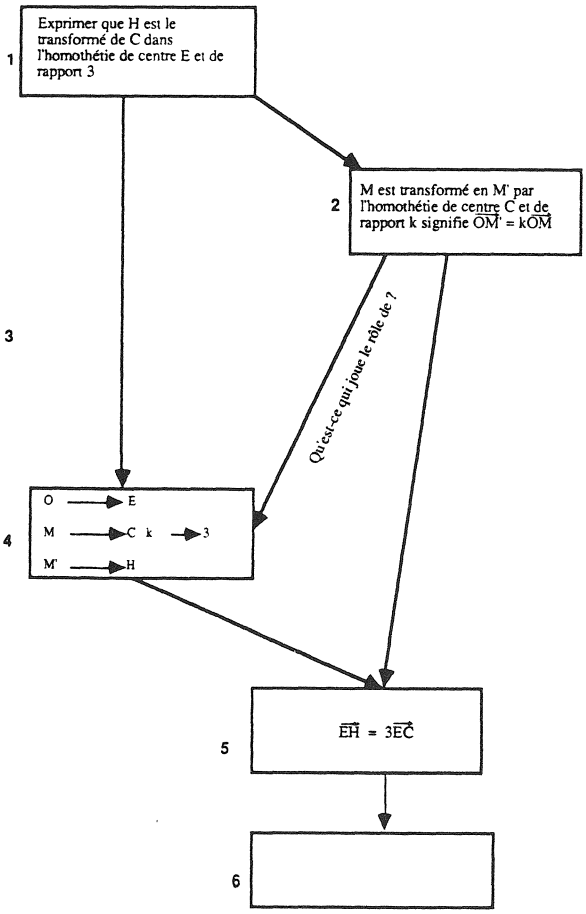
FICHE

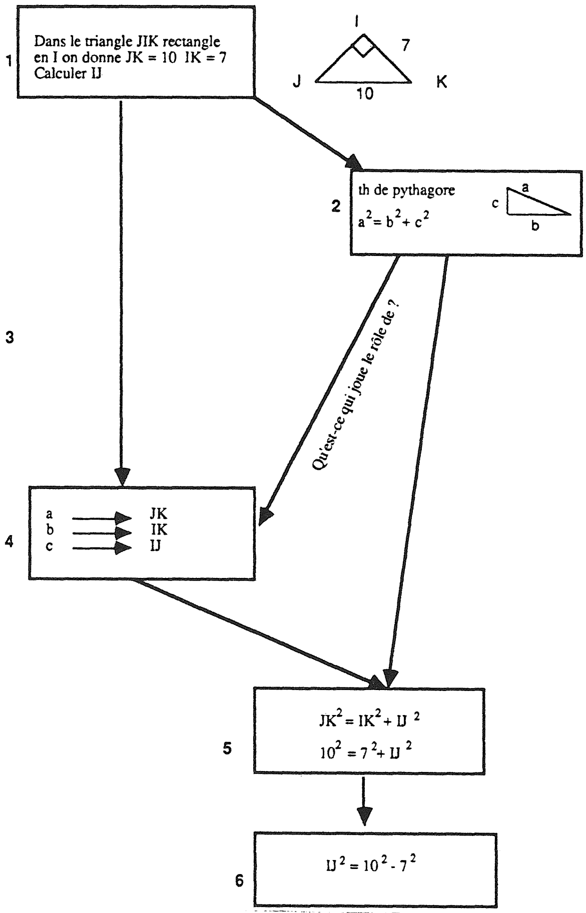
"QU'EST-CE QUI JOUE LE ROLE DE ?"




1
Développer
$(3x + 2y)^2$
2
$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
3
Qu'est-ce qui joue le rôle de ?
4
a → 3x
b → 2y
5
$(3x + 2y)^2 =$
$(3x)^2 + 2(3x)(2y) = (2y)^2$
6
$(3x + 2y)^2 = 9x^2 + 12xy + 4y^2$


1
Factoriser
$x^2 - 9(x-5)^2$
2
$A^2 - B^2 = (A-B)(A+B)$
3
$9(x-5)^2 = [\ ?\ ]$
$= [3(x-5)]^2$
Qu'est-ce qui joue le rôle de ?
4
A → x
B → 3(x-5)
5
$x^2 - 9(x-5)^2$
$[x-3(x-5)][x+3(x-5)]$
6
$(x - 3x + 15)(x + 3x - 15)$
$(-2x + 15)(4x - 15)$


1
Exprimer que H est le transformé de C dans l'homothétie de centre E et de rapport 3
2
M est transformé en M' par l'homothétie de centre C et de rapport k signifie $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$
3
Qu'est-ce qui joue le rôle de ?
4
O → E
M → C k → 3
M' → H
5
$\overrightarrow{EH} = 3\overrightarrow{EC}$
6


1
Dans le triangle JIK rectangle en I on donne JK = 10 IK = 7
Calculer IJ
I
7
J
10
K
2
th de pythagore
$a^2 = b^2 + c^2$
a
c
b
3
Qu'est-ce qui joue le rôle de ?
4
a → JK
b → IK
c → IJ
5
$JK^2 = IK^2 + IJ^2$
$10^2 = 7^2 + IJ^2$
6
$IJ^2 = 10^2 - 7^2$

2 - Pour les allergiques à l'abstraction

- $(a + b)^2 = a^2 + 2 \times a \times b + b^2$

$$(\boxed{} + \bigcirc) = \boxed{}^2 + 2 \times \boxed{} \times \bigcirc + \bigcirc^2$$

* Pour développer $(2x + 7)^2$, on met $2x$ dans la boite $\boxed{}$ et on met 7 dans la boite $\bigcirc$.

$$(\boxed{2x} + 7)^2 = \boxed{2x}^2 + 2 \times \boxed{2x} \times 7 + 7^2 = 4x^2 + 28x + 49$$

* Pour factoriser $25x^2 + 60x + 36$, il faut que $25x^2 + 60x + 36$ puisse prendre la forme :

$$\boxed{}^2 + 2 \times \boxed{} \times \bigcirc + \bigcirc^2$$

On met donc

$5x$ dans la boite $\boxed{}$, puis 6 dans la boite $\bigcirc$:

$$25x^2 + 60x + 36 = \boxed{5x}^2 + 2 \times \boxed{5x} \times 6 + 6^2 = (5x + 6)^2$$

Attention ! On aura eu soin de vérifier que $2 \times 5x \times 6 = 60x$!

On pourra agir de même pour les autres identités remarquables.

- Dans le même esprit...

  Exercice : $f(x) = 4x^2 - 7x + 5$
  Calculer $f(3)$; $((-8)$; $f(2 - \sqrt{2})$: $f(-x)$

  Idée sous-jacente :

a) Dans l'expression $f(x)$, à chaque fois qu'il est écrit x, j'écris ( ) :
$4(\quad)^2 - 7(\quad) + 5$.

b) Ensuite, je "glisse" dans la parenthèse la valeur souhaitée.
Ainsi,
pour $f(3)$, je "glisse" la valeur 3 dans chaque parenthèse $f(3) = 4(3)^2 - 7(3) + 5$
...
pour $f(-x)$ je "glisse" $-x$ dans chaque parenthèse
$f(-x) = 4(-x)^2 - 7(-x) + 5$.

c) J'effectue ensuite les calculs nécessaires en appliquant les règles de calcul adéquates.

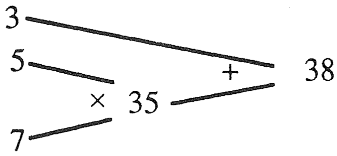
Il ne faut pas être gêné d'employer encore ces "trucs" en Troisième et Seconde s'ils s'avèrent efficaces.

3 - A propos des priorités dans l'ordre des opérations

En Troisième et en Seconde beaucoup d'erreurs de calcul proviennent d'une méconnaissance des priorités et des règles d'utilisation des parenthèses. A cet égard la calculatrice est un outil précieux à condition qu'elle ne conforte pas l'élève dans son erreur. Par exemple, celui qui, dans $5x^2$, lit de faire le produit $5x$ avant d'élever à la puissance 2, procédera dans cet ordre à la calculatrice et ne trouvera pas d'erreur.

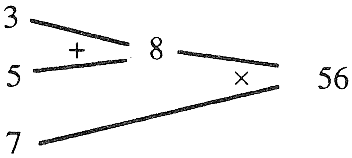
Un schéma en ligne (ou en colonne) comme ci-dessous est en général efficace.

$3 + 5 \times 7$ signifie :



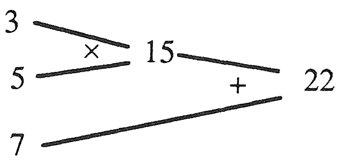
(Priorité de × par rapport à +)

Mais <u>on peut</u> aussi écrire $3 + (5 \times 7)$

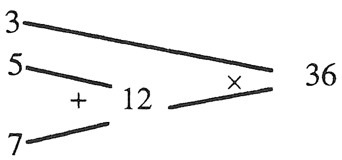


Pour ce calcul <u>il faut</u> écrire $(3 + 5) \times 7$

$3 \times 5 + 7$ signifie :

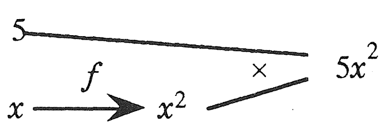


Mais <u>on peut</u> écrire aussi $(3 \times 5) + 7$



<u>Il faut</u> écrire $3 \times (5 + 7)$

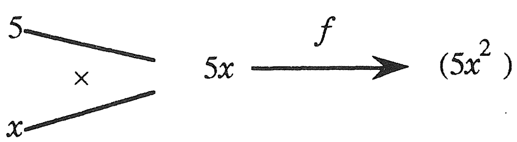
$5x^2$ signifie



<u>On peut</u> aussi écire $5\,(x^2)$

f signifie : "élever au carré"

Pour faire



<u>Il faut</u> écrire $(5x^2)$

<u>Remarque</u> : En cas de doute sur les règles de priorité, il est préférable de mettre des parenthèses inutiles plutôt que de risquer une erreur car la plupart des fautres de calcul proviennent d'opérations effectuées dans un mauvais ordre.

Il est donc important de bien déceler l'origine de l'erreur, et ne pas se tromper de remédiation. A cet égard, il peut être utile de demander plusieurs façons de traduire la même expression algébrique.

On peut ainsi proposer l'activité suivante, la première partie et la présentation de la deuxième partie étant exposées par le professeur. Le travail de la deuxième partie est réalisé par l'élève à son rythme. Pour en faciliter la correction, on peut envisager une présentation sur quatre colonnes (voir page 61).

1) L'écriture de $-3+5x^2$ avec une paire de parenthèses (même si elle est superflue ; voir 4ème, 7ème, 8ème lignes).

2) Valeur numérique de l'expression ainsi envisagée pour $x = 4$.

3) Autre écriture de l'expression sans parenthèse pour x quelconque (avec les conventions habituelles), en demandant de vérifier que, pour $x = 4$, on retrouve bien la valeur numérique de la deuxième colonne.

4) Schéma semblable à ceux qui ont déjà été présentés pour bien expliciter l'ordre dans lequel on effectue les opérations par l'expression de la colonne 1.

Remarque 1 : Il serait sans doute préférable de demander la colonne 4 avant la 3 et même avant la 2 mais les élèves semblent trouver plus de points communs aux trois colonnes 1-2-3 qu'aux colonnes 1 et 4 ; sans doute la visualisation ??

Remarque 2 : La procédure reste à plus forte raison valable pour les écritures avec fraction. Ainsi, on peut demander de reprendre l'exercice précédent avec $3 - x + 2 / x^2 + 5$ et observer que l'écriture $3 - (x + 2) : x^2 + 5$ équivaut à $3 - \frac{x+2}{x^2} + 5$.

Première Partie

Il y a deux grandes classes de calculs numériques ou algébriques :

Les calculs portant sur deux termes (à deux variables)

Exemple : $+$, $\times$, $/$, x^y

Les calculs portant sur un seul terme (à une variable) → voir FONCTIONS

1) Ex touche x^2, $\sqrt{\ }$, ln, sin, ... de la calculatrice

$x \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{x}$ $\quad 16 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{16} = 4$

$3,25 \xrightarrow{\sqrt{\ }} \sqrt{3,25} \approx 1,80$

$x \xrightarrow{ln} ln\, x$ $\quad 2 \xrightarrow{ln} 0,693...$

$5890 \xrightarrow{ln} 8,681...$

$x \xrightarrow{opp} -x$ *" opp " signifie : " prendre l' opposé de ... "*

Cette fonction correspond à la touche (+ / −) de certaines calculatrices

$15 \xrightarrow{opp} -15$

$3,78 \xrightarrow{opp} 3,78$

$x \xrightarrow{f} x^2$ *" f " signifie ici" prendre le carré de... "*

Cettefonction correspond à la touche $\left(x^2\right)$ *des calculatrices*

2) Calculs de la première classe dont l'un des deux termes est fixé, l'autre étant variable

Ex : $x \xrightarrow{/\,3} \dfrac{x}{3}$ *autre exemple* $x \xrightarrow{\times(-1)} -x$

$15 \longrightarrow \dfrac{15}{3} = 5$ $\qquad 1,7 \longrightarrow -1,7$

$-5 \longrightarrow 5$

$-8 \longrightarrow \dfrac{-8}{3}$

$\sqrt{8} \longrightarrow -\sqrt{8}$

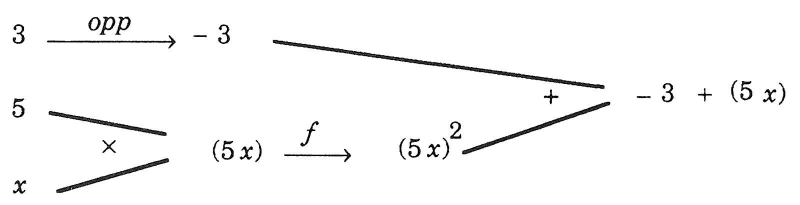
Deuxième Partie

Considérons l'écriture $-3 + 5x^2$, obtenue à partir des opérations suivantes :

- *"opp"* (qui signifie : "prendre l'opposé de ...")
- $+$
- $\times$
- *"f"* (qui signifie : "prendre le carré de ...")

L'objet de l'exercice est de placer une paire de parenthèses (...) et une seule et de voir quel est alors l'ordre dans lequel ces quatre opérations sont effectuées.

Exemple :



Ainsi la calculatrice effectuera les quatre opérations dans l'ordre :

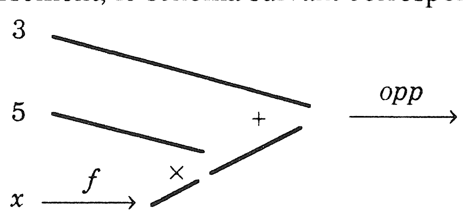
1) *"opp"*

2) $\times$

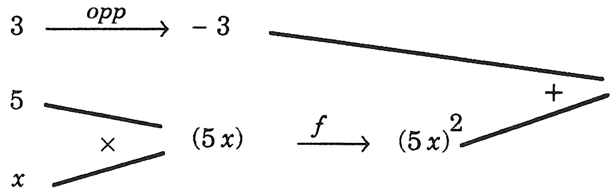
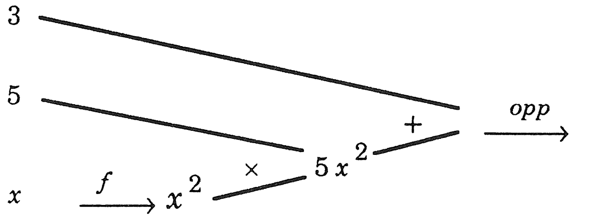
3) *"f"*

4) $+$

Inversement, le schéma suivant correspond à $-(3 + 5x\ )^2$; le vérifier.



Dans le tableau de la page suivante, la colonne 3 correspond à une autre écriture de l'expression figurant dans la colonne 1 et la colonne 2 correspond à la valeur numérique de cette expression pour $x = 4$ (cela permet une vérification si on le souhaite).

1	2	3	4
$-3+(5x)^2$	397	$-3+25x^2$	
$-(3+5x^2)$	−83	$-3-5x^2$	
$(-3+5)\,x^2$	32	$2x^2$	
$-3+(5x^2)$	77	$-3+5x^2$	
$(-3+5x)^2$	289	$9-30x+25x^2$	
$-(3+5x)^2$	−529	$-9-30x-25x^2$	
$(-3)+5x^2$	77	$-3+5x^2$	
$-3+5(x^2)$	77	$-3+5x^2$	
$-(3+5)\,x^2$	−128	$-8x^2$	
$-3+5x^2$			
$-3+5x^2$			
$-3+5x^2$			

III - GERER SES ERREURS

Bien des erreurs de calcul numérique ou algébrique proviennent d'une application, le plus souvent inconsciente d'une formule fausse que l'élève a confondue avec une autre. Par ailleurs, dans son désir de combler le vide du besoin de transformation de l'écriture, l'élève va s'inventer une formule fausse, mais "presque vraie" (!) et l'appliquer.

Comme il l'a été souligné au paragraphe I de ce chapitre 3, il est essentiel que l'élève participe à la gestion de ses erreurs :

Ce n'est pas en répétant 10 fois à l'élève que, par exemple, $(a + b)^2$ n'est pas égal à $(a^2 + b^2)$ qu'on lui évitera à l'avenir cette erreur.

Il faut que l'élève identifie et répertorie son erreur. Au départ, le professeur doit être présent. La recherche doit être dynamique et constructive. Prenons l'exemple suivant :

L'élève écrit "$2x = 5$ donc $x = \frac{5}{-2}$" et expliquera :

"J'ai fait passer 2 dans l'autre membre et donc j'ai changé de signe".

Il ne faut pas rejeter son langage mais l'inciter à le prendre en charge, en demandant :

"Par quelle opération mathématique est-on" passé" de 2x à x ?"

"On a divisé par 2" ou "on a multiplié par $\frac{1}{2}$" (réponse déjà plus rare !)

Continuons la recherche

Q : *"On est en présence d'une équation et on veut obtenir une équation équivalente. Puisqu'on a divisé le 1er membre de l'équation par 2, quelle propriété sur les équations va-t-on appliquer ?"*

(On peut lui mettre sous les yeux les règles de transformation d'une équation en une équation équivalente).

L'élève va ainsi prendre en charge son erreur et la rectifier, accompagné dans sa recherche par le professeur. Ces reprises seront là encore répétitives jusqu'au moment où l'élève cernera seul le pourquoi de son erreur, la phase finale étant évidemment de ne plus la faire.

Au passage, signalons qu'on pourrait concevoir qu'un élève en difficulté se constitue un lexique (carnet répertoire) des mots utilisés qui seraient source d'erreurs (transposer, supprimer, réduire...). Il effectuerait en quelque sorte une "traduction" de ces mots, mais dans un langage qui lui permettrait, à lui, et pas obligatoirement à son camarade, de maîtriser son calcul. Cela pourrait être en mettant en évidence la formule mathématique, l'énoncé en français de la règle, des exemples de son choix...

De la même façon, l'élève peut constituer son propre fichier d'erreurs, et à chaque erreur, il l'identifie et la répertorie. Le professeur, lors d'une correction de devoir peut se contenter de mettre par exemple $\boxed{E}$ (pour Erreur). L'élève fera son propre travail de recherche, et le professeur dans un second temps, contrôlera avec l'élève ; si l'élève n'est pas encore capable de faire une telle démarche, le professeur la fait avec lui (comme nous l'avons expliqué précédemment).

Cela nous conduit à la seconde idée, concernant une telle gestion des erreurs : il est essentiel que le professeur veuille vraiment utiliser ce moyen de remédiation, en étant conscient des exigences de suivi d'un tel travail :

- dans chaque contrôle signaler la présence d'une erreur $\boxed{\text{E}}$ puis vérifier dans un deuxième temps que l'élève l'a bien identifiée. Variante : si des erreurs ont déjà été repertoriées et codifiées, le professeur, dans une première phase, indique le code -voir fichier d'erreurs- mais dans une deuxième phase, il indiquera seulement $\boxed{\text{E}}$.

- demander périodiquement à voir le fichier afin que l'élève puisse aussi, avec son professeur, voir son évolution (l'élève peut prévoir une colonne où il met par exemple les dates des erreurs et ainsi constater qu'une erreur est en "voie de disparition") car ce travail doit être stimulant et valorisant.

Enfin, l'objectif final serait la maîtrise de ce calcul algébrique en fin de seconde.

Aussi cette remédiation sera d'autant plus efficace que l'habitude aura été prise en troisième, voir en quatrième, et pourquoi pas auparavant, avec un fichier "léger" ?!

Chaque membre du groupe a proposé dans sa classe l'élaboration d'un fichier d'erreurs dont la présentation varie de l'un à l'autre. Nous nous sommes contentés (mais c'est déjà beaucoup) de répertorier et de faire répertorier par les élèves les erreurs relevant de quatre rubriques :

Calculs prioritaires, parenthèses, erreurs d'écriture

Par exemple confusion entre $a(-b)$ et $a - b$

entre $a\ (b + c)$ et $ab + c$

entre $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$

entre $\dfrac{1}{\frac{a}{b}}$ et $\dfrac{\frac{1}{a}}{b}$

Confusion entre deux opérations

Par exemple confusion entre $\dfrac{an}{ap}$ et $an - ap$

entre a^2 et $2a$

entre $a(-b)$ et $a - b$

Confusion dans l'ordre de deux opérations successives (les "faux amis")

Par exemple confusion entre $(a + b)^2$ et $a^2 + b^2$

entre $\frac{1}{a+b}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Tout ce qui touche aux fractions

Par exemple confusion entre $a \times \frac{b}{c}$ et $\frac{ab}{ac}$

entre $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ et $\frac{a+c}{b+d}$

entre $\frac{1}{a+b}$ et $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

Comme on le voit, il nous a paru secondaire de chercher avec précision la rubrique la mieux adaptée à l'erreur que l'on voulait répertorier (ne serait-ce que parce que nous n'aurions pas toujours été d'accord entre nous !). L'essentiel est que l'élève marque bien ce qu'il a écrit, ce qu'il aurait éventuellement dû écrire et si possible un commentaire sur son erreur, en souhaitant (et ce n'est pas utopique) que s'il refait le même type d'erreur quelques temps après, il s'en aperçoive.

Nous ne proposons pas ici d'exemples de fichiers d'erreurs car rien ne remplacera le vôtre, celui que vous, professeur, vous aurez élaboré, à partir d'un devoir ou à une période jugée plus spécialement favorable, en partie ou en totalité avec vos élèves, avec un regroupement en rubriques, et une présentation que vous "sentirez" bien, l'idée essentielle étant qu'il soit adapté aux besoins de vos élèves.

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Premier Trimestre 1994
N° de Publication : 9402

Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 99 28 63 42

FICHE DUBLIREM

TITRE : CAPACITES METHODOLOGIQUES EN TROISIEME - SECONDE

I.R.E.M. : RENNES

AUTEUR : DEVE O - KERANFLECH J.Y. - LE DOUJET M. - LE GOFF S. - LE RU A. - MACE B. - MARMORET J.C. - VALLEE M. -

DATE : 1990-1992

NIVEAU : Classes de Troisième et de Seconde.

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de Mathématiques de Lycées et Collèges.

MOTS-CLES :

- Apprentissage.
- Activités.
- Remédiation.
- Hétérogénéité.

RESUME :

Dans le but de permettre l'acquisition de "méthodes" d'organisation par les élèves de Troisième et Seconde, à partir d'activités, quelques propositions pour améliorer des compétences, pour apprendre à préparer la résolution d'un problème, pour améliorer la remédiation.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX T.T.C.	TIRAGE
21 × 29,7	64	~~30,00~~ F 1 €	400 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-009-2