Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX

MATH E N MA B T S IQUES

I.R.E.M. de RENNES

JANVIER 1994

Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX

B
MATH E MA T IQUES
N S

I.R.E.M. de RENNES

JANVIER 1994

ISBN 2-85728-008-4

On participé à la rédaction de ce document :

BOISSEAU Yvette
Lycée Joliot Curie - RENNES

BRIS Gilbert
Lycée Joliot Curie - RENNES

DEGUEN Eliane
Rectorat d'Académie - RENNES

FONTAINE Liliane
Lycée Mendès France - RENNES

GUIBERT Claude
Lycée Beaumont - REDON

HUET Jean-Luc
Lycée Bréquigny - RENNES

LE GALL Maryse
Lycée Mendès France - RENNES

LEVEILLEY Marie
Lycée Bréguigny - RENNES

LEVEILLEY Michel
Lycée Bréquigny - RENNES

VIALLARD Christiane
Lycée Joliot Curie - RENNES

La saisie et la mise en page de ce document ont été effectuées par Danièle QUENTIN (IREM de Rennes).

Le tirage de ce document a été effectué par Françoise LE BESCOND et la reliure par Suzanne BOURON (IREM de Rennes).

SOMMAIRE

AVANT PROPOS

I - POURQUOI UN GROUPE DE RECHERCHE MATHEMATIQUES EN S.T.S. ?

- PROLONGER l'action nationale sur les B.T.S.
- REPONDRE à l'évolution de l'enseignement des mathématiques dans les différentes sections et assurer la survivance de la discipline en tant que telle.
- S'ADAPTER à la mise en place des nouveaux programmes écrits sous une nouvelle forme et les interpréter dans un certain flou des instructions officielles.
- S'INTERROGER sur la manière de faire passer certaines notions difficiles, en un nombre restreint d'heures, devant un public non habitué à l'abstraction.
- ROMPRE l'isolement du professeur de mathématiques en S.T.S. et faire face à un manque de documentation.
- GERER les relations avec les professeurs des matières professionnelles.

Dans ces sections, les étudiants sont des CONSOMMATEURS de résultats mathématiques. Les mathématiques ne peuvent se concevoir qu'en liaison avec les autres disciplines au SERVICE d'une finalité professionnelle. "Tout l'art de l'enseignant est de faire comprendre quand s'applique tel outil mathématique et comment cet outil a été bâti". (M. Rouquairol).

II - COMMENT A-T-IL FONCTIONNE ?

Mis en place en septembre 1990, il est le prolongement d'un groupe de secteur sur l'utilisation d'une grille d'évaluation en classe de S.T.S. ayant fonctionné pendant l'année scolaire 1989/1990.

Il a réuni dix professeurs de mathématiques. Pour préserver une certaine homogénéité dans les difficultés rencontrées sept enseignaient dans des S.T.S. du secteur industriel, ce qui peut expliquer le choix de certains thèmes.

Pour pallier à certains besoins le groupe a fait appel à des intervenants extérieurs dans le domaine de la statistique et de la transmission du signal.

III - QU'A-T-IL ABORDE ?

A l'époque de sa création très peu de livres étaient parus et les collègues de S.T.S. étaient désemparés pour trouver des activités permettant :

- de faire acquérir aux élèves un noyau de connaissances solides nécessaires pour les autres enseignements scientifiques et techniques,

- de développer chez eux la capacité à mobiliser ces connaissances pour résoudre des problèmes mettant en jeu des secteurs variés des mathématiques et des autres disciplines scientifiques.

Le choix des thèmes est guidé par la volonté d'aborder de façon concrète les notions mathématiques utilisées dans les autres disciplines spécifiques à chaque B.T.S.

Cette approche doit être aussi suffisamment ouverte pour permettre aux élèves les meilleurs de poursuivre leurs études (année de préparation aux concours d'entrée dans des écoles d'ingénieurs où des places leur sont réservées, entrée dans les E.N.I., dispense de DEUG pour certaines licences...).

Depuis, de nombreux ouvrages ont fleuri (cf. bibliographie) et on y trouve certaines activités proposées ici. C'est pourquoi nous nous sommes efforcés, dans la mesure du possible, de justifier notre démarche et de rapporter les réactions des élèves et des collègues des autres disciplines avec lesquels nous avons été amenés à avoir beaucoup de contacts.

Pour certaines activités nous avons cru judicieux de mettre en évidence des propriétés utilisées dans d'autres disciplines (en particulier en physique). En aucun cas nous n'avons voulu nous transformer en "spécialistes" d'une autre matière et outrepasser nos droits, mais ayant "transpiré" sur certaines notions bien lointaines nous avons voulu éviter au lecteur ce pensum.

THEMES ABORDES

- EQUATIONS DIFFERENTIELLES
  En physique on découvre de nombreux phénomènes conduisant à la résolution d'équations différentielles.

- ALGEBRE LINEAIRE
  Comment aborder la notion de matrice en utilisant le minimum de connaissances d'algèbre linéaire ?

- DEVELOPPEMENT EN SERIE DE FOURIER
  En électricité les élèves disposent de signaux trigonométriques qu'ils savent superposer et transmettre. Quand un signal est non trigonométrique, mais périodique, la seule possibilité de le transmettre est de le transformer en signaux périodiques que l'on superpose.

Remarque : Récemment de nombreuses et bonnes brochures sur les statistiques et probabilités ont été publiées (cf. bibliographie) aussi nous n'avons pas jugé utile de les reprendre.

I

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I - RADIOACTIVITE

Un corps radioactif est un corps dont les atomes se désintègrent spontanément en émettant des particules.

1 La masse $m(t)$ d'un échantillon d'un corps radioactif est donc fonction décroissante du temps t. La vitesse de désintégration $m'(t)$ (m' est la dérivée de m) est proportionnelle à la masse de l'échantillon à l'instant considéré.
L'unité de temps est choisie suivant l'élément chimique étudié. k constante réelle positive.

$$m'(t) = -k \times m(t)$$

Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente telle que $m(0) = m_0$ (masse initiale de l'échantillon).

2 Démontrer qu'il existe un réel T tel que pour tout $t \in [0\ , +\infty[$:

$m\ (t + T) = \frac{1}{2}\, m\ (t)$. (On suppose $m_0 \neq 0$).
T est la période du corps radioactif (temps au bout duquel le corps radioactif a diminué de moitié).

3 En se désintégrant, l'atome du radium ${}^{226}_{88}Ra$ donne de l'hélium et une émanation gazeuse, le radon, elle-même radioactive.

On observe ainsi que la masse de radium diminue de 0,043 % par an. Déterminer le coefficient k ci-dessus. En déduire T.

4 a) Sachant que la période du carbonne ${}^{14}_{6}C$ est $T = 5570$ ans, calculer de quel pourcentage diminue sa masse par an.

b) De même sachant que la période de l'uranium ${}^{239}_{92}U$ est $T = 32\ min.$, calculer de quel pourcentage diminue sa masse par minute.

Réponses : 2) $k = -4{,}3 \times 10^{-4}\ an^{-1}$

3) $T = \frac{+ln2}{k}$, $T = 1612\ ans$

4) a) $0{,}012\%\ par\ an$

b) $3\%\ par\ min$

II - REFROIDISSEMENT D'UN CORPS

Newton a observé que la vitesse de refroidissement d'un corps quelconque est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et l'air ambiant.

Si $\theta(t)$ est la température du corps à l'instant t, exprimé en secondes, la variation de température est $\dfrac{d\theta}{dt} = -k\ (\theta - \theta_1)$ où k est une constante positive et θ_1 la température de l'air ambiant.

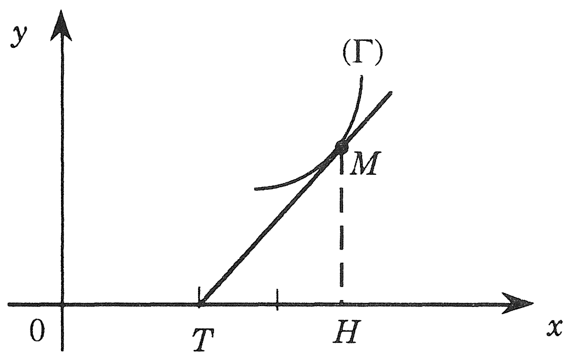
1) Sachant que pour $t = 0$, $\theta = \theta_0$, déterminer $\theta(t)$ en fonction de t.

2) On suppose que $\theta_1 = 20°\ C$, $\theta_0 = 70°\ C$.
Au bout de 5 minutes, θ vaut $60°\ C$.
Calculer k. Déterminer $\theta(t)$ en fonction de t.

Réponses : 1) $\theta(t) = \theta_1 + (\theta_0 - \theta_1)\, e^{-kt}$
2) $k = 7{,}4\ \ 10^{-4}$; $\theta(t) = 20 + 50e^{-kt}$

III - DEFLEXION D'UN FAISCEAU DE PARTICULES

Quelles sont les courbes (Γ) d'équation $y = g(x)$ en repère orthonormé telles que si H désigne la projection orthogonale sur Ox d'un point M quelconque de (Γ) et T l'intersection de la tangente en M à Γ avec Ox, on ait constamment T au milieu de $[O,H]$.



Soit $y = g(x)$

L'équation de la tangente en $M(x,y)$ est
$Y = g'(x)\ (X - x) + g(x)$

Le point T a pour abscisse $\dfrac{x}{2}$
a pour ordonnée 0

On a donc $0 = g'(x)\ (-\dfrac{x}{2}) + g(x)$

Le problème posé revient donc à résoudre l'équation différentielle précédente,

ou encore à résoudre $\dfrac{x}{2}\, y' - y = 0$

pour $x \neq 0$ $\quad y' - \dfrac{2}{x} y = 0 \quad (E)$

Cette équation différentielle a pour solutions les fonctions y :

$y(x) = Cx^2 \qquad C \in \mathbb{R}$.

Remarque : La tangente aux courbes, d'équation $y = Cx^2$, au point d'abscisse O vérifie les conditions imposées (O,T,H sont confondus).

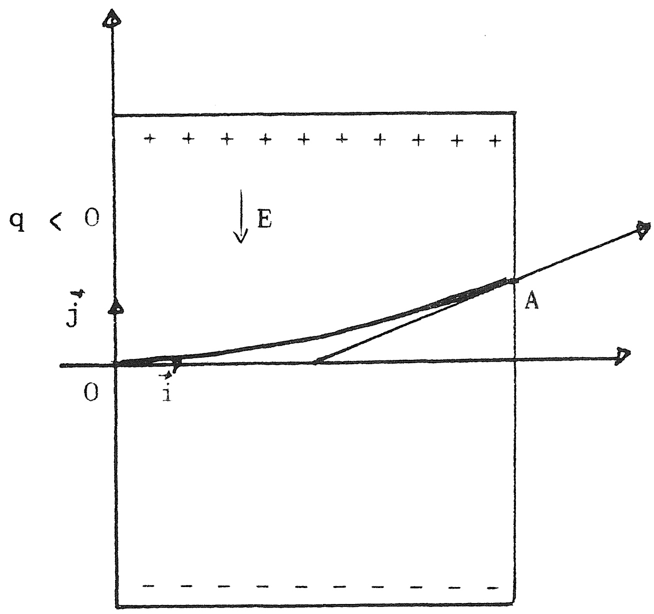
Conclusion :

Les courbes cherchées sont les paraboles de sommet O d'axe Oy. On en déduit une construction géométrique des tangentes aux paraboles.

Application physique :

Déflexion d'un faisceau de particules.

Considérons une particule chargée, par exemple un électron de charge $q = -e$, qui pénètre en O, dans un champ électrostatique uniforme avec une vitesse initiale $\overrightarrow{V}_O$ orthogonale au champ $\overrightarrow{E}$, et qui en ressort en A. Elle est soumise à la force $\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E}$ (on néglige sa masse).



La trajectoire de O à A est parabolique. Au delà elle est rectiligne puisque après A le champ $\overrightarrow{E}$ est nul, donc $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{O}$. La particule prend alors la direction de la tangente en A à la parabole. Du fait de l'importance de la vitesse $\overrightarrow{V}_A$ de la particule et de la faible distance parcourue, le temps de vol de l'électron est de l'ordre de quelques millisecondes.

L'angle α entre les tangentes en O et en A à la trajectoire détermine la déviation électrostatique.

IV - LE MIROIR

Intérêt :

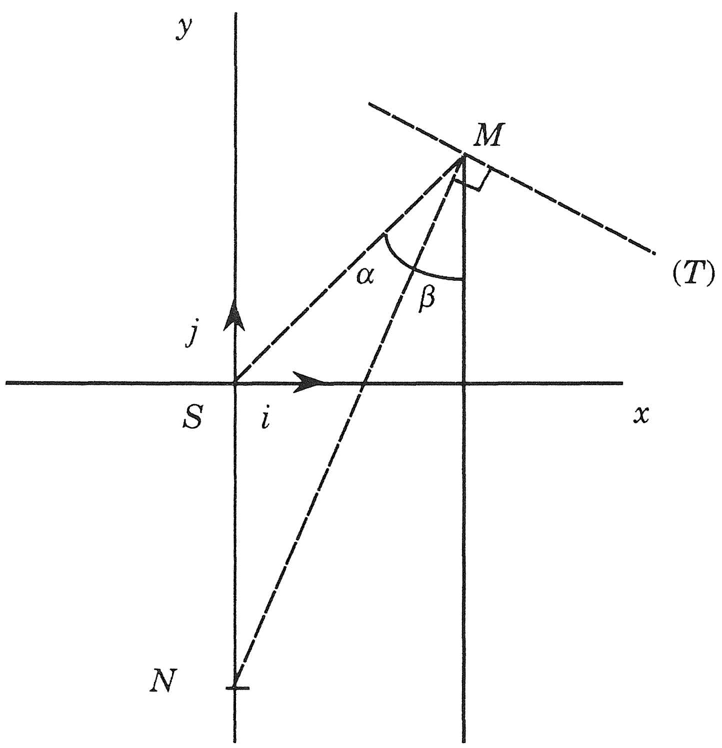
Mathématisation d'un problème. Introduction d'une équation différentielle de manière naturelle.

Problème :

On cherche à construire un miroir qui présente les propriétés suivantes :

- C'est un solide de révolution.
- Les rayons émis par une source lumineuse fixée en un point S de l'axe de révolution $(S, \vec{j})$ sont réfléchis par le miroir parallèlement à cet axe.

La figure ci-dessous schématise une coupe de ce miroir par un plan de symétrie.



N.B. $(S, \vec{j})$ axe de révolution du miroir est aussi axe de symétrie de la courbe.

Mathématisation :

On cherche donc une courbe C d'équation $y = f(x)$ où f est une fonction paire dérivable, solution du problème (on se place dans le cas où M n'appartient pas à l'axe de symétrie).
Soit M un point de C d'abscisse x, et (T) la tangente en M à C.

La perpendiculaire à (T) en M, appelée normale, coupe la droite $(S, \vec{j})$ en N (on suppose $x > 0$).
D'après les lois de la réflexion les angles α et β sont égaux.

1) Ecrire les coordonnées d'un vecteur directeur de (T).
   Exprimer l'ordonnée de N (lorsqu'il existe) en fonction de x.

2) Démontrer que le triangle SMN est isocèle et en déduire
   $[f(x) + \frac{x}{f'(x)}]^2 = x^2 + [f(x)]^2$

3) Démontrer que f est solution sur $\mathbb{R}^{+*}$ de l'une ou de l'autre des équations différentielles :

$$\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = -y' \quad (E_1) \qquad\qquad \frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}} = +y' \quad (E_2)$$

4) Déterminer la (ou les) courbe(s) (C) passant par le point de coordonnées (a,b), au choix du lecteur.

Solution :

1) $y_N = f(x) + \frac{x}{f'(x)}$ *si* $f'(x) \neq 0$

2) $SM = SN$ *d'où* $\sqrt{x^2+(f(x))^2} = \left| f(x) + \frac{x}{f'(x)} \right|$

3) En posant $U(x) = x^2 + (f(x))^2$
   (remarque $U(x) = x^2 + y^2$ avec $y^2 = (f(x))^2$
   la dérivée $2f(x)\,f'(x)$ sera notée $2yy'$ pour alléger l'écriture).
   $U'(x) = 2x + 2yy' = 2\,(x + yy')$

$$y' = \frac{-U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} \quad (E_1) \qquad\qquad y' = \frac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} \quad (E_2)$$

$$y = -\sqrt{U(x)} + K_1 \qquad\qquad y = \sqrt{U(x)} + K_2$$

   $K_1 \in \mathbb{R}^*$ *et* $K_2 \in \mathbb{R}^*$

Représentation graphique :

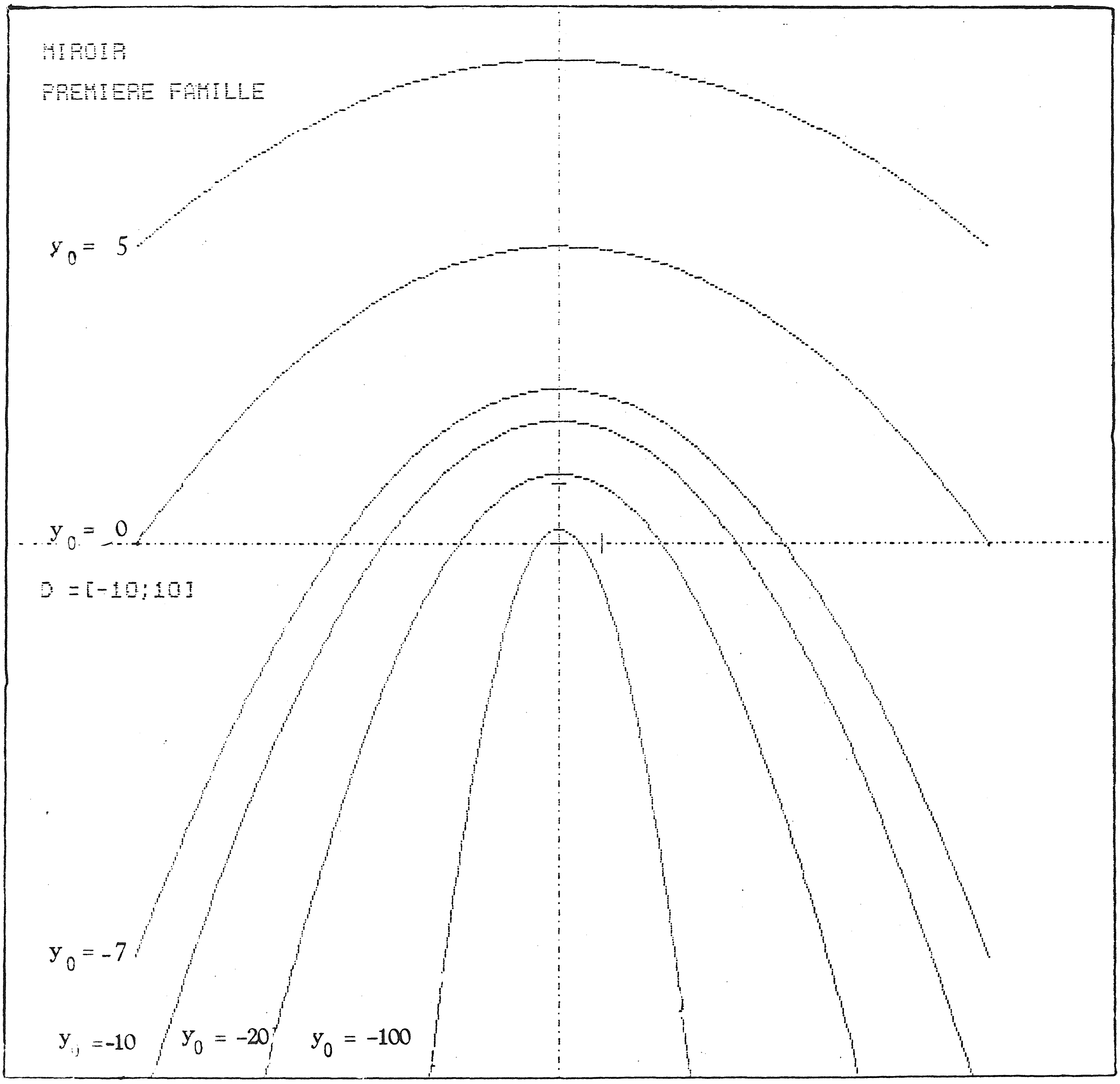
Les courbes qui suivent ont été tracées à l'aide du logiciel GRAPH'X, option *"$y'=f(x,y)$"*.

Première famille $y' = \dfrac{-U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$ *ou* $y' = \dfrac{-(x+yy')}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

$$y' = \frac{-x}{y+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Conditions initiales : $x = -10 \quad y = y_0$

Valeurs de y_0 : -100 , -20 , -10 , -7 , 0 , 5.

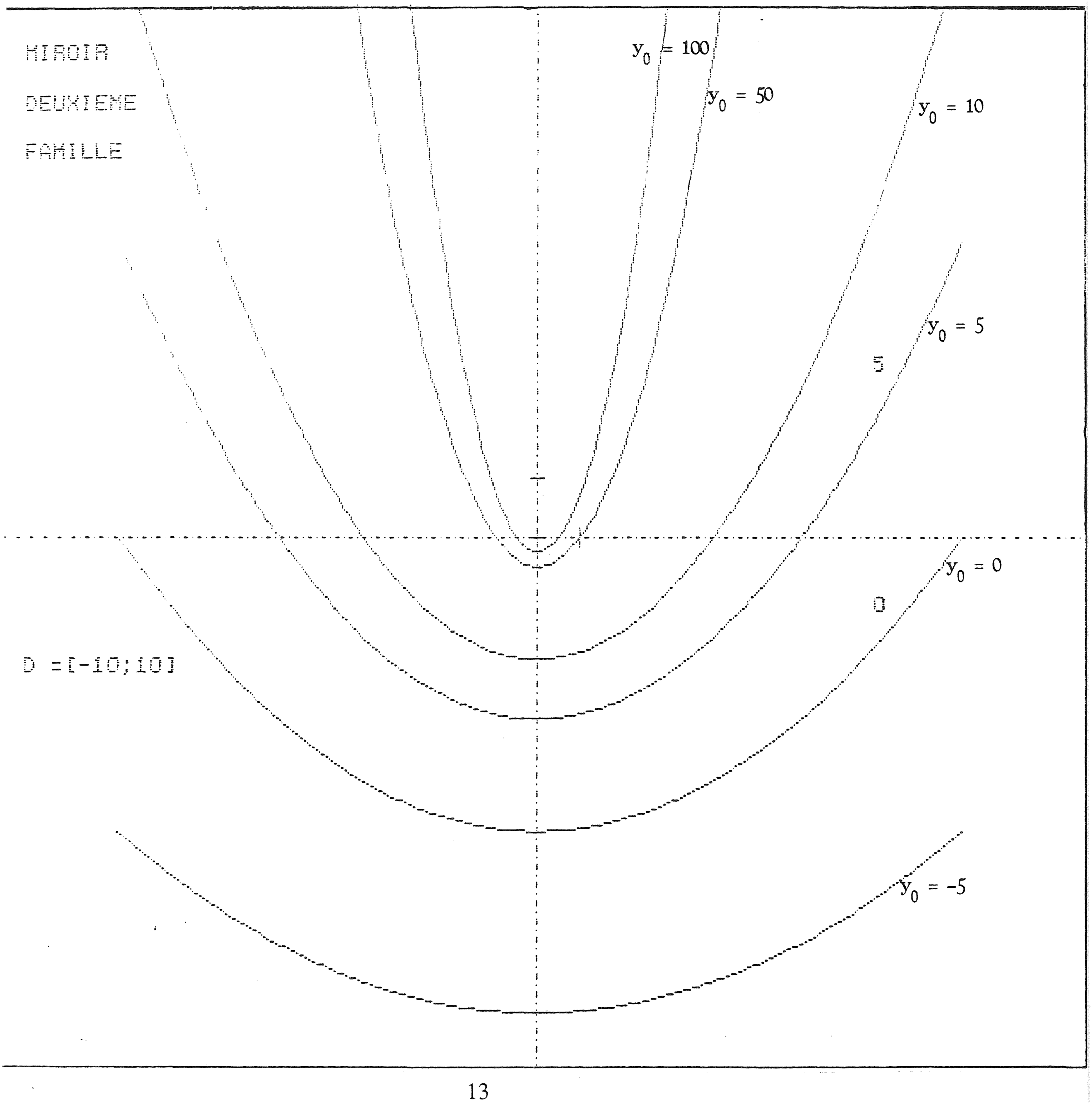


Deuxième famille $\quad y' = \dfrac{+U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} \quad ou \quad y' = \dfrac{+(x+yy')}{\sqrt{(x^2+y^2)}}$

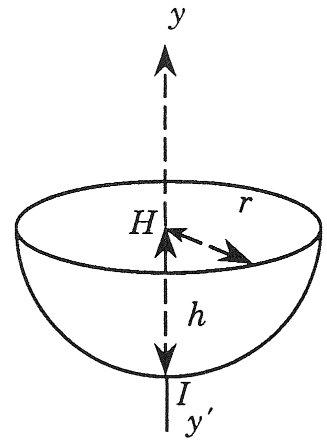
$$y' = \frac{+x}{-y+\sqrt{x^2+y^2}}$$

Conditions initiales : $x = -10 \quad y = y_0$

Valeurs de y_0 : -5 , 0 , 5 , 10 , 50 , 100.



Prolongement possible de cet exercice



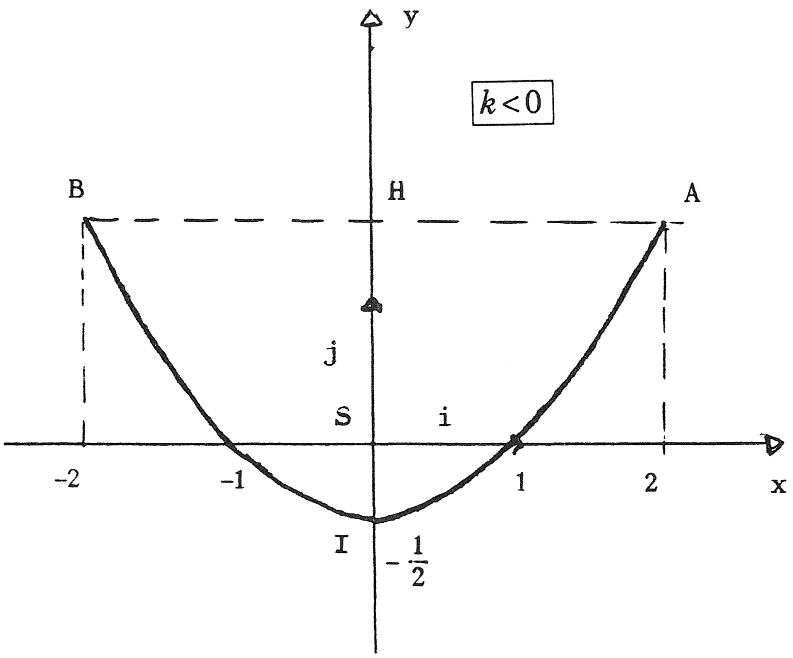
Prolongement possible de cet exercice : On choisit le décimètre pour unité de longueur, construire le profil d'un miroir (voir dessin ci-contre) de profondeur $h = 2$ et de "rayon" $r = 2$

Les solutions des équations (E_1) et (E_2) peuvent s'écrire $y = \pm\sqrt{x^2+y^2} + k \quad k \in \mathbb{R}^*$

ou encore $(y - k)^2 = x^2 + y^2$

c'est-à-dire $y = -\dfrac{1}{2k}x^2 + \dfrac{k}{2} \quad (Ck)$

(Remarque : C_k et C_{-k} sont symétriques par rapportà $(x' \text{ S } x)$



$h = IH$

$I\,(0\,;\dfrac{k}{2}) \quad A(2\,;-\dfrac{2}{k}+\dfrac{k}{2})$

d'où $IH = \left|y_H - y_I\right| = \dfrac{2}{|k|}$

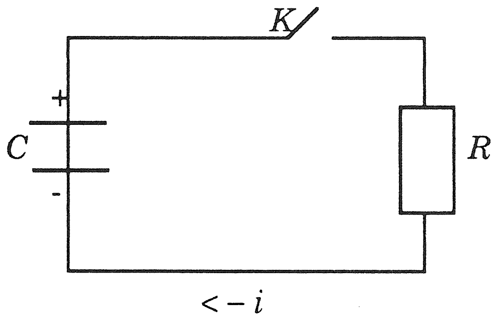
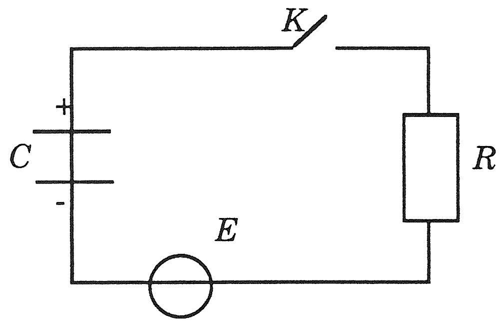
x

En tenant compte de la contrainte $h = 2$, on obtient donc $|k| = 1$,
soit $k = -1$ dans ce cas de figure.

V - CHARGE ET DECHARGE D'UN CONDENSATEUR

Pour les mises en équation, se référer au chapitre IV.

Présentation du phénomène physique

DECHARGE	CHARGE
	

q désignant la quantité
d'électricité à l'instant t, les
lois de Kirchoff permettent d'écrire :

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = 0 \quad (E_1) \qquad \Big| \qquad \frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} = E \quad (E_2)$$

équation différentielle
qui admet pour solution

$$q = CEe^{-t/RC} \qquad \Big| \qquad q = CE(1 - e^{t/RC})$$

<u>On pose en général $\tau = RC$</u>

τ est la constante électrique du circuit.
On est donc amené à construire les courbes d'équation :

$$q = CEe^{-t/\tau} \qquad \Big| \qquad q = CE(1 - e^{-t/\tau})$$

Application numérique :

$C = 1,6\ .\ 10{-}4\ F$, $E = 100V$.

Possibilité de prendre pour R les valeurs successives 50Ω , 60Ω , ... 120Ω , 150Ω.

$$q = CEe^{\frac{-t}{RC}}$$

Pour $R = 50\Omega$ *on obient :*

$$q = 1,6.10^{-2}e^{\frac{-200t}{1,6}}$$

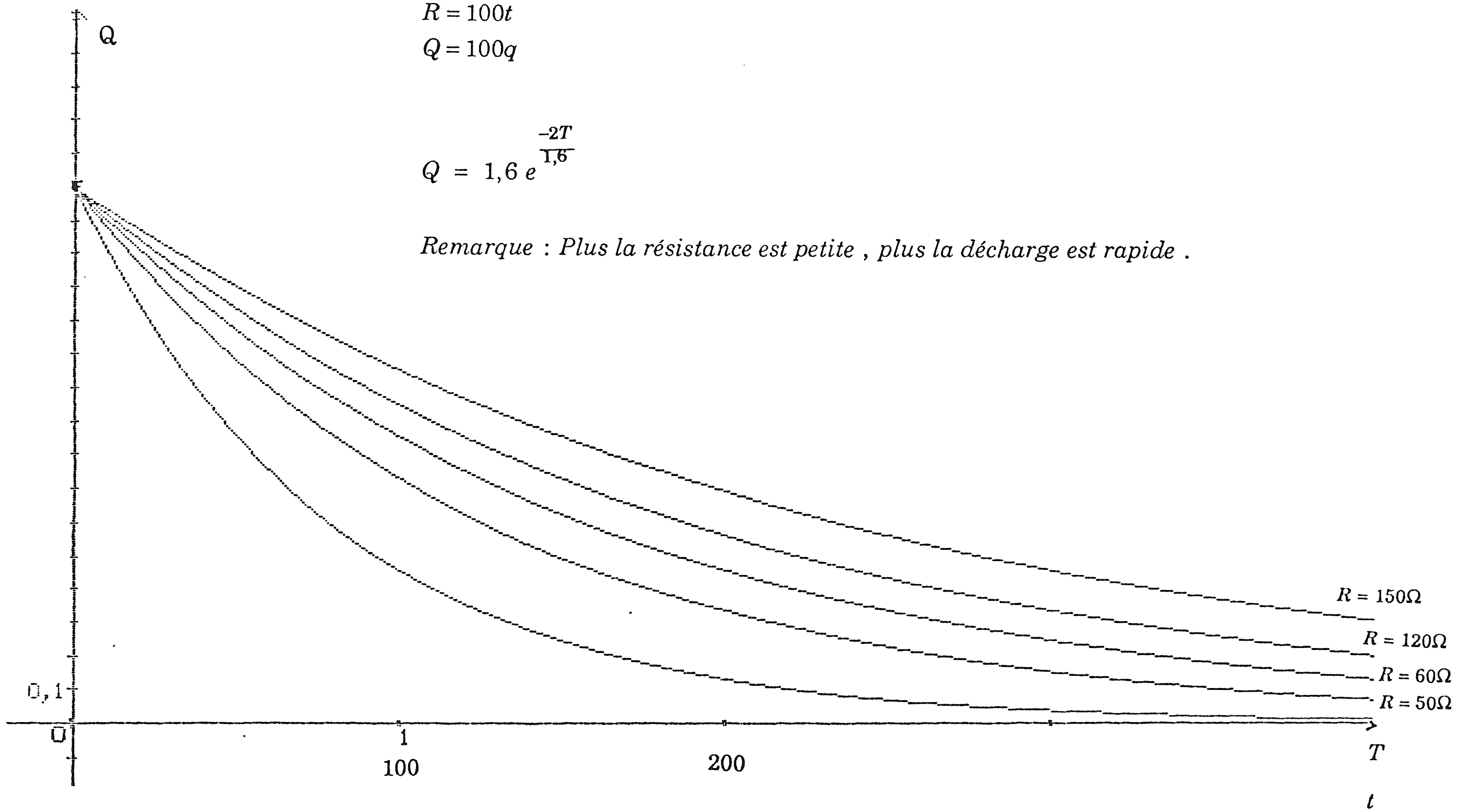
Soit, en posant :

$R = 100t$

$Q = 100q$

$$Q = 1,6\ e^{\frac{-2T}{1,6}}$$

Remarque : Plus la résistance est petite , plus la décharge est rapide .



Construction des courbes

Le physicien construit les courbes de charge et de décharge d'un condensateur point par point en utilisant seulement les points d'abscisse τ , 2τ, ... $n\tau$, τ étant la constante électrique du circuit. Dans ce qui suit, nous exposons sa méthode.

On pose $U = CE$.

A - Courbe de décharge (C1)

On place successivement les points
$A_0\,(O,U)$, $A_1\,(\tau\,,\frac{1}{3}\,U)$, $A_2\,(2\tau\,,(\frac{1}{3})^2\,U)$ ...

ainsi que les points :

$B_1\,(\tau,0)$, $B_2\,(2\tau,0)$, $B_3\,(3\tau,0)$ etc...

La courbe passe par les points A_0 , A_1 , A_2 ... et admet pour tangentes en ces points les droites respectives (A_0B_1) , (A_1B_2) , (A_2B_3)...

B - Courbe de charge (C2)

On place successivement les points
$A'_0\,(O,O)$, $A'_1\,(\tau\,,(\frac{2}{3})\,U)$, $A'_2\,(2\tau\,,(\frac{2}{3})^2\,U)$...

ainsi que les points :

$B'_1\,(\tau,U)$, $B'_2\,(2\tau,U)$, $B'_3\,(3\tau,U)$ etc...

La courbe passe par les points A'_1 , A'_2 , A'_3 ... et admet pour tangentes en ces points les droites respectives $(A'_0B'_1)$, $(A'_1B'_2)$, $(A'_2B'_3)$...

N.B. On peut également utiliser la symétrie par rapport à la droite d'équation $q = \frac{U}{2}$ qui échange les deux courbes.

Justification mathématique de la construction

A - Construction de (C_1) d'équation $q = Ue^{-t/\tau}$

A_n et B_n désignant les points d'abscisses $n\tau$ appartenant respectivement à la courbe (C_1) et à l'axe Ox, désignons par q_n l'ordonnée de A_n .

1) Démontrer que (q_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

2) Déterminer la pente a_n de la tangente au point A_n à la courbe (C_1) .
   Vérifier que (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

3) Vérifier que la tangente au point A_n à la courbe (C_1) passe par B_{n+1}.

4) Après avoir donné le tableau de variations de q, construire la courbe (C_1) en utilisant les points A_n et les tangentes en ces points.

Remarque : Les calculs précédents montrent que le physicien utilise $\frac{1}{3}$ comme approximation de $\frac{1}{e}$.

SOLUTION

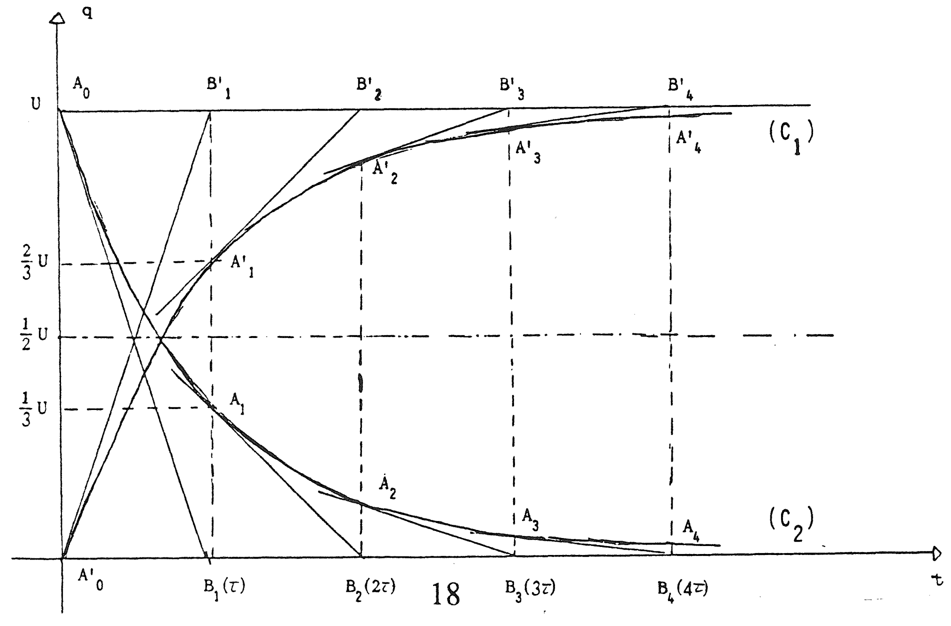
1) q_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

2) $q'(t) = -\frac{1}{\tau}\ Ue^{-t/\tau}$ *d'où* $a_n = -\frac{1}{\tau} q_n$

   Donc (a_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{e}$.

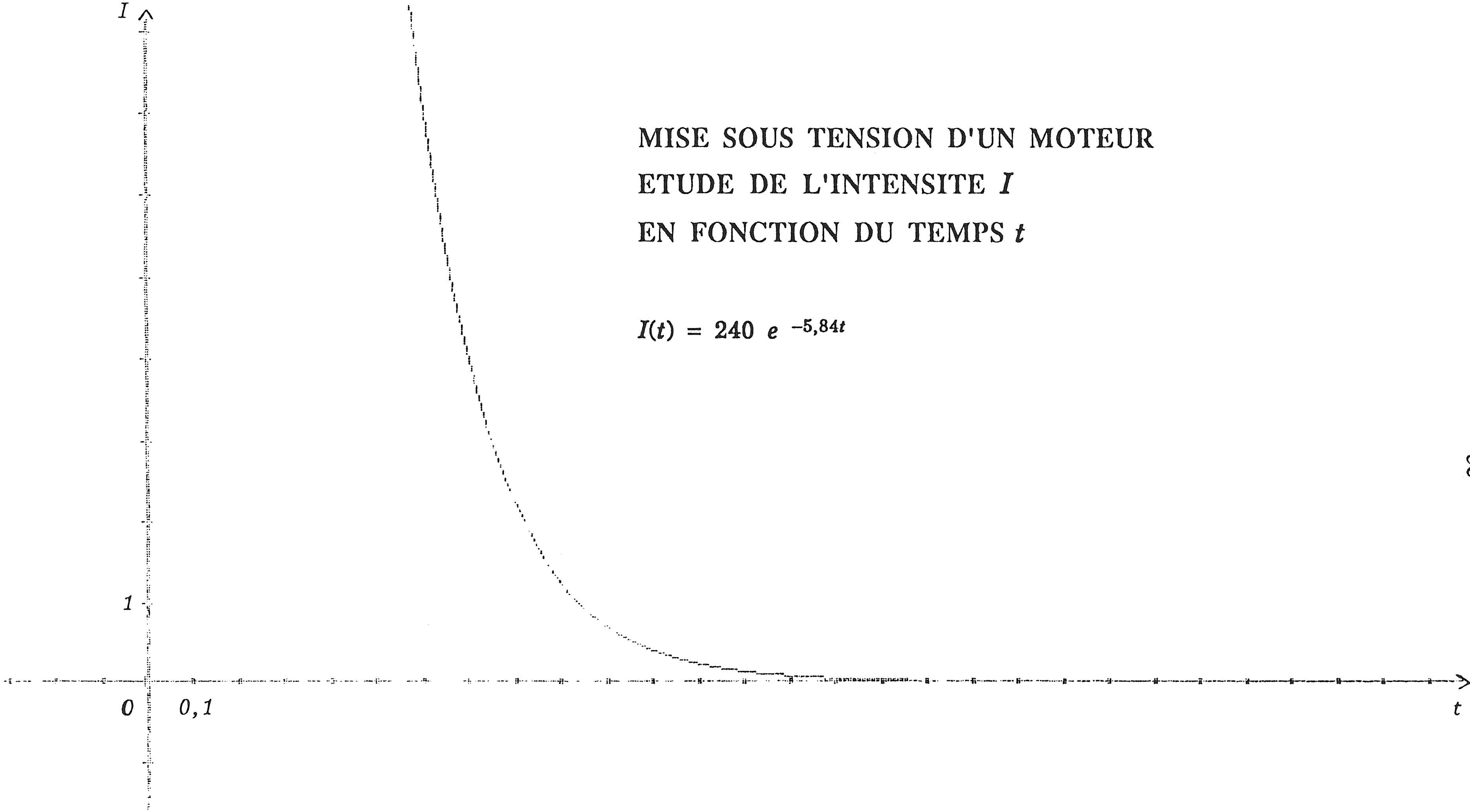
B - Construction de la courbe (C_2) d'équation $q = U(1 - e^{-t/\tau})$

La seconde courbe (C_2) est symétrique de la première par rapport à la droite d'équation $q = \frac{U}{2}$.



MISE SOUS TENSION D'UN MOTEUR
ETUDE DE L'INTENSITE I
EN FONCTION DU TEMPS t

$I(t) = 240\ e^{-5,84t}$



VII - ANNEXE : Résolution approchée d'une équation différentielle

METHODE D'EULER

Intérêt de cette méthode

Elle permet de donner une solution approchée d'une équation différentielle lorsque celle-ci ne peut être donnée de façon explicite, ce qui est le cas dans le problème N° 1. Le problème N° 2 montre la pertinence de la méthode.

PROBLEME N° 1

1) Donner la solution générale de l'équation différentielle (E_0) $y' + y = 0$

2) Soit l'équation différentielle :

$$(E) \quad y' + y = \frac{1}{x} \quad , \quad x \in]0\,, +\infty[$$

a) Vérifier que la fonction $f : x \to e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$
est la solution particulière de (E) telle que $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$.

b) Tabuler à la machine la fonction f sur $[1,2]$ avec un pas de 0,1.

3) Méthode d'Euler

On se propose de construire sur $[1,2]$ une approximation affine par morceaux de f solution de E, vérifiant $f(1) = 0$ et $f'(1) = 1$.

Pour celà on partage $[1,2]$ en n intervalles de même amplitude en considérant la suite définie par $x_0 = 1$; $x_i = x_{i-1} + \frac{1}{n}$ $\quad i \in \{1,2,\ldots n\}$. On pose $y_0 = f(x_0)$ et $y'_0 = f'(x_0)$.

- Sur $[x_0\,, x_1]$, f peut être approchée par la fonction affine $x \to y_0 + (x - x_0)\,y'_0$, ce qui revient graphiquement à approcher la courbe (C), représentation de f, par sa tangente en $M_0\,(x_0\,, y_0)$.

On pose $y_1 = y_0 + (x_1 - x_0)\,y'_0$ (valeur approchée de $f(x_1)$)

$y'_1 = \frac{1}{x_1} - y_1$ (valeur approchée de $f'(x_1)$)

Sur $[x_1\,, x_2]$ on approche (C) par la droite passant par $M_1(x_1\,, y_1)$ de coefficient directeur y'_1.

- On réitère l'opération, on définit ainsi deux suites de valeurs y_i, et y'_i par :

$$y_i = y_{i-1} + \frac{1}{n}\, y'_{i-1} \quad \text{et} \quad y'_i = \frac{1}{x_i} - y_i \qquad i \in \{1,2\ldots n\}.$$

La fonction, g_n, affine par morceaux définie sur $[1,2]$ par :
$\forall x \in [x_{i-1}\,, x_i]$ $\quad g_n(x) = y'_{i-1}(x - x_{i-1}) + y_{i-1}$ $\quad i \in \{1,2\ldots n\}$
est l'approximation cherchée.

Déterminer g_{10} et la représenter graphiquement.

REPONSES

1) $y' + y = 0$
On sait que la solution générale de cette équation est de la forme $x \to g(x) = Ce^{-x}$

2) a) Soit $f(x) = e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$

On a bien $f(1) = 0$. La fonction $t \to \frac{e^t}{t}$ est continue sur $]0\,, +\infty[$, la fonction f est dérivable sur $]0\,, +\infty[$ et $f'(x) + f(x) = \frac{1}{x}$

On a bien $f'(1) = 1$

b) Exemple. En utilisant le programme de calcul intégral d'une calculatrice, on peut ainsi remplir un tableau de valeurs pour f, on obtient $f(2) = 0.414$ et ensuite comparer ces résultats à ceux obtenus plus loin en utilisant la méthode d'Euler.
La solution générale h de (E) sur $]0 +\infty[$ s'obtient en ajoutant à la solution de (E_0) une solution particulière de (E).

$$h(x) = Ce^{-x} + e^{-x} \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$$

3) Méthode d'Euler

La fonction f peut être approchée sur $[1 ; 1,1]$ par la fonction affine $x \to x - 1$.

Soit D_0 la droite d'équation $y = x - 1$.

Le point M_1 de D_0, d'abscisse 1,1 a pour ordonnée $y_1 = 0,1$. Le nombre y_1 peut être considéré comme une valeur approchée de $f(1,1)$ ce qui permet en utilisant la relation $y' = \frac{1}{x} - y$ d'avoir une valeur approchée de $f'(1,1)$,

ici $y'_1 = \frac{89}{110}$ et on réitère le procédé pour obtenir une suite de valeurs telles que :

$x_i = x_{i-1} + 0,1 \qquad y_i = y_{i-1} + 0,1\, y'_{i-1} \qquad y'_i = \frac{1}{x_i} - y_i$

Il peut sembler avantageux de programmer ceci :

<u>*Avec une CASIO 180 P*</u>

*P*1	1	*KIN*1	(x_i)
	0	*KIN*2	(y_i)
	1	*KIN*3	(y'_i)

*INV P*2

*KOUT*1	
HLT	(*affichage de* x_i)
*KOUT*2	
HLT	(*affichage de* y_i)
*KOUT*3	
HLT	(*affichage de* y'_i)
*KOUT*1	
+	
0,1	
=	
*KIN*1	(*calcul de* $x_i = x_{i-1} + 0,1$)
*KOUT*2	
+	
(*KOUT* 3∗0,1)	
=	
*KIN*2	(*calcul de* $y_i = y_{i-1} + 0,1\, y'_{i-1}$)
*KOUT*1	
1/*X* - *KOUT*2	
=	
*KIN*3	(*calcul de* $y'_i = \frac{1}{x_i} - y_i$)
RTN	

Exécution du programme

*MODE P*1

Ensuite INV P 2 et presser sur RUN

Programme correspondant à une approximation par la méthode d'Euler d'une solution sur un intervalle quelconque.

Sur CASIO *fx* 7700 G : (Mode 2 Prog 7)

'EULER'	
"A" ? → A	*borne inférieur* x_0
"B" ? → B	*borne supérieur* x_n
"N" ? → N	*nombre de subdivisions n*
(B − A) : N → H	*longueur de chaque intervalle* $h = \frac{x_n - x_0}{n}$
"YØ" ? → Y	*valeur initiale* $y(x_0)$
"DØ" ? → D	*dérivée en* x_0
A → X	*abscisse initiale* x_0
Lbl1 : X + H → X : "X"	*abscisse suivante*
X	*affiche de cette nouvelle abscisse*
Y + HD → Y : "Y"	*valeur approchée suivante* y_i
Y	*son affichage*
Prog 6 : "D"	*calcul de la dérivée* y'_i
D	*son affichage*
Goto1	*On reprend les calculs sur l'intervalle suivant.*

On exécute le prog 7
La formule permettant le calcul des dérivées est programmée en Prog6
Formule → D

Exemple : $y' = \frac{1}{x} - y$

Prog6 $\frac{1}{X} - Y \to D$

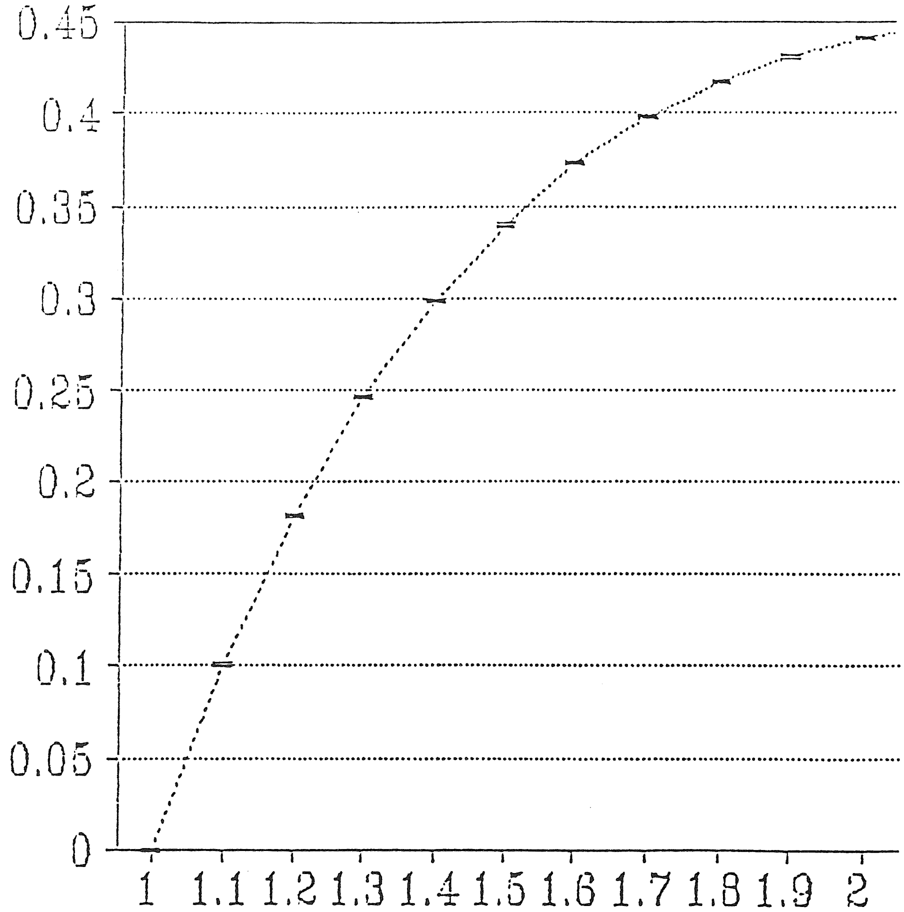
Mode 1

Sur *TI* 81

DISP "A"	*borne inférieure* x_0
INPUT A	
DISP "B"	*borne supérieur* x_n
INPUT B	
DISP "N"	*nombre de subdivisions n*
INPUT N	
(B–A) : N → H	*longueur de chaque intervalle* $h = \frac{x_n - x_0}{n}$
DISP "Y"	
INPUT Y	*valeur initiale* $y(x_0)$
DISP "D"	*dérivée en* x_0
INPUT D	
A → X	
LBL 1	
X = H → X	
DISP "X"	*affichage nouvelle abscisse*
DISP X	
PAUSE	
Y + HD → Y	*valeur approchée de y*
DISP "Y"	*affichage*
DISP Y	
PAUSE	
$\frac{1}{X} - Y \to D$	*formule calculant nouvelle dérivée.*
GOTO1	

REPRESENTATION GRAPHIQUE DE LA SOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE $y' + y = \frac{1}{x}$ OBTENUE A L'AIDE DE LA METHODE D'EULER

Graphique N° 1



i	x	y	y'
0	1.0	0.0000	1.0000
1	1.1	0.1000	0.8091
2	1.2	0.1809	0.6524
3	1.3	0.2462	0.5231
4	1.4	0.2985	0.4158
5	1.5	0.3400	0.3266
6	1.6	0.3727	0.2523
7	1.7	0.3979	0.1903
8	1.8	0.4170	0.1386
9	1.9	0.4308	0.0955
10	2.0	0.4404	0.0596

```
program EULER;
uses CRT;
var I : integer;
     y , yp , x : real;
const pas = 0.1;
Begin
clrscr;
  I:= 0  ;  x:=1  ;  y:=0  ;  yp:=1
   writeln ('i':3 , 'x':5 ; 'y':10 , 'y'':10) ;
  repeat
    writeln (I:3 , x:5:1 , y:10:4 , yp:10:4) ;
    x:= x+pas;
    y:= y+(yp*pas) ;
    yp:= (1/x)-y;
    I:=I+1
  until  (I=11);
  readln;
END.
```

PROBLEME N° 2

Dans cet exemple on peut trouver une solution explicite de l'équation différentielle proposée. La méthode d'Euler est alors employée dans le but de montrer aux élèves la pertinence de celle-ci.

Soit l'équation différentielle (E) définie sur $]1\,,+\infty[$ par $y' = y^2 - 2xy + x^2 + 1$
On cherche la solution particulière f de (E) qui vérifie $f(2) = 1$.

1) Montrer que la fonction $x \to x$ est une solution particulière de (E).

2) On pose $g(x) = x + z(x)$
Montrer que g est une solution de (E) si et seulement si z est une solution de $(E') : z' = z^2$

3) Résoudre l'équation (E') puis résoudre l'équation (E).
Donner la solution de (E) vérifiant la condition imposée. Calculer $f'(2)$.

4) En utilisant la méthode d'Euler, donner sur $[1,2]$, une approximation de la solution f de (E), vérifiant $f(2) = 1$, $f'(2) = 2$, par des fonctions affines par morceaux.

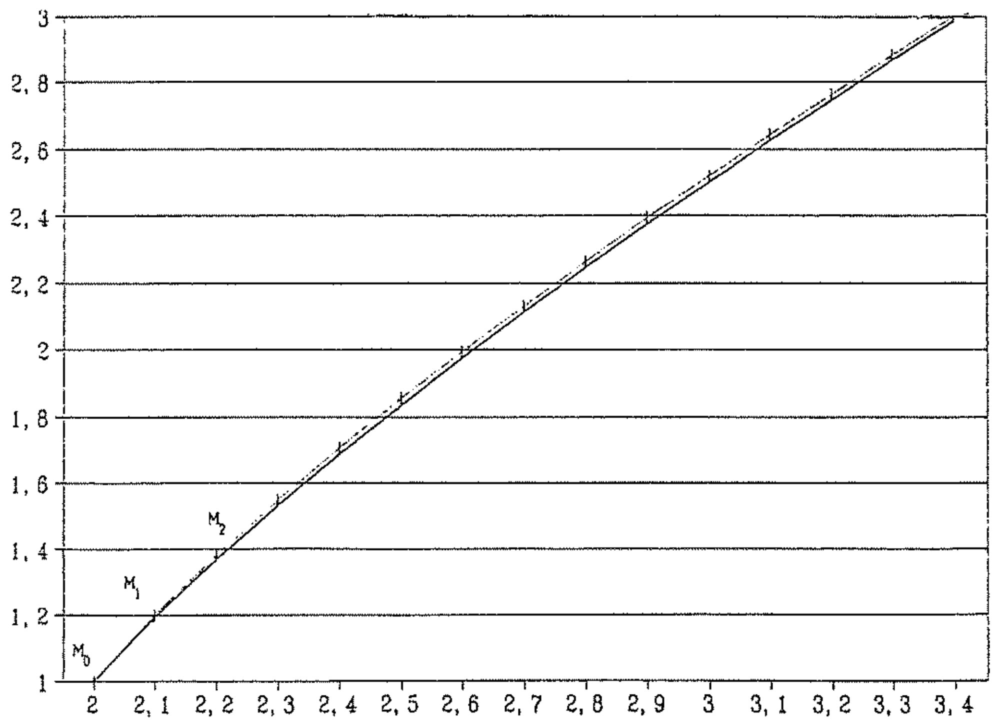
REPONSES

On trouve : $g(x) = x + \dfrac{1}{1-x}$
Pour utiliser la méthode d'Euler on construit la suite de valeurs x_i, y_i, y'_i de la façon suivante :
$x_i = x_{i-1} + 0{,}1 \quad y_i = 0{,}1\, y'_{i-1} + y_i \quad y'i = y_i^2 - 2x_iy_i + x_i^2 + 1$

sachant que $x_0 = 2 \quad y_0 = 1 \quad y'_0 = 2$

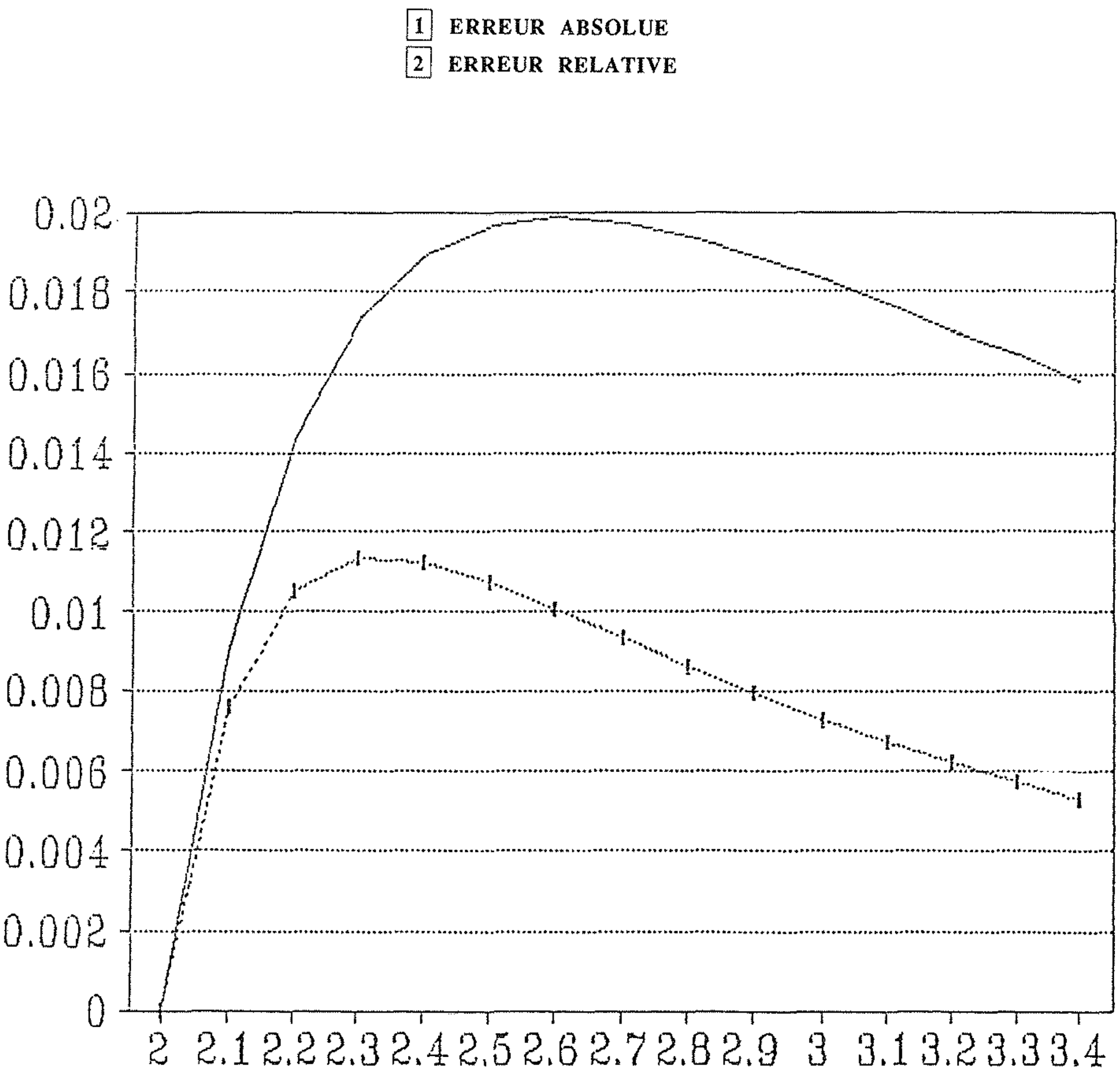
Graphique N° 2

En trait continu, la représentation graphique de g. En trait pointillé, le graphique obtenu par la méthode d'Euler.



Graphique N° 3

ERREUR COMMISE AVEC LA METHODE D'EULER



II

ALGEBRE LINEAIRE

I - INTRODUCTION

Le mot "linéaire" a été employé dans le secondaire mais ne correspond pas à une notion acquise par les élèves. D'autre part, il est difficile de donner un sens à une matrice sans avoir abordé les espaces vectoriels et défini les applications linéaires.

Dans la pratique $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ sont couramment utilisés (en économie générale, mécanique, ...). L'objectif est de mettre en évidence les notions élémentaires sur les espaces vectoriels, en s'appuyant sur des exemples simples pour illustrer les propriétés utilisées. Avec pour prolongement possible l'ensemble des polynômes du second degré, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle du second ordre sans second membre à coefficients complexes.

II - PROGRESSION POSSIBLE A TRAVERS L'ETUDE D'EXERCICES

1 - Etude de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ (en liaison avec les vecteurs de l'espace). Prolongement à $\mathbb{R}^n$.

2 - Base

a) Mise en évidence de la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.

b) Existence d'autres bases.

La notion de vecteurs linéairement indépendants est "difficile" pour les élèves de BTS, aussi on préfère définir une base de $\mathbb{R}^n$ par :

"n vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^n$ si le vecteur nul est combinaison linéaire, de manière unique, de ces n vecteurs"

ce qui permet de dégager la notion de dimension utilisée en particulier quand on résout les équations différentielles du second ordre.

EXERCICE

On veut démontrer qu'il suffit de connaître deux solutions indépendantes d'une équation différentielle linaire du deuxième ordre sans second membre pour obtenir toutes les solutions de cette équation.

Soit $(E) : y'' + ay' + by = O$

On suppose que y_1 , y_2 sont deux solutions indépendantes de (E) (ce qui signifie que $\frac{y_2}{y_1}$ n'est pas une constante réelle).

1) Démontrer que toute combinaison linéaire de y_1 et y_2 est solution de (E).

2) Réciproquement : soit y une solution quelconque de (E), on veut démontrer que y est une combinaison linéaire de y_1 et de y_2. On cherche à évaluer le rapport z de y à y_1. On remarque que si z est une constante réelle, le problème est résolu. On suppose donc que z n'est pas une fonction constante.

a) Démontrer que $z = \dfrac{y}{y_1}$ est solution de l'équation (E_1) définie par :

$$(E_1) : y_1 z'' + (2y'_1 + ay_1) z' = 0$$

En déduire que $\dfrac{y_2}{y_1}$ est solution de (E_1)

b) On pose $\varphi = \dfrac{y_2}{y_1}$

Démontrer que $\dfrac{z''}{z'} = \dfrac{\varphi''}{\varphi'}$ (E_2) (On pourra utiliser le fait que z et φ sont solutions de (E_1)

Intégrer (E_2)
(Rép. : $z = k\,\varphi + C$)

En déduire que y est bien combinaison linéaire de y_1 et y_2.

3) Quel est l'ensemble des solutions de l'équation (E) ?

3 - Applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ rapportées à leurs bases canoniques. Matrices.

On insiste particulièrement sur la propriété suivante :

Une application linéaire est déterminée dès que l'on connaît les images des vecteurs de la base canonique (ou d'une base quelconque) présentées sous forme de tableau.

4 - Présentation du produit de matrices

Exemple 1

Une usine fabrique deux produits A et B.

Pour une unité du produit A, il faut deux pièces de type P_1, une pièce de type P_2, quatre pièces de type P_3.

Pour une unité du produit B, il faut deux pièces de type P_1, trois pièces de type P_2.

Lors d'un programme de fabrication on utilise x unités du produit A et y unités du produit B.

1) Soit f l'application qui à un couple (x,y) d'un programme de fabrication, associe (n_1, n_2, n_3) où n_i est le nombre de pièces de type Pi nécessaires à cette fabrication.

f est une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, sa matrice est déterminée par :

$f(1,0) = (2,1,4)$ et $f(0,1) = (2,3,0)$

On considère la MATRICE $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$

Il faut donc $n_1 = 2x + 2y$ pièces de type P_1, $n_2 = x + 3y$ pièces de type P_2 et $n_3 = 4x$ pièces de type P_3.

On représente ceci sous la forme matricielle :

$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x+2y \\ x+3y \\ 4x \end{pmatrix}$ ou encore $\boxed{M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}}$

2) Une pièce de type P_1 coûte 12 F en matières premières et 3 F en frais de gestion.

Une pièce de type P_2 coûte 7 F en matières premières et 2 F en frais de gestion.

Une pièce de type P_3 coûte 5 F en matières premières et 1 F en frais de gestion.

A toute commande (n_1, n_2, n_3) de pièces, on associe le couple (c_1, c_2) où c_1 (resp. c_2) est le coût des matières premières (resp. de gestion) de cette commande. On définit ainsi une nouvelle application linéaire g de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice M' est :

$M' = \begin{pmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$c_1 = 12n_1 + 7n_2 + 5n_3$ et $c_2 = 3n_1 + 2n_2 + n_3$ qui s'écrit matriciellement :

$\boxed{M' \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}}$

En utilisant les résultats précédents c_1 , c_2 s'expriment en fonction de x , y par :

$c_1 = 51x + 45y$ et $c_2 = 12x + 12y$

ce qui s'écrit encore matriciellement $\begin{pmatrix} 51 & 45 \\ 12 & 12 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

$$M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}, \; M' \times \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}, \; M' \times M \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Par définition :

$$\begin{pmatrix} 12 & 7 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 51 & 45 \\ 12 & 12 \end{pmatrix}$$

Exemple 2 (sujet d'examen A.T.I. 1990)

Son intérêt : Faire intervenir les suites et la présentation matricielle.

Exercice

A - E étant un espace vectoriel réel muni d'une base $B(\vec{i}\,;\vec{j}\,;\vec{k})$, on considère l'application linéaire f de E dans E, dont la matrice relativement à la base B est :

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix}$$

Déterminer l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ de coordonnées (X, Y, Z) tels que $f(\vec{V}) = \vec{V}$.

Déterminer en particulier, le vecteur $\vec{V}$ tel que $X + Y + Z = 1$

B - Le service commercial d'un grand magasin fait, chaque année, une enquête auprès de sa clientèle.

Pour l'année n, on désigne par :

a_n la proportion de clients satisfaits,
b_n la proportion de clients sans opinion,
c_n la proportion de clients mécontents.

On admet que tout client est classé dans l'une de ces catégories, c'est-à-dire que :

$a_n + b_n + c_n = 1$

Une étude comparative des résultats sur deux années consécutives montre que l'on peut admettre que :

$$\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8\,a_n + 0{,}3\,b_n + 0{,}2\,c_n \\ b_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}4\,b_n + 0{,}2\,c_n \\ c_{n+1} = 0{,}1\,a_n + 0{,}3\,b_n + 0{,}6\,c_n \end{cases}$$

On suppose connues a_o , b_o , c_o pour une année "zéro".

1) On désigne par T_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

Ecrire une relation entre les matrices T_{n+1} , T_n et A.

2) Dans le cas où $a_o = \frac{6}{11}$, $b_o = \frac{2}{11}$, $c_o = \frac{3}{11}$, que peut-on dire des proportions a_n , b_n , c_n ?

3) On suppose maintenant $(a_o , b_o , c_o) \neq (\frac{6}{11} , \frac{2}{11} , \frac{3}{11})$
   On se propose d'étudier les comportements des proportions a_n , b_n , c_n en fonction de n.

   On considère les suites (x_n) , (y_n) , (x_n) définies par $\begin{cases} x_n = a_n - \frac{6}{11} \\ y_n = b_n - \frac{2}{11} \\ z_n = c_n - \frac{3}{11} \end{cases}$

   et on désigne par Vn la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$

   Calculer $x_n + y_n + z_n$

   Démontrer que $V_{n+1} = A.\ V_n$

   Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n. On trouvera :

   $x_{n+1} = \frac{1}{10}(6\,x_n + y_n)$

   $y_{n+1} = \frac{1}{10}(-x_n + 2y_n)$

4) On désigne par M_n le plus grand des deux nombres $|x_n|$ et $|y_n|$.
   On a donc $|x_n| \leq M_n$ et $|y_n| \leq M_n$
   Démontrer que $|x_{n+1}|$ et $|y_{n+1}|$ sont inférieurs à $\frac{7}{10} M_n$, c'est-à-dire que $M_{n+1} \leq \frac{7}{10}\ M_n$.

   En déduire que, pour tout entier naturel n, on a : $M_n \leq \left(\frac{7}{10}\right)^n .\ M_o$.
   Quelle est la limite de la suite (M_n) ?
   En déduire les limites des suites (x_n) et (y_n), puis celle de la suite (z_n)

5) Quelles sont les limites des suites (a_n) , (b_n) , (c_n) ? Commenter ce résultat.

5 - Pratique de la méthode du Pivot de Gauss pour la résolution de systèmes linéaires

Exemple 1

Une usine fabrique trois produits A, B, C en quantités respectives x, y, z à partir des pièces de type P_1 , P_2 , P_3 suivant le tableau :

	A	B	C
P_1	4	6	5
P_2	2	3	3
P_3	0	4	6

De plus on utilise 2 h de travail pour une unité de production de A, 3 h pour une unité de production de B, 1 h pour une unité de production de C.

1) Donner une représentation matricielle du nombre de pièces de type P_1,P_2,P_3 et du nombre d'heures de travail nécessaires à un programme de production (x,y,z).

2) On dispose d'un stock de 62 pièces P_1, 33 pièces P_2, 44 pièces P_3 et de t heures de travail.

   a) Déterminer le programme éventuel de production (x,y,z) pour $t = 25$.

   b) Quelle condition doit vérifer t pour qu'il existe un programme de production (x,y,z) épuisant complètement le stock de pièces ?

Réponses

1) $$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x+6y+5z \\ 2x+3y+3z \\ 4y+6z \\ 2x+3y+z \end{pmatrix}$$

2) a) $(x , y , z) = (3 , 5 , 4)$;
   b) La condition cherchée est $25 \leq t$.

Exemple 2

Une usine fabrique quatre produits A, B, C, D en quantités respectives x , y , z , t à partir de pièces de type P_i suivant le tableau :

	A	B	C	D
P_1	1	2	3	4
P_2	2	1	5	3
P_3	1	3	4	5
P_4	2	3	5	7

1) Soit

$$Q = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} ; S = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}$$ où n_i est le nombre de pièces de type P_i utilisées pour un programme de fabrication (x, y, z, t)

Ecrire une relation matricielle liant Q et S.

2) On dispose d'un stock de 41 pièces P_1 , 44 pièces P_2 , 53 pièces P_3 , 50 pièces P_4.

   Est-il possible d'épuiser complètement ce stock ?

3) On peut disposer d'un nombre supplémentaire, n, de pièces de type P_4.

   a) Déterminer n pour que le stock puisse être épuisé.
   b) Déterminer alors le programme de fabrication sachant que l'on veut fabriquer 5 unités de produit D.

Réponses

1) $$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \\ n_4 \end{pmatrix}$$

2) Non.

3) $n = 20$, $(x,y,z,t) = (3,3,4,5)$

Exemple 3 : Réseaux mailles (1)

Voir convention d'orientation des dipoles.

$E = 240\ V$

$e = 2\ V$

$R = 1\Omega$

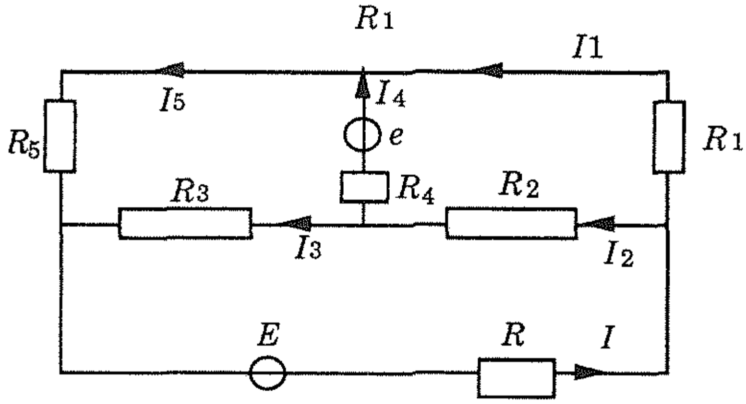
$R_1 = 7{,}5\ \Omega$

$R_2 = 3\ \Omega$

$R_3 = 2\ \Omega$

$R_4 = 1\Omega$

$R_5 = 1\ \Omega$



Déterminer les intensités des courants des diverses branches.

A l'aide de la méthode de Kirchoff on obtient :

$I = I_1 + I_2$

$I_2 = I_3 + I_4$

$I = I_5 + I_3$

$I + 3I_2 + 2I_3 = 240$

$I_4 + 3I_2 - 7{,}5I_1 = -2$

$I_4 - 2I_3 + I_5 = -2$

$$I = \frac{1347}{22} = 61{,}09$$

$$I_1 = \frac{211}{11} = 19{,}18$$

$$I_2 = \frac{925}{22} = 42{,}05$$

$$I_3 = \frac{579}{22} = 26{,}32$$

$$I_4 = \frac{173}{11} = 15{,}73$$

$$I_5 = \frac{384}{11} = 34{,}91$$

Exemple 4 : Réseaux mailles - (2) Le physicien réalise le schéma suivant :

$E_1 = 20V$

$E_4 = 15V$

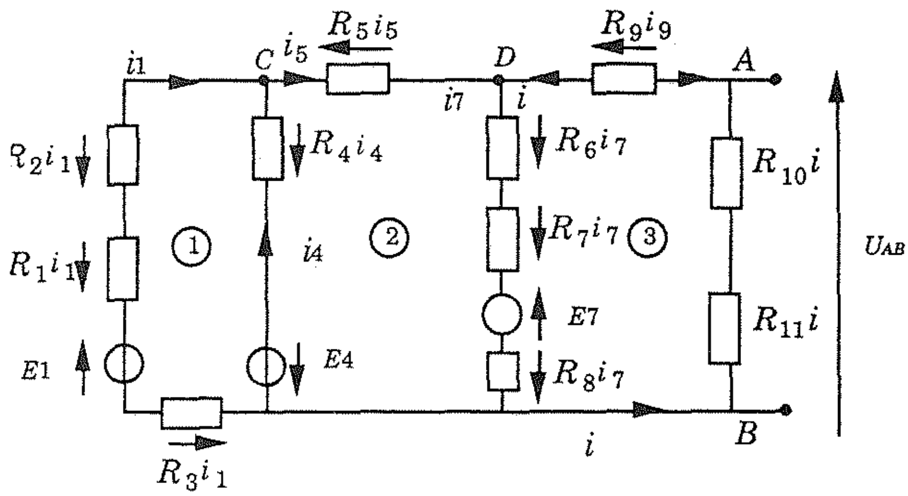
$E_7 = 10V$

$R_1 = R_4 = R_7 = 1\Omega$

$R_2 = R_3 = R_5 = 2\ \Omega$

$R_6 = R_8 = R_9 = 2\ \Omega$

$R_{10} = R_{11} = 2\ \Omega$



RECHERCHE DE U_{AB}

REPONSE : $U_{AB} = R_{10}i + R_{11}i$ soit $U_{AB} = 4i$

Recherche de i :
Maille 1 : $E_1 + R_1 i_1 + R_2 i_1 + R_4 i_4 + E_4 - R_3 i_1 = 0$
Maille 2 : $E_4 - R_8 i_7 + E_7 - R_7 i_7 - R_6 i_7 + R_5 i_5 + R_4 i_4 = 0$
Maille 3 : $E_7 - R_7 i_7 - R_6 i_7 - R_7 i - R_{10} i - R_{11} i - R_8 i_7 = 0$
Noeud C : $i_1 + i_4 = i_5$
Noeud D : $i_5 + i_7 = i$
Après résolution $i = -0{,}286\ A$ et $U_{AB} = -11{,}14V$

6 - Inversion de matrices

Un ami mathématicien dans un service de contre-espionnage vient de me communiquer le système de codage et de décodage utilisé dans son service.

Instructions

1) Ignorer toute ponctuation et tout accent.

2) N'employer que les 27 symboles suivants : les 26 lettres de l'alphabet français et le symbole - pour noter un espace entre deux mots.

3) Regrouper tous les symboles de votre message en blocs de trois : utiliser le symbole - pour compléter si nécessaire.

4) A chacun des 27 symboles faire correspondre un nombre de 1 à 27 de la façon suivante :

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	x	y	z	-
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	24	25	26	27

5) Chaque groupe de trois symboles devient alors un vecteur que l'on peut écrire sous forme de matrice colonne :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Où α , β , γ sont des entiers compris entre 1 et 27.

6) Multiplier chaque vecteur colonne ainsi obtenu par la matrice de codage suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

a) Suivant ces indications coder le message suivant : *"Salut Chef"*

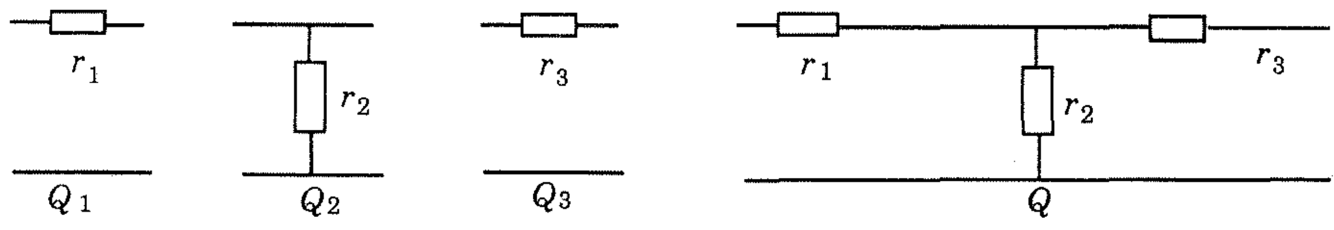
b) Décoder le message suivant (la première colonne donne les trois premières lettres et ainsi de suite).

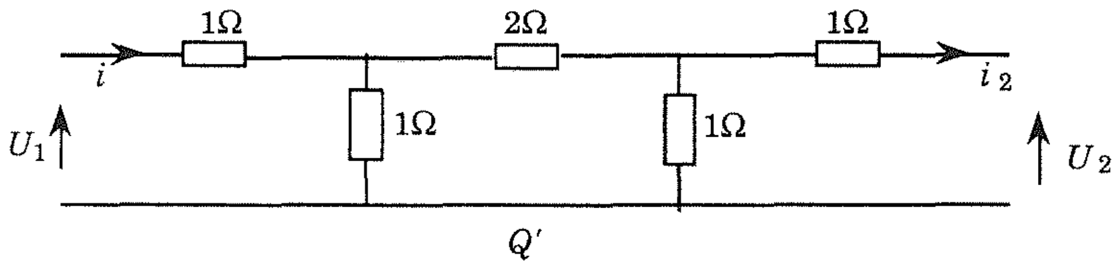
7	24	3	15	8	-6	-18	15
29	57	51	45	73	48	27	45
-35	30	-12	-27	20	-27	18	-27

Cet exercice est tiré de ATELIERS 105 - publication de l'équipe MATHECRIT-Québec.

7 - Valeurs propres - (voir le module 2)

EXERCICE 1





Les quadripoles Q_1,Q_2 et Q_3 ont respectivement pour matrices de transfert :

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & -r_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{r_2} & 1 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & -r_3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Calculer en fonction de r_1 , r_2 , r_3 la matrice de transfert $T = T_3 \ T_2 \ T_1$ du quadripole Q.
   On suppose dans toute la suite $r_1 = r_2 = r_3 = 1$

2) On démontre que le facteur d'affaiblissement du quadripole Q est le carré de la valeur propre de T qui est inférieur à 1. Calculer le facteur d'affaiblissement de Q.

3) Le quadripole Q' a pour matrice de transfert T^2 :
   Calculer cette matrice ; en déduire la valeur du facteur d'affaiblissement de Q'.

4) Les tensions d'entrée et de sortie u_1 et u_2, les intensités d'entrée et de sortie i_1 et i_2 sont liées par la relation :

$$\begin{pmatrix} u_2 \\ i_2 \end{pmatrix} = T^2 \begin{pmatrix} u_1 \\ i_1 \end{pmatrix}$$

Calculer u_1 et i_1 sachant que $u_2 = 1$ et $i_2 = 2$

EXERCICE 2 (Photonique 91)

A toute suite réelle u de terme général u_n, on fait correspondre la suite $\Delta(u)$ de terme général Δu_n défini par :

$$\Delta u_n = u_{n+1} - u_n$$

On définit ainsi un opérateur linéaire sur les suites réelles.

On note : $\Delta^2(u) = \Delta(\Delta(u))$

1 - Exprimer le terme général $\Delta^2 u_n$ de la suite $\Delta^2(u)$.
2 - On se propose de résoudre l'équation (E) :

$$(E) \qquad \Delta^2(u) - 4u = 0$$

c'est-à-dire de chercher toutes les suites u qui vérifient (E).

a) Montrer que les solutions de (E) sont les suites u vérifiant (E') :

$$(E') \qquad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On note f l'endomorphisme dont M est la matrice dans la base canonique.

b) Montrer que les nombres -1 et 3 sont les valeurs propres de f.

Déterminer les vecteurs propres $\vec{I}$ relatif à -1 et $\vec{J}$ relatif à 3.

c) Soit P la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs $\vec{I}$ et $\vec{J}$ dans la base canonique.

$$M = PDP^{-1} \quad \text{et} \quad M^n = PD^nP^{-1}.$$

On demande :
- d'expliciter D et P ;
- de calculer P^{-1}, D^n puis M^n.

d) Soit u, une solution de E. On pose :

$$V_n = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$$

(E') s'écrit alors $V_n = MV_{n-1}$
On a donc : $V_n = M^n V_o$

En déduire le terme général u_n de toute suite u solution de (E), en fonction de n, u_0 et u_1.

EXERCICE 3 (Informatique industrielle 91)

Soient (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1, par :

$$(1)\begin{cases} u_n = 3u_{n-1} - \frac{2}{3}v_{n-1} \\ v_n = 8u_{n-1} - \frac{5}{3}v_{n-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad (2)\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = -1 \end{cases}$$

A) 1) Calculer les termes u_1 et v_1.

2) Calculer les termes u_2 et v_2

B) Le but de cette partie est de déterminer les expressions de u_n et v_n en fonction de n et d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n). On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ et sa base canonique B. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ admettant pour matrice dans la base B :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -\frac{2}{3} \\ 8 & -\frac{5}{3} \end{pmatrix}$$

1) Pour tout entier n, on note X_n la matrice unicolonne $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$

Montrer que l'on a la relation $X_n = AX_{n-1}$ pour $n \geq 1$

On admettra que, pour tout entier n , $X_n = A^n X_0$.

2) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.
On désignera par λ_1 et λ_2 les valeurs propres (avec $\lambda_1 < \lambda_2$) et par $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ les vecteurs propres respectivement associés à λ_1 , et λ_2, vecteurs choisis de façon à ce que leur première coordonnée soit égale à 1.
Montrer que $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ forment une base B' de $\mathbb{R}^2$.

3) On appelle P la matrice carrée dont les colonnes sont les coordonnées respectives de $\overrightarrow{W_1}$ et $\overrightarrow{W_2}$ dans la base canonique.

a) Montrer que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

b) Calculer la matrice inverse P^{-1}

c) Si l'on pose $D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, vérifier que $A = P\,D\,P^{-1}$

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on admettra que

$$A^n = P\,D^n\,P^{-1} \text{, avec } D^n = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4) A partir des résultats précédents, démontrer que pour tout entier naturel n :

$$u_n = -\frac{4}{3^n} + 5 \quad \text{et} \quad v_n = -\frac{16}{3^n} + 15$$

5) En déduire la limite de chacune de ces deux suites quand n tend vers $+\infty$.

EXERCICE 4 (Informatique industrielle 91)

On se propose d'étudier les conditions d'émergence d'un rayon lumineux paraxial traversant n lentilles identiques.

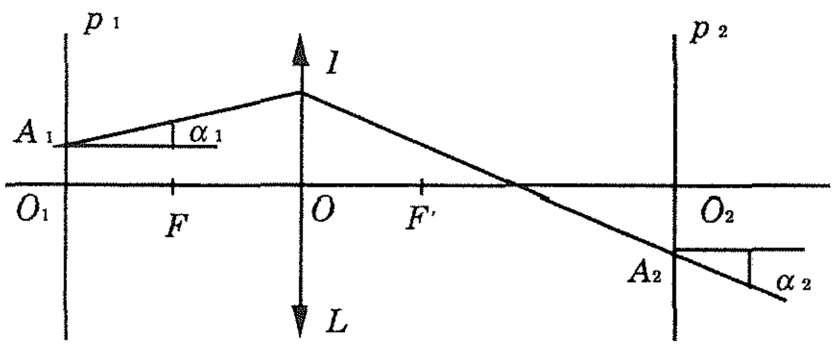
Remarque : On ne calculera ni les valeurs propres, ni aucune matrice.

Soit une lentille mince L, de distance focale f, de foyer F et F'.

On considère deux plans p_1 et p_2 situés de part et d'autres de L tels que :

$\overline{FO_1} = p_1$

$\overline{F'O_2} = p_2$



On considère un rayon paraxial caractérisé par :

$\overline{O_1A_1} = y_1$, $(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{A_1I}) = \alpha_1$

$\overline{O_2A_2} = y_2$, $(\overrightarrow{O_1O_2}, \overrightarrow{IA_2}) = \alpha_2$

1) Ecrire la matrice M de l'application linéaire définie par :

$$y_2 = -\frac{p_2}{f}\, y_1 + \left(f + \frac{p_1 p_2}{f}\right) \alpha_1$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{f}\, y_1 + \frac{p_1}{f}\, \alpha_1 \qquad \text{ou} \qquad \begin{pmatrix} y_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$$

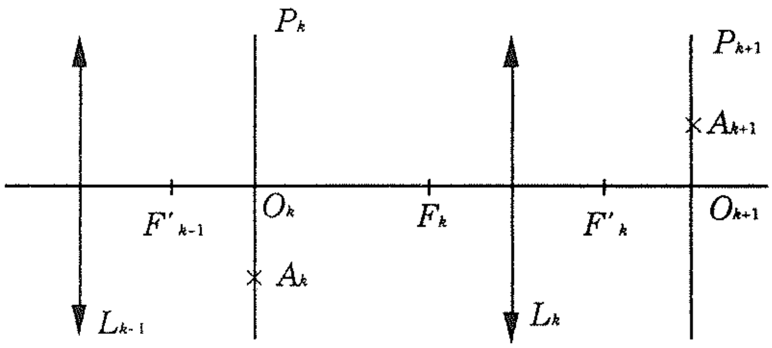
2) Ecrire l'équation caractéristique de M. Montrer que, si les valeurs propres λ_1 et λ_2 sont réelles distinctes, on a : $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$, et que, si elles sont complexes, on a : $|Re\ (\lambda_1)| < 1$ et $|Re\ (\lambda_2)| < 1$.

On dispose de n lentilles identiques à L, coaxiales et équidistantes.

On pose :

$F'_{k-1}F_k = d = |\,p_1 - p_2\,|$

$y_k = \overline{O_kA_k}$



3) Soit la matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ Calculer D^n ; $n \in \mathbb{N}^*$

4) Soit T une matrice telle que $M = T\,D\,T^{-1}$. Montrer par récurrence que :

$M^n = T\,D^n\,T^{-1}$; $n \in \mathbb{N}^*$

5) Montrer que y_n et α_n sont combinaisons linéaires de λ_1 et λ_2.
Lorsque n est grand, le rayon émerge si y_n et α_n sont petits.
Montrer que, dans ce cas, si $d > 2f$, il n'y a pas émergence.

III

ACTIVITES PERMETTANT D'INTRODUIRE LE DEVELOPPEMENT DE FONCTIONS EN SERIES DE FOURIER

Tôt en première année, le professeur de physique doit développer en série de Fourier un certain nombre de fonctions liées à des phénomènes périodiques. Le professeur de mathématiques est,lui, bien loin d'avoir abordé la "théorie" des séries et qui plus est des séries de Fourier. Pourtant il semble préférable que ce soit lui qui, le premier, dévoile les premiers "secrets".

Les activités qui suivent vont mettre en évidence l'existence de certains développements et permettre de justifier les modes de calculs employés. L'utilisation de calculatrices graphiques ou d'ordinateurs est vivement conseillée. Ces activités ont eu lieu dans une classe de BTS 1 année électronique au mois de février. La théorie des séries de Fourier sera abordée en deuxième année.

Les étudiants doivent avoir acquis auparavant une bonne technique du calcul intégral (changement de variable, intégration par parties).

NB : Nous adoptons la notation du physicien à savoir $j^2 = -1$

ACTIVITE 1

OBJECTIF : PREMIERS CONTACTS...

Voici trois familles de fonctions :

$\{f_n\}$, $\{g_n\}$, $\{h_n\}$ *n élément de* N^* telles que

$$f_n(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos(t) + \frac{\cos(3t)}{9} + \frac{\cos(5t)}{25} + \ldots + \frac{\cos((2n+1)t)}{(n+1)^2}\right)$$

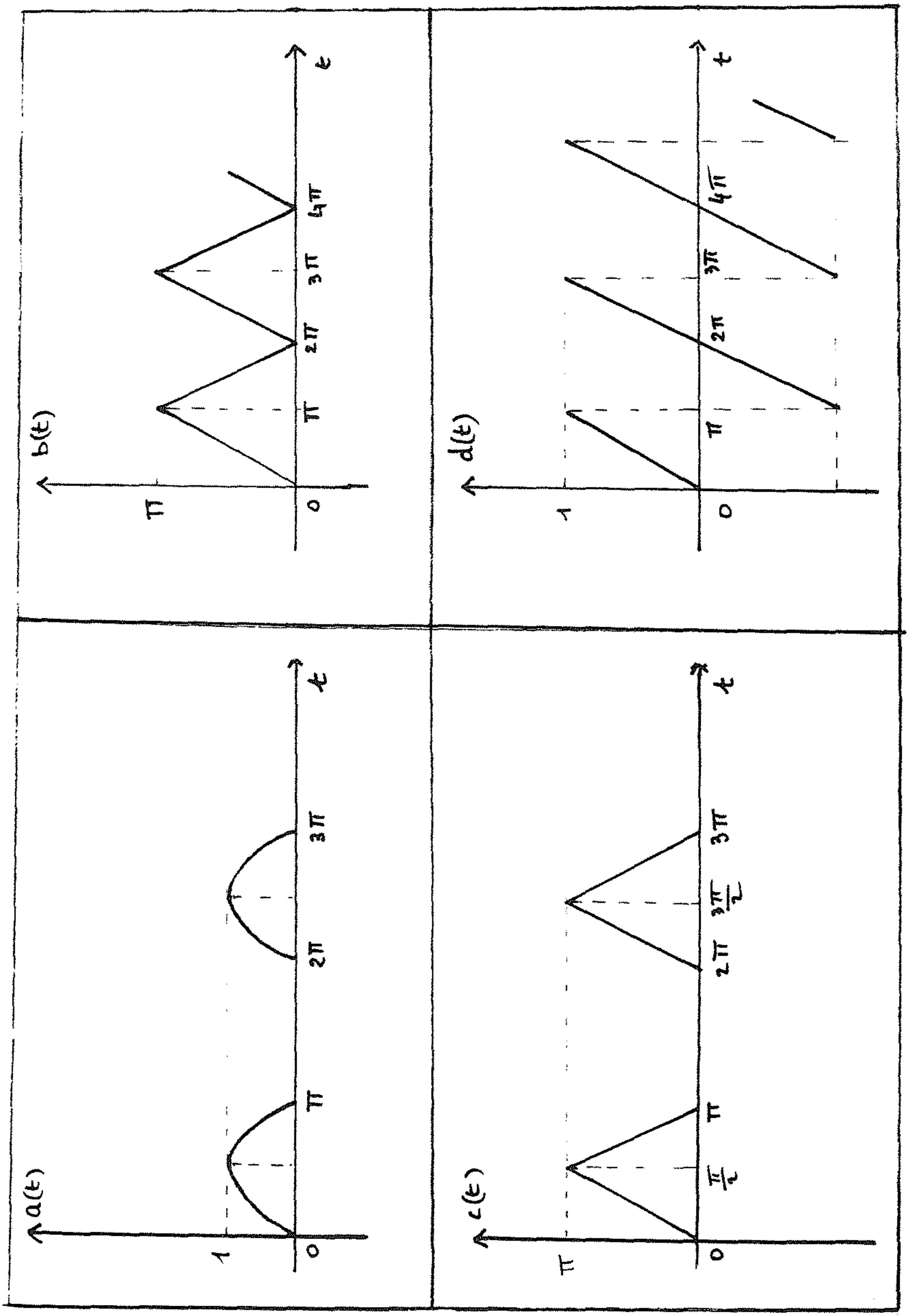
$$g_n(t) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(t) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos(2t)}{3} + \frac{\cos(4t)}{15} + \ldots + \frac{\cos(2nt)}{4n^2-1}\right)$$

$$h_n(t) = \frac{2}{\pi}\left(\sin t - \frac{\sin(2t)}{2} + \frac{\sin(3t)}{3} + \ldots + (-1)^{n+1} . \frac{\sin(nt)}{n}\right)$$

1 - Donner les expressions de $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, puis les représenter sur votre calculatrice. A quel signal représenté ci-dessous semble-t-on pouvoir associer $\{f_n\}$?

2 - Donner les expressions de $g_1(t)$, $g_2(t)$, $g_3(t)$, puis les représenter. A quel signal représenté ci-dessous semble-t-on pouvoir associer $\{g_n\}$?

3 - Donner les expressions de $h_5(t)$ et $h_9(t)$, puis les représenter. A quel signal représenté ci-dessous semble-t-on pouvoir associer $\{h_n\}$?


b(t)
π
0
π 2π 3π 4π
t
d(t)
1
0
π 2π 3π 4π
t
a(t)
1
0
π 2π 3π
t
c(t)
π
0
π/2 π 2π 3π/2 3π
t

ACTIVITE 2 : UN DEVELOPPEMENT CONNU !!

Soit la fonction f, définie par $f(t) = cos\ 3t$.

1 - Linéariser $cos\ 3t$

2 - a) Calculer

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ cos\ nt\, dt$$

b) Calculer

$$b_n = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ sin\ (nt)\, dt$$

3 - En déduire une expression de $f(t)$ à l'aide des fonctions élémentaires $a_n\ cos\ nt$ et $b_n\ sin\ nt$

$$\left(\text{On trouve bien évidemment } cos 3t = \frac{cos\ 3t + 3cos\ t}{4}\right)$$

ACTIVITE 3

OBJECTIF : Sur un exemple, déterminer le développement en série de Fourier sans faire le calcul systématique des coefficients.

On pose $f(t) = \dfrac{3+4\sin t}{5-4\cos t}$

Dans un premier temps, on se propose de démontrer que, pour un t donné, $f(t)$ est la limite d'une série trigonométrique de terme général $U_n(t) = \dfrac{1}{2^{n-1}}[\cos nt + \sin nt]$. Puis dans un deuxième temps, nous serons amenés à calculer les coefficients de Fourier associés à la fonction f.

1 - On pose :

$$C_n(t) = 1 + \cos t + \frac{1}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\cos(3t) + \ldots + \frac{1}{2^{(n-1)}}\cos(nt)$$

$$S_n(t) = \sin(t) + \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}\sin(3t) + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin(nt)$$

$$T_n(t) = C_n(t) + jS_n(t)$$

a) Calculer T_n

b) En déduire $C_n(t)$ et $S_n(t)$ puis $U_n(t) = C_n(t) + S_n(t)$

2 - Trouver un majorant de : $\left| U_n(t) - \dfrac{3+4\sin t}{5-4\cos t} \right|$

En déduire, pour t donné, $\lim\limits_{n \to \infty} U_n(t)$

Remarque :

On justifie ainsi l'écriture

$$f(t) = 1 + \cos t + \sin t + \frac{1}{2}[\cos 2t + \sin 2t] + \frac{1}{4}[\cos 3t + \sin 3t] + \ldots$$

3 - A l'aide de votre calculatrice graphique tracer les courbes représentatives de :

$$G_1(t) = 1 + \cos t + \sin t + \frac{1}{2}(\cos(2t) + \sin(2t)) + \frac{1}{4}(\cos(3t) + \sin(3t))$$

$$G_2(t) = G_1(t) + \frac{1}{8}[\cos(4t) + \sin(4t)]$$

4 - On se propose de calculer

$$I_n = \int_0^{\pi} \frac{3\cos nt}{5-4\cos t}\,dt$$

a) Calculer I_0 (on pourra faire le changement de variable : $U = tan\,(\frac{t}{2})$

b) Calculer I_1 : on pourra remarquer que : $3\cos(t) = \frac{3}{4}[4\cos(t) - 5 + 5]$

c) Après avoir vérifié que pour $n > 1$:

$2\,[\cos(n+1)\,t + \cos(n-1)\,t] = -[(5-4\cos t)\cos nt] + 5\cos nt,$

démontrer que $I_{n+1} = \frac{5}{2} I_n - I_{n-1}$

d) Démontrer que : $I_{n+1} = \frac{1}{2^n}\ \pi$

5 - On pose :

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt \qquad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt$$

Exprimer a_0 en fonction de I_0 puis a_n en fonction de I_n, et b_n en fonction de I_{n-1} et I_{n+1}. En déduire a_0, a_n, b_n.

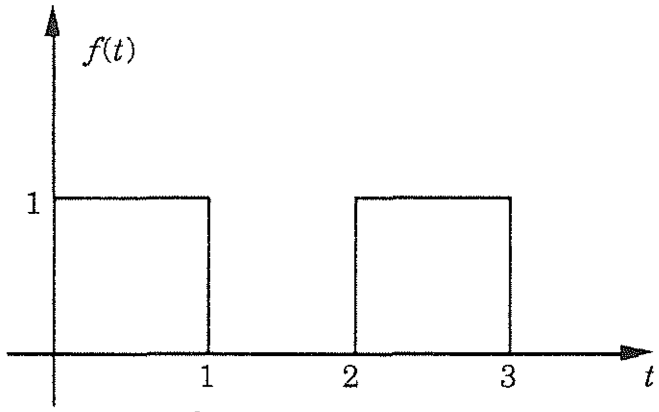
On vérifie ainsi que :

$f(t) = a_0 + a_1\cos t + b_1 \sin t + a_2 \cos_2 t + b_2 \sin_2 t + \ldots$

ACTIVITE 4

MONTONS AU CRENEAU

Soit f_e signal de période $T = 2$ représenté ci-dessous.



On pose : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

1 - Calculer

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T f(t)\, dt$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos (n\, \omega\, t)\, dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin (n\, \omega\, t)\, dt$$

2 - Sur votre calculatrice graphique représenter la fonction G telle que :

$$G(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \pi t + \frac{2}{3\pi} \sin (3\, \pi\, t) + \frac{2}{5\pi} \sin (5\, \pi\, t)$$

Comparer avec la représentation de f.

QUELQUES REMARQUES CONCERNANT L'EXPERIMENTATION

Ces quatre activités, suivies d'une synthèse, se sont déroulées pendant une semaine (4 heures) sous la forme de travaux dirigés (travaux de groupes).
Les élèves avaient entendu parler, par le professeur de physique, de la nécessité de tels développements mais ne les avaient pas pratiqués. Ils ont été très intéressés par la rapidité de la convergence des séries vers les fonctions à l'aide des comparaisons graphiques.
Dans l'activité 3, le calcul de I_0 par changement de variable transforme une intégrale définie en une intégrale généralisée. Mais cela n'a pas dérouté les élèves.

$$Arctan(+\infty) = \frac{\pi}{2} \quad !!!$$

et a donné l'occasion de définir : $\int_a^{+\infty} f(t)\, dt$ comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\, dt$

ELEMENTS DE CORRECTION POUR L'ACTIVITE 3

1 – *a*)

$$C_n(t) = \quad 1 + \cos t + \frac{1}{2}\cos 2\,t + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\cos nt$$

$$S_n(t) = \sin t + \frac{1}{2}\sin 2\,t + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\sin nt$$

$$T_n\,(t) = \quad Cn(t) + j\,Sn(t)$$

$$T_n(t) = 1 + e^{jt} + \frac{1}{2}\,e^{j2t} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}}\;e^{jnt}$$

$$T_n(t) = 1 + e^{jt}\frac{1-(\frac{1}{2}e^{jt})^n}{1-\frac{1}{2}e^{jt}}$$

$$T_n(t) = 1 + \frac{\left(e^{jt} - \frac{1}{2^n}e^{j(n+1)t}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-jt}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-jt}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{jt}\right)}$$

$$T_n(t) = 1 + \frac{e^{jt} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}e^{j(n+1)t} + \frac{1}{2^{(n+1)}}e^{jnt}}{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}(e^{jt} + e^{-jt})}$$

$$T_n(t) = 1 + \frac{\cos t - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^n}\cos(n+1)t + \frac{1}{2^{(n+1)}}\cos nt + j[\sin t - \frac{1}{2^n}\sin(n+1)t + \frac{1}{2^{n+1}}\sin nt]}{\frac{5}{4} - \cos t}$$

b) D'où

$$C_n(t) = R\,[Tn(t)] = \frac{3 - \frac{4}{2^n}\cos(n+1)t + \frac{4}{2^{n+1}}\cos nt}{5 - 4\cos t}$$

$$S_n(t) = J[T_n(t)] = \frac{4\sin t - \frac{4}{2^n}\sin\,(n+1)t + \frac{4}{2^{n+1}}\sin nt}{5 - 4\cos t}$$

$$U_n(t) = \frac{3 + 4\sin t}{5 - 4\cos t} + \frac{\frac{4}{2^{n+1}}(\cos nt + \sin nt) - \frac{4}{2^n}(\cos(n+1)\,t + \sin(n+1)t)}{5 - 4\cos t}$$

2 -

$$\left| U_n(t) - \frac{3+4\sin t}{5-4\cos t} \right| = \frac{\frac{4}{2^{n+1}}}{(5-4\cos t)} \left| \cos nt + \sin nt - 2\cos(n+1)t - 2\sin(n+1)t \right|$$

où $5 - 4\cos t \geq 1$ *et* $\left| \cos nt + \sin nt - 2\cos(n+1)t - 2\sin(n+1)t \right| \leq 6$

donc

$$\left| U_n(t) - \frac{3+4\sin t}{5-4\cos t} \right| \leq \frac{24}{2^{n+1}}$$

$$\left| U_n(t) - \frac{3+4\sin t}{5-4\cos t} \right| \leq \frac{12}{2^n}$$

t étant donné $\lim\limits_{n \to +\infty} \left| U_n(t) - \frac{3+4\sin t}{5-4\cos t} \right| = 0$

(pour mémoire on constate que la convergence est uniforme !)

(On justifie ainsi l'écriture :

$$\frac{3+4\sin t}{5-4\cos t} = 1 + \cos t + \sin t + \frac{1}{2}(\cos 2t + \sin 2t) + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}(\cos nt + \sin nt) + \ldots)$$

4 - Calcul de $I_n = \int_0^\pi \frac{3\cos nt}{5-4\cos t}\,dt$

a) $n = 0$

$$I_0 = \int_0^\pi \frac{3}{5-4\cos t}\,dt$$

On pose $u = \tan\frac{t}{2}$ d'où $du = \frac{1}{2}(1+u^2)\,dt$

$$I_0 = \lim_{x \to +\infty} \int_0^x \frac{6\,du}{1+9u^2}$$

$$\int_0^x \frac{6\,du}{1+9u^2} = 2\,\mathrm{Arctan}\,3x \qquad \boxed{I_0 = \pi}$$

$$b)\ I_1 = \int_0^{\pi} \frac{3\cos t}{5-4\cos t}\, dt$$

$$I_1 = \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \frac{4\cos t - 5 + 5}{5-4\cos t}\, dt$$

$$I_1 = -\frac{3}{4} \int_0^{\pi} dt + \frac{5}{4} \int_0^{\pi} \frac{3}{5-4\cos t}\, dt \qquad I_1 = -\frac{3}{4}\pi + \frac{5}{4} I_0 \qquad \boxed{I_1 = \frac{\pi}{2}}$$

$$c)\ I_{n+1} = \int_0^{\pi} \frac{3\cos(n+1)t}{5-4\cos t} = dt$$

$$I_{n+1} = \frac{5}{2} \int_0^{\pi} \frac{3\cos nt}{5-4\cos t} - \int_0^{\pi} \frac{3\cos(n-1)t}{5-4\cos t}\, dt - \int_0^{\pi} 3\cos nt\, dt$$

$$I_{n+1} = \frac{5}{2} I_n - I_{n-1}$$

$$I_2 = \frac{5}{2} I_1 - I_0$$

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \ldots\ldots \boxed{In = \frac{1}{2^n}\pi}$$

$$5 - f(t) = \frac{3}{5-4\cos t} + \frac{4\sin t}{5-4\cos t}$$

Soient les fonctions f_1 et f_2 définies par

$$f_1(t) = \frac{3}{5-4\cos t} \qquad f_2(t) = \frac{4\sin t}{5-4\cos t}$$

f_1 est une fonction paire et f_2 est une fonction impaire.

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\, dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t)\, dt$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f_1(t)\, dt \qquad a_0 = \frac{1}{\pi} \quad I_0$$

donc $\boxed{a_0 = 1}$

$* n \geq 1$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \cos nt \, dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) \cos nt \, dt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f_1(t) \cos nt$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \; In$$

$$\boxed{a_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1(t) \sin nt \, f dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2(t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} f_2(t) \sin nt \, dt$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{2 \sin nt \sin t}{5 - 4 \cos t} dt$$

$$b_n = \frac{4}{\pi} \int_{0}^{\pi} \frac{\cos (n-1) t - \cos (n+1) t}{5 - 4 \cos t} \, dt$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi} \left[I_{n-1} - I_{n+1} \right]$$

$$b_n = \frac{4}{3\pi} \left[\frac{\pi}{2^{n-1}} - \frac{\pi}{2^{n+1}} \right]$$

$$\boxed{b_n = \frac{1}{2^{n-1}}}$$

IV

ELEMENTS DE PHYSIQUE A L'INTENTION DU PROFESSEUR DE MATHEMATIQUES

UNITES - CONVENTIONS - NOTATIONS

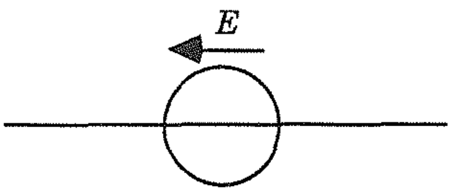
I - SYMBOLIQUE

SYMBOLE HABITUEL	UNITE	ABREVIATION	VALEURS USUELLES
C : Capacité d'un condensateur	Farad	F	1μF à 5mF
R : Résistance	Ohm	Ω	1Ω à 150 MΩ
L : Inductance	Henry	H	1mH à 2H
E : Force électromotrice	Volt	V	1mV à 1kV
U : Tension	Volt	V	1mV à 1kV
Q : Quantité d'électricité	Coulomb	C	quelques mC
P : Puissance	Watt	W	quelques mW
W : Energie	Joule	J	quelques J.
Ø : Flux $Ø = (\vec{B} \cdot \vec{n})\, S$	Weber	Wb	mWb

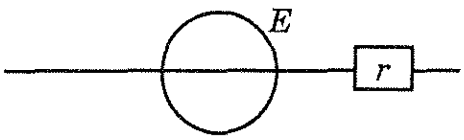
II - SCHEMATIQUE

1 - Pour une résitance R

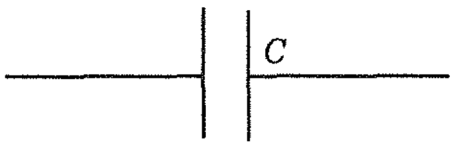
2 - Une source parfaite de tension



Remarque : pour un générateur (E,r)



3 - Pour un condensateur C

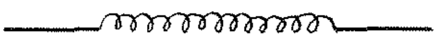


4 - Pour une inductance L

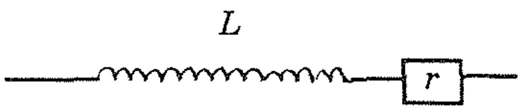
Deux schémas : a)

représente une inductance pure $(r = 0)$

b)



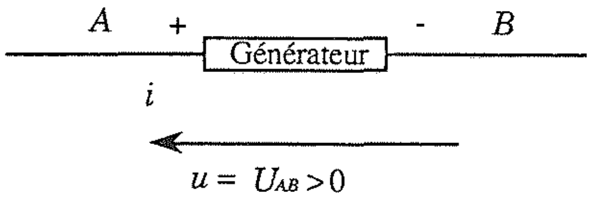
représente une bobine, association en série d'une inductance pure L et d'une résistance r



III - CONVENTION D'ORIENTATION DES DIPOLES

U tension aux bornes d'un dipôle impose le pôle +.
i intensité du courant "sort" toujours par le pôle +.

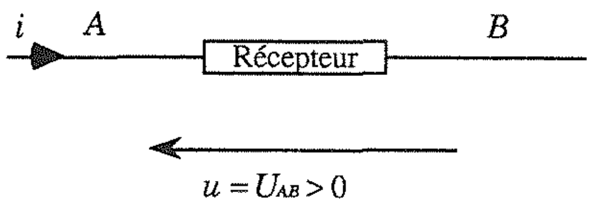
1 - Loi d'Ohm aux bornes d'un générateur



2 flèches dans le même sens.
$U_{AB} = E - ri$

(E : *f.e.m* du générateur
r : sa résistance interne)

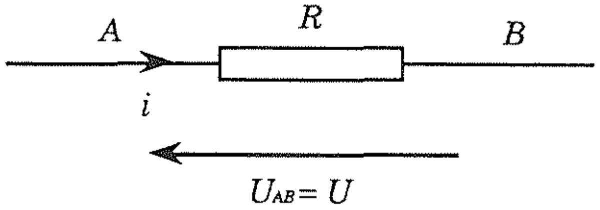
2 - Loi d'Ohm aux bornes d'un récepteur



2 flèches en sens inverse.

(E : *f.e.m* du récepteur)
$U_{AB} = E' + ri$

Remarque : Une résistance est un récepteur particulier

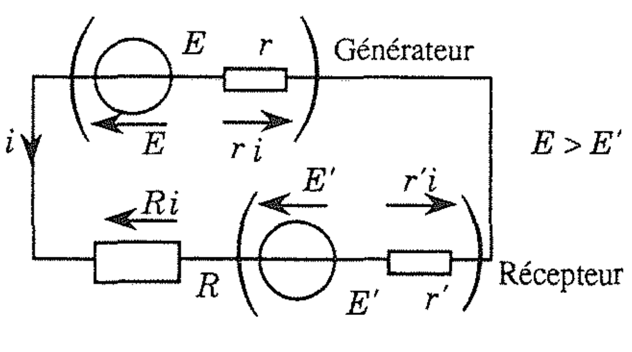


2 flèches de sens contraires.

$U = Ri$

Dans les classes de type F, BTS, le générateur est a priori connu. On flèche donc sans problème par rapport à lui. Cette présentation est mal adaptée aux cas pointus (bobines en régime transitoire).

Exemple de schéma :

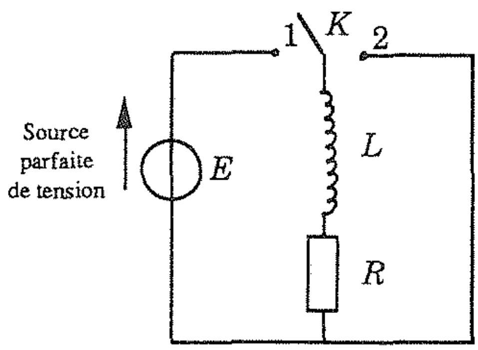


$E - Ri - E' - r'i - ri = 0$

REGIMES TRANSITOIRES

Les régimes transitoires correspondent à des signaux électriques obtenus dans un circuit soumis à une variation rapide de tension (de 0 à E ou de E à 0).

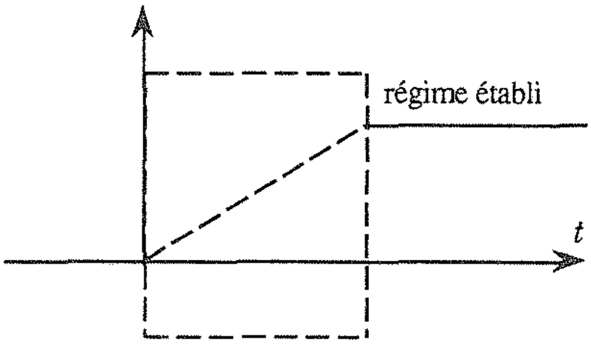
I - CIRCUIT (R,L)



Ce circuit contient une RESISTANCE et une INDUCTANCE PURE ($r = 0$).

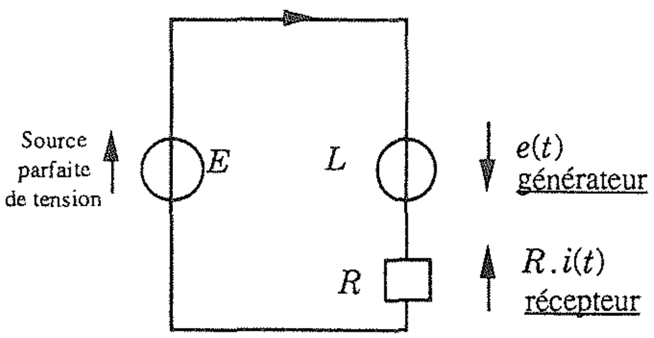
Il s'agit d'étudier la réponse du circuit (R,L) à une excitation en tension.

L'interrupteur k peut occuper deux positions :
Position 1 : état initial
Position 2 : état final
(ou l'inverse)



1 - K en position 1

L inductance pure est traversée par un courant qui varie et il apparait aux bornes de l'inductance la $f.e.m$ $e(t)$ qui est du même sens que le courant induit $i(t)$.



R est traversé par le courant $i(t)$. Aux bornes d'un récepteur, par convention, la tension est en sens inverse du courant d'où les flèches du schéma ci-contre.

La loi des mailles permet d'écrire : $E + e(t) - R \,.\, i\,(t) = 0$

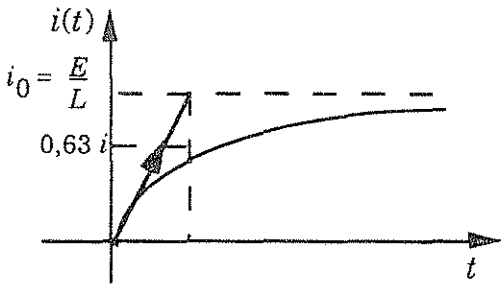
D'après la loi de Faraday : $e(t) = - L \,.\, \dfrac{di}{dt}$

D'où $E = L \,.\, \dfrac{di}{dt} + R \,.\, i(t)$

Soit $\boxed{\dfrac{di}{dt} + \dfrac{R}{L} \cdot i(t) = \dfrac{E}{L}}$ (E_1)

On obtient en résolvant (E_1) : $i(t) = \dfrac{E}{L}(1 - e^{-t/\tau})$

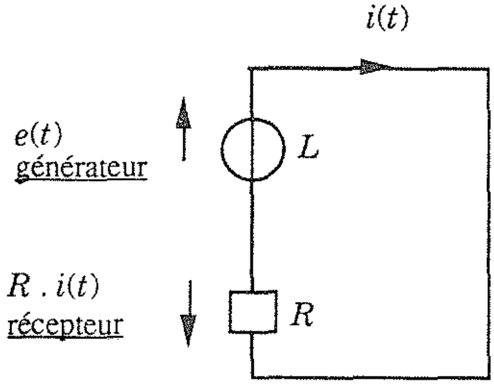
$\tau = \dfrac{L}{R}$ est appelé la constante de temps du circuit.



Remarque :

On estime que le régime est établi lorsque $t = 3\tau$ car à ce moment, le courant transitoire vaut 95% du courant établi.
$i(3\tau) = \dfrac{E}{L}(1 - e^{-3}) = 0{,}95\,\dfrac{E}{L} = 0{,}95 I_0$
(Pour $t = 7\tau$ on obtient 99% du courant établi).

2 - K en position 2



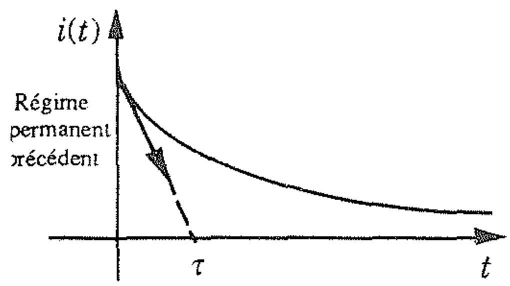
Aux bornes de l'inductance L est apparue une $f.e.m.$ $e(t)$. Elle joue le rôle de générateur.

Le schéma ci-contre respecte les conventions établies.
La loi des mailles permet d'écrire :

$e(t) - R \,.\, i(t) = 0$

$-L \,.\, \dfrac{di}{dt} - R \,.\, i(t) = 0$

Soit $\boxed{+L \,.\, \dfrac{di}{dt} + R \,.\, i(t) = 0}$ (E_2)

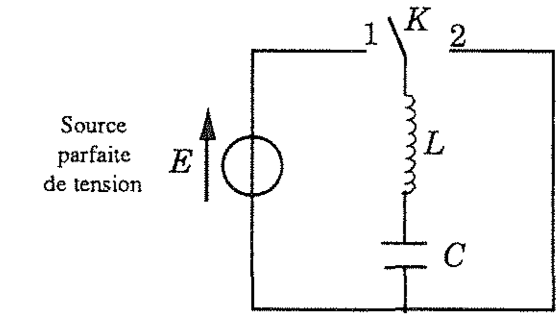


En résolvant (E_2) on obtient :
$i(t) = \dfrac{E}{R} \quad e^{-t/\tau}$

Remarque : Le régime est d'autant plus long que L est grand et R faible.

II - CIRCUIT (L,C)

Le circuit contient une INDUCTANCE PURE et une CAPACITE.



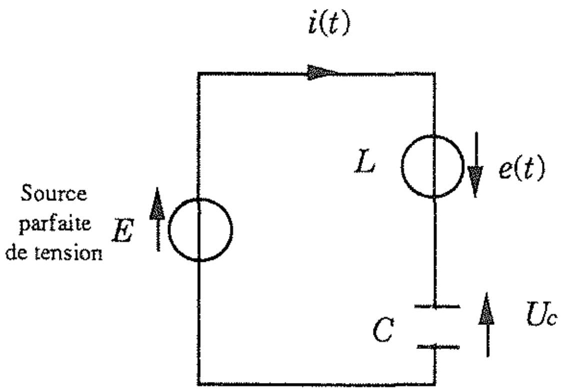
On étudie de la même façon la réponse du circuit (L,C) à une excitation en tention, pour les deux positions de l'interrupteur K.

Position 1 : état initial.

Position 2 : état final

1 - K en position 1

Le condensateur se charge, il joue le rôle de récepteur.



L'inductance pure est traversée par un courant $i(t)$ il apparaît donc $e(t)$; le sens des flèches correspond aux conventions prises par rapport à la notion de générateur et de récepteur. La loi des mailles donne :

$E + e(t) - U_c = 0$ Or $e(t) = -L\,\dfrac{di}{dt}$

et : $U_C(t) = \dfrac{q(t)}{c}$

Sachant que : $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ (q : variable)

$E - L\,\dfrac{d^2q}{dt^2} - \dfrac{q(t)}{c} = 0$ $\quad L\,\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{q(t)}{c} = E$

Soit $\boxed{\dfrac{d^2q}{dt^2} + \dfrac{1}{LC}q(t) = \dfrac{E}{L}}$ (E_3)

Remarques : 1) On pose en général $\omega^2 = \dfrac{1}{LC}$

ω est appelée pulsation propre du circuit oscillant.

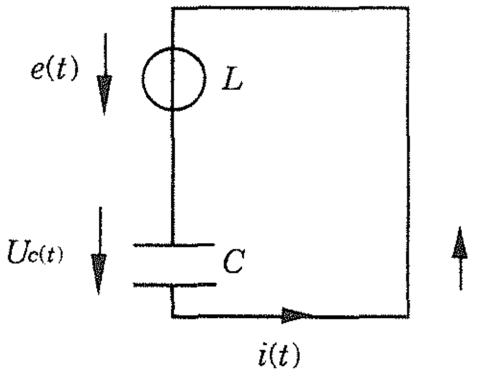
L'équation s'écrit : $\dfrac{d^2q}{dt^2} + \omega^2\, q(t) = \dfrac{E}{L}$

2) Ses solutions sont de la forme :

$q(t) = Qmax \quad cos\,(\omega t + \varphi) + q_0$

2 - K en position 2 (circuit oscillant non amorti)

Le condensateur joue le rôle de générateur, il se décharge. L'inductance pure est alors traversée par un courant $i(t)$. Il apparait $e(t)$ qui a le même sens d'après les conventions.



Ecrivons la loi des mailles

$e(t) + U_C(t) = 0$ or $e(t) = -L \cdot \frac{di}{dt}$ et $U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$

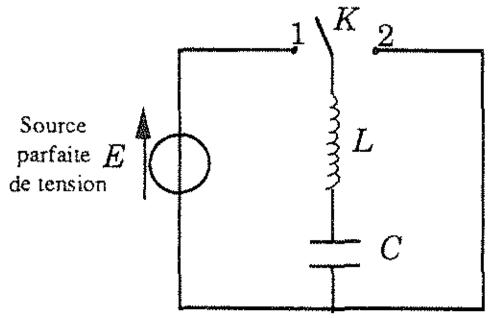
Sachant que $i(t) = -\frac{dq}{dt}$ car le condensateur se décharge

On obtient $-L \cdot \frac{di}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$

D'où $\boxed{L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0}$ (E_4)

III - CIRCUIT (R,L,C)

Le circuit contient une inductance (R,L) et une capacité c'est un CIRCUIT OSCILLANT AMORTI.

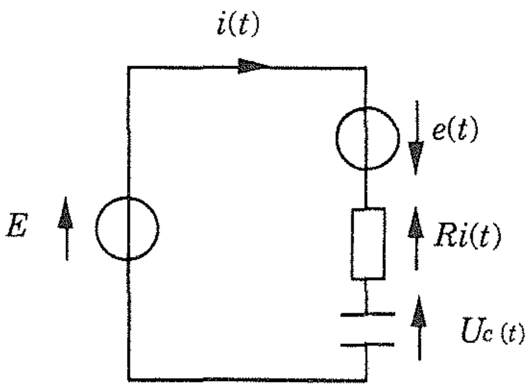


On étudie la réponse du circuit (R,L,C) à une existation en tension, pour deux positions de K.

Position 1 : état initial.

Position 2 : état final.

1 - K en position 1



Le condensateur se charge : c'est un récepteur.
Un courant passe dans l'inductance, il se crée un $f.e.m.$ d'après la loi des mailles on a :

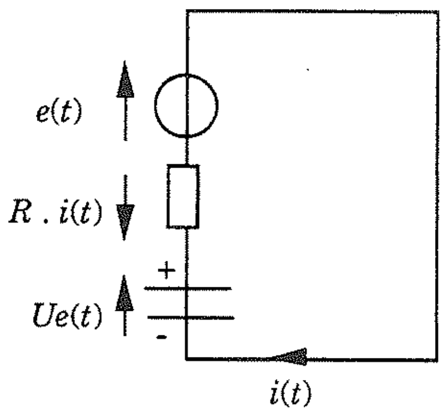
$E + e(t) - R \cdot i(t) - U_C(t) = 0$

Or $i(t) = \frac{dq}{dt}$ $\quad e(t) = -L \cdot \frac{di}{dt} = -L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$ $\quad U_C(t) = \frac{q(t)}{C}$

On obtient : $E - L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} - \frac{q}{C} = 0$

Soit $\boxed{L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E}$ $\quad (E_5)$

2 - *K* en position 2



Le condensateur chargé devient un générateur. D'après la loi des mailles on a

$U_C(t) - R \cdot i(t) + e(t) = 0$

Or $i(t) = -\frac{dq}{dt}$ (le condensateur se décharge).

$e(t) = -L \cdot \frac{di}{dt} = L \cdot \frac{d^2q}{dt^2}$

On obient :

$\boxed{L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0}$ $\quad (E_6)$

IV - APPLICATIONS NUMERIQUES : *E* = 30V

1 Circuit (*L*,*C*)

$L = 6{,}4\ m\,H$
$C = 0{,}1\mu\ F$

Lorsque *K* est en position 2, on obtient l'équation différentielle (E_4)

$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$ $\qquad w = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 0{,}39 \cdot 10^{-5}$

A l'instant $t = 0$ $\qquad q(0) = CE = 3 \cdot 10^{-6}$

D'où $q(t) = 3 \cdot 10^{-6}\ cos\ (0{,}39\ 10^{-5}\ t)$

2 Circuit (R, L, C)

$L = 6{,}4\ mH$

(même conditions)

$C = 0{,}1\ \mu F$

Lorsque K est en position 2, on obtient l'équation différentielle

$$L \cdot \frac{d^2q}{dt^2} + R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = 0$$

$$\Delta = R^2 - 4\frac{L}{C}$$

a) $R = 800\ \Omega \quad \Delta = 38{,}4 \cdot 10^4$

$q(t) = A \cdot e^{1{,}10 \cdot 10^5 t} + Be^{-0{,}141 \cdot 10^5 t}$

conditions initiales : $q(0) = 3 \cdot 10^{-6} \qquad i(0) = q'(0) = 0$

D'où $q(t) = 0{,}35 \cdot 10^{-6}\, e^{1{,}10 \cdot 10^5 t} + 2{,}65 \cdot 10^{-6}\, e^{-0{,}141 \cdot 10^5 t}$

Avec des changements d'échelles, on obtient le graphique A.

b) $R \pm 506\ \Omega$ Pour obtenir exactement $\Delta = 0$ il faut choisir $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

Mêmes conditions initiales d'où

$q(t) = 10^{-3}\,(118{,}59\ t + 3 \cdot 10^{-3})\, e^{-39{,}53 \cdot 10^3\, t}$

Avec des changements d'échelles, on obtient le graphique B.

c) $R = 100\ \Omega \quad \Delta = -(495{,}38)^2$. Mêmes conditions initiales d'où

$q(t) = e^{-7{,}8 \cdot 10^3 \cdot t}\,[3 \cdot 10^{-6} \cos(38{,}75\ 10^3 t) + 0{,}6 \cdot 10^{-6} \sin(38{,}75\ 10^3 t)]$

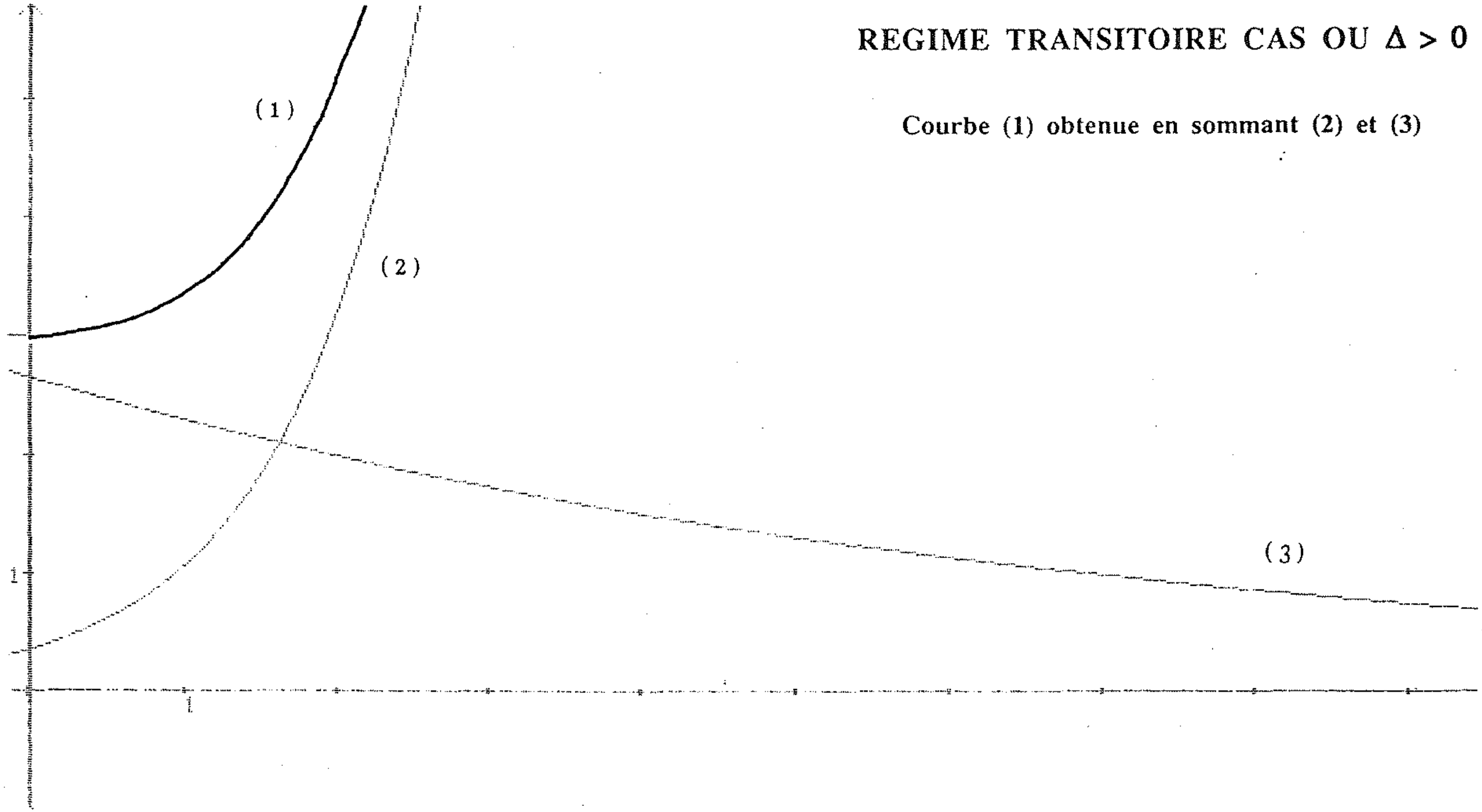
Autre écriture : $q(t) = Qm\ e^{-7{,}8 \cdot 10^3 t} \quad \cos(38{,}75\ 10^3\, t + \varphi)$

Avec des changements d'échelles, on obtient le graphique C.

GRAPHIQUE A

REGIME TRANSITOIRE CAS OU $\Delta > 0$

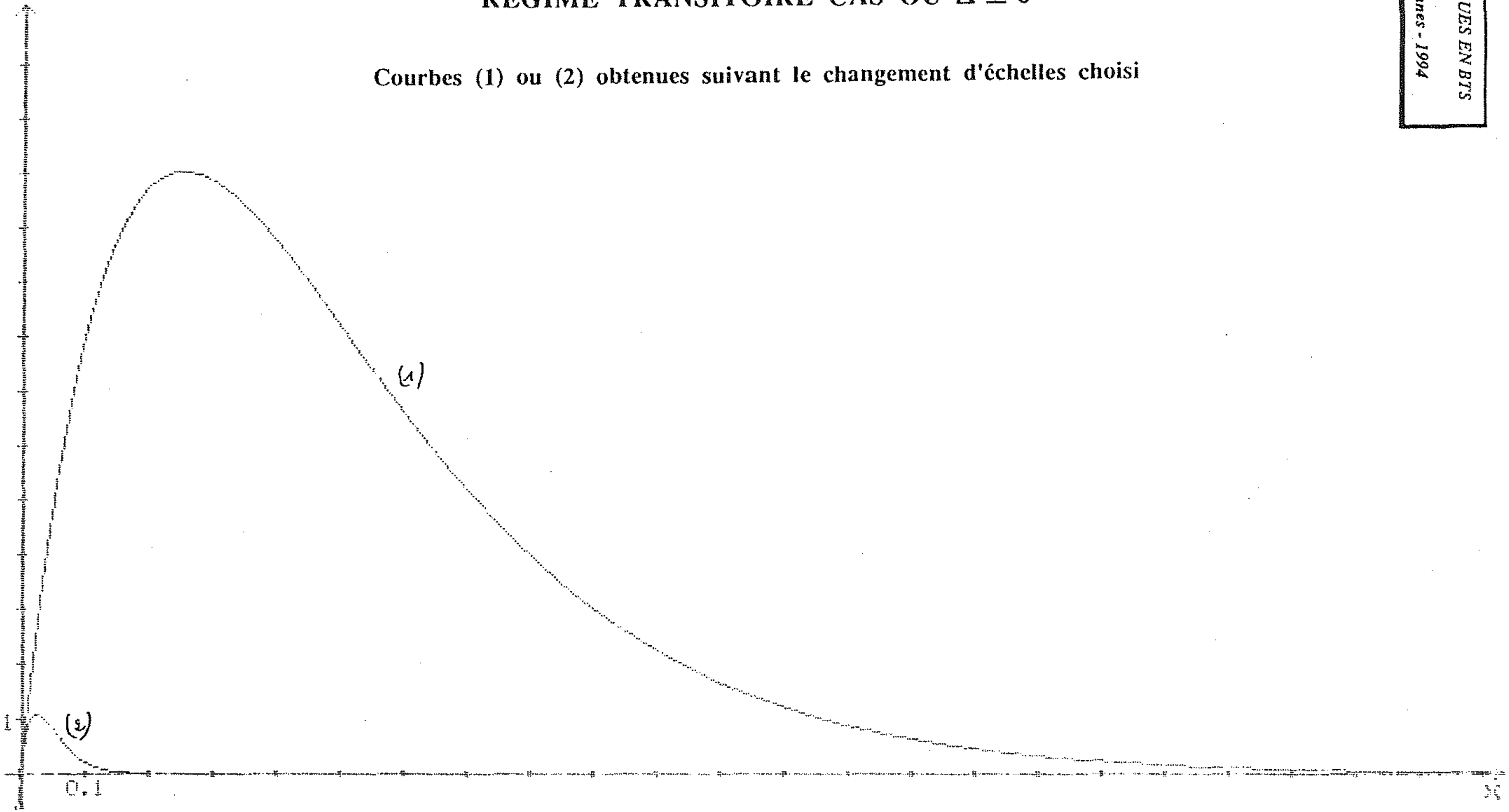
Courbe (1) obtenue en sommant (2) et (3)



GRAPHIQUE B

REGIME TRANSITOIRE CAS OU $\Delta \simeq 0$

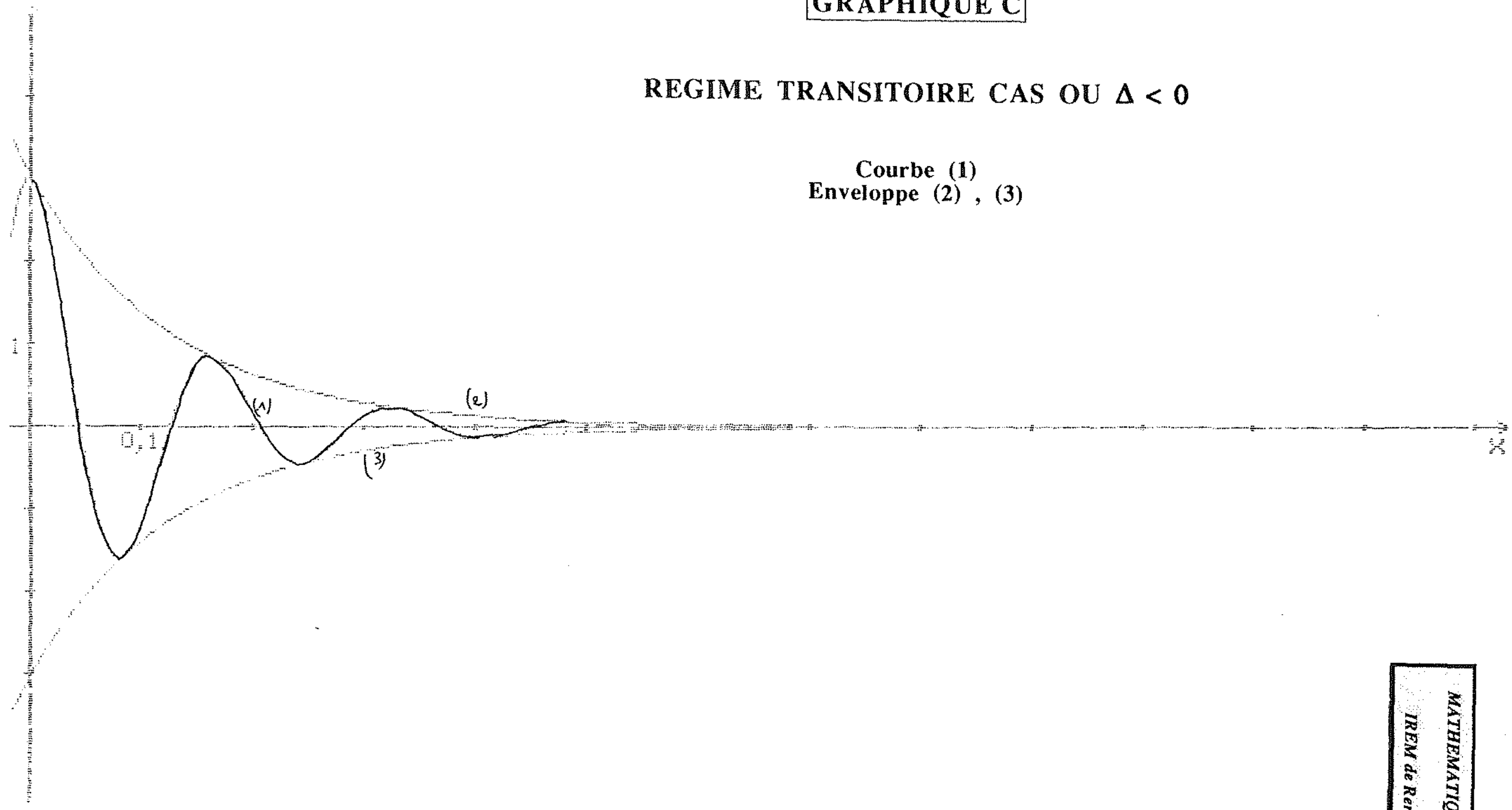
Courbes (1) ou (2) obtenues suivant le changement d'échelles choisi



GRAPHIQUE C

REGIME TRANSITOIRE CAS OU $\Delta < 0$

Courbe (1)
Enveloppe (2) , (3)



ELEMENTS DE BIBLIOGRAPHIE

[1] L'enseignement des Statistiques et des Probabilités dans les sections de techniciens supérieurs
Brochure de l'IREM de BESANCON - (Juin 1990)

[2] Les brochures du groupe inter IREM *"Lycées Techniques"*
IREM - Université de PARIS-NORD

Brochure N° 59 : *Les modules de Programmes de Mathématiques pour les BTS* (Octobre 1991). Tome 1.

Brochure N° 58 : *Des textes avec corrigés des BTS rénovés*. Sessions de 1990 et 1991 (Octobre 1991)

Brochure N° 54 : *Epreuves de Mathématiques aux BTS*. Session de 1990.

Brochure N° 53 : *Information et activités à propos des fonctions de transfert en régime harmonique* . (Juin 1990)

Brochure N° 49 : *Epreuves de Mathématiques aux BTS*. Session de 1989 (Septembre 1989)

Brochure N° 48 : *Information et activités à propos de FIABILITE* (Novembre 1989)

Brochure N° 41 : *Recueil des sujets, avec corrigés des BTS*. Sessions 1988 et 1989 (Mars 1990)

Brochure N° 27 : *Exercices et Problèmes de BTS*. (1986)

Brochure N° 19 : *Epreuves de Mathématiques au BTS Maintenance - Productique* (Mai 1985 - Retirage 1990)

[3] Livres

[1] DUNOD : Collection DEMENGEL. (Décembre 1990)
Analyse 1

[2] NATHAN : *Construction de courbes planes* (1984)
NATHAN : *Mathématiques BTS industriels*
2 tomes (Mars 1992 - Mai 1992)

[3] ELLIPSES : *Cours de Mathématiques*
BTS/IUT - Pierre VARIOT (Mars 1991)

ELLIPSES : *Exercices corrigés de Mathématiques*
BTS Electronique - Electrotechnique - P. VARIOT (Décembre 1988)

ELLIPSES : *Mathématiques BTS industriels. Problèmes corrigés*
Jacques LE BRAS (Janvier 1991)

[4] FOUCHER : Mathématiques
Deux recueils : *Analyse* (Octobre 1989)
Statistiques et Probabilités (Mars 1990)

Pour BTS comptabilité et gestion
BTS informatique de gestion
(Bernard BIGOT, Bernard VERLANT de l'IREM PARIS-NORD)

[5] BREAL : Collection Enseignement Supérieur des Techniques industrielles (BTS et IUT)
* *Probabilités, Statistiques et leurs applications*
Cours et exercices résolus. (Mai 1990)
* *Les Intégrales et leurs applications*
Cours et exercices résolus. (Mai 1990)
* *Mathématiques générales*
Cours et exercices résolus BTS comptabilité. (Septembre 1990)

[6] SIREY : *Statistiques et calculs des probabilités*
TP énoncés et solutions - 5ème édition. (Janvier 1990)

[7] VUBERT : Technique Mathématiques
Cours et exercices corrigés (BTS gestion et commerce) (Avril 1989)

[8] MASSON : IUT Collection Thuillier et Belloc - 2ème édition (1989-1990-1991)

4 Bulletin APMEP

N° 380 (Septembre 1991) *"Quelques applications de la transformation de Laplace en Physique"*
Daniel Duverney - DOUAI.

N° 382 (Mars 1992)
N°383 (Mai 1992) *"Une modeste introduction à la transformation de Laplace"*
D. LAZET - BORDEAUX

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Premier Trimestre 1994
N° de Publication : 94-01

I.R.E.M. de RENNES - Université de RENNES I
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES Cédex
Tél : 99 28 63 42

FICHE DUBLIREM

TITRE : MATHEMATIQUES EN BTS

I.R.E.M. : RENNES

AUTEUR : Groupe "Mathématiques en BTS"

DATE : JANVIER 1994

NIVEAU : Terminales STI et BTS

PUBLIC CONCERNE :

Professeurs de Mathématiques enseignant en BTS et STI du secondaire.

MOTS-CLES :

- Liaison Mathématiques-Physique en classes de STS.
- Activités Mathématiques en classes de STS.
- Introduction aux séries de Fourier.
- Approche d'Algèbre Linéaire (en classes de STS).
- Equations différentielles en Terminale STI et classes de STS.

RESUME :

Mise en place d'activités mathématiques à support technologique en classes de Techniciens Supérieurs.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX T.T.C.	TIRAGE
21 × 29,7	75	~~40,00~~ 1 €	300 Ex.

ISBN 2-85728-008-4