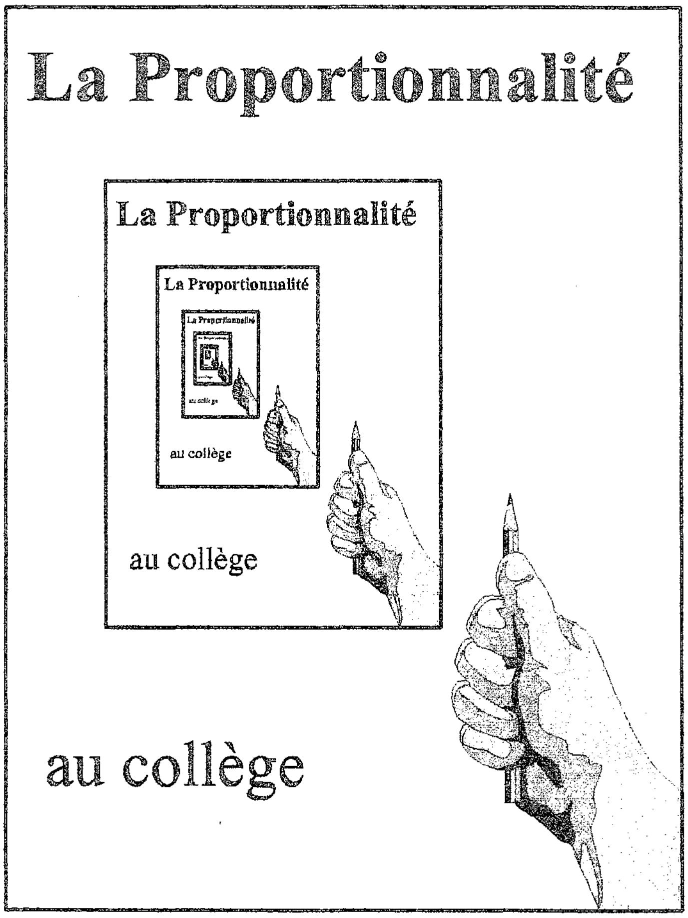
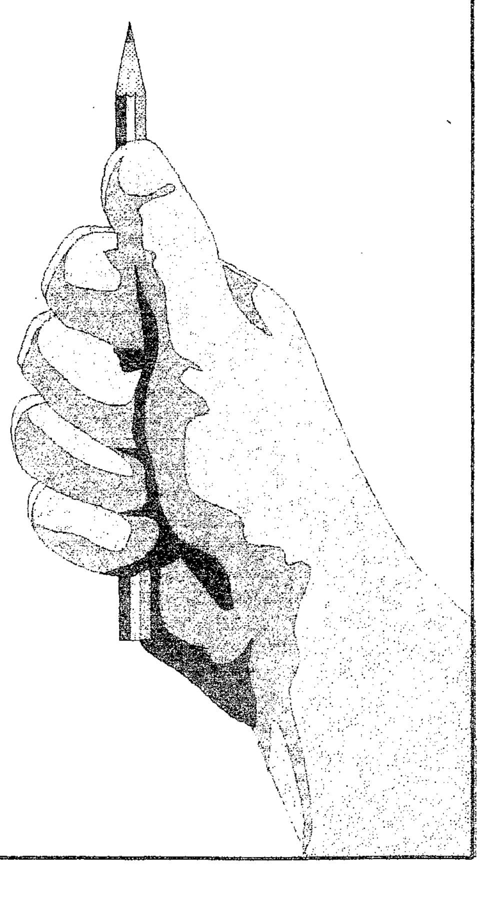
La Proportionnalité





au collège

I.R.E.M. de Rennes

Septembre 1997

La proportionnalité au collège

Régine BERTHELEU

Jean JULO

Jean-Yves LUCAS

Daniel REVAULT

Gérard THOMANN

Jean-Michel THOMAS

SEPTEMBRE 1997 IREM DE RENNES

Cette recherche a été menée avec des moyens de l'IREM et de la MAFPEN.

I.S.B.N. 2-85728-032-7

Le groupe de recherche, le travail réalisé.

La proportionnalité est l'un des thèmes mathématiques dont l'intérêt général est incontestable. Son acquisition se heurte à d'importantes difficultés d'enseignement ce qui conduit à s'interroger sur l'efficacité des techniques pédagogiques « traditionnelles ».

Le groupe a donc mené une réflexion sur les stratégies à mettre en oeuvre pour enseigner la proportionnalité et permettre aux élèves de surmonter leurs difficultés.

L'étude de travaux d'élèves a permis

- de répertorier une multitude de procédures de résolution
- de vérifier l'influence des facteurs numériques, des situations, ...

Le groupe s'est ensuite efforcé de mettre au point quelques séquences d'enseignement sur quelques thèmes notamment pour les classes de sixième et cinquième. Pour les classes de quatrième et troisième, nous avons dû nous contenter (faute de temps) de proposer quelques activités qui nous semblent intéressantes.

Chaque séquence regroupe plusieurs activités. Nous avons tenté d'établir une progression en organisant ces activités en prenant en compte les objectifs visés et certains choix didactiques. Nous avons joué sur différentes variables : situation plus ou moins familière, présentation du problème, grandeurs, nature et taille des nombres, ...

Pour chaque séquence, des commentaires donnent des précisions à propos

- de l'enchaînement des activités dans la séquence
- des moments forts que constituent les synthèses (contenus, exigences de savoir et de savoir-faire) et les évaluations
- des représentations des problèmes et des langages utilisés dans la classe
- des procédures de résolution privilégiées lors de la correction en classe de certains problèmes.

Les discussions et les travaux menés ont entraîné pour les membres du groupe, un enrichissement personnel indéniable, mais aussi une évolution notable de points de vues assez disparates au départ compte tenu d'expériences et de pratiques diverses des uns et des autres. Ainsi, le choix des activités n'a généralement pas posé de problème majeur ; par contre, il n'a pas toujours été facile de trouver un consensus quant

- à leur place dans la progression
- aux langages à utiliser en classe
- aux procédures de résolution à privilégier ou non
- au contenu des synthèses et aux exigences dans les contrôles.

Nous espérons que le présent document contribuera (modestement sans doute) à faire avancer les choses pour l'enseignement de la proportionnalité et que les activités présentées permettront une meilleure compréhension de la proportionnalité chez nos élèves.

INTRODUCTION

La proportionnalité au collège

Enseigner la proportionnalité

Les élèves face à l'apprentissage de la proportionnalité

La Proportionnalité au collège

Au collège, on rencontre la proportionnalité dans plusieurs domaines.

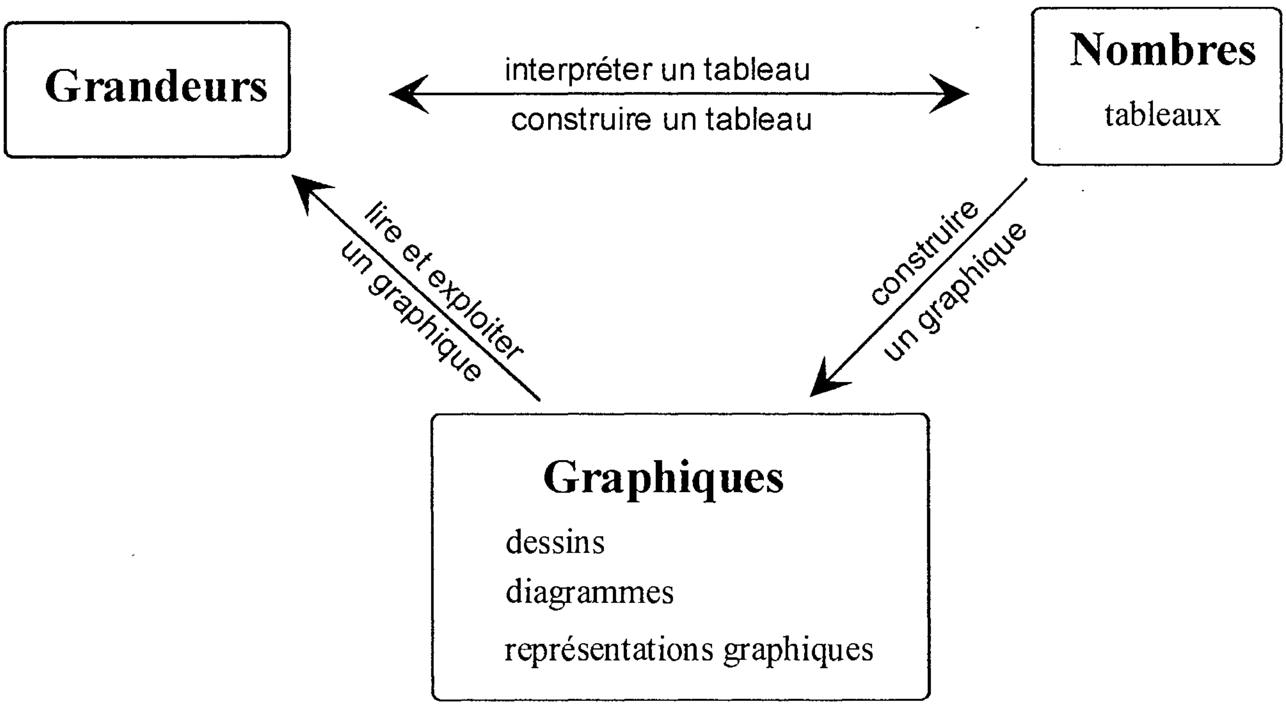
Activités numériques et algébriques : fractions, quotients, équations, coefficient de proportionnalité et applications linéaires, applications affines et proportionnalité des accroissements, équations de droites.

Activités géométriques : agrandissements et réductions, échelles, projections, propriété de Thales, trigonométrie, changements d'unités, utilisation de formules de périmètre, d'aire ou de volume.

Gestion de données et statistiques : pourcentages, taux, fréquences, indices, concentrations, grandeurs quotients.

La proportionnalité intervient également dans **le domaine des représentations** : graduations et échelles, diagrammes (en bâtons, en rectangles, circulaires, histogrammes), graphiques.

Dans ces différents domaines, la proportionnalité apparaît dans plusieurs cadres :



A la lecture des nouveaux programmes de sixième et du cycle central (cinquième et quatrième), on constate un retour en force de la notion de proportionnalité.
Ils précisent que, le plus souvent possible, les situations familières serviront de support, le cadre des grandeurs sera donc privilégié dans un premier temps.

La proportionnalité y apparaît dans plusieurs types de situations :

- dans la vie courante, elle est alors une convention sociale (partages, prix, ...)
- dans le domaine scientifique (physique, géométrie, ...), elle permet de modéliser certains phénomènes ou de définir certains concepts (vitesse, échelle, énergie, ...).

Enseigner la proportionnalité

Un objectif.

Faire en sorte que les élèves sachent résoudre des problèmes de proportionnalité en mettant en oeuvre une procédure bien comprise.

Des constats.

* Nous avons tous constaté, qu'à l'entrée en sixième, les élèves maîtrisent mal les situations de proportionnalité les plus simples (cf. évaluation nationale). Les élèves qui parviennent à résoudre ces problèmes utilisent en grande majorité les propriétés de linéarité.

* L'utilisation du coefficient de proportionnalité est très efficace dans la vie courante et dans le monde professionnel.

Des interrogations, des propositions.

• *Faut-il imposer une représentation des situations de proportionnalité ?*

Face à un problème, l'élève construit sa propre représentation de la situation. Dans le meilleur des cas, la représentation est satisfaisante et l'élève sait (en général) résoudre le problème. Toutefois, cette représentation correcte n'est pas toujours la mieux adaptée. Comment faire pour pousser l'élève à abandonner certaines représentations assez frustes au profit d'une autre plus performante?

Trop souvent, la représentation est incorrecte et l'élève ne sait pas résoudre le problème. On sait bien qu'imposer une représentation n'est pas efficace à long terme, qu'elle correspond davantage à un « dressage » (sans espoir de réinvestissement ultérieur) qu'à une véritable formation.

Il n'y a pas une représentation correcte et d'autres fausses; multiplier les représentations (en utilisant des traces écrites variées) est sans doute un moyen d'aider l'élève à « construire » ou choisir une représentation.

On peut cependant privilégier dans la classe une représentation.

Nous avons choisi celle-ci car elle impose d'identifier clairement les grandeurs.

(a, b, c et d sont des valeurs numériques, l'unité est précisée)

grandeur 1		grandeur 2
a	⟶	b
c	⟶	d

Précisons qu'adopter cette représentation ne revient pas à imposer une procédure de résolution, les flèches ne font seulement apparaître que des correspondances et l'utilisation du coefficient de proportionnalité n'est pas particulièrement recherchée.

Cette représentation permet la reconnaissance d'une même structure et le choix d'une procédure correcte.

• *Faut-il imposer une procédure ? Laquelle ? Quand ?*

Imposer d'emblée une procédure revient à mettre en place des automatismes avant de maîtriser le sens, c'est inefficace à long terme (« dressage », absence de réinvestissement).
Les quelques élèves de 6ème qui sont capables de résoudre des problèmes de proportionnalité utilisent les propriétés de linéarité. Ceux-là sont (plus ou moins) prêts à adopter d'autres procédures (utilisation du rapport externe [coefficient de proportionnalité]). On a constaté que l'abandon de la procédure antérieure (procédure éprouvée et sécurisante) est loin d'être immédiat même lorsque l'utilisation de la linéarité est inadaptée compte-tenu des données numériques (le rapport externe est trop souvent dépourvu de sens).
Le passage du raisonnement sur chaque type de grandeur (rapport interne) au coefficient de proportionnalité (rapport externe) ne se fera pas pour tous au même moment. Les élèves qui sont en échec pour l'instant doivent suivre les mêmes étapes que leurs pairs : « sauter » un stade ne semble guère possible.

Nous avons choisi de ne pas imposer de méthode, mais nous cherchons à faire évoluer petit à petit les procédures efficaces avec des valeurs numériques particulières vers d'autres plus générales. Les synthèses, en fin d'activité, mettent en avant des procédures qui ne sont pas exigibles immédiatement.

• *Faut-il (en 6ème, en 5ème, ...) traiter la proportionnalité dans une leçon? A quelle période de l'année ?*

Dans la plupart des manuels, on trouve un chapitre « proportionnalité ». La proportionnalité intervient dans des situations très variées, de façon tellement fréquente, de manière parfois cachée (formules de périmètre, d'aires, de volume) qu'il ne semble pas opportun de faire une leçon dont le titre serait « proportionnalité ».

Nous pensons que, pour chaque niveau (6ème, 5ème, ...), des situations de proportionnalité peuvent être proposées en de nombreuses occasions et ce, tout au long de l'année. L'étude approfondie de quelques situations typiques (prix, vitesses) nous semble indispensable; en fin de séquence, une synthèse propre à ces situations est faite sans perdre de vue qu'une synthèse plus générale viendra plus tard. Ces situations serviront de référence pour les futurs problèmes de proportionnalité.

L'objectif « suprême », l'utilisation du coefficient de proportionnalité, doit être préparé; en effet, ce coefficient multiplicateur correspond à la modélisation en terme de fonction. On atteint ainsi un stade très abstrait qui n'est certes pas à la portée de tous les élèves de collège; le coefficient multiplicateur y perd son sens de rapport. Ce formalisme ne doit donc pas apparaître trop précocement. Il est parfois difficile de faire le lien avec certains coefficients multiplicateurs étudiés pour eux-mêmes en tant que grandeurs quotients (vitesse, masse volumique, ...).

L'utilisation pertinente d'un coefficient multiplicateur suppose une bonne maîtrise du sens de la multiplication. Si la réussite, au niveau des techniques opératoires est bonne à l'entrée en sixième, on ne peut en dire autant pour le sens des opérations, les erreurs commises dans des problèmes élémentaires en attestent. La multiplication a du sens lorsqu'elle porte sur les nombres entiers mais dès qu'interviennent des nombres à virgule, les difficultés et les erreurs se multiplient (la multiplication n'agrandit pas toujours, on peut diviser un petit nombre par un grand nombre). Donner du sens à la multiplication des décimaux est donc une priorité et devient une nécessité dans le cadre des nouveaux programmes.

• *Sur quels thèmes, faut-il travailler ?*

Nous avons choisi de travailler de manière approfondie sur quelques thèmes. Les activités traitées permettent de mettre en oeuvre diverses procédures, et dans certains cas, de donner du sens à certaines notions.

Par exemple, en classe de 6ème, nous avons travaillé sur le thème des prix. Ce thème regroupe plusieurs catégories de problèmes :

- problèmes de type quatrième proportionnelle (4 yaourts coûtent 9,60F, quel est le prix de 6 yaourts ?).
- problèmes de comparaison (lot A : 4 bouteilles de jus de fruit pour 19,60F, lot B: 6 bouteilles de jus de fruit pour 29,70F. Quel est le lot le plus avantageux?).

L'objectif étant ici de donner du sens à la notion de prix unitaire et parallèlement à la multiplication et la division des nombres décimaux en incitant l'élève à utiliser la relation : *montant = prix unitaire* x *quantité.*

Chacun des thèmes traités est l'occasion d'aborder un aspect de la notion de proportionnalité. Le plus souvent, dans l'étude de ces thèmes, les raisonnements sur les grandeurs gardent une large place. Ce n'est qu'en classe de troisième (dans les futurs programmes) que l'on tentera d'unifier tout cela en utilisant le vocabulaire fonctionnel (application linéaire). A ce stade, le raisonnement sur les nombres sera imposé. Ceci entraînera évidemment un traitement des données du problème sans référence au sens.

Intéressons-nous, par exemple, au problème suivant :

Quantité d'eau		Quantité de sel
3 litres	→	75 grammes
8,5 litres	→	? grammes

- On peut raisonner dans le cadre des grandeurs (en cherchant par exemple la quantité de sel pour 1 litre [ou 0,5 litre, ..]). Il n'y a pas alors perte de sens. On imagine sans peine les manipulations nécessaires.
- On peut aussi raisonner dans un cadre numérique en utilisant par exemple, le coefficient de proportionnalité (x 25). Dans ce cas, on perd le sens du problème initial et on exécute une tâche purement numérique (multiplier 3 litres par 25 ne peut donner comme résultat que 75 litres et non pas 75 grammes)
Ce n'est qu'une fois cette tâche achevée qu'on revient au problème posé et que le résultat numérique obtenu retrouve un sens. C'est le même détour qu'on utilise lorsqu'on résout un problème au moyen d'une mise en équation.

Ces deux types de raisonnement sont très différents et certains élèves de collège éprouvent de sérieuses difficultés à s'abstraire des grandeurs pour raisonner uniquement sur les nombres.

Les élèves face à l'apprentissage de la proportionnalité

On ne peut penser sérieusement l'enseignement de la proportionnalité sans s'appuyer sur ce que sont les élèves et sans dégager les différentes étapes par lesquelles ils devront passer pour maîtriser cette notion.

Nous commencerons par rappeler ce qu'ils ont vécu en primaire, ce qui nous permettra ensuite d'exposer les apprentissages prioritaires au début du collège.

I. L'ECOLE PRIMAIRE

A- la multiplication

La multiplication est introduite comme une addition répétée :

4 fois 3 = 4 x 3 = 3 + 3 + 3 + 3

```
* * * *
* * * *
* * * *
```

La configuration en rectangle permet d'introduire

- la commutativité : 4 x 3 = 3 x 4

- la distributivité sur laquelle repose tout l'algorithme de calcul.

Lorsqu'on calcule avec des grandeurs la commutativité disparaît, les deux facteurs ne jouent plus le même rôle.

<u>Exemple 1</u>: *Quel est le prix de 4 gâteaux à 5 F le gâteau ?*

<u>réponse</u> : 5 F + 5 F + 5 F + 5 F = 4 x 5 F = 20 F

On peut également utiliser le schéma

$$5\,F \xrightarrow{x\,4} 20\,F$$

<u>Exemple 2</u> : *Combien y a-t-il de secondes dans 3 minutes ?*

<u>réponse</u>: 3 min = 3 x 1 min = 3 x 60 s = 180 s

<u>Attention</u> :
Le schéma ci-contre est incorrect car 3 min x 60 = 180 min

$$3\text{ min} \xrightarrow{x\,60} 180\text{ s}$$

Un travail correct dans le cadre des grandeurs nécessite une représentation du type ci-contre.

$$\begin{tikzcd}
1\text{ min} \arrow[r] \arrow[d, "x\,3"'] & 60\text{ s} \arrow[d, "x\,3"] \\
3\text{ min} \arrow[r] & ?\text{ s}
\end{tikzcd}$$

Exemple 3: *Quel est le prix de 4 kilogrammes de tomates à 5 ^{F} le kilogramme ?*

réponse : 5 F + 5 F + 5 F + 5 F = 4 x 5 F = 20 F

On ne multiplie pas les kilogrammes par les francs.
4 est un **scalaire** qui exprime que 4 kg = 4 x 1 kg.

masse	1 kg	$\xrightarrow{\text{x } 4}$	4 kg
prix	5 F		?

En multipliant une grandeur par un nombre, on trouve une grandeur du même type.

B- la division

La division s'introduit à partir de problèmes de distributions. Il s'agit de partager en parts égales des objets considérés comme identiques, interchangeables et indivisibles.

Il faut distinguer 2 problèmes :

Quel est le nombre de parts ?
Combien d'équipes de basket de 5 joueurs peut-on faire dans une classe de 24 élèves ?

Quelle est la valeur d'une part ?
Je répartis une classe de 24 élèves en 5 équipes, combien y aura-t-il de joueurs dans chaque équipe ?

Ces problèmes sont d'abord résolus en répartissant effectivement les élèves. Cette phase est indispensable à la compréhension du problème qui ne se réduit pas à l'application d'une procédure de résolution standard.

- Le problème devient un problème mathématique quand on cherche à anticiper la réponse. La manipulation effective des objets devient alors inutile.

Dans le premier problème

on peut procéder par additions successives jusqu'à dépasser 24.

5 joueurs + 5 joueurs + 5 joueurs + 5 joueurs = 20 joueurs

Dans le deuxième problème

l'addition " 5 équipes + 5 équipes + 5 équipes + 5 équipes " n'a pas de sens.

On peut penser à répartir les élèves un par un dans chaque équipe :
un élève par équipe cela fait 5 joueurs, on peut alors utiliser notre première addition.

On peut aussi procéder par essais successifs :
si j'en mets 3 par équipe il m'en faut 3 x 5 = 15 , je peux en mettre plus, j'essaie 4 ...etc.

- Dans le cas d'une distribution sans reste (division exacte) , on peut construire une opération sur les nombres qui possède son propre signe " : " et qui permet de résoudre les 2 problèmes précédents.

$$20 : 5 = 4 \quad \text{car} \quad 5 \times 4 = 20 \qquad \text{on a donc aussi} \quad 20 : 4 = 5$$

- On voit qu'il n'est pas nécessaire de savoir maîtriser les multiplications pour aborder des problèmes de division et que ces activités peuvent participer à l'apprentissage des tables de multiplications.

C- Poser une division.

La nécessité d'étendre la division à des nombres plus grands va rendre indispensable une disposition standardisée

Exemple : *partager 657 objets en 23 parts*

méthode 1:
on approche le dividende par des multiples du diviseur.

20 x 23 = 460 (on distribue 20 par 20)
657 - 460 = 197
5 x 23 = 115
197 - 115 = 82
3 x 23 = 69
82 - 69 = 13
20 + 5 + 3 = 28

657	23
-460	20
197	+5
-115	+3
82	28
-69	
13	

Il s'agit là d'une méthode très souple qui reste très proche du sens de la division. On retrouve la disposition classique en n'écrivant plus les zéros qui n'interviennent pas directement dans le calcul.

méthode 2 : on décompose le dividende .
657 = 65 dizaines + 7
On distribue d'abord les dizaines
65 dizaines = 23 x **2 dizaines** + 19 dizaines
19 dizaines + 7 = 197
197 = 23 x **8** + 13
2 dizaines + 8 = 28

657	23
-46	28
197	
-184	
13	

Cette méthode peut sembler avantageuse car elle offre d'emblée la disposition finale, mais elle est très difficile à mettre en place car elle demande d'être capable de choisir directement le bon chiffre au quotient.
D'autre part la décomposition perd de son sens dans le cas de la recherche du nombre de parts.

D- le partage des grandeurs

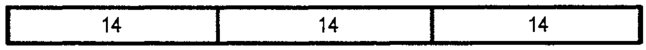
Le réinvestissement des méthodes précédentes n'est pas toujours immédiat dans la mesure où les manipulations ne se réduisent plus à une simple distribution.

Exemple : *On scie une planche de 42 cm en 3 parties égales . Quelle est la longueur de chaque morceau ?*

l'algorithme de calcul peut être illustré par ce schéma.

$$\begin{array}{r|l} 42 & \underline{\ 3\ } \\ \underline{-30} & 14 \\ 12 & \end{array}$$

Il faut alors quelques dons de bricolage ou un peu d'imagination pour obtenir le résultat final.



La grande nouveauté est qu'il devient possible de diviser un nombre par un diviseur plus grand que lui. Cela est rendu possible tout d'abord par l'utilisation des conversions puis progressivement par l'introduction des nombres décimaux.

Il y a là un blocage important chez beaucoup d'élèves et il n'est pas rare de voir des élèves de $4^{ème}$ pour qui, il est impossible de diviser 3 par 5. Il est donc important de leur présenter le plus tôt possible ce type de situation pour élargir le champ de la division à d'autres domaines que les distributions qui ne peuvent que les renforcer dans cette idée.

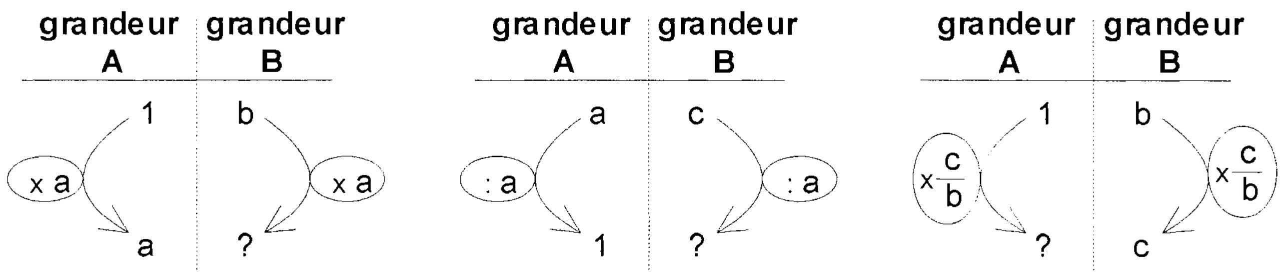
E- la proportionnalité

La proportionnalité est une occasion d'élargir le champ des situations au delà des problèmes de partages .

Voici trois problèmes simples, ils ne nécessitent aucune présentation particulière pour les élèves qui peuvent, par exemple, interpréter les deux derniers comme des partages.

- *Si un gâteau coûte 5 F, quel est le prix de 7 gâteaux ?*
- *Si 7 gâteaux coûtent 35 F, quel est le prix d'un gâteau ?*
- *Si un gâteau coûte 5 F, combien de gâteaux peut-on acheter avec 35 F ?*

Il s'agit des trois problèmes types de proportionnalité avec une valeur unitaire



En fait leur simplicité dépend essentiellement du choix des nombres.
Dans nos trois exemples on a choisi 3 nombres entiers tels que : $c > a$ et $c > b$.
Changeons une de ces conditions et le problème devient très difficile pour les élèves.

- <u>$c < a$</u> :
  40 madeleines coûtent 30 F. Quel est le prix d'une madeleine ?
- <u>$c < b$</u> :
  J'ai payé 36 F un rôti vendu 48 F le kilo.
  Quelle est la masse de ce rôti ?
- <u>a décimal</u>
  Quel est le prix de 1,758 kg de tomates vendues 6,95 F le kilo ?

Il y a là trois gros chantiers qui sont à continuer en collège.

II. LA PROPORTIONNALITE AU DEBUT DU COLLEGE

A- Les objectifs :

a) la construction d'un modèle pour la proportionnalité

L'apprentissage de la proportionnalité est jalonné d'obstacles très souvent liés à la nature des nombres utilisés. La plus grande difficulté est sans doute de dépasser le cadre des nombres entiers. La maîtrise complète de la proportionnalité demande la connaissance de techniques particulières qui ne sont abordées qu'au collège

- multiplications et divisions par un décimal,
- écritures fractionnaires, division par une fraction,
- équations $a\,x = b$ ou $\frac{x}{a} = \frac{b}{c}$.

Une présentation générale ne peut donc être envisagée avant la classe de 3$^{\text{ème}}$. Toute étude générale prématurée ne peut se faire qu'à l'aide de formules magiques qui font appel à la faculté d'imitation des élèves, mais qui s'avéreront inefficaces à la première difficulté.

Il n'est pas question pour autant d'attendre la 3$^{\text{ème}}$ pour présenter des situations de proportionnalité, elles apparaissent dans l'enseignement pratiquement avec la multiplication et resteront un fil conducteur tout au long de la scolarité au collège comme vient de le rappeler fortement le nouveau programme du cycle central (5$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$).

b) un support à d'autres apprentissages mathématiques

La multiplication et la division par un décimal, les écritures fractionnaires, les équations ne peuvent pas être enseignées comme des règles de calcul qu'il suffirait d'apprendre puis d'appliquer. Ces techniques ne peuvent être systématisées que si elles ont un sens pour les élèves, c'est-à-dire qu'ils soient capables de les relier à des connaissances acquises ou à des situations familières. C'est un rôle que peut jouer la proportionnalité.

c) L'étude des situations pour elles-mêmes :

La notion de proportionnalité se construit à partir de situations choisies dans le monde physique ou économique. Une bonne connaissance des grandeurs est indispensable. Etre capable de les reconnaître, de les nommer (longueur, prix, masse ...), de les différencier (périmètre et aire, masse et volume, ...) semble être un minimum. N'est-ce pas là, la véritable raison des difficultés des élèves à résoudre des problèmes de géographie (densité, taux de natalité), d'électricité (intensité, tension...), de chimie (moles) ?

Le programme propose l'étude précoce d'un certain nombre de situations parfois difficiles (conversions, échelles, pourcentages, vitesses, mélanges..) qui présentent un intérêt évident dans d'autres matières. A l'époque où elles sont abordées les élèves disposent encore de peu de moyens techniques, il faut donc rester modeste dans les objectifs en évitant en particulier de perdre le sens du problème au profit d'acrobaties calculatoires sans intérêt.

B- La recherche d'une 4ème proportionnelle

Ce fut d'abord une affaire de règle de trois, puis d'opérateurs, de tableaux et de coefficient de proportionnalité , de produits en croix . Ces recettes ont un double effet, elles permettent de trouver la solution (à condition de bien placer les nombres) mais elles éludent la question de savoir pourquoi il y a proportionnalité. Pour beaucoup d'élèves c'est proportionnel parce qu'on utilise le produit en croix CQFD.

Quand on a compris qu'un élève a besoin de donner du sens aux procédures qu'il emploie, c'est-à-dire de les construire à partir de ses connaissances antérieures, on s'aperçoit que tous ces problèmes peuvent apparaître très différents suivant le niveau de l'élève. Ne reconnaissant pas une structure commune il est amené à utiliser des règles d'action qui dépendent essentiellement des nombres en jeu.

a) l'influence des nombres

<u>Exemple 1</u>

3 objets coûtent 15 F, quel est le prix de 7 objets ?

3 objets coûtent 7 F, quel est le prix de 12 objets ?

Dans le premier cas, la valeur unitaire s'impose dans le second c'est le rapport entre les objets. Pour certains élèves c'est l'opération la plus simple qui guide le choix de la procédure et ils se retrouvent très gênés pour choisir quand il y a plusieurs divisions exactes possibles comme dans cet exemple :

5 objets coûtent 20 F, quel est le prix de 40 objets ?

Exemple 2

3 objets coûtent 7 F, quel est le prix de 12 objets ?

17 objets coûtent 175 F, quel est le prix de 221 objets ?

Dans le premier problème le rapport entre 12 et 3 est évident. Pour beaucoup d'élèves il ne s'agit même pas d'une division car on est dans le domaine des tables de multiplication.

Dans le deuxième il faut anticiper toute la démarche pour choisir de commencer par 221 : 17 =13 et savoir quoi faire du résultat. Le saut dans la difficulté est ici bien au delà d'un simple passage à une division à 2 chiffres, il oblige, pour réussir, à penser les procédures en terme d'opérations avant de les avoir effectuées.
C'est le début d'une structuration qui se dégage des mesures pour s'intéresser aux rapports entre les grandeurs.

b) l'influence de la situation

Exemple 1:

15 objets coûtent 3 F, quel est le prix de 35 objets ?

L'importance économique et donc culturelle donnée au prix unitaire impose un sens particulier à la relation de proportionnalité sur les prix.
Il n'est pas naturel d'utiliser la quantité unitaire (5 objets pour 1 F) et il n'est pas rare de voir des élèves effectuer 35 x 5 .

Exemple 2:

3 objets coûtent 6 F, combien d'objets peut-on acheter avec 24 F ?

Le calcul de la quantité est un problème nouveau, mais le texte est très ressemblant aux précédents, ce qui multiplie encore le nombre de possibilités et donc le nombre d'erreurs.

La présentation sous forme de tableau à deux colonnes de tous ces problèmes nous apparaît être le meilleur outil pour faire apparaître leur structure commune.

Exemple :

Un paquet de 200 feuilles pèsent 160 g, combien de feuilles y a-t-il dans un paquet de 120 g ?

Le tableau permet l'identification :

- des grandeurs par leur nom
- des données
- de la question
- les rapports utilisés.

nombre de feuilles	masse en g
200	160
?	120

En général les élèves s'empressent de se lancer dans les divisions (les multiplications donnent des résultats trop grands) et utilisent le résultat avec des bonheurs différents.

Voici parmi d'autres trois procédures possibles :

<table>
<tr>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>nombre de feuilles</td><td>masse en g</td><td></td></tr>
<tr><td>: 160</td><td>200</td><td>160</td><td>: 160</td></tr>
<tr><td>x 120</td><td>1,25</td><td>1</td><td>x 120</td></tr>
<tr><td></td><td>150</td><td>120</td><td></td></tr>
</table>
200 : 160 = 1,25
il faut 1,25 feuilles pour 1 g.
1,25 x 120 = 150
150 feuilles pèsent 150 g.
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>nombre de feuilles</td><td>masse en g</td><td></td></tr>
<tr><td>x 0,75</td><td>200</td><td>160</td><td>x 0,75</td></tr>
<tr><td></td><td>150</td><td>120</td><td></td></tr>
</table>
120 : 160 = 0,75
le rapport de 120 à 160 est 0,75
200 x 0,75 = 150
150 feuilles pèsent 150 g.
</td>
<td>
<table>
<tr><td></td><td>nombre de feuilles</td><td>masse en g</td><td></td></tr>
<tr><td>: 200</td><td>200</td><td>160</td><td>: 200</td></tr>
<tr><td>x 150</td><td>1</td><td>0,8</td><td>x 150</td></tr>
<tr><td></td><td>150</td><td>120</td><td></td></tr>
</table>
160 : 200 = 0,8
une feuille pèse 0,8 g.
120 : 0,8 = 150
150 feuilles pèsent 150 g.
</td>
</tr>
</table>

Chacune apporte son lot de difficultés :

- difficile d'imaginer 1,25 feuilles pour la première
- le rapport 0,75 < 1 dans la deuxième, le rapport inverse n'est pas décimal
- la division par un décimal dans la troisième (dans 120 combien de fois 0,8 ?)

Remarque :

Cette analyse montre que sous son allure banale cet exercice dépasse le cadre de la 6ème.

En aucun cas, il ne s'agit de rendre obligatoire l'utilisation de ces tableaux par les élèves, encore moins de s'en servir pour imposer une procédure standard, l'élève doit garder l'entière liberté dans le choix de sa procédure. Le tableau est tout d'abord une aide à la structuration des données et un outil de communication bien utile pour les corrections.

Ce n'est que très progressivement en cinquième et quatrième, qu'il évoluera vers une référence pour la proportionnalité. Un tableau de proportionnalité se caractérisera alors par l'égalité de rapports ou l'existence d'un coefficient de proportionnalité.

C- la multiplication et la division par un décimal

La multiplication par un décimal relève désormais entièrement de la classe de $6^{\text{ème}}$.

Il ne s'agit évidemment pas d'un simple problème de placement de virgule, mais d'un changement complet de sens :

Pour trouver *le prix de 3 kg de tomates à 6,95F le kilogramme* on peut faire :

6,95 F + 6,95 F + 6,95 F = 20,85 F

Pour *le prix de 6,450 kg de pommes de terre à 3,20 F le kg*, il n'est plus possible de procéder par additions.

Certains manuels proposent curieusement d'effectuer $\frac{6\,450}{1\,000} \times \frac{320}{100}$ alors que le produit de deux fractions n'est abordé qu'en $5^{\text{ème}}$, d'autres proposent froidement d'examiner comment fonctionne la calculatrice.

Les tests que nous avons effectués (cf. " les prix ") montrent que les élèves qui ne connaissent pas la technique cherchent à décomposer la quantité. On peut garder ce point de départ qui reste proche de l'idée d'addition pour arriver à la disposition classique.

- Une première séquence pour calculer le prix de 0,1 kg, 0,01 kg, 0,001 kg ..etc.

(C'est un très bon exercice de calcul mental).

- Une seconde séquence pour généraliser aux nombres à un chiffre en adoptant la disposition classique :

$$\begin{array}{r} 3{,}20 \\ \times \quad 6 \\ \hline 19{,}20 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}20 \\ \times \quad 0{,}4 \\ \hline 1{,}280 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 3{,}20 \\ \times 0{,}05 \\ \hline 0{,}1600 \end{array}$$

- La troisième séquence pour généraliser en rassemblant les résultats sous la forme classique.

Les activités que nous proposons (cf. " les prix ") s'appuient sur une présentation sous forme de factures qui est une bonne transition vers les formules en évitant leur aspect souvent " parachuté ".

Ces factures permettent d'aborder la division par un décimal comme une multiplication à trous en commençant par la recherche de quantités entières.

Leur gros intérêt est de bien marquer que la procédure à employer ne dépend pas des nombres mais des grandeurs. Autrement dit pour l'élève : si je sais résoudre ce problème avec des nombres entiers, je le résous de la même manière, c'est-à-dire avec les mêmes opérations, quels que soient les nombres.

On peut aussi, comme on l'a vu dans le paragraphe précédent utiliser la recherche d'une quatrième proportionnelle pour introduire la division par un décimal.

D- l'écriture fractionnaire

il y a un abîme entre les deux rédactions suivantes

Si 4 *yaourts coûtent* 6,40 F *un yaourt coûte* 6,40 F : 4 = 1,60 F *six yaourts coûtent* : 1,60 F x 6 = 9,60 F	(MN) // (BC) *donc d'après Thalès* $\frac{x}{8} = \frac{7}{5}$ *d'où* 5x = 56 *et* $x = 8 \times \frac{7}{5} = 11{,}2$

La maîtrise de l'écriture fractionnaire comporte plusieurs passages délicats :

- $\frac{3}{4}$ ne représente pas qu'une part de tarte mais aussi le quotient de 3 par 4.

- $\frac{3}{4}$ de 250 = $\frac{3}{4}$x 250 introduit un nouveau sens pour la multiplication qui mérite mieux qu'un tour de passe-passe qui consiste à dire aux élèves qu'il suffit de remplacer le "de " par le signe " x "

- le produit en croix n'est qu'une technique de résolution d'équation, il n'a aucun sens par rapport à la situation étudiée (dans notre exemple 56 a la dimension d'une aire), il faut donc accepter ce détour par un raisonnement sur les nombres. L'apprentissage des mises en équation en $4^{ème}$ montre que ce n'est pas toujours bien accepté.

Ces passages sont d'autant plus difficiles à réaliser, qu'on ne dispose que d'une représentation très réduite des fractions (une part de tarte pour beaucoup). Il est donc indispensable de mener dès le début du collège, un apprentissage systématique de ce formalisme en complémentarité avec la proportionnalité (cf. " l'écriture fractionnaire ").

III. CONCLUSION

La proportionnalité ne peut pas être présentée en début de collège comme une notion que l'on étudie pour elle-même. Elle est utilisée comme un outil par les élèves qui en mettent en œuvre implicitement différents aspects.
Une étude systématique à partir de ces procédures locales n'a de sens que sur l'ensemble du collège. Il s'agit en quelque sorte pour un élève de construire un puzzle dont il ne possède pas de modèle et dont il doit fabriquer simultanément les pièces.
L'élève a rencontré en primaire quelques situations simples de proportionnalité, il a fait fonctionner les propriétés de linéarité dans le cas des nombres entiers, il a utilisé implicitement des coefficients de proportionnalité dans le cas de grandeurs de même nature. C'est à partir de ces expériences devenues familières, que l'élève développera progressivement des compétences générales.
Cette progression s'effectue simultanément en plusieurs dimensions :

- l'étude de situations nouvelles : conversions, mélanges, %, échelles et vitesses évidemment, sans oublier toutes les situations géométriques (secteurs circulaires , Thalès, trigonométrie, agrandissements ...).
- l'habitude du calcul mental et des ordres de grandeurs
- la rencontre avec divers types de problèmes : (partages, $4^{ème}$ proportionnelle, comparaisons ....)
- l'usage de procédures multiples (linéarité, coefficients, équations ...)
- un élargissement du sens des opérations aux décimaux
- l'utilisation de l'écriture fractionnaire

Les nouveaux programmes parus à l'issue des deux années de notre groupe de recherche reflètent bien ces préoccupations. C'est pourquoi vous trouverez à la suite de ce texte tous les extraits en relation avec la proportionnalité.

Mathématiques : articulation école-collège

[Extraits]

4 . Organisation et gestion de données. Fonctions

Toute référence à la notion de fonction a été supprimée des programmes de l'école primaire.

Les élèves ont cependant l'occasion d'utiliser (lire, construire et interpréter) des schémas simples (tableaux, diagrammes, graphiques)

Concernant plus particulièrement l'étude de la proportionnalité qui constitue également une notion dont l'étude doit être envisagée sur plusieurs années à l'école primaire et au collège, quelques précisions peuvent être apportées.

A l'école primaire, on n'enseigne pas la proportionnalité, mais les élèves sont confrontés à de nombreux problèmes dont la résolution met en jeu divers aspects de la proportionnalité. Autrement dit, on fait fonctionner la proportionnalité comme "outil", mais on ne l'étudie pas pour elle-même, Il s'agit donc essentiellement d'amener les élèves à utiliser des raisonnements qui mettent en œuvre implicitement différents aspects de la proportionnalité :

- les propriétés de linéarité (idée de "fois plus" : Si j'achète trois fois plus d'objets, je paierai une somme trois fois plus importante...) ;

- le coefficient, lorsqu'il a du sens (dans le cas de relations entre grandeurs de même nature, par exemple) : situations de mélange (cinq fois plus d'eau que de sirop), d'agrandissement ou de réduction, d'échelle (les dimensions sur le papier sont cent fois plus petites que dans la réalité)

Des situations où ces types de raisonnement ne sont pas appropriés ont également été proposées. L'idée de proportionnalité, à la fin de l'école primaire, est donc liée à la possibilité de faire fonctionner certains types de raisonnement. Ceux-ci supposent une bonne maîtrise des relations entre nombres, en même temps qu'elles contribuent à les renforcer.

Les situations mettant en jeu les notions de pourcentages, vitesses, échelles relèvent de la même approche à l'école primaire ... et les problèmes correspondants sont résolus en référence au sens, par les mêmes types de raisonnement (en se limitant à des données qui le permettent), comme le montre l'exemple du problème suivant :
"Un objet coûte 240 F et subit une hausse de 20 %". Pour calculer l'augmentation, à la fin de l'école primaire, les élèves peuvent utiliser un raisonnement du type ; "Pour 100 F, la hausse est de 20 F, pour 200 F, elle est de 40 F, pour 10 F elle est de 2 F, pour 40 F, elle est de 8 F, donc pour 240 F, elle est de 48 F" .
La procédure standard pour calculer l'augmentation n'est enseignée qu'en sixième (pour prendre 20 % de 240, on calcule 240 x 0,20) et en troisième les élèves trouveront directement le nouveau prix (en calculent 240 x 1,20).

Sur l'ensemble du collège, une étude systématique de la proportionnalité et de ses applications est envisagée, avec la mise en place progressive de compétences générales (par exemple, pour calculer un pourcentage, une vitesse moyenne ...) qui remplaceront les procédures locales et personnelles que les élèves ont pu utiliser à l'école primaire. L'étude de la fonction linéaire, en fin de collège, fournit un cadre algébrique pour le traitement des problèmes de proportionnalité.

Le directeur des écoles Marcel DUHAMEL	Le directeur des lycées et collèges Alain BOISSINOT

I. Présentation

[...]
Dans ces trois domaines d'études *[géométrique, numérique, organisation et gestion de données]*, la proportionnalité apparaît comme un fil conducteur : afin de favoriser sa maîtrise le programme propose de nombreuses situations géométriques, numériques ou graphiques.
[...]

II.Explicitations des contenus de la classe de 5^e

A.Travaux géométriques

[...]

B.Travaux numériques

Comme en 6e, la résolution de problèmes constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Ces problèmes, en associant à une situation donnée une activité numérique, renforcent le sens des opérations et des écritures numériques et littérales figurant au programme et développent les qualités d'organisation et de gestion de données numériques. Il convient donc de ne pas multiplier les activités de technique pure.

[...]

C.Organisation et gestion de données, fonctions

Les trois parties de cette rubrique s'éclairent et se complètent mutuellement. La contribution des mathématiques à l'éducation du citoyen y apparaît clairement. La partie statistique a pour objectif d'initier à la lecture, à l'interprétation, à la réalisation et à l'utilisation de diagrammes, tableaux et graphiques et d'en faire l'analyse critique. Les outils de description d'une situation sont plus nombreux. Les travaux correspondants ne peuvent se concevoir qu'à partir d'exemples et en liaison, chaque fois qu'il est possible, avec l'enseignement des autres disciplines : sciences de la vie et de la terre, technologie, géographie...
Ils seront l'occasion de consolider et d'approfondir les acquis des élèves sur l'utilisation des unités de mesure, dont celle du temps.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
[...] **2. Exemples de fonctions. Proportionnalité**	[...]	[...] Toute définition de la notion de fonction sera évitée, mais des expressions telles que « en fonction de », « est fonction de » seront utilisées.
	Reconnaître, s'il y a lieu, la proportionnalité sur un tableau complet de nombres.	On pourra notamment constituer un tableau des abscisses et ordonnées de points d'une droite passant par l'origine dans le plan muni d'un repère.
	Compléter un tableau de nombres représentons une relation de proportionnalité dont le données sont fournies partiellement. En particulier, déterminer une quatrième proportionnelle.	Les élèves retiendront que dans une relation de proportionnalité, la correspondance est déterminée par un couple de valeurs homologues non nulles.

	Mettre en oeuvre la proportionnalité dons les cas suivants : - utiliser des unités combinant le système décimal et le système sexagésimal (mesure du temps), - calculer et utiliser l'échelle d'une carte ou d'un dessin, - reconnaître un mouvement uniforme à la proportionnalité entre temps et distance parcourue ; utiliser cette proportionnalité, - calculer un pourcentage, un coefficient de proportionnalité, - effectuer pour des volumes des changements d'unités de mesure.	Les activités numériques et graphiques pourront se référer à l'un ou l'autre thème exploitant des formules, notamment de longueur, d'aire et de volume. Ainsi, on pourra envisager des variations : - de l'aire d'un triangle ou d'un parallélogramme, de celle d'un disque, - de la longueur d'un arc de cercle, de l'aire d'un secteur circulaire, - du volume ou de l'aire latérale d'un cylindre ou d'un prisme droit, en fonction d'une variable de la formule, toute autre variable étant fixée.

3. Relevés statistiques.		
Lecture, interprétation, représentations graphiques de séries statistiques. Classes, effectifs.	Lire et interpréter un tableau, un diagramme à barres, un diagramme circulaire ou semi-circulaire . Regrouper des données statistiques en classes, calculer des effectifs. Présenter une série statistique sous la forme d'un tableau, la représenter sous la forme d'un diagramme ou d'un graphique.	Il importe d'entraîner les élèves à lire et à représenter des données statistiques en utilisant un vocabulaire adéquat. [...] Le choix de la représentation est lié à la nature de la situation étudiée.
Fréquences.	Calculer des fréquences.	La notion de fréquence est notamment utilisée pour comparer des populations d'effectifs différents, et faire le lien avec la proportionnalité. Les écritures 4/10, 2/5, 0,4 (ou en notation anglo-saxonne 0.4 ou .4), 40 %, qui peuvent être utilisées pour désigner une fréquence, permettent d'insister sur les diverses représentations d'un même nombre.

III.Explicitations des contenus de la classe de 4e

[...]

A.Travaux géométriques

Dans le plan, les travaux portent sur les figures usuelles déjà étudiées (triangle, cercle, quadrilatères particuliers), mais également sur une nouvelle configuration illustrant une situation fondamentale de proportionnalité ; celle de triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
1 . triangles	[...]	[...]
[...] Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes.	Connaître et utiliser la proportionnalité des longueurs pour les côtés des deux triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : Dans un triangle ABC, si M est un point du côté [AB], N un point du côté [AGI et si [MN] est parallèle à [BC], alors $$\frac{AM}{AB}=\frac{AN}{AC}=\frac{MN}{BC}$$	L'égalité des trois rapports sera admise après d'éventuelles études dans des cas particuliers. Elle s'étend bien sûr au cas où M et N appartiennent respectivement aux demi-droites [AB) et [AC), mais on n'examinera pas le cas où les demi-droites [AM) et [AB), de même que les demi-droites [AN) et [AC), sont opposées. Le théorème de Thalès dans toute sa généralité ainsi que sa réciproque seront étudiés en classe de 3^e.
[...]	[...]	[...]
2. triangle rectangle et cercle		
[...] Cosinus d'un angle.	[...] Utiliser, pour un triangle rectangle, la relation entre le cosinus d'un angle aigu et les longueurs des deux côtés adjacents.	[...] La propriété de proportionnalité des côtés de deux triangles déterminés par deux parallèles coupant deux sécantes permet de définir le cosinus comme un rapport de longueurs.
[...]	[...]	[...]
4. Pyramide et cône de révolution	Calculer le volume d'une pyramide et d'un cône de révolution à l'aide de la formule V = Bh / 3.	[...] La recherche de l'aire latérale d'un cône de révolution peut être une activité de mise en oeuvre de la proportionnalité. 0n pourra, à l'aide des formules d'aires ou de volumes, étudier les variations d'une grandeur en fonction d'une autre.

B.Travaux numériques

La résolution de problèmes (issus de la géométrie, de la gestion de données, des autres disciplines, de la vie courante) constitue l'objectif fondamental de cette partie du programme. Elle nourrit les activités, tant dans le domaine numérique que dans le domaine littéral. Les exercices de technique pure ne sont pas à privilégier.

[...]

C.Organisation et gestion de données, fonctions

Les notions essentielles relatives à cette rubrique ont été introduites ou approfondies en 6^e et 5^e. En 4^e ces notions seront fréquemment réinvesties dans les mêmes conditions que celles explicitées dans le programme de 5^e, avec une insistance particulière sur l'utilisation des moyens de calcul moderne.
Le lien avec les autres disciplines et avec l'éducation à la citoyenneté sera maintenu et renforcé.
Comme en 5^e, le mot « fonction » sera employé, chaque fois que nécessaire, en situation, et sans qu'une définition formelle soit donnée.

Contenus	Compétences exigibles	Commentaires
1. Représentations graphiques. Proportionnalité	Utiliser, dans le plan muni d'un repère, la caractérisation de la proportionnalité sous la forme d'alignement de points avec l'origine.	On fera travailler les élèves à la fois sur des exemples et des contre-exemples de situations de proportionnalité.
2. Applications de la proportionnalité		
Vitesse moyenne.	Utiliser l'égalité d = vt pour des calculs de distance parcourue, de vitesse et de temps.	Les situations où interviennent des vitesses moyennes constituent des exemples riches où le traitement mathématique s'avère particulièrement pertinent, comme l'étude de la vitesse moyenne d'un trajet sur un parcours de 60 km, où l'aller se parcourt à 20 km. h^{-1} et le retour à 30 km. h^{-1} . Les compétences exigibles se réduisent aux vitesses mais d'autres situations de changements d'unités méritent d'être envisagées : problèmes de change monétaire, consommation de carburant d'un véhicule en litres pour 100 kilomètres ou en kilomètres parcourus par litre.
Grandeurs quotients courantes	Changer d'unités de vitesse (mètre par seconde et kilomètre par heure).	
Calculs faisant intervenir des pourcentages.		En liaison avec d'autres disciplines (géographie,...), la notion d'indice pourra être présentée comme un cas particulier du coefficient de proportionnalité, donnant lieu à illustrations et calculs mais en aucun cas à des développements théoriques.
	Mettre en oeuvre la proportionnalité dans des situations simples utilisant à la fois des pourcentages et des quantités ou des effectifs.	Des situations issues de la vie courante ou des autres disciplines demandent de mettre en oeuvre à la fois un coefficient de proportionnalité, sous forme de pourcentage ou d'indice, et des quantités ou des effectifs. Par exemple, connaissant le pourcentage d'un caractère dans deux groupes d'effectifs différents, déterminer le pourcentage obtenu après réunion des deux groupes.
[...]	[...]	

DEUX SEQUENCES :

Les prix (6ème et 5ème)

Les vitesses (5ème)

LES PRIX

Le thème des prix occupe une place fondamentale et très particulière dans l'apprentissage de la proportionnalité. Il s'agit d'abord d'un thème pour lequel les élèves qui entrent au collège ont un vécu - plus ou moins "riche" il est vrai ! - mais toujours existant. Il s'agit aussi d'un thème important pouvant contribuer à leur formation de consommateurs avertis et de vendeurs avisés pour certains...

Du point de vue mathématique et de la compréhension de la proportionnalité, les problèmes de prix constituent une classe de situations à part, en raison surtout du rôle qu'elles font jouer à la notion de prix à l'unité et aux procédures consistant à s'appuyer sur cette notion et donc, implicitement, sur la notion de coefficient de proportionnalité.

Pour exploiter au mieux l'étude de ce thème, il est nécessaire de réfléchir longuement à la progression que l'on va suivre. Or les choix ne sont pas évidents contrairement à ce que pourrait laisser penser la simplicité mathématique de la plupart des problèmes de prix. Ainsi, on croit souvent que les problèmes les plus simples pour les élèves sont ceux où il faut calculer un prix donné connaissant le prix unitaire et la quantité achetée. Ceci est vrai lorsque la grandeur correspondant à la quantité achetée est une variable discrète (un nombre d'objets en particulier) et que les valeurs de la grandeur prix sont simples (nombres entiers pas trop grands).

Un élève de 6ème sait, bien sûr, calculer le prix de 8 bonbons sachant que le prix unitaire est de 3 francs. Mais, ainsi que nous le verrons un peu plus loin, calculer le prix de 500 grammes de tomates sachant qu'elles coûtent 6, 95 francs au kilo est bien autre chose...

De quelle nature sont ces difficultés que beaucoup d'élèves rencontrent ?

Elles sont liées à des difficultés opératoires bien sûr (multiplication et surtout division par un décimal que beaucoup d'élèves de 6ème ne maîtrisent pas encore) mais pas seulement : c'est la notion même de "prix à l'unité" que l'on doit utiliser comme un coefficient de proportionnalité qui n'est pas bien comprise par une majorité d'élèves de cet âge. Dès que les grandeurs et les nombres se compliquent, ils ne voient plus le sens de l'opération qu'il faudrait effectuer pour obtenir le prix demandé.

Pour nous, il est clair que multiplier 8 bonbons par le coefficient 3 francs/bonbon et multiplier 0,5 kg par le coefficient 6,95 francs/kg sont des opérations strictement équivalentes. Mais pour un élève qui ne parvient pas encore à raisonner de manière fonctionnelle c'est-à-dire en considérant le prix unitaire comme un coefficient de proportionnalité, ce n'est pas du tout la même chose.

La progression que nous proposons a pour but de mettre en place, dans le cas de ces problèmes de prix, un tel raisonnement fonctionnel s'appuyant sur la notion de prix à l'unité.

Elle commence par un ensemble de problèmes de type 4$^{\text{éme}}$ proportionnelle où les quantités sont entières. Cette première partie permet d'introduire un mode de présentation des données pour bien identifier les grandeurs. Les élèves mettent en œuvre des procédures scalaires (où le prix unitaire joue un rôle central) qu'ils maîtrisent beaucoup mieux, à cet âge, que les procédures fonctionnelles (coefficient de proportionnalité)

Dans la deuxième partie elle permet une manipulation implicite du coefficient de proportionnalité en abordant des problèmes de multiplications et de divisions où les quantités utilisées sont décimales. Elle utilise la représentation des situations sous forme de factures qui oblige à commencer par bien identifier les grandeurs en jeu., tout en évitant l'utilisation prématurée de formules .

La troisième partie regroupe les problèmes de comparaison de prix qui est une situation riche pour réinvestir les procédures précédentes. L'élève doit avoir l'initiative de choisir sa méthode : il peut comparer des prix unitaires, mais c'est à lui de choisir l'unité (litre, centilitre, bouteille...), mais il peut aussi calculer les quantités pour 1 F.

Pour la commodité nous avons utilisé une présentation en trois parties, cela n'implique pas de les traiter consécutivement. Les deux premières parties peuvent être séparées en plusieurs séquences, la troisième partie doit être traitée en parallèle en intégrant des problèmes de comparaisons dès la première partie (fiche "coca" et "pepsi" par exemple.)

1^{ERE} PARTIE

Six yaourts coûtent 9,60 F. Combien valent quatre yaourts ?

Ce petit problème a été posé sans préparation dans une classe de sixième de 25 élèves. Seuls 9 élèves ont su le résoudre.

On peut trouver plusieurs raisons à cet échec : des nombres écrits en lettres, les prix ne sont pas entiers, le prix unitaire n'est pas immédiat à trouver, le rapport de 6 à 4 n'est pas entier et inférieur à 1 ...

Toutes ces micro-difficultés cachent l'essentiel, ce que ces élèves n'appréhendent pas c'est la structure du problème. Sa compréhension n'est pas la somme de micro-savoirs qu'il suffirait d'acquérir un à un, mais elle doit être travaillée globalement.

La fiche n°1 a pour but de mettre progressivement en évidence cette structure commune à toute une série de problèmes de $4^{ème}$ proportionnelle.

fiche n°1

1°) 6 yaourts valent 9 F a) Quel est le prix de 18 yaourts ? b) Combien de yaourts a-t-on pour 18 F ?	2°) 12 bonbons coûtent 9 F. a) Quel est le prix de 3 bonbons ? b) Combien de bonbons a-t-on avec 3 F ?
3°) 6 bouteilles valent 15 F a) Quel est le prix de 4 bouteilles ? b) Combien de bouteilles a-t-on avec 100 F ?	4°) 5 gâteaux valent 30 F a) Quel est le prix de 12 gâteaux ? b) Combien de gâteaux a-t-on pour 18 F ?
5°) 100 g de chocolat coûtent 25 F Combien de chocolat a-t-on pour 10 F ?	6°) 120 g de fromage râpé valent 6 F Quel est le prix d'1 kg ?

Chaque élève a toute liberté pour choisir sa méthode et expliquer ses calculs. C'est pour la correction que le professeur utilise une présentation en 2 colonnes.

Par exemple :

a)

nombre de yaourts	prix
6	9 F
18	?

b)

nombre de yaourts	prix
6	9 F
?	18 F

On pourra éventuellement indiquer les procédures des élèves sur ces schémas, sans en faire une méthode systématique.

Par exemple :

1°) a)

	nombre de yaourts	prix	
x 3	6	9 F	x 3
	18	?	

Solution : 18 : 6 = 3 il y a trois fois plus de yaourts

9 F x 3 = 27 F 18 yaourts coûtent 27 F

Les solutions des élèves étant souvent multiples, il n'y a pas lieu à ce stade de privilégier l'une d'entre elle, mais il faudra exiger pour chacune d'elle une rédaction précise.

fiche n°2

> 1°) Si 3 friandises coûtent 72 F, 15 friandises coûtent ....
> 2°) Si 3 friandises coûtent 15 F, 72 friandises coûtent ....
> 3°) Si 15 friandises coûtent 72 F, 3 friandises coûtent ....
> 4°) Si 15 friandises coûtent 3 F, 72 friandises coûtent ....

Le taux de réussite est de 70 % pour les deux premiers exercices, de 55% pour le troisième et seulement 40 % pour le dernier.

Les élèves privilégient deux méthodes (avec une préférence pour le passage à l'unité) :

	nombre de friandises	prix	
x 5	3	72 F	x 5
	15	?	

	nombre de friandises	prix	
:3	3	72 F	:3
x 15	1		x 15
	15	?	

Un même élève peut utiliser l'une ou l'autre en fonction des nombres en jeu, pour éviter en particulier les nombres décimaux.

L'intérêt de la correction sera donc de montrer que :

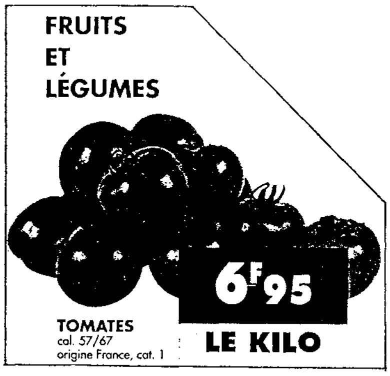
- On peut choisir sa méthode pour que les calculs soient plus simples.
- On peut utiliser toujours la même méthode avec l'inconvénient d'utiliser les nombres décimaux .

2^{EME} PARTIE

Lorsque les quantités deviennent décimales, le sens primitif des opérations n'est plus utilisable qu'au prix de détours et décompositions souvent ingénieuses mais peu généralisables.
C'est ce que révèlent ces deux tests effectués sans préparation en début de $6^{ème}$.

1°) Les TESTS

Test 1



Calculez le prix des tomates pour chacune des quantités suivantes :

a) 3 kg

b) 500 g

c) 1,5 kg

d) 750 g

e) 860 g

f) 1,738 kg

résultats : on peut classer les élèves en quatre groupes d'après leurs réponses.

	méthode	réussites	effectifs	%
Groupe 1	**aucune**	0	3	
		1	7	
		2	3	
		3	7	
		total	**20**	**17**
Groupe 2	**multiplication ***	3	**23**	**19**
Groupe 3	**décomposition ****	4	17	
		5	13	
		6	6	
		7	2	
		total	**38**	**32**
Groupe 4	**multiplication**	6 ou 7	**39**	**32**
		total	**120**	**100**

Seulement 1 élève sur 3 utilise correctement la multiplication par un décimal (Groupe 4)

* Les élèves du groupe 2 multiplient systématiquement les nombres du texte par 6,95.

Par exemple pour trouver le prix de 500 g , ils effectuent 500 x 6,95.
L'ordre de grandeur du résultat ne les dérange pas.

Ils ne réussissent donc que les trois exercices a), c), f).

** Voici toutes les décompositions rencontrées pour 750 g, chacune d'elle n'ayant été utilisée que par très peu d'élèves.

750 g = 1 kg : 4 x 3

750 g = 500 g + 500 g : 2

750 g = 500 g + 200 g + 500 g : 10

750 g = 1,5 kg : 2

750 g = 1 kg : 10 x 7 + 500 g : 10

Test 2

Quel est le prix de 2,4 kg de tomates à 6 F le kg ?

résultats

réponses	effectifs	%
2,4 x 6 = 14,40	81	65
décomposition 2,4 kg = 2 kg + 400 g	11	9
erreurs	33	26
total	125	100

On peut comparer ce résultat au précédent " *le prix de 3 kg de tomates à 6,95 F le kg* " qui avait été réussi à 97,5 %.

COMMENTAIRES

Les quantités et le prix à l'unité ne sont pas traités de manière équivalente, le problème est plus difficile quand c'est la quantité qui est décimale. Pour certains élèves, la multiplication est encore une addition répétée :

3 kg à 6,95 F = 6,95 F + 6,95 F + 6,95 F = 6,95 F x 3 .

par contre   2,4 kg x 6 = 2,4 kg + 2,4 kg + 2,4 kg + 2,4 kg + 2,4 kg + 2,4 kg
ne peut pas donner comme résultats des francs.

La représentation en colonnes montre que cette difficulté porte sur le rapport scalaire (interne aux grandeurs).

	masse	prix	
x 3	1 kg	6,95 F	x 3
	3 kg	?	

	masse	prix	
x 2,4	1 kg	6 F	x 2,4
	2,4 kg	?	

2°) Les ACTIVITES

Elles se décomposent en trois phases qui ne sont pas nécessairement consécutives.

La calculatrice est toujours disponible

Les fiches-élèves présentées en réduction se trouvent en fin du chapitre

1$^{\text{ERE}}$ PHASE : CALCULER UN PRIX

Elle a pour but d'amener les élèves à penser le calcul d'un prix comme le produit de 2 grandeurs : le prix unitaire et la quantité, quelles que soient les valeurs prises par celles-ci (entières ou décimales). On évite l'utilisation d'une formule en s'appuyant sur la présentation en facture. L'identification des grandeurs y est donc une phase préalable au calcul.

les " tomates" (cf. Test 1 page 36)

La fiche est relevée au bout de 20 min. La correction est l'occasion de montrer la variété des méthodes sans en privilégier une a priori, la généralité de la multiplication ressortira d'elle-même. On pourra résumer la méthode par une phrase du genre *" prix à payer = quantité x prix unitaire "*, mais il ne s'agit pas d'une formule à exiger des élèves.

Une justification de la méthode peut être faite à partir du prix d'un gramme.

par exemple : $1738 \times 0,0695 = 1,738 \times 6,95$

les " tickets de caisse "

Une situation familière pour enfoncer le clou.

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,590	**73,80**	**43,55**

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

1°) Quel est le prix à payer indiqué sur cette étiquette ?

Comment a-t-il été calculé ?

2°) Complétez ces 4 étiquettes.

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
1,025	**89,80**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,745	**58,80**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,600	**88,80**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,475	**43,90**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

La première question permet de préciser la méthode d'arrondi (5 centimes les plus proches ou par excès)

" Prix de 1,7 kg de raisins à 12,50 F le kg "

CALCULER UN PRIX

I - Quel est le prix de 1,7 kg de raisin à 12,50 F le kg ?

	Quantité (kg)	Prix (F)
	1	12,50
x ...	1,7	....

II- Indiquer le numéro de l'énoncé correspondant à chaque démarche .

Compléter les calculs. Ecrire la conclusion.

Enoncé 1 Calculer le prix de 2,6 kg de pommes à 6,50 F le kg.

Enoncé 2 Calculer le prix de 0,75 litre de vin à 18,20 F le litre.

Enoncé 3 Calculer le prix de 6,5 kg de carottes à 2,60 F le kg.

Enoncé 4 Calculer le prix de 4,2 m de tissu à 62,40 F le mètre.

Enoncé ...

	quantité (kg)	prix (F)
	1 →	2,60
x 6,5	6,5 →	2,60 x ....

Le prix ....

Enoncé ...

	quantité (l)	prix (F)
	1 →	18,20
x 0,75	0,75 →	....

Le prix ....

Enoncé ...

	quantité (kg)	prix (F)
	1 →	6,50
x ...	2,6 →	....

Le prix ....

Enoncé ...

	longueur (m)	prix (F)
	1 →	62,40
x ...	4,2 →	....

Le prix ....

Cette fiche est conçue comme une aide ou un soutien, elle fait le lien entre les activités sur la 4^{e} proportionnelle et le problème précédent.

Elle introduit le produit en s'appuyant sur les rapports internes. En effet l'opérateur fonctionnel $\times$ 12,5 est prématuré pour bon nombre d'élèves. Ils trouvent rapidement l'opérateur $\times$ 1,7 , mais ne disent pas facilement que le prix est 1,7 fois plus grand. Le résultat est retrouvé par linéarité.

La deuxième partie ne pose pas de difficulté. Toutefois pour l'énoncé 2, des élèves s'étonnent de trouver un résultat inférieur à 18,20 à la multiplication 18,2 $\times$ 0,75. Leurs voisins indiquent que la quantité est inférieure à un kg, cela suffit pour les convaincre.

A la synthèse, les échanges sont moins nombreux car l'activité est relativement cadrée. Cette activité est cependant nécessaire; à ce stade tous les élèves ne sont pas près à multiplier des kg par un nombre pour obtenir des francs. Le recours à la linéarité donne du sens au prix unitaire et évite les blocages. L'utilisation de l'opérateur fonctionnel viendra ultérieurement, même si certains élèves peuvent déjà s'en servir.

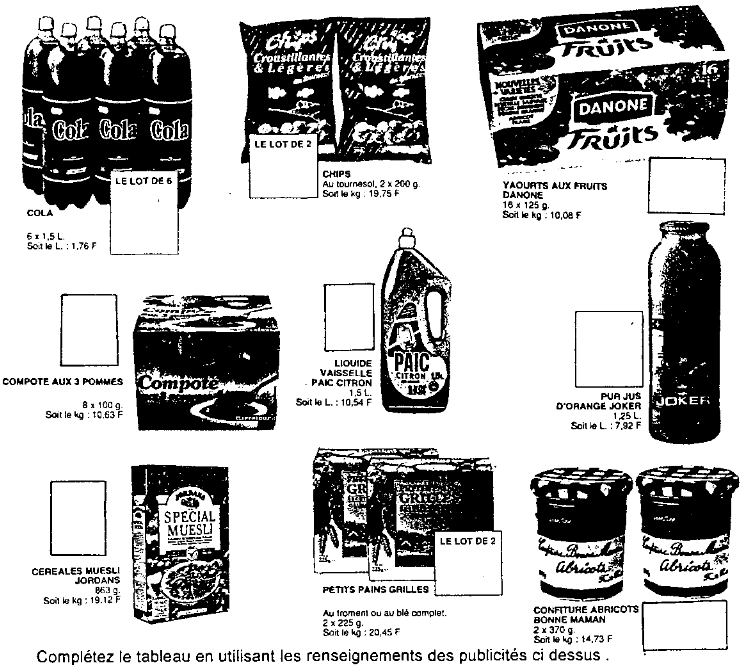
fiche " Coca-cola "

L'idée de départ était de réinvestir la procédure précédente dans un cadre familier.

Il est vite apparu que les difficultés étaient liées à l'identification des grandeurs :

- la confusion entre le prix à l'unité et la quantité à cause de l'unité F/kg
- la conversion en kg non faite
- la confusion entre bouteille et litre
- le nombre d'articles non-respecté.

Il s'avère que les élèves sont peu habitués à utiliser les grandeurs, beaucoup piochent les nombres au hasard dans le texte sans tenir compte des unités.



Complétez le tableau en utilisant les renseignements des publicités ci dessus .

Article	Prix à l'unité	Quantité	Montant
Coca-cola	F / litre	litres	
Chips	F / kg	kg	
Yaourts	F / kg	kg	
Compote	F / kg	kg	
Liquide-vaisselle	F / litre	litres	
Jus d'orange	F / litre	litres	
Céréales	F / kg	kg	
Pains grillés	F / kg	kg	
Confiture	F / kg	kg	
		TOTAL	

le far breton

Une recette pour préparer le far breton indique les ingrédients suivants:	Calculez le prix de revient de ce far sachant que :
1 litre de lait	le litre de lait coûte 3,60 F
250 g de farine	le kg de farine coûte 7 F
200 g de pruneaux	le kg de pruneaux coûte 18 F
150 g de sucre	le kg de sucre coûte 9 F
3 cl de rhum	le litre de rhum coûte 44 F
50 g de beurre	la demi-livre de beurre (250 g) coûte 4 F
4 oeufs	la demi-douzaine d'oeufs coûte 3,60F

C'est l'occasion de faire un bilan, le prix du beurre et des œufs permet de retrouver une problématique quatrième proportionnelle

les gazons

Voici un extrait d'un catalogue.

LA REALISATION DU JARDIN

LES GAZONS

Gazon rustique
implantation rapide sur tous les terrains. Pour 600 m²

Gazon mini Green
Composé de variétés fines utilisées par les professionnels pour les greens de golf. Pour 25 m²

Gazon terrains de jeux
Résiste au piétinement et à l'arrachement. Implantation rapide et dense. Pour 105 m²

Gazon anglais
levée et implantation rapide. Pour 75 m²

Calculez pour chaque type de gazon*, le prix de revient pour ensemencer un terrain de :

a) 5m x 10m

b) 10m x 30 m

c) 50m x 100m

Reportez vos résultats dans le tableau ci-dessous

		Gazons			
	Aire	rustique	mini Green	terrains de jeux	anglais
a)					
b)					
c)					

*Attention: il est obligatoire d'acheter des paquets entiers.

Un exercice d'entretien à placer dans le chapitre sur les aires.

Tous les élèves ne voient pas que les prix sont proportionnels au nombre de paquets entiers.

Beaucoup utilisent la surface du terrain, certains cherchent même sans succès à utiliser la masse du gazon.

2EME PHASE : LES FACTURES

les pizzas

Un marchand de pizzas a fait ses courses .
Retrouvez tous les nombres qui manquent dans sa facture

ARTICLE	PRIX UNITAIRE	QUANTITE	MONTANT
Farine	4,80 F le kg	kg	115,20 F
Oeufs	11,80 F la douzaine	12 douzaines	
Sucre	le kg	24 kg	96,00 F
Lait	2,35 F le litre	litres	30,55 F
Fromage blanc	8,83 F le kg	kg	132,45 F
Lard	le kg	4 kg	105,28 F
Jambon	54,28 F le kg	kg	217,12 F
Tomates	1,92 F la boîte	47 boîtes	
Anchois	la boîte	21 boîtes	133,87 F
Viande	40,18 F le kg	kg	441,98 F
Sel	5,31 F la boîte	2 boîtes	
Poivre	9,10 F la boîte	boîtes	9,10 F
Levure	1,05 F le paquet	14 paquets	
Olives	le bocal	6 bocaux	35,82 F
Margarine	8,65 F les 500g	11 kg	
Beurre	5,84 F les 250 g	3 kg	
Gruyère	le kg	4 kg	
		TOTAL	1 980,93 F

Les quantités proposées s'expriment toujours en nombres entiers. Pour trouver le prix unitaire les élèves peuvent donc utiliser la division par un entier qui a un sens pour eux.

Pour trouver la quantité, beaucoup utilise une division, mais certains procèdent par essais successifs et encadrements.

La conclusion recherchée est que l'opération à effectuer ne dépend pas des nombres mais de leur place. Par exemple, pour trouver un nombre manquant dans une des deux premières colonnes, on effectue toujours une division.

le restaurant

Complète la facture :

Quantité	Désignation	Prix	Montant
60	Verres 24 cl	1,60	96,00
	Verres 18 cl	1,40	84,00
60	Flûtes		120,00
	Dégustation	3,20	153,60
36	Bols	1,69	
	Carafes 0,25 l	0,83	29,88
5 dz	Couverts à poisson unis, la douzaine	54,15	270,75
5 dz	Couteaux à dessert unis, la douzaine		145,00
4 dz	Fourchettes unies, la douzaine	20,55	
	Louches	7,90	31,60
	Carton bloc commande	71,65	71,65
6	Napperons dentelle ronds, diamètre 23		47,70
6	Napperons ovales 35/25	17,00	
		Total :	

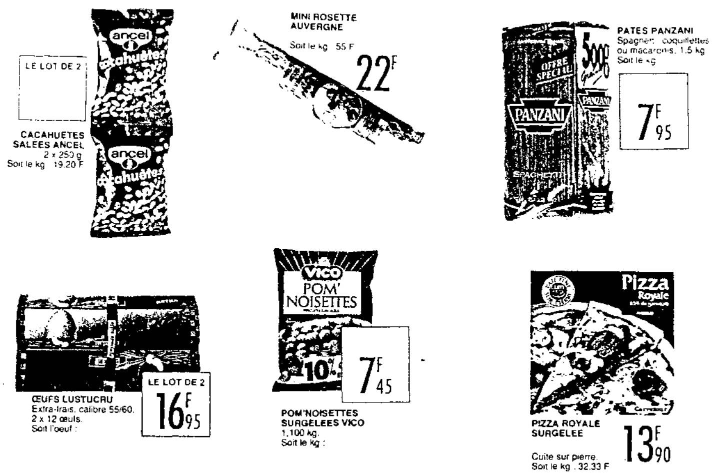
3^{EME} PHASE : DIVISIONS PAR UN DECIMAL (NIVEAU 5^{EME})

On aborde le problème dans sa généralité en gardant des situations maintenant familières.

Le but visé est que les élèves abordent ce type de problème en cherchant d'abord à reconnaître sa structure sans se laisser influencer par les nombres.

L'idée forte est que la structure d'un problème ne dépend pas des nombres qui y apparaissent, la conséquence pratique est que si on sait le résoudre avec des nombres entiers, on sait le résoudre avec tous les autres nombres en utilisant les mêmes opérations.

les fiches " cacahuètes " ou " chaussées aux moines "



Article	Prix à l'unité	Quantité	Montant
Cacahuétes	F / kg	kg	F
Saucisson	F / kg	kg	F
Pâtes	F / kg	kg	F
Oeufs	F / oeuf		F
Pom'noisettes	F / kg	kg	F
Pizza	F / kg	kg	F
		.TOTAL	

les tickets de caisses

Complétez ces trois tickets de caisse

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MATIN
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
....	73,80	33,21

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MATIN
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
1,120	....	52,08

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MATIN
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,590	43,80	....

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

3EME PARTIE :LES COMPARAISONS DE PRIX

Exemple : le liquide-vaisselle

Quel est le liquide vaisselle le moins cher ?

Le choix de la méthode doit être laissé à l'initiative de l'élève.

Des erreurs apparaissent souvent dans l'identification des résultats, par exemple $\frac{2\,500}{17{,}95}$ est souvent confondu avec le prix d'un centilitre.

Il est donc important d'exiger des élèves une phrase pour présenter leur calcul.

Ce type d'erreur peut être expliqué grâce à un tableau à 2 colonnes

	quantité	prix	
: 17,95	2 500 ml	17,95 F	: 17,95
	?	1 F	

quantité pour 1 F

	quantité	prix	
: 2 500	2 500 ml	17,95 F	: 2 500
	1 ml	?	

prix d' 1 ml

Documents élèves du chapitre "Les prix "

Calculez le prix des tomates pour chacune des quantités suivantes :

a) 3 kg

b) 500 g

c) 1,5 kg

d) 750 g

e) 860 g

f) 1,738 kg

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,590	**73,80**	**43,55**

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

1°) Quel est le prix à payer indiqué sur cette étiquette ?

Comment a-t-il été calculé ?

2°) Complétez ces 4 étiquettes.

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
1,025	**89,80**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,745	**58,80**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,600	**88,80**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

SUPER MARCHE
OUVERT DIMANCHE MAT
A VOTRE SERVICE
BA - 94 CL - 0028
24-09-94

kg	F/kg	F
0,475	**43,90**	

VENDEUR 1

MERCI DE VOTRE VISITE

CALCULER UN PRIX

I - Quel est le prix de 1,7 kg de raisin à 12,50 F le kg ?

	Quantité (kg)	Prix (F)
	1	12,50
x ...		
	1,7	....

II- Indiquer le numéro de l'énoncé correspondant à chaque démarche .

Compléter les calculs. Ecrire la conclusion.

Enoncé **1** Calculer le prix de 2,6 kg de pommes à 6,50 F le kg.

Enoncé **2** Calculer le prix de 0,75 litre de vin à 18,20 F le litre.

Enoncé **3** Calculer le prix de 6,5 kg de carottes à 2,60 F le kg.

Enoncé **4** Calculer le prix de 4,2 m de tissu à 62,40 F le mètre.

Enoncé ...

	quantité (kg)		prix (F)
	1	→	2,60
x 6,5			
	6,5	→	2,60 x ....

Le prix ....

Enoncé ...

	quantité (*l*)		prix (F)
	1	→	18,20
x 0,75			
	0,75	→	....

Le prix ....

Enoncé ...

	quantité (kg)		prix (F)
	1	→	6,50
x ...			
	2,6	→	....

Le prix ....

Enoncé ...

	longueur (m)		prix (F)
	1	→	62,40
x ...			
	4,2	→	....

Le prix ....

LE LOT DE 6

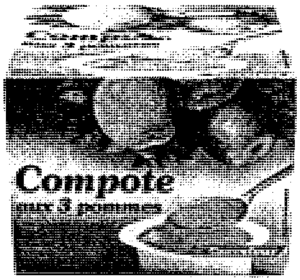
COLA

6 x 1,5 L.
Soit le L. : 1,76 F

LE LOT DE 2

CHIPS
Au tournesol, 2 x 200 g.
Soit le kg : 19,75 F

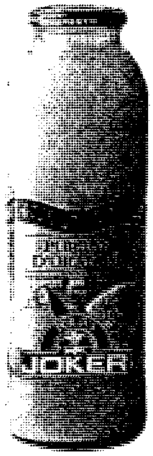
YAOURTS AUX FRUITS DANONE
16 x 125 g.
Soit le kg : 10,08 F



COMPOTE AUX 3 POMMES

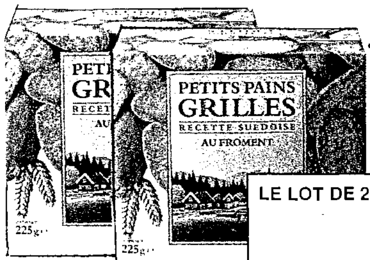
8 x 100 g.
Soit le kg : 10,63 F

LIQUIDE VAISSELLE PAIC CITRON
1,5 L.
Soit le L. : 10,54 F



PUR JUS D'ORANGE JOKER
1,25 L.
Soit le L. : 7,92 F

CEREALES MUESLI JORDANS
863 g.
Soit le kg : 19,12 F



LE LOT DE 2

PETITS PAINS GRILLES

Au froment ou au blé complet.
2 x 225 g.
Soit le kg : 20,45 F

CONFITURE ABRICOTS BONNE MAMAN
2 x 370 g.
Soit le kg : 14,73 F

Complétez le tableau en utilisant les renseignements des publicités ci dessus .

Article	Prix à l'unité	Quantité	Montant
Coca-cola	F / litre	litres	
Chips	F / kg	kg	
Yaourts	F / kg	kg	
Compote	F / kg	kg	
Liquide-vaisselle	F / litre	litres	
Jus d'orange	F / litre	litres	
Céréales	F / kg	kg	
Pains grillés	F / kg	kg	
Confiture	F / kg	kg	
		TOTAL	

Voici un extrait d'un catalogue.

LA REALISATION DU JARDIN

LES GAZONS

Gazon rustique
implantation rapide
sur tous les terrains.
Pour 600 m²

Gazon mini Green
Composé de variétés
fines utilisées par les
professionnels pour
les greens de golf.
Pour 25 m²

Gazon terrains de jeux
Résiste au piètinement
et à l'arrachement.
Implantation rapide
et dense. Pour 105 m²

Gazon anglais
levée et implantation
rapide. Pour 75 m²

Calculez pour chaque type de gazon*, le prix de revient pour ensemencer un terrain de :

a) 5m x 10m

b) 10m x 30 m

c) 50m x 100m

Reportez vos résultats dans le tableau ci-dessous

		Gazons			
	Aire	**rustique**	**mini Green**	**terrains de jeux**	**anglais**
a)					
b)					
c)					

*Attention: il est obligatoire d'acheter des paquets entiers.

Un marchand de pizzas a fait ses courses .

Retrouvez tous les nombres qui manquent dans sa facture

ARTICLE	PRIX UNITAIRE		QUANTITE		MONTANT
Farine	4,80 F	le kg		kg	115,20 F
Oeufs	11,80 F	la douzaine	12	douzaines	
Sucre		le kg	24	kg	96,00 F
Lait	2,35 F	le litre		litres	30,55 F
Fromage blanc	8,83 F	le kg		kg	132,45 F
Lard		le kg	4	kg	105,28 F
Jambon	54,28 F	le kg		kg	217,12 F
Tomates	1,92 F	la boîte	47	boîtes	
Anchois		la boîte	21	boîtes	133,87 F
Viande	40,18 F	le kg		kg	441,98 F
Sel	5,31 F	la boîte	2	boîtes	
Poivre	9,10 F	la boîte		boîtes	9,10 F
Levure	1,05 F	le paquet	14	paquets	
Olives		le bocal	6	bocaux	35,82 F
Margarine	8,65 F	les 500g	11	kg	
Beurre	5,84 F	les 250 g	3	kg	
Gruyère		le kg	4	kg	
			TOTAL		1 980,93 F

D'après un examen CAP Commis de Restaurant

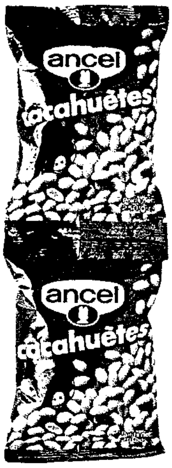
Complète la facture :

Quantité	Désignation	Prix	Montant
60	Verres 24 cl	1,60	96,00
	Verres 18 cl	1,40	84,00
60	Flûtes		120,00
	Dégustation	3,20	153,60
36	Bols	1,69	
	Carafes 0,25 l	0,83	29,88
5 dz	Couverts à poisson unis, la douzaine	54,15	270,75
5 dz	Couteaux à dessert unis, la douzaine		145,00
4 dz	Fourchettes unies, la douzaine	20,55	
	Louches	7,90	31,60
	Carton bloc commande	71,65	71,65
6	Napperons dentelle ronds, diamètre 23		47,70
6	Napperons ovales 35/25	17,00	

Total :

LE LOT DE 2

CACAHUETES
SALEES ANCEL
2 x 250 g.
Soit le kg : 19,20 F



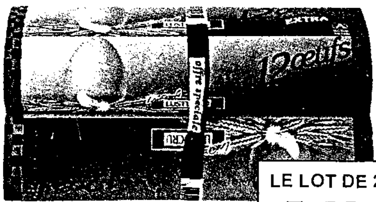
MINI ROSETTE
AUVERGNE

Soit le kg : 55 F

22F

PATES PANZANI
Spaghetti, coquillettes
ou macaronis, 1,5 kg.
Soit le kg :

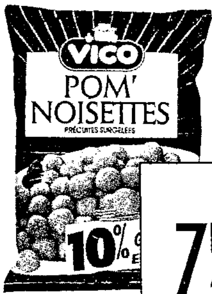
7F95



LE LOT DE 2

16F95

ŒUFS LUSTUCRU
Extra-frais, calibre 55/60.
2 x 12 œufs.
Soit l'oeuf :



7F45

POM'NOISETTES
SURGELEES VICO
1,100 kg.
Soit le kg :

PIZZA ROYALE
SURGELEE

Cuite sur pierre,
Soit le kg : 32,33 F

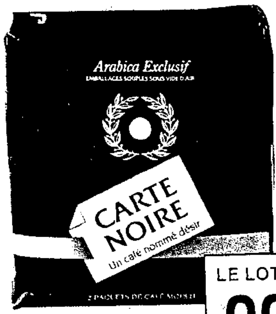
13F90

Article	Prix à l'unité	Quantité	Montant
Cacahuétes	F / kg	kg	F
Saucisson	F / kg	kg	F
Pâtes	F / kg	kg	F
Oeufs	F / oeuf		F
Pom'noisettes	F / kg	kg	F
Pizza	F / kg	kg	F
		TOTAL	

12 F 25

CHAUSSEE AUX MOINES 50% M.G.
340 g.
Soit le kg :

DANONE ET FRUITS DANONE
16 x 125 g.
Soit le kg : 9,90 F



CAFE MOULU CARTE NOIRE
Pur arabica, 2 x 250 g.
Soit le kg :

LE LOT DE 2
28 F 40

14 F

PETITS PAINS « DOUX LAIT » GAELIC
Pur beurre,
aux œufs extra-frais,

Soit le kg : 24,14 F

57 F

LESSIVE POUDRE X•TRA

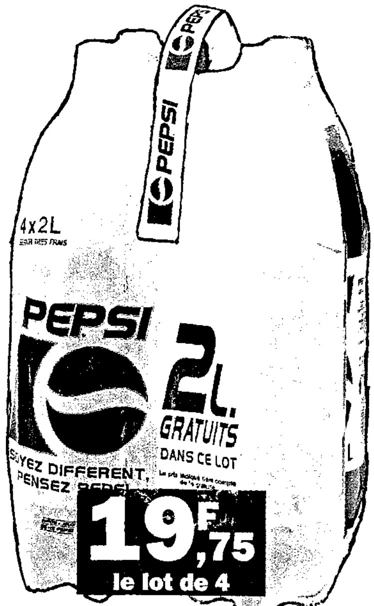
Soit le kg : 6,34 F

LE LOT DE 6
39 F 50

PATEE POUR CHIENS VIFF

Au bœuf et légumes.
6 x 1,220 kg.
Soit le kg :

Article	Prix à l'unité	Quantité	Montant
Fromage	F / kg	kg	F
Yaourts	F / kg	kg	F
Café	F / kg	kg	F
Petits pains	F / kg	kg	F
Lessive	F / kg	kg	F
Patée pour chiens	F / kg	kg	F
		TOTAL	



PEPSI COLA
le lot de 4 bouteilles de 2 litres

PEPSI COLA
6 x 1,5 L.

Quelle est la boisson la moins chère ? Indiquez vos calculs.

Liquide vaisselle "Rex" citron
les 2 flacons de 1250 ml

LIQUIDE VAISSELLE "REX"
Citron
le lot de 2 flacons de 750 ml

12F30

Quel est le liquide vaisselle le moins cher ?

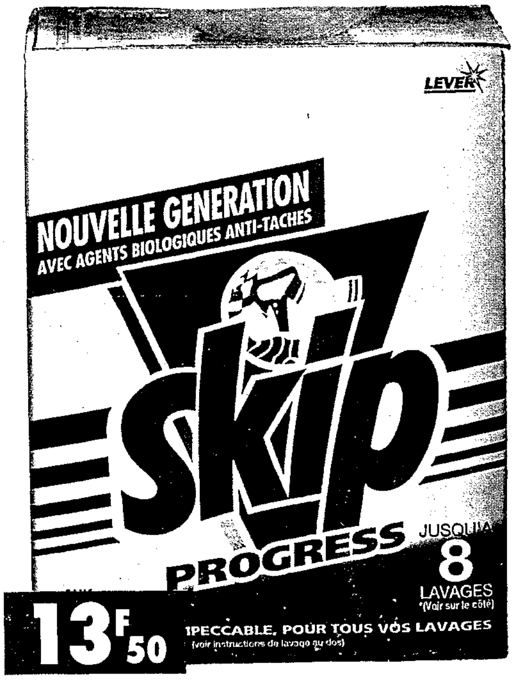
LE LOT DE 4
11F80

MAIS GEANT VERT
4 x 140 g.

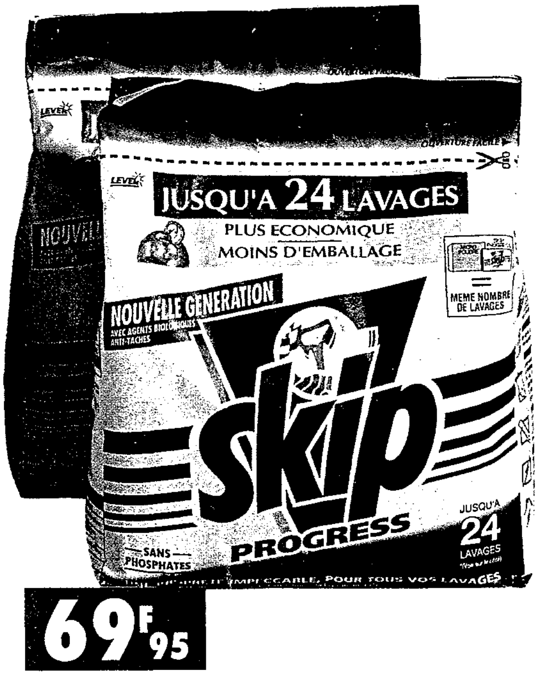
LE LOT DE 3
13F80

MAIS GEANT VERT
3 x 285 g.

Quel est le maïs le moins cher ? Indiquez vos calculs.



Lessive poudre "Skip" Progress
le paquet de 600 g



Lessive poudre "Skip" Progress
les 2 éco-recharges de 1,7 kg

Quelle est la lessive la moins chère ? Indiquez vos calculs.

LES VITESSES ($5^{ème}$)

Pourquoi travailler sur le thème des vitesses ?

Les problèmes de trains qui se croisent, tout comme les problèmes de baignoires et de robinets, sont des exercices types pour qui veut caricaturer l'activité mathématique. Peut-être est-ce là l'une des causes d'une certaine désaffection de beaucoup d'enseignants pour les problèmes de vitesses.

D'après les projets de programmes pour le cycle central, on pourra exiger :

- de l'élève de $5^{ème}$, qu'il sache

  - reconnaître un mouvement uniforme à la proportionnalité entre temps et distance parcourue

  - utiliser cette proportionnalité

- de l'élève de $4^{ème}$, qu'il sache

  - utiliser la relation $d = v \times t$ pour calculer d, v ou t

  - changer l'unité d'une grandeur quotient courante (une vitesse notamment).

Néanmoins de nombreux enseignants traitent les problèmes relatifs aux vitesses avec précipitation.

Travailler sur le thème des vitesses peut pourtant être intéressant à plus d'un titre.

- On ne peut nier qu'il s'agit là de situations complexes, en effet:

  - les grandeurs proportionnelles sont différentes

  - le coefficient de proportionnalité est une grandeur quotient.

N'oublions pas que la vitesse est l'une des premières grandeurs quotients rencontrée par les élèves et gageons qu'il n'est guère raisonnable ni vraiment utile de présenter d'emblée la vitesse comme une grandeur quotient.

Par exemple dans le cas de l'exercice suivant :

« *Un coureur a parcouru 15 km en 75 minutes.*
Combien de temps a-t-il mis à parcourir 6 km ? »

On peut distinguer plusieurs types de procédures :

1) l'utilisation des valeurs unitaires.

a) la distance parcourue en 1 minute	15 km : 75 = 0,2 km
combien de minutes pour 6 km	6 : 0,2 = 30
b) le temps mis pour parcourir 1 km	75 min : 15 = 5 min
le temps mis pour parcourir 6 km	5 min x 6 = 30 min

2) l'utilisation de rapports de proportionnalité.

a) les rapports entiers, internes aux grandeurs.

	Distance km	Temps min	
	15	75	
: 15	1		: 15
x 6	6	?	x 6

$$\frac{75}{15}\text{x}6$$

	Distance km	Temps min	
	15	75	
x 6	90		x 6
: 15	6	?	: 15

$$\frac{75\text{x}6}{15}$$

b) un rapport décimal direct, interne aux grandeurs.

	Distance km	Temps min	
	15	75	
: 2,5	6	?	: 2,5

$$75 : \frac{15}{6}$$

	Distance km	Temps min	
	15	75	
x 0,4	6	?	x 0,4

$$75\text{x}\frac{6}{15}$$

c) les coefficients de proportionnalité.

Distance km		Temps min
15	$\xrightarrow{\text{x } 5}$	75
6	$\xrightarrow{\text{x } 5}$	?

$$6\text{x}\frac{75}{15}$$

Distance km		Temps min
15	$\xrightarrow{:\ 0,2}$	75
6	$\xrightarrow{:\ 0,2}$	?

$$6:\frac{15}{75}$$

3) l'utilisation des grandeurs quotients.

$$\text{vitesse} = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \frac{15 \text{ km}}{75 \text{ min}} = 0{,}2 \text{ km / min}$$

$$\text{temps} = \frac{\text{distance}}{\text{vitesse}} = \frac{6 \text{ km}}{0{,}2 \text{ km / min}} = 30 \text{ min}$$

On peut observer que le recours aux grandeurs quotients requiert à la fois la connaissance de formules et certaines compétences en calcul algébrique. L'utilisation de telles procédures n'est pas un objectif à court terme.
On peut cependant proposer des situations assez familières aux élèves et tirer parti de l'enthousiasme et de l'intérêt qu'ils montrent pour le sujet. Ils connaissent déjà les grandeurs qui entrent en jeu : distance et temps.
Il faut toutefois se montrer prudent en raison des difficultés rencontrées par les élèves dans la manipulation des unités de temps; le choix des nombres aura une incidence certaine sur la réussite, il ne s'agit pas de rechercher les prouesses techniques.

- Au début de l'étude de la proportionnalité les élèves marquent une nette préférence pour l'utilisation des propriétés de linéarité, le rapport interne aux grandeurs est privilégié car il a du sens; sur le thème des vitesses, le rapport « externe » peut prendre assez vite du sens du fait qu'il est familier.

- On sait par ailleurs que la présentation d'une même situation dans plusieurs cadres, favorise l'apprentissage. Les situations où le changement de cadre n'est pas artificiel, ne sont pas si nombreuses. Dans le cas des vitesses, le passage du cadre des grandeurs au cadre graphique (et inversement) est tout à fait naturel.

- La démarche est également digne d'intérêt puisqu'il s'agit dans un premier temps, de modéliser un phénomène (mouvement uniforme), dans un deuxième temps, de définir un concept (lorsqu'il aura pris du sens pour les élèves): la vitesse moyenne.

Des interrogations demeurent :

- y aura-t-il réinvestissement dans d'autres situations de proportionnalité ?
(a priori, on peut penser que le réinvestissement se fera davantage au niveau des graphiques qu'au niveau des calculs.)

- Comment favoriser le réinvestissement ?
(sans doute en travaillant sur les représentations des problèmes.)

Quelles activités, en 5ème ?

Les objectifs.

Dans le cas de mouvements uniformes,

- calculer une vitesse moyenne
- utiliser la proportionnalité entre la durée du déplacement et la distance parcourue pour déterminer une distance ou une durée.

Les choix didactiques.

Nous avons décidé

- de nous appuyer dès le départ sur les représentations graphiques.
Ces représentations graphiques sont simples mais variées. Parfois, elles représentent la distance parcourue en fonction du temps, le plus souvent, elles permettent de repérer la position des mobiles par rapport à un lieu à un instant donné.

- de laisser une large place au calcul mental en évitant autant que possible les difficultés calculatoires.
- de nous limiter, avant la première synthèse, à des situations très familières : déplacements à vélo par exemple. Nous avons proscrit les exercices sur la vitesse de la lumière ainsi que les exercices faisant intervenir des unités peu usuelles comme le mille marin ou le noeud.
- de présenter la vitesse comme la distance parcourue en une unité de temps plutôt que comme une grandeur quotient. L'objectif visé n'est pas d'introduire des formules à tout prix.
- de n'imposer aucune méthode pour la résolution des problèmes et en particulier de ne pas privilégier l'utilisation de formules.

Les phases de la séquence, les activités.

Ces choix didactiques nous ont guidés pour sélectionner les activités présentées ci-dessous, pour déterminer l'ordre dans lequel les activités sont proposées aux élèves et pour découper la séquence en plusieurs phases.

Plan de la séquence

- 1ère phase : des activités pour faire un état des lieux et quelques mises au point.

  activité 1 : le radar

  activité 2 : graphique et récit

- 2ème phase : des activités pour apprendre.

  activité 1 : la balade à vélo

  activité 2 : le cyclomoteur et la voiture

  activité 3 : vitesse moyenne horaire et distance parcourue en un temps donné

  activité 4 : les mobiles (distance, vitesse et temps)

  première synthèse

- 3ème phase : exercices d'entraînement.

  quelques problèmes de divers types

  deuxième synthèse

- 4ème phase : exercice de réinvestissement

  résoudre un problème à l'aide d'un graphique et en faisant des calculs

- 5ème phase : l'évaluation

1[ère] phase: *Des activités pour faire un état des lieux et quelques mises au point.*
(durée : 30 minutes environ)

activité 1

LE RADAR
Le radar de la Gendarmerie a surpris M. Martin à 110 km/h sur une route où la vitesse est limitée à 90 km/h. M. Martin proteste : *« Votre radar ne fonctionne pas bien car je viens de parcourir 140 km en deux heures, ma vitesse est donc de 70 km/h. »*
Imaginer la réponse du gendarme.

Objectif : Savoir s'ils font une différence entre vitesses instantanée et moyenne ?

Commentaires : Cette activité peut être proposée en travail écrit, dans ce cas, une discussion à partir des réponses proposées par les élèves permet d'aboutir à la distinction entre vitesse instantanée et vitesse moyenne (ou régulière). On peut aussi, après quelques minutes de réflexion individuelle sur le texte, organiser un débat dans la classe.

La question est volontairement ouverte, les réponses obtenues sont donc très variées. En voici quelques exemples:

Exemple 1

vous pourriez varier de vitesse.

exemple 2

"Vous avez dû accélérer à la fin alors."

exemple 3

« Non, ça ne veut rien dire car vous pouvez très bien au debut aller doucement, et après aller plus vite.

Sur deux classes (50 élèves) , 17 élèves proposent une réponse satisfaisante.

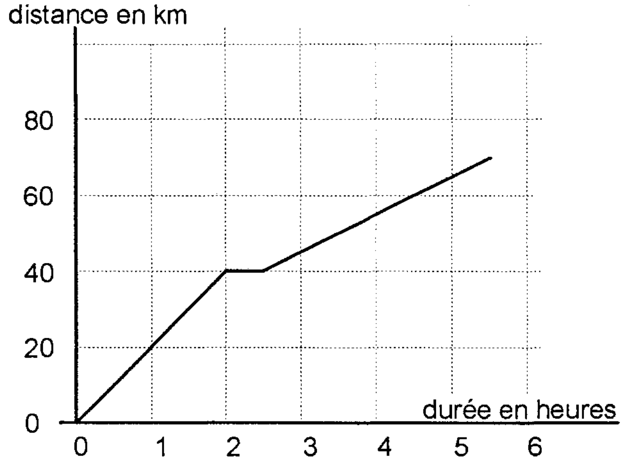
On peut noter que l'expression « vitesse moyenne » est rarement employée, de nombreux élèves parlent plutôt de « vitesse régulière ou de rythme régulier ».

La réponse la plus fréquente est du type de l'exemple 2 ci-dessus avec souvent une précision comme par exemple: 1 heure à 30 km/h, puis 1 heure à 110 km/h.

activité 2

Observe ce graphique.

Raconte une histoire qui correspond à ce graphique.



Objectifs :

- Savoir s'ils vont reconnaître dans ce graphique, la représentation du déplacement d'un mobile et de quelle sorte de mobile il s'agit ?
- Savoir s'ils vont repérer l'arrêt, le tronçon où la vitesse est la plus rapide ?
- Voir quel vocabulaire ils utilisent ?

Commentaires.

Première réaction : la consigne les surprend, ce n'est pas un exercice de mathématique habituel. Des élèves rechignent à écrire au départ.

Les réponses obtenues : malgré les difficultés d'expression de certains, les réponses, parfois partielles, sont correctes dans l'ensemble. Le type de mobile, qui est précisé par la moitié des élèves environ, est le plus souvent réaliste (cycliste).

Les textes relatent bien les points importants : la 1ère étape, l'arrêt, la 2ème étape. Souvent les élèves cherchent à justifier le ralentissement dans la dernière partie du trajet. Quelques rares élèves calculent la vitesse moyenne pour l'ensemble du trajet (la durée de l'arrêt étant ou non prise en compte).

Exemple 1

Cet homme à parcouru 50km en 5H30. En une heure il a fait 20kms. Pendant l'heure suivante il a gardé le même Rythme. Après cela il a fait une pause d'une demi heure, et il est reparti plus lentement. Il a fait le reste avec un Rythme de 10 km en une demi-heure.

Exemple 2

un cycliste est partie à vélo ce
matin. En une demi-heure il a
parcouru 10 Km 2 heures après son départ
il s'arrête pendant une demi-heure
et repart. Mais il ne parcoure que 30 Km
~~[illegible]~~ en ~~[illegible]~~ 3H ...

Exemple 3

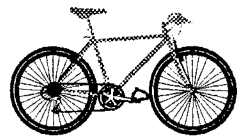
je pars a 13h00, je parcours 40 kms
en 2h00. puis Je m'arrête 1/2 heure pour
manger au bord de la route.
je repars donc à 15 h30 puis reparcours
30 kms pour arriver chez moi Il est donc 19h00
j'ai mis 3h 30 pour faire 30Kms en ayant
quelques petits problèmes techniques.

Conclusion : il apparaît que le graphique est un support à privilégier pour aborder les problèmes de déplacements de mobiles compte-tenu de l'intérêt des élèves et de leur réussite.

* débat dans la classe. Une discussion à propos de l'expression: « aller plus (moins) vite que ... » permet de clarifier les choses. On précise que l'on suppose les mouvements uniformes même si ce n'est pas le cas dans la réalité.

2ème phase: *Des activités pour apprendre.* (durée : 6 séances de 55 minutes)

activité 1



Une balade à vélo ....

Un cycliste part d'une ville A et se dirige vers une ville B, située à 15 km.
Il y arrive 30 minutes plus tard.
Il continue alors vers la ville C, située 9 km plus loin, où il arrive 30 minutes plus tard.
Il fait demi-tour et arrive en B au bout de 15 minutes.
Il s'y arrête 10 minutes et retourne en A en 50 minutes.

1°) 1ère étape : A $\rightarrow$ B

Complète le tableau ci-dessous

Temps	1 min	5 min	10 min	15 min	20 min	25 min	30 min	1 h
Distance								

2°) a) Quelle est sa vitesse moyenne pour cette étape ? V =

b) Détermine la vitesse pour chacune des autres étapes.

B $\rightarrow$ C V =

C $\rightarrow$ B V =

B $\rightarrow$ A V =

3°) Représente graphiquement ce voyage sur une feuille de papier millimétrée
(6 cm pour 1 h ; 1 cm pour 1 km)

*Objectifs :*Préciser la notion de vitesse. Comment exprime-t-on une vitesse ?
Distinguer une expression « descriptive » de la vitesse (par exemple: 15 km en 30 min) de l'expression conventionnelle de la vitesse (par exemple : 30 km/h).
Prendre conscience qu'il n'est pas nécessaire de rouler pendant une heure pour faire du 30 km/h.
Préciser quelles sont les unités usuelles de vitesse (ce ne seront pas les mêmes pour un escargot et pour une formule 1).

Commentaires.

Question 1. La plupart des élèves commencent par la colonne 30 min; dans le cas contraire, quelques erreurs parfois mais ces erreurs sont vite corrigées.

De très rares élèves indiquent 24 km dans la colonne 1h (qui correspond à 15 km en 30 min puis 9 km en 30 min). Quelques élèves reconnaissent un tableau de proportionnalité, la progression (+ 5 min $\rightarrow$ + 2,5 km) est assez largement utilisée.

Question 2-a. La grande majorité des élèves utilise le tableau réalisé précédemment; les autres font un calcul, le plus souvent correct, et ne voient pas de rapport avec le tableau. Les réponses données le sont souvent sous forme « descriptive », par exemple : 1 km toutes les 2 min ou encore 15 km en 30 min. Après discussion, on décide de fournir les réponses en km/h ou en km/min ou en m/min.

Question 2-b. Les élèves peuvent avoir l'idée de construire un tableau comparable à celui de la question 1, en fait assez peu le font.

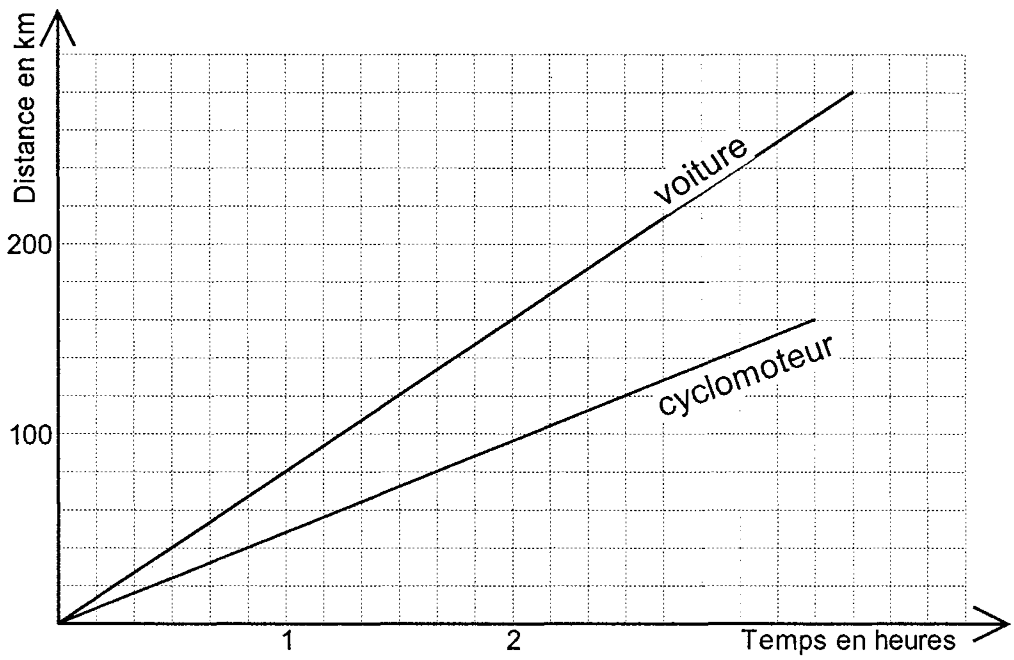
Le calcul de V_{BA} est assez ardu car 50 min ne représentent pas une fraction simple d'heure. Les deux procédures le plus souvent utilisées sont :

1) en 5 min, il parcourt: 15 : 10 = 1,5 km;
   en 30 min, il parcourt: 1,5 x 6 = 9 km;
   en 1 h, il parcourt: 9 x 2 = 18 km donc 18 km/h
2) en 1 min, il parcourt: 15 : 50 = 0,3 km
   en 60 min, il parcourt: 0,3 x 60 = 18 km donc 18 km/h

Question 3. La construction du graphique est plus ou moins aisée, cela dépend essentiellement de la pratique des élèves dans ce domaine. Une difficulté subsiste cependant, comment faire apparaître que le cycliste fait demi-tour ? Sur l'axe des ordonnées, on n'indique pas la distance parcourue mais la distance en km à partir de A.

activité 2

Utilisez le graphique pour répondre aux questions (indiquez vos réponses sur le graphique).



1. Combien de temps a roulé le cyclomoteur ?
2. Quelle distance totale a parcourue la voiture ?
3. Quelle est l'avance de la voiture au bout de 2 h 30 min de trajet ?
4. Combien de temps le cyclomoteur met-il de plus que la voiture pour faire 160 km ?
5. Quelle est la vitesse de la voiture ?
6. Quelle est la vitesse du cyclomoteur ?

Objectif : Savoir lire un graphique.

- lecture après projection d'un point de la courbe sur l'un des axes (q. 1 & 2)
- lecture « entre les deux courbes » (q. 3 & 4)
- lecture directe de la vitesse moyenne horaire (q. 5)
- lecture au niveau d'un noeud du quadrillage pour améliorer la précision de la réponse, même si cela nécessite un calcul simple (q. 6).

Commentaire : la réussite est très bonne.

activité 3

	Distance parcourue en				
Vitesse	**1 h**	**30 min**	**15 min**	**1 h 30 min**	**45 min**
88 km/h					
	100 km				
		60 km			
			31 km		
				45 km	
					30 km

	Distance parcourue en				
Vitesse	**1 h**	**20 min**	**10 min**	**1 h 20 min**	**40 min**
84 km/h					
	120 km				
		60 km			
			31 km		
				40 km	
					30 km

Objectifs : - calculer mentalement

- renforcer le résultat déjà mis en évidence :

vitesse en km/h = distance en km parcourue en 1 heure.

Commentaires : les calculs sont simples et peuvent être faits mentalement.

Certains ont un peu plus de difficultés pour le deuxième tableau, en effet les fractions d'heure sont moins simples.

L'égalité entre vitesse en km/h et distance en km parcourue en une heure doit apparaître.

activité 4: les mobiles

1) Ecris un texte de problème correspondant aux lignes 1, 2 et 3 du tableau ci-dessous.

2) Complète le tableau.

Véhicule	Distance	Temps	Vitesse
piéton	km	3 h	15 km/h
moto	360 km		120 km/h
voiture	180 km	2 h	km/h
train	80 km		160 km/h
car	km	3 h 15 min	80 km/h
vélomoteur	75 km	1 h 30 min	km/h
vélo	km	45 min	20 km/h
bateau	5 km		15 km/h
avion	3 000 km	40 min	km/h

Objectifs : - Ecrire un texte de problème à partir de données figurant dans un tableau.
- Calculer une distance, une durée, une vitesse.

Commentaires : la réussite est correcte.
Les erreurs sont plus nombreuses lorsqu'il s'agit de trouver une durée.
Les erreurs conduisant à des résultats aberrants ne sont pas toujours détectées.

Première synthèse.

Nous mettons l'accent sur les points suivants :

- « Un mobile se déplace à 30 km/h » *cela signifie* « en 1 heure la distance parcourue est 30 km ».
- La vitesse moyenne d'un mobile correspond à la distance parcourue pendant chaque unité de temps en supposant qu'il se déplace à vitesse régulière.
- Les unités usuelles pour exprimer une vitesse sont le km/h, le km/min, le m/min, le m/s. Il convient d'adapter l'unité à la situation pour que le résultat soit « parlant ».

Certains élèves auront probablement observé dans les tableaux une des trois relations :

$$d = v \times t \qquad v = \frac{d}{t} \qquad t = \frac{d}{v}$$

Une formalisation précoce n'est pas souhaitable. Il n'y a pas d'exigence immédiate concernant la connaissance et l'utilisation de ces formules, il s'agit de s'en imprégner progressivement. Il est cependant possible de noter en toutes lettres la première formule *distance = vitesse* x *temps* pour préparer son utilisation future en quatrième.

Il n'est par contre pas souhaitable d'utiliser les autres formules en cinquième (même la deuxième qui figurait pourtant dans le programme antérieur de la classe de cinquième).

En effet, elles cumulent les difficultés liées à la manipulation des grandeurs quotients et aux conversions des unités de temps.

3ème phase: *Exercices d'entraînement.*

quelques problèmes de divers types.

1. L'orage. Le son se déplace d'un km toutes les 3 secondes. Au cours d'un orage, un éclair illumine le ciel, on entend le coup de tonnerre 12 secondes après.
A quelle distance se trouve l'orage ?

2. Qui a raison ?
Aurélie : « *mon car met 10 minutes pour faire 9 km* »
Mickaël : « *le mien est plus rapide car il met 15 minutes pour faire 13 km* »
Mickaël a-t-il raison ?

3. Un cycliste parcourt 2 km en 5 minutes; quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?

4. Mario traverse un village de 500 mètres en 50 secondes.
La vitesse est limitée à 50 km/h. Mérite-t-il une contravention ?

5. Hugues court le 60 mètres en 10 secondes. Quelle est sa vitesse moyenne en km/h ?

6. En roulant toujours à la même vitesse, j'ai parcouru 84 km en 4 h donc en deux heures et demie j'ai parcouru .... km.

7. Un train roule toujours à la même vitesse. En 6 min il fait 9 km; en 10 min il fait 15 km. Combien parcourt-il :
a) en 16 min ? b) en 30 min ? c) en 55 min ?

8. A la vitesse de 78 km/h, j'ai parcouru 19,5 km en 15 min.
Quelle distance ai-je parcourue :
a) en trois heures et demie ? b) en 1 h 12 min ?

Objectifs : déterminer une distance, une durée, une vitesse dans des situations variées. Aucune méthode n'est imposée ni particulièrement attendue.

Commentaires et analyse de quelques problèmes :

Ces problèmes ont été faits en partie en classe et achevés à la maison.

Les diverses procédures mises en oeuvre sont présentées à la classe par les élèves eux-mêmes.

Toute liberté est laissée aux élèves pour la présentation des solutions, mais la rédaction doit permettre de comprendre aisément la démarche.

Lorsque certains élèves ne comprennent pas la démarche proposée par leurs pairs, on peut adopter une présentation avec des « flèches » qui fait apparaître les correspondances entre distances parcourues et durées. Par exemple, pour le problème 3 :

durée		distance
5 min	$\longrightarrow$	2 km
1 h = 60 min	$\longrightarrow$	?

Le cycliste parcourt .... km en 1 heure, sa vitesse est .... km/h.

Cette présentation permet :

- de privilégier le raisonnement sur les grandeurs et non sur les nombres (souvent, les élèves en difficulté combinent les données numériques du problème sans y mettre de sens et sans réagir face à un résultat invraisemblable)
- aux élèves en difficulté de disposer de repères et de se raccrocher à un « modèle »
- à une majorité d'élèves de percevoir une certaine unité dans tous ces problèmes, aussi bien pour la représentation que pour les modes de traitement.

Analyse des procédures et des réussites dans une classe de $5^{ème}$ (21 élèves présents)

Problème 2. Le texte de cet exercice a été mal compris par certains.

Réponse : Mickaël a tort (13 réussites)

*. *1 élève*
Aurélie : 9 km : 2 = 4,5 km en 5 min
Mickaël : 13 km : 3 ≈ 4,3 km en 5 min

* *1 élève*
Aurélie : 4,5 km en 5 min donc 3 x 4,5 km = 13,5 km en 15 min

* *1 élève*
Aurélie : 9 km : 10 = 0,9 km en 1 min
Mickaël : 13 km : 15 ≈ 0,86 km en 1 min

* *10 élèves*
Aurélie : 9 km en 10 min donc 9 x 6 = 54 km en 1 h
Mickaël : 13 km en 15 min donc 13 x 4 = 52 km en 1 h.

à noter aussi :

* Aurélie : 10 : 9 ≈ 1,11
Mickaël : 15 : 13 ≈ 1,15 donc Mickaël a raison.

* Aurélie : 10 : 9 ≈ 1,11 donc 1 min 11 s pour faire 1 km
Mickaël : 15 : 13 ≈ 1,15 donc 1 min 15 s pour faire 1 km d'où Mickaël a tort.

Problème 7.

a) 10 min + 6 min = 16 min donc 15 km + 9 km = 24 km. (*14 élèves*)

9 km en 6 min donc 3 km en 2 min et 3 km x 8 = 24 km en 16 min. (*1 élève*)

b) 10 min x 3 = 30 min donc 15 km x 3 = 45 km en 30 min. (*19 élèves*)

c) 15 km en 10 min donc 15 km : 2 = 7,5 km en 5 min et 7,5 km x 11 = 82,5 km en 55 min. (*8 élèves*)

15 km en 10 min donc 15 km : 2 = 7,5 km en 5 min d'où
15 km x 5 + 7,5 km = 82,5 km en 55 min.(*3 élèves*)

15 km en 10 min donc 15 km x 6 = 90 km en 60 min et 90 km : 12 = 7,5 km en 5 min d'où 90 km - 7,5 km = 82,5 km en 55 min. (*1 élève*)

Deuxième synthèse.

Les élèves notent sur le cahier la solution de problèmes simples.

La présentation suggérée est la suivante :

1. Calcul d'une distance.

Un piéton marche à la vitesse régulière de 4,5 km/h. Combien parcourt-il en 3 h 30 min ?

durée		distance
1 h = 60 min	⟶	4,5 km
....	⟶	....
3 h 30 min = 210 min	⟶	15,75 km

(Remarque : sur les pointillés, certains auront écrit 30 min et 2,25 km, d'autres 1 min et 0,075 km ou 75 m, ...)

2. Calcul d'une vitesse.

3. Calcul d'une durée.

4ème phase: *Exercice de réinvestissement (résoudre un problème à l'aide d'un graphique et en faisant des calculs) .*

Les deux cyclistes.
Deux coureurs cyclistes partent de la même ville le matin à 8 h 30 min. Ils empruntent la même route pour se rendre au même endroit.
Le premier roule à 36 km/h, il arrive à destination à 10 h 50 min.
Le deuxième cycliste roule à la vitesse de 30 km/h.

A. 1) Fais un graphique représentant le déplacement des deux cyclistes.

2) Par simple lecture de graphique, complète les phrases :
- la longueur du trajet est ....
- lorsque le premier cycliste arrive à destination, il a .... km d'avance sur le deuxième.
- le deuxième cycliste arrive à destination à ....

B. Retrouve les trois réponses précédentes en faisant des calculs. (Rédige clairement les solutions.)

Objectifs :

- Réaliser un graphique représentant le déplacement de mobiles à partir de la donnée de leur vitesse.
- Lire un graphique.
- Retrouver les réponses lues en faisant des calculs.

En guise de conclusion.

Durant les phases 2 et 3, il ne s'agit pas de chercher à uniformiser les procédures qui sont d'ailleurs multiples: procédures additives ou multiplicatives, utilisation d'une combinaison linéaire, passage à l'unité, règle de trois, calcul et/ou utilisation du coefficient de proportionnalité, utilisation de l'égalité des rapports (produit en croix), utilisation d'une représentation graphique.

Lors de la mise en commun, un débat sur la pertinence de certaines procédures et le caractère plus général des autres pourra avoir lieu. On notera en particulier l'efficacité de l'utilisation des propriétés de linéarité lorsque les données numériques s'y prêtent (un calcul, parfois mental, permet bien souvent de répondre à la question posée).

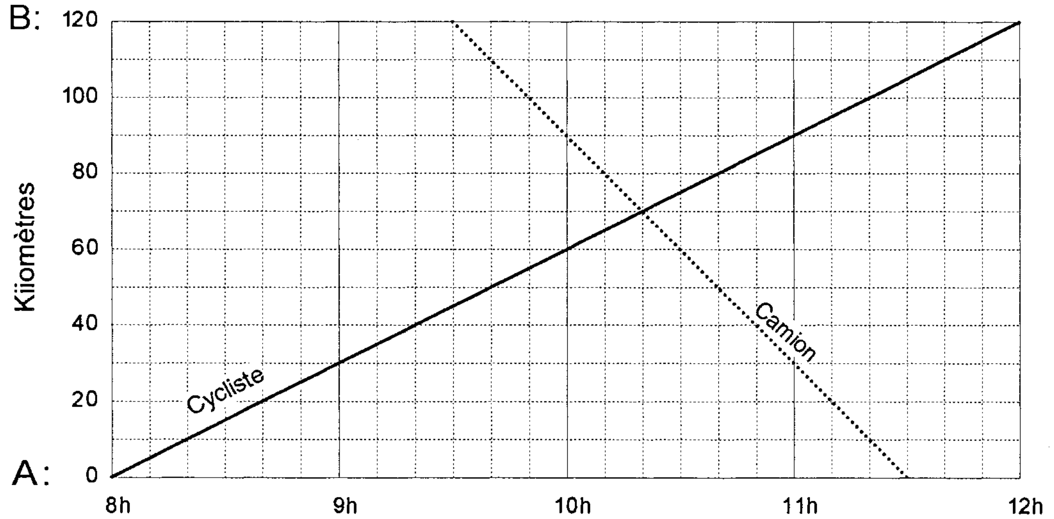
Il convient de ne pas avoir d'exigences prématurées, de ne pas oublier que « l'algorithmisation » - qui permet une résolution rapide et efficace - ne favorise pas la compréhension et que son efficacité optimale et surtout durable suppose une bonne compréhension préalable.

5ème phase : *L'évaluation.*

La première évaluation. Elle a été faite juste après la « leçon ».

Exercice 1

a) Utiliser le graphique pour compléter le texte.



Deux villes A et B sont situées à .... km l'une de l'autre.

Le cycliste part de A à .... , il roule à la vitesse de .... km/h ;

il arrive en B à ....

Un camion quitte B à .... , il roule à la vitesse de .... km/h.

Il croise le cycliste au bout de .... km, il est alors .... h .... min, il lui reste .... km à parcourir pour arriver en A où il arrivera à .... h .... min.

b) Une voiture part de A à 9 h et se dirige vers B à 90 km/h.

Représenter les mouvements de la voiture sur le graphique.

Exercice 2

a) La voiture a parcouru 300 km en 2 h 30 min. Calculer sa vitesse moyenne en km/h.

b) Le guépard parcourt 45 m en 2,5 s. Calculer sa vitesse moyenne en m/s, en km/h.

c) La mobylette roule à 30 km/h. En combien de minutes va-t-elle parcourir 24 km?

d) La vitesse du tracteur est de 1,6 m/s. Quelle distance parcourt-il en 3 minutes?

Résultats obtenus dans une classe de $5^{ème}$ (*26 élèves*).

Exercice 1.

- Lecture du graphique : excellente réussite.
- Compléter le graphique : parfait pour *14 élèves*.
  Pour les autres, des erreurs plus ou moins graves
  . la voiture ne part pas à 9 h (*3 élèves*)
  . la « pente » de la droite ne correspond pas à la vitesse de la voiture (« l'attraction » du point d'intersection des deux courbes déjà tracées est une cause d'erreur) (*7 élèves*)

Exercice 2.

Pour chaque problème, nous observons le même nombre de réponses fausses (6).

Nombre de problèmes réussis	4	3	2	1	0
Nombre d'élèves	13	4	5	1	3

Dans une autre classe de cinquième, le dernier exercice du devoir est le suivant:

Un cycliste part d'une ville A à 8 h, il roule à 24 km/h.

Un deuxième cycliste part de A à 8 h 30 et roule à une vitesse régulière sur la même route que le premier. Il le rattrape à 10 h.

a) A quelle distance de A se sont-ils rencontrés ?

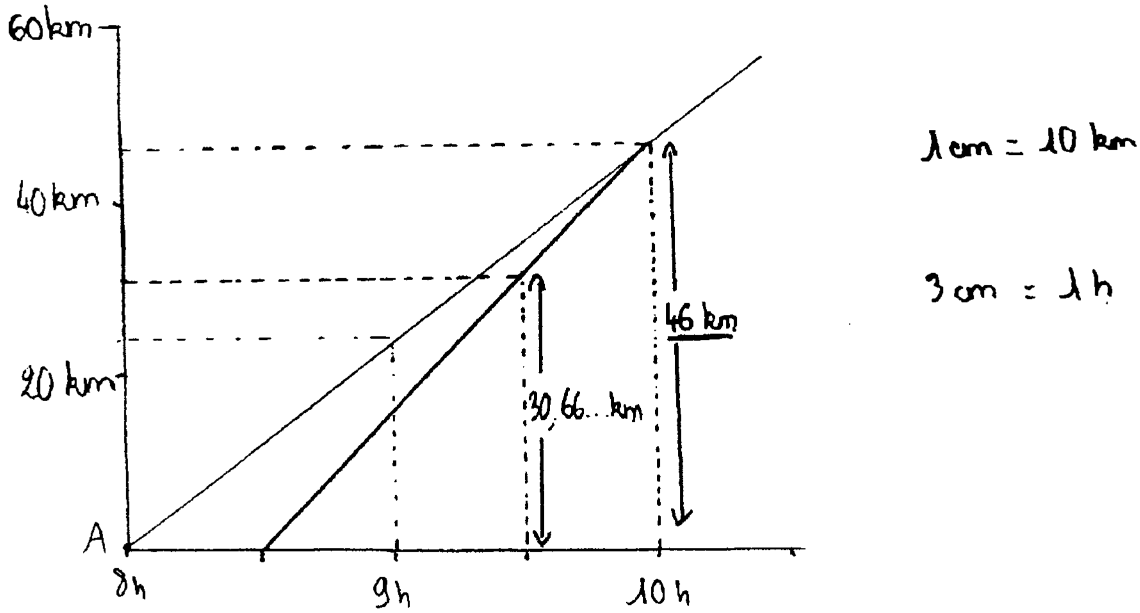
b) Quelle est la vitesse du second cycliste ?

Expliquer clairement vos calculs.

Pendant le devoir, quelques élèves demandent s'ils peuvent faire un graphique. L'enseignant indique que c'est permis. Un tiers des élèves de la classe a fait un graphique avant de se lancer dans les calculs.

On peut penser que la réalisation du graphique a permis une meilleure compréhension de la situation et une meilleure réussite.

Il arrive néanmoins que l'élève lise le graphique pour obtenir des renseignements ne figurant pas dans le texte, cela peut jouer de mauvais tours comme on peut le voir sur l'extrait de copie suivant :



Cet l'élève a parfaitement utilisé son graphique pour répondre aux deux questions.

Il s'est contenté d'une lecture imprécise pour la question a).

Il n'a bizarrement senti le besoin d'effectuer des calculs que pour la deuxième question, mais il a réutilisé la réponse approchée de la première.

Sur les travaux d'élèves présentés ci-dessous, on peut se rendre compte de la variété des procédures mises en oeuvre par les élèves.

Exemple1

Il le ratrape et part à 8h30 et retrouve l'autre 1h30 après donc à 10h où ils ont fait 48 km tous les deux

D (km)	T (min)
48	90
?	60
32	

:1,5 :1,5

$\frac{90}{60} = 1{,}5$

$\frac{48}{1{,}5} = 32$

Exemple 2

distance

48 km

:90

?

×60

32 km

temps

1h30 = 90 min

:90

1 min

×60

1h = 60 min

$V = \frac{48}{90} \times 60 = 32$ km/h

Exemple 3

$\left.\begin{array}{l} \\ :3 \\ \times 2 \end{array}\right.$ 48 km → 90 min

16 km → 30 min :3

32 km → 60 min ×2

Il fait du 32 km/h

Exemple 4

De 8h30 à 10h il y a 1h30 donc :

distance	Temps
48 km	1h30 ou 90 min
?	1h ou 60

× 1,875

$\frac{90}{48} \times 60 = 32$ km/h.

Exemple 5

	Distance	Temps	
:9 ×6	48 km	1heure30 (ou 90minutes)	:9 ×6
	32 km	1heure (ou 60minutes)	

La vitesse du dauvrène est de 32 km/h.

La deuxième évaluation. Elle a été faite 6 semaines après la « leçon ».

Une partie seulement de ce contrôle porte sur les vitesses; un autre exercice sur la proportionnalité est également proposé pour voir s'il y a ou non réinvestissement (ce devoir était un peu long et les comparaisons sont donc hasardeuses).

1. Un avion parcourt 48 km en 4 min. Quelle distance parcourt-il en 36 min ?

2. Un cycliste parcourt 36 km en 48 min. Quelle distance parcourt-il en 4 min ?

3. Un marcheur parcourt 4 km en 36 min. Quelle distance parcourt-il en 48 min ?

4. On dispose de trois récipients différents.
   a) Dans le premier, pour 75 cl de liquide, la hauteur de liquide est de 30 cm. Quelle est la hauteur de liquide pour 125 cl ?
   b) Dans le deuxième, pour 125 cl de liquide, la hauteur de liquide est de 75 cm. Quelle est la hauteur de liquide pour 30 cl ?
   c) Dans le dernier, pour 30 cl de liquide, la hauteur de liquide est de 125 cm. Quelle est la hauteur de liquide pour 75 cl ?

Les résultats dans une classe de $5^{\text{ème}}$ (25 élèves présents).

Exercice	1	2	3	4 a)	4 b)	4 c)
Nombre de réussites	22	18	12	12	8	7

Conclusion

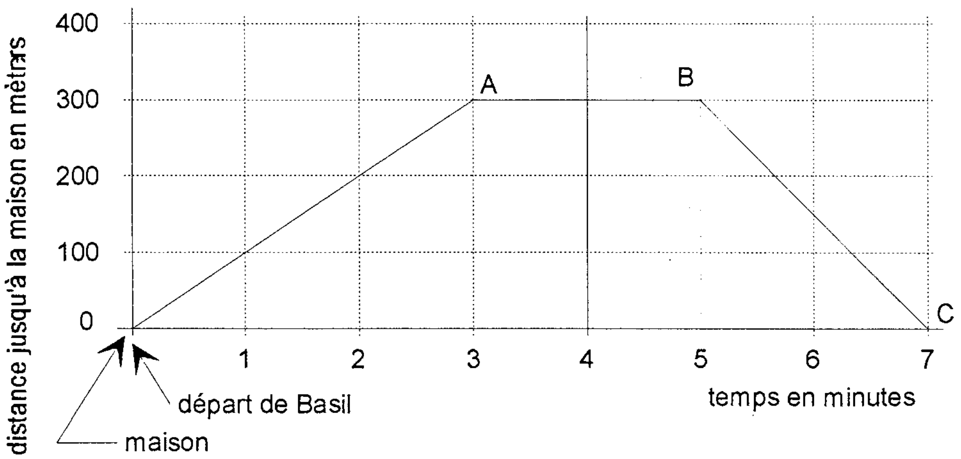
Il faut introduire avec prudence l'unique formule *distance* = *vitesse* x *temps* , on ne doit pas exiger que cette formule soit connue et utilisée, cela ne constitue pas un handicap car la plupart des élèves parviennent à résoudre les problèmes en utilisant des procédures variées.

Le travail sur les vitesses ne doit pas se cantonner à l'année de cinquième, nous vous proposons dans les pages suivantes deux exemples d'activités basées sur les graphiques pour les classes de sixième et quatrième. En effet le graphique favorise la compréhension de la situation et permet bien souvent de vérifier les résultats obtenus par le calcul.

Au niveau quatrième, les formules sont introduites prudemment en évitant au maximum les difficultés de conversion (par exemple en exprimant les vitesses en km/min).

Sixième

Basil va faire ses courses , ce graphique montre son voyage.



1. Basil met 3 minutes pour aller au magasin, quelle distance a-t-il parcourue pendant ce temps ?
2. Basil est-il encore au magasin 4 minutes après avoir quitté la maison ?
3. Que représente le segment [AB] du graphique ?
4. Que représente le segment [BC] du graphique ?
5. A-t-il mis plus de temps à aller au magasin ou à en revenir ?

Quatrième

Course à pieds sur 20 km.

Trois amis, Damien, Gaétan et Kévin participent à une course de fond.
Damien parcourt 2 km en 5 minutes, Kévin en 6 minutes. Gaétan parcourt 2,5 km en 8 minutes.

1) Pour chaque coureur, représenter graphiquement la distance parcourue en fonction de la durée, les vitesses sont considérées constantes.
2) En lisant sur le graphique, indique la distance parcourue par chacun, en 30 minutes.
3) En faisant des calculs, répond aux questions suivantes:
   - a) Quelle est la vitesse moyenne de chaque coureur ?
   - b) Damien a gagné la course.
     En combien de temps a-t-il parcouru le trajet long de 20 km ?
   - c) Kévin est arrivé second. Combien de temps est-il arrivé après Damien ?
   - d) Gaétan a dû abandonner 40 minutes après le départ.
     A quelle distance de l'arrivée se trouvait-il alors ?

ET ENCORE ...

... quatre séquences qui n'offrent pas moins d'intérêt à nos yeux mais pour lesquelles les expérimentations ont été moins systématiques.

Graduations, diagrammes et graphiques (sixième)

Les échelles (cinquième)

Les formats (troisième)

Le réservoir (troisième)

Graduations, diagrammes et graphiques

Dans la vie courante, diagrammes et graphiques en tous genres foisonnent dans les revues et les journaux. A l'école, dans bon nombre de disciplines (mathématique, sciences naturelles et physiques, histoire et géographie, technologie), les élèves réalisent ou utilisent des graphiques et ce, à des fins diverses : prouver, résoudre, vérifier, illustrer.

Les difficultés rencontrées par les élèves sont nombreuses et différentes suivant que l'on s'intéresse à l'aspect quantitatif ou qualitatif.

Ces difficultés peuvent porter sur

- la connaissance et l'utilisation d'un vocabulaire spécifique (variable, « en fonction de », abscisse, ordonnée, diagramme ..., histogramme, ...) ou de termes ayant un sens particulier lié au contexte (croissance, continu, ...)

- la lecture d'une graduation et plus généralement la lecture du graphique qui nécessite la reconnaissance des variables (l'une connue, l'autre étudiée) et la prise en compte des unités sur les axes

- la réalisation du graphique en utilisant de manière optimale le support : orientation du support (paysage ou portrait), mise en place des graduations sur les axes (ce choix doit permettre de couvrir les intervalles des valeurs mais aussi de placer avec facilité les points).

La proportionnalité intervient inévitablement pour la réalisation de diagrammes circulaires par exemple mais aussi pour la lecture et la réalisation de graphiques.

Il nous a donc semblé intéressant de proposer aux élèves de 6$^{\text{ème}}$ une séquence portant sur les graduations et leur utilisation dans les diagrammes et graphiques bien sûr mais aussi lors de la manipulation d'appareils de mesure munis de graduations.

Plan de la séquence

- 1$^{\text{ère}}$ phase : utiliser une graduation

  activité 1 : mesurer à l'aide d'une règle graduée

  activité 2 : nombres et graduations

  activité 3 : les éprouvettes graduées

  activité 4 : les graduations

  activité 5 : sur la droite graduée

- 2$^{\text{ème}}$ phase : diagrammes et graphiques.

  activité 1 : la masse de bébé

  activité 2 : les loisirs

  activité 3 : l'étiquette

  activité 4 : vacances

  activité 5 : le cycliste

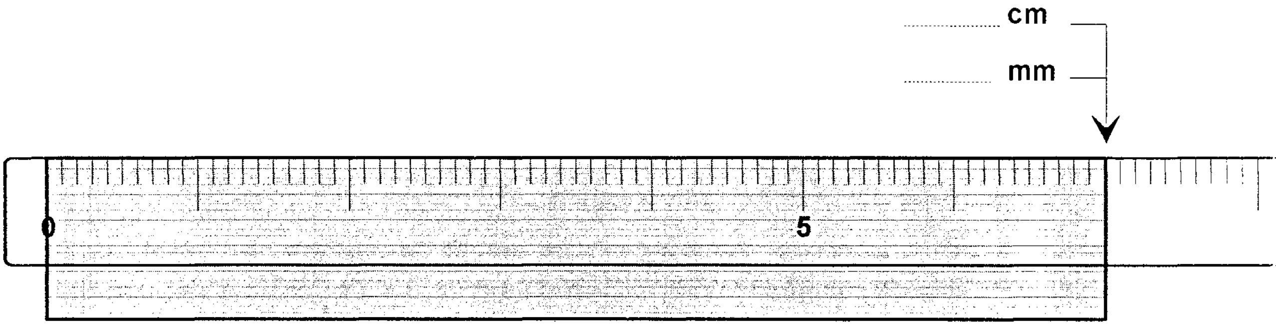
1ère phase *: utiliser une graduation*

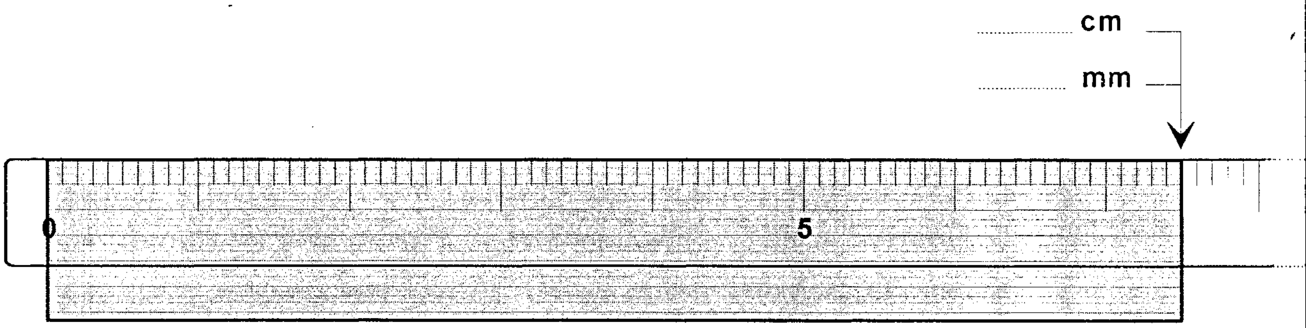
Activité 1. Mesurer à l'aide d'une règle graduée.

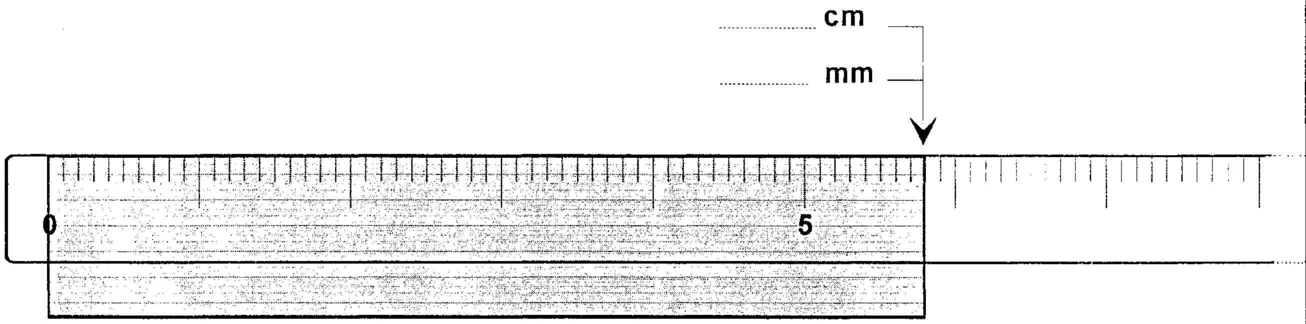
Avec une règle graduée en mm, on a mesuré des baguettes de bois.

Les dessins ci-dessous montrent comment la règle a été utilisée.

Pour chaque dessin, indique en mm puis en cm, la longueur de la baguette.





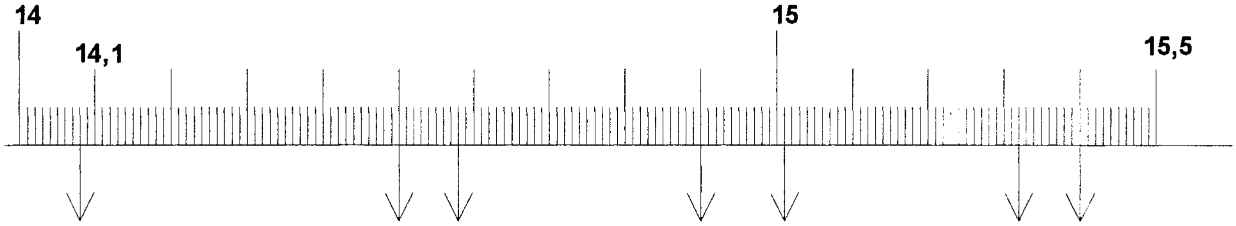


Commentaire :

Cette activité pourrait être (avantageusement ?) remplacée par des exercices de mesurage de longueurs, en utilisant des règles graduées en cm, en mm, voire en inch.

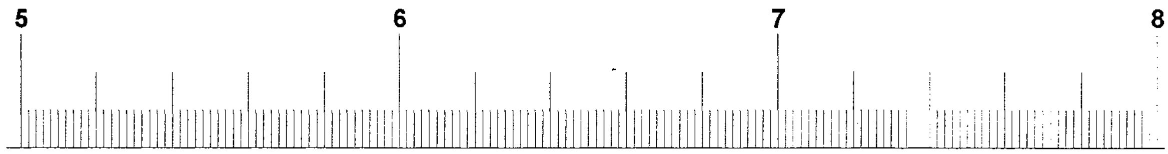
Activité 2. *graduations et nombres décimaux.*

1. Sur la graduation ci-dessous, à quels nombres correspondent les flèches ?



2. Sur la graduation suivante, place avec précision les nombres :

5,5 ; 6,8 ; 7,2 ; 7,4 ; 7,3 ; 7,34 ; 7,58 .



Commentaire :

Cette activité n'est pas sans rappeler certains exercices proposés lors de l'étude de la numération.

Dans l'exercice 2, une division ne correspond pas à un dixième de l'unité, cela gêne plusieurs élèves.

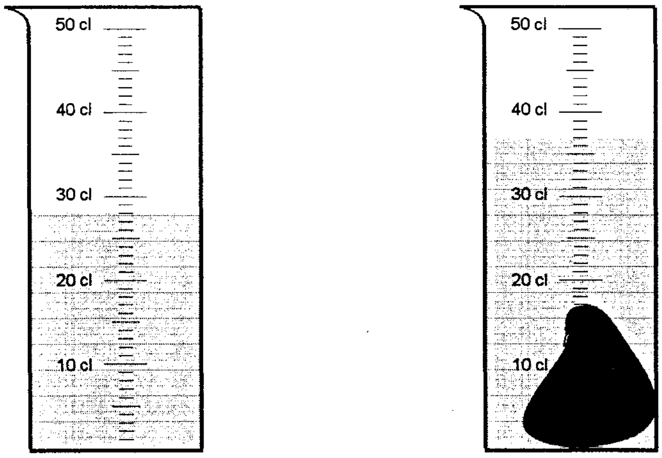
L'activité a permis d'introduire et d'utiliser le terme « abscisse ».

activité 3

LES ÉPROUVETTES GRADUÉES

Pour mesurer le volume d'un objet, on le plonge dans une éprouvette graduée.
Déterminez le volume de chacun des 3 objets suivants.

1°)

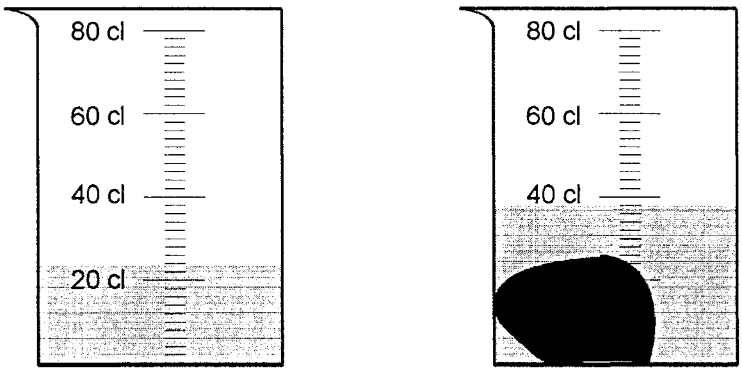


Volume initial =

Volume final =

Volume de l'objet =

2°)

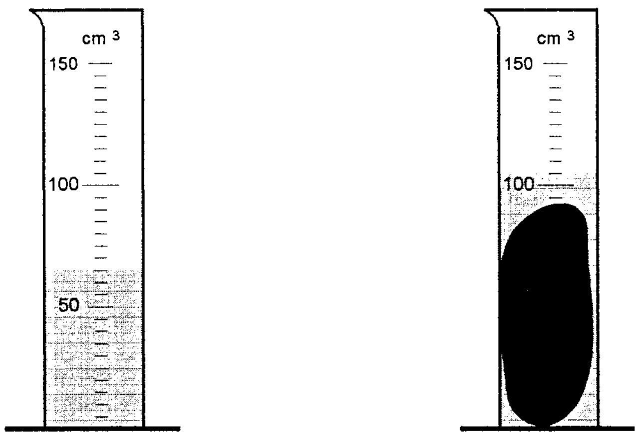


Volume initial =

Volume final =

Volume de l'objet =

3°)



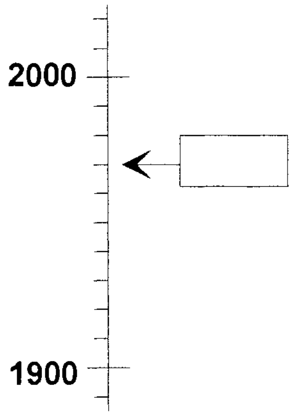
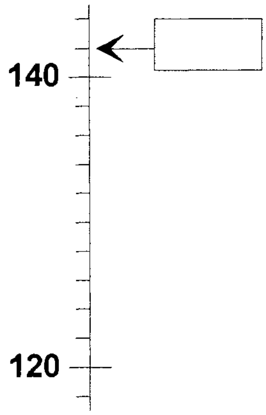
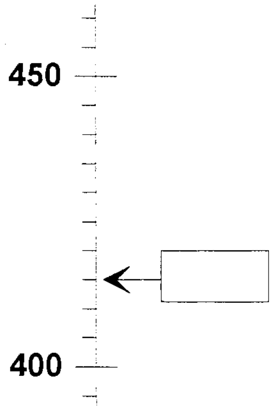
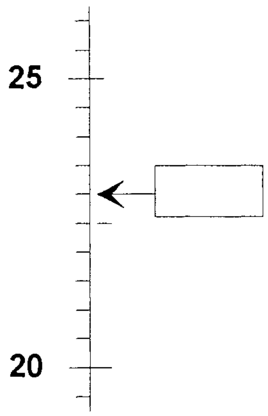
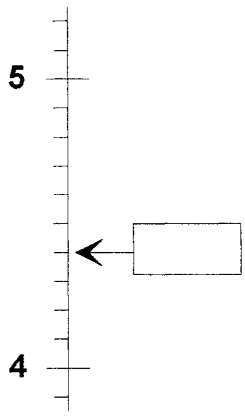
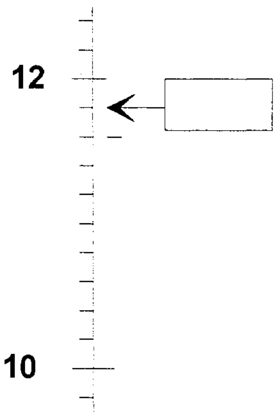
Volume initial =

Volume final =

Volume de l'objet =

Commentaire :
En sixième, les élèves sont actuellement privés d'enseignement des sciences physiques, en $4^{ème}$ on exigera d'eux qu'ils sachent lire les mesures faites à l'aide d'un ampèremètre par exemple et de jongler avec les calibres.

Activité 4.

Complète :		
 1 graduation = ... unités	 1 graduation = ... unités	 1 graduation = ... unités
 1 graduation = ... unités	 1 graduation = ... unités	 1 graduation = ... unités

Commentaires :

Certains lecteurs seront probablement choqués par l'utilisation impropre du terme « graduation » dans 1 graduation = unités. Nous l'avons choisi délibérément pour éviter le terme « division » qui pertube les élèves.

L'absence de la graduation « zéro » gêne certains élèves; l'activité 3 (les éprouvettes graduées) est nécessaire pour les préparer à l'absence de zéro.

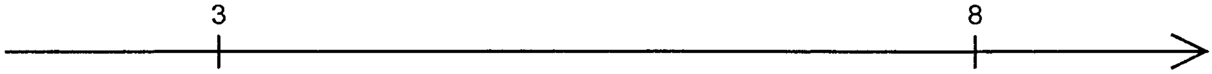
Pour déterminer le nombre d'unités associé à une division, le plus grand nombre d'élèves procède par tâtonnements. On doit se contenter de signaler une méthode de calcul, il n'y a pas à l'exiger.

Activité 5

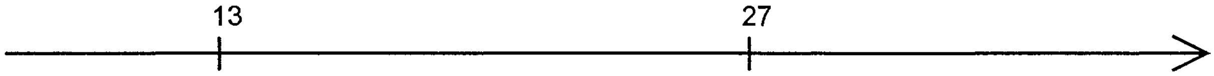
Exercice 1

Placez l'année 1700

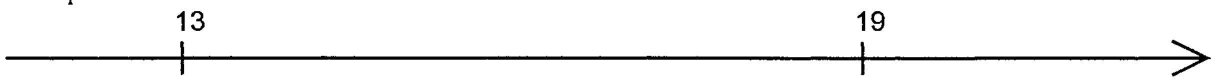
Placez le point d'abscisse 6



Placez le point d'abscisse 35

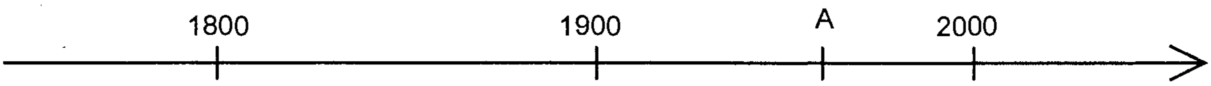


Placez le point d'abscisse 15



Exercice 2

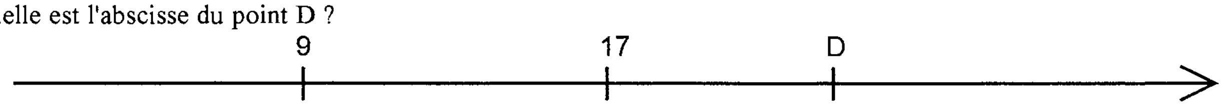
Quelle est l'année A ?



Quelle est l'abscisse du point B ?

Quelle est l'abscisse du point C ?

Quelle est l'abscisse du point D ?



Commentaire:

Ces exercices qui paraissent élémentaires posent problème à de nombreux élèves. Donner deux points, leur abscisse et une graduation incomplète n'est pas habituel.

La plupart des élèves graduent en centimètre l'intervalle entre les deux points donnés, cela leur permet de réussir en général.

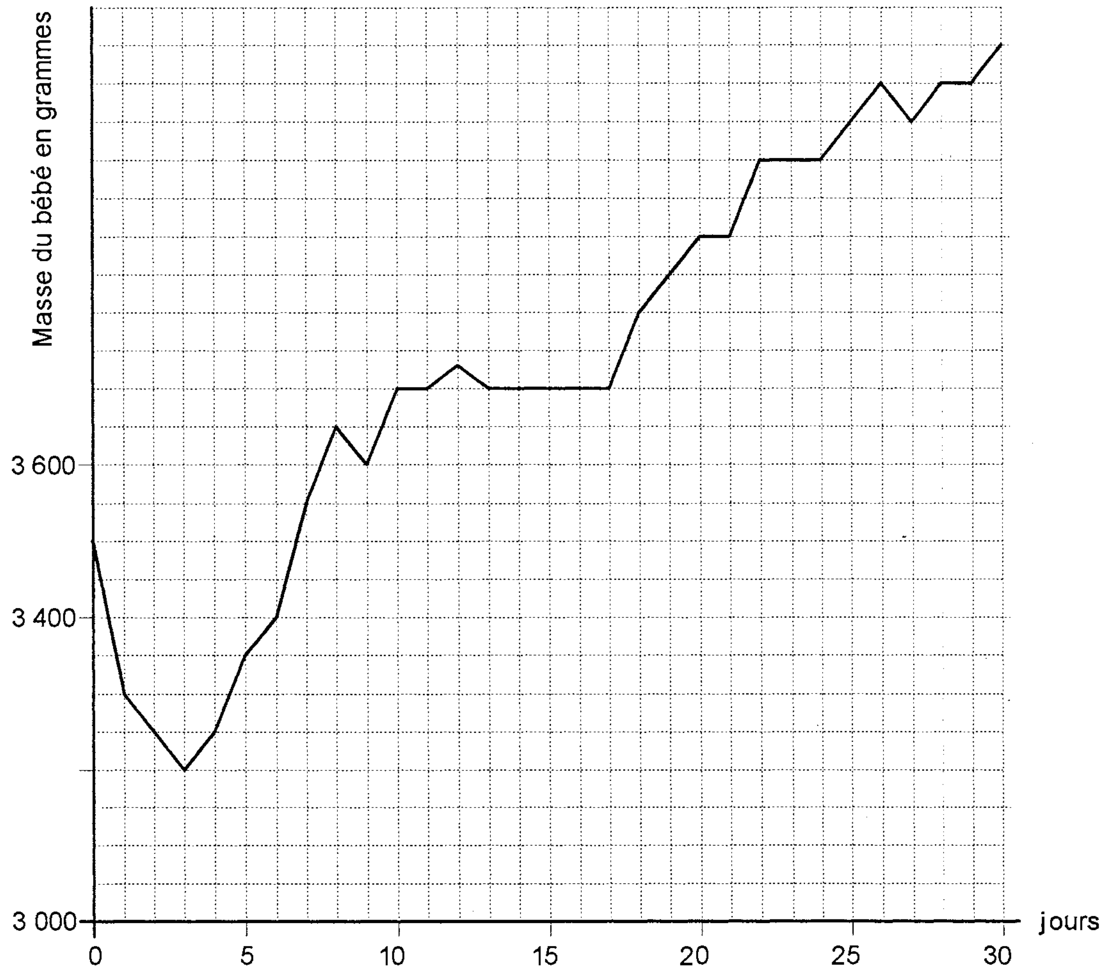
D'autres partagent le même intervalle en dix et n'aboutissent pas toujours.

C'est une minorité d'élèves qui calcule après avoir mis en correspondance la longueur mesurée entre les deux points donnés et l'amplitude de l'intervalle.

2ème phase : *diagrammes et graphiques.*

Activité 1. *La masse du bébé.*

Elise a fait un graphique à partir d'un tableau. Ce tableau donnait la masse d'un bébé mesurée chaque jour durant le premier mois suivant la naissance.
A la naissance (jour 0) le bébé pesait 3 500 g.



Utilise ce graphique pour compléter les phrases suivantes:

Le 30ème jour le bébé pèse	Le 23ème jour le bébé pèse ....
Le 12ème jour le bébé pèse	Le bébé pèse 3 725 g le ..... ^{ème} jour.
Le bébé pèse 3 800 g le ..... ^{ème} jour.	Que se passe-t-il entre le 13ème et le 17ème jour ?
Le 10ème jour le bébé pèse	

Commentaires :

A l'occasion de cet exercice, le vocabulaire « axe des abscisses, axe des ordonnées » a été précisé, en annotant le graphique.

La graduation incomplète sur l'axe des ordonnées n'a posé problème qu'à de très rares élèves.

En dehors de quelques erreurs de lecture (surtout pour les nombres se terminant par 25 ou 75), la réussite est bonne.

Activité 2.

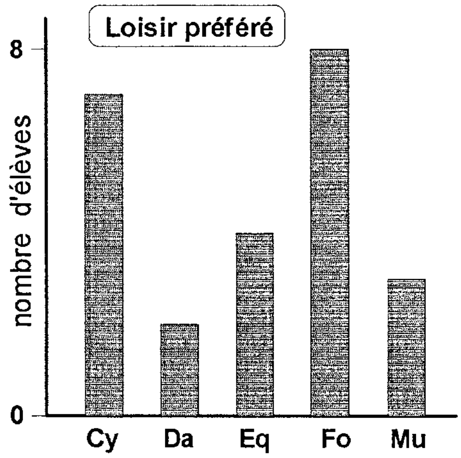
On a posé la question suivante aux élèves d'une classe de sixième :

« Quel est votre loisir préféré ? »

A partir des réponses, le diagramme suivant a été réalisé.

En utilisant ce diagramme, complète le tableau ci-dessous

Combien y a-t-il d'élèves dans cette classe ?



Loisir préféré	nombre d'élèves
cyclisme	
danse	
équitation	
football	
musique	

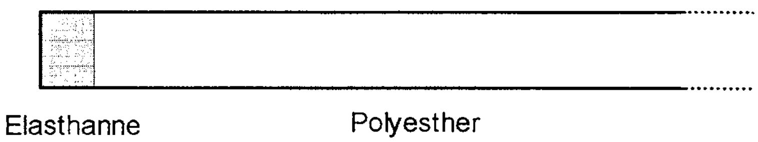
Commentaire :
L'élève doit, dans un premier temps, reconstituer la graduation. La lecture peut alors être faite, il n'y a guère de difficulté puisque les nombres sont petits et entiers.
La dernière question peut aider les élèves à réussir l'activité 4.

Activité 3.

Voici l'étiquette d'un pantalon,
elle indique la composition du tissu.

Elasthanne	5 %
Polyester	30 %
Coton	65 %

On a commencé un dessin représentant la composition du tissu, le rectangle de 7 mm de long correspond à l'élasthanne. Termine ce dessin.



Commentaire :
Cet exercice est bien réussi, il peut aider à la résolution de l'exercice de l'activité 4.

Activité 4.

Sondage

Mille personnes ont répondu à un sondage portant sur leur lieu de vacances.

Où avez vous passé vos dernières vacances :

à la mer ?

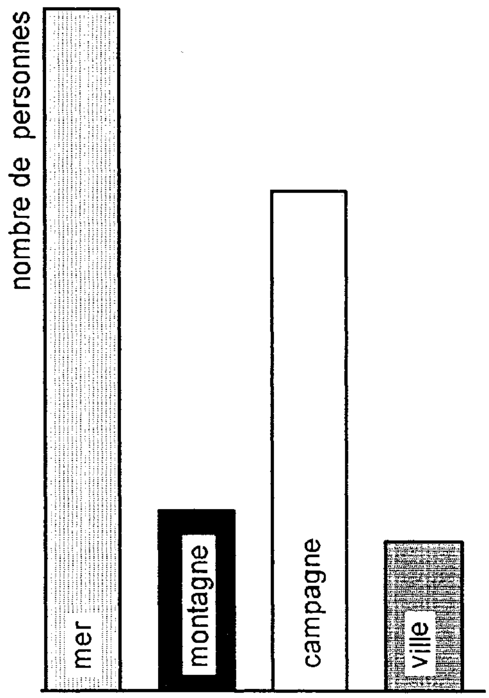
à la montagne ?

à la campagne ?

à la ville ?

Rayez les trois mentions inutiles.

Les réponses obtenues ont permis de fabriquer le graphique ci-contre.



Utilisez ce graphique pour compléter le tableau ci-dessous.

	nombre de personnes
mer	
montagne	
campagne	
ville	
total	**1 000**

Commentaires :

L'absence totale de graduation pose problème.

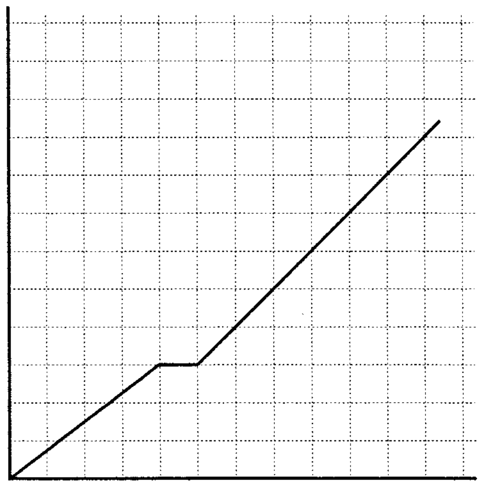
L'idée de « mettre bout à bout » les quatre rectangles ou d'ajouter leur longueur pour obtenir ce qui représente les 1000 personnes n'est pas très naturelle et beaucoup d'élèves bloquent au départ (même après avoir réussi les activités 2 et 3).

Dès lors que cette idée apparaît, le problème devient assez simple.

Activité 5.

Le cycliste

Maxime a fait le graphique suivant. Il représente le déplacement d'un cycliste mais Maxime a oublié de graduer les deux axes.



Sur l'axe des abscisses, on devait faire apparaître l'heure indiquée par la montre du cycliste.

Sur l'axe des ordonnées, on devait indiquer la distance (en km) parcourue par le cycliste.

Le cycliste s'est arrêté à 14 h 30 min, il avait alors parcouru 12 km;

il est reparti 10 minutes plus tard.

En utilisant les renseignements donnés ci-dessus, complète les graduations du graphique puis répond aux questions suivantes :

- A quelle heure le cycliste est-il parti ?
- A quelle heure est-il arrivé ?
- Quelle distance totale a-t-il parcourue ?

Commentaire.

Il est parfois utile de rappeler lequel des deux axes est l'axe des abscisses.

Pour l'heure d'arrivée et la distance parcourue, les réponses sont quelquefois imprécises car le point n'est pas un noeud du quadrillage.

Conclusion générale

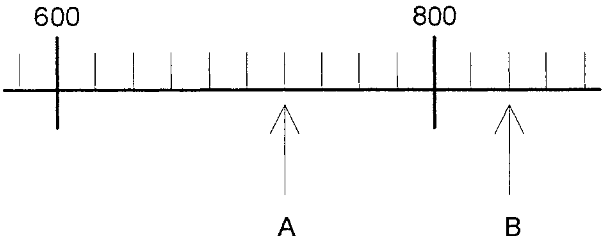
L'intérêt de la séquence réside surtout dans la richesse des échanges qui ont lieu au sein de la classe lors de la réalisation des diverses tâches, il n'y a pas lieu d'exiger une méthode particulière.

On peut bien sûr enchaîner les deux phases, mais la première phase s'intègre parfaitement dans le chapitre « nombres décimaux et numération » et les activités de la deuxième phase peuvent être réparties sur le reste de l'année dans le cadre de la « gestion des données ».

Le bilan suivant a été remis aux élèves.

Droites graduées

exemple 1



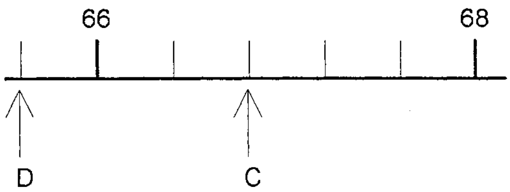
10 graduations ⟷ 200 unités

1 graduation ⟷ ...... unités

A a pour **abscisse** .....

l'**abscisse** de B est .....

exemple 2



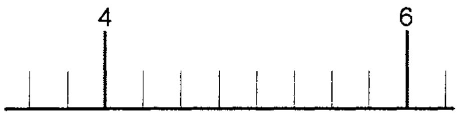
... graduations ⟷ ...... unités

1 graduation ⟷ ...... unités

C a pour abscisse .....

l'abscisse de D est .....

exemple 3



..... graduations ⟷ ...... unités

1 graduation ⟷ ...... unités

Place le point E d'abscisse 3,5

Place le point F d'abscisse 5,25

Graphiques

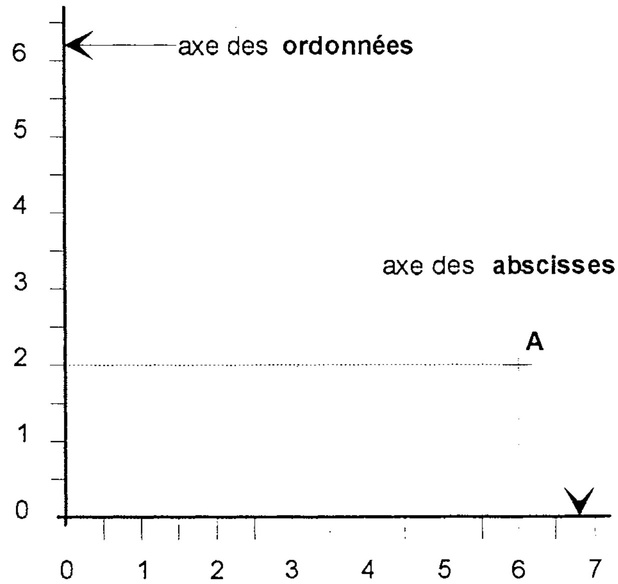
Dans ce graphique, le point A
a pour **abscisse 6** et pour **ordonnée 2**

Les **coordonnées de A** sont **(6 ; 2)**

Place les points B et C sachant que
B (2,5 ; 4,5) et C (4,5 ; 2,5)

Attention :

ne pas confondre les points de coordonnées (2,5 ; 4,5) et (4,5 ; 2,5)



LES ECHELLES.

L'échelle est un objet d'enseignement important, car en dépit d'un usage courant (plan, carte, dessin technique ...), les problèmes d'échelle posent des difficultés à la plupart des élèves, comme le montre l'évaluation réalisée par la DEP.

Exercice 1. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{10\,000}$ un champ a une longueur de 5 cm.
Calculer sa longueur réelle.

39% de réussite en fin de 5ème , en 1990.

Exercice 2. Sur une carte, 2 cm représentent 1 km.
Quelle est l'échelle de la carte ?

34 % de réussite en fin de 5ème, en 1990.

Principales sources d'erreur.

L'échelle est le coefficient de proportionnalité qui lie deux dimensions exprimées avec la même unité. Les élèves n'identifient pas son statut de nombre, ils veulent mettre des unités.

L'écriture fractionnaire de l'échelle est source de nombreuses difficultés : que mettre au numérateur, comment diviser par une fraction ?

De nombreuses erreurs sont liées aux unités : absence d'harmonisation, conversions incorrectes.

Choix didactique.

L'invraisemblance des réponses données aux problèmes d'échelle nous incite à redire que la maîtrise du sens est primordiale. Une représentation performante du problème conduit à cet objectif, nous devons donc veiller à sa mise en place.

Vu les difficultés rencontrées par les élèves, nos exigences en 5^{è} doivent être raisonnables. Nous avons ainsi renoncé à l'utilisation de l'opérateur fractionnaire dans les calculs, il nous sert juste à présenter l'échelle :

Echelle n ; agrandissement, les dimensions réelles sont multipliées par n.

Echelle $\frac{1}{n}$; réduction, les dimensions réelles sont divisées par n.

Les processus d'assimilation s'étendent sur le long terme, un réinvestissement en 4ème et en 3ème permettra d'améliorer les performances des élèves.

ACTIVITE " PUZZLE " d'après une idée de G. Brousseau.

Objectif

Un agrandissement est le résultat de l'application d'un opérateur multiplicatif à l'ensemble des dimensions d'une figure, la forme est invariante.

Commentaires

Beaucoup d'élèves utilisent la procédure *ajouter 2 cm à toutes les dimensions* . C'est pourquoi, il est préférable de faire travailler les élèves par groupes de quatre, chaque élève agrandissant une pièce. La juxtaposition de leurs pièces va permettre la remise en cause des procédures erronées.

Des aides sont alors proposées (à choisir en fonction des difficultés des élèves), elles sont de deux niveaux :

- que veut dire agrandir ?
- comment agrandir ?

Certains élèves agrandissent le puzzle en gardant une procédure additive : ajouter la moitié de chaque dimension, d'où l'intérêt de la deuxième question : comment passer de 4 cm à 6,4 cm ?

A la fin de la séance une mini-synthèse est faite à partir des fiches " **agrandir une otarie** "

" Pour agrandir une figure sans la déformer,

on multiplie toutes ses dimensions par un même nombre ".

ACTIVITE " MOUCHE et CHALUTIER "

Objectif

Donner du sens à une échelle dans le cas d'un agrandissement et d'une réduction.
Montrer la nécessité d'exprimer les dimensions avec la même unité.

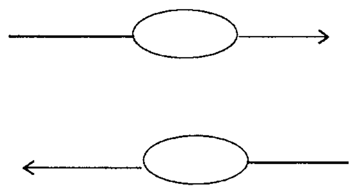
Commentaires

La relation échelle et agrandissement a surpris les élèves, ils la rencontreront en biologie et en technologie.
Il est bon de rappeler que les dimensions trouvées sont approximatives, car elles sont basées sur des mesures faites sur le dessin.

La représentation suivante est utilisée pour la correction

Dimensions réelles | Dimensions sur le dessin

... **cm**



..... **cm**

Deux points forts sont dégagés:

- pour un **agrandissement**, on **multiplie** les dimensions réelles par un même nombre
- pour une **réduction**, on **divise** les dimensions réelles par un même nombre

Prolongement

Le plan de leur chambre est à faire pour le cours suivant, en précisant son échelle.

Cet exercice concret nécessite une réflexion de l'élève sur les unités qu'il va utiliser.

ACTIVITE " ECHELLE "

Objectifs

Calculer l'échelle d'un dessin ou d'une carte.

Prendre l'initiative de mesurer sur le dessin.

Commentaires

Avant tout calcul, l'élève doit réfléchir à la situation : agrandissement ou réduction, puis représenter son problème et choisir une unité commune.

Les deux échelles de carte sont moins bien réussies en raison des erreurs de conversion et de la présence des nombreux zéros.

A la fin de cette activité, la fiche de synthèse est complétée

FICHE EXERCICES.

Exercice 1

Les procédures liées à la linéarité peuvent être ici plus rapides; " deux fois plus petit sur le dessin donc deux fois plus petit en réalité ".

Exercice 2

Il fait le lien entre échelles et représentations en géographie et sur les cartes .

Exercices 4, 5 et 6

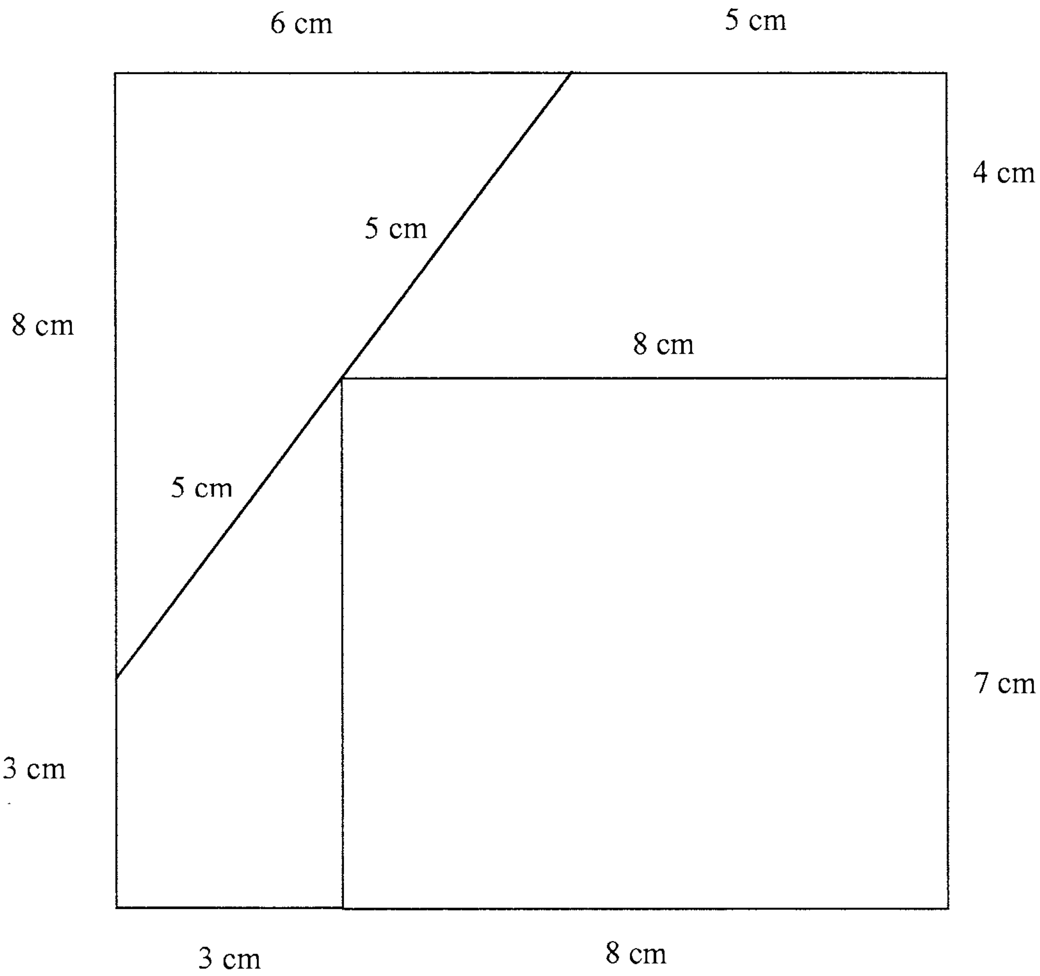
Entraînement.

Exercice 7

La recherche est souvent faite par tâtonnement.

La succession réduction-agrandissement crée un flottement très profitable.

PUZZLE



Ce puzzle comporte quatre pièces.

Vous allez fabriquer le "même" puzzle en plus grand, en respectant la consigne suivante :

un segment de 4 cm devra mesurer 6 cm .

1- Construire chaque pièce et reconstituer le carré avec les quatre pièces agrandies.

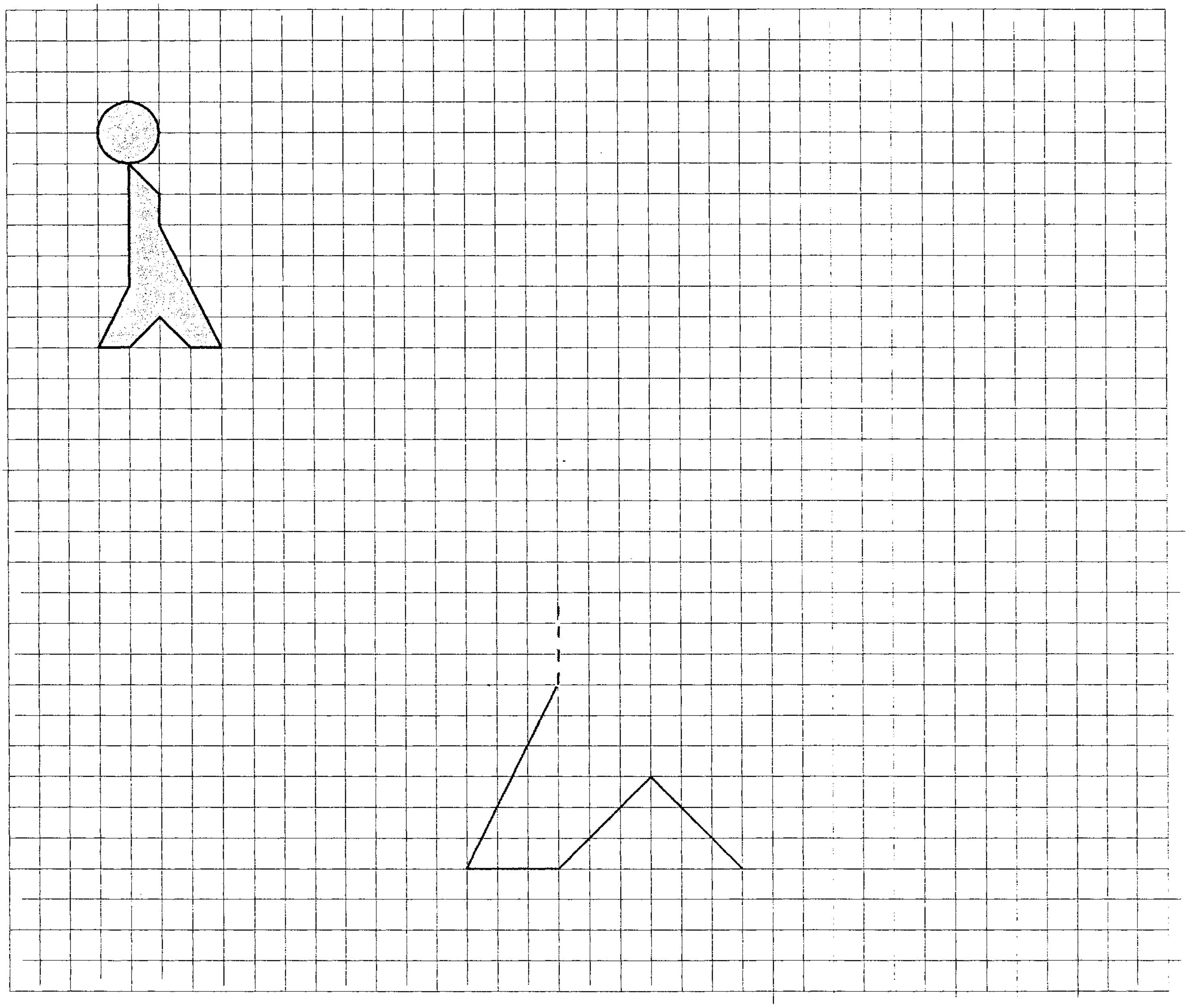
Comment avez-vous trouvé les nouvelles mesures ?

2- **Si un segment de 4 cm devait mesurer 6,4 cm.**

Comment feriez-vous pour trouver les nouvelles mesures ?

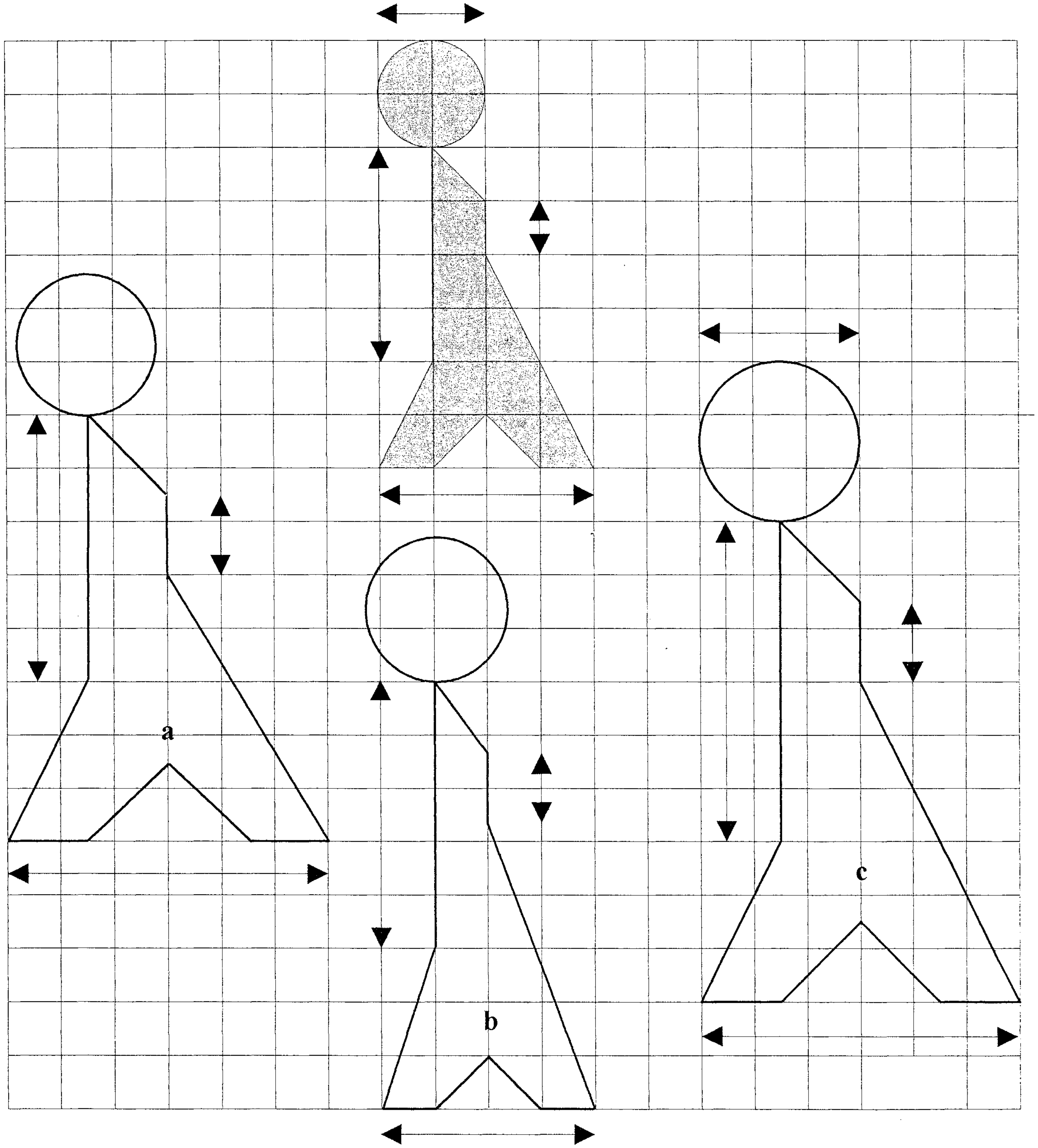
AGRANDIR

Termine le dessin pour obtenir une otarie agrandie **et de même forme.**



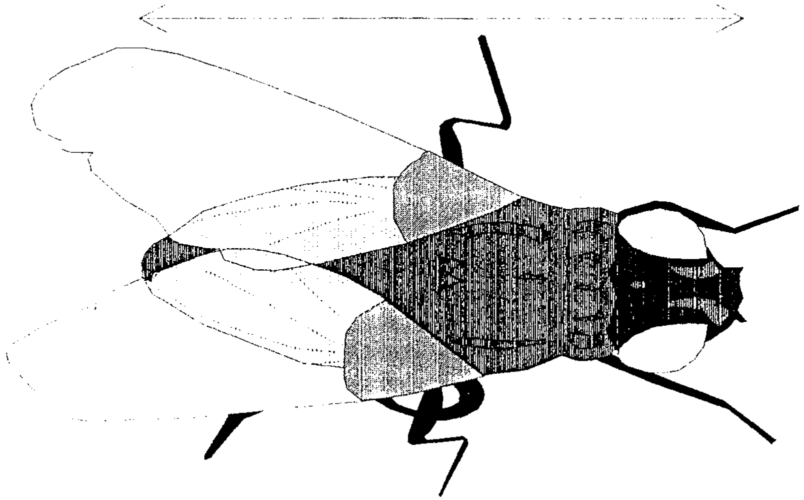
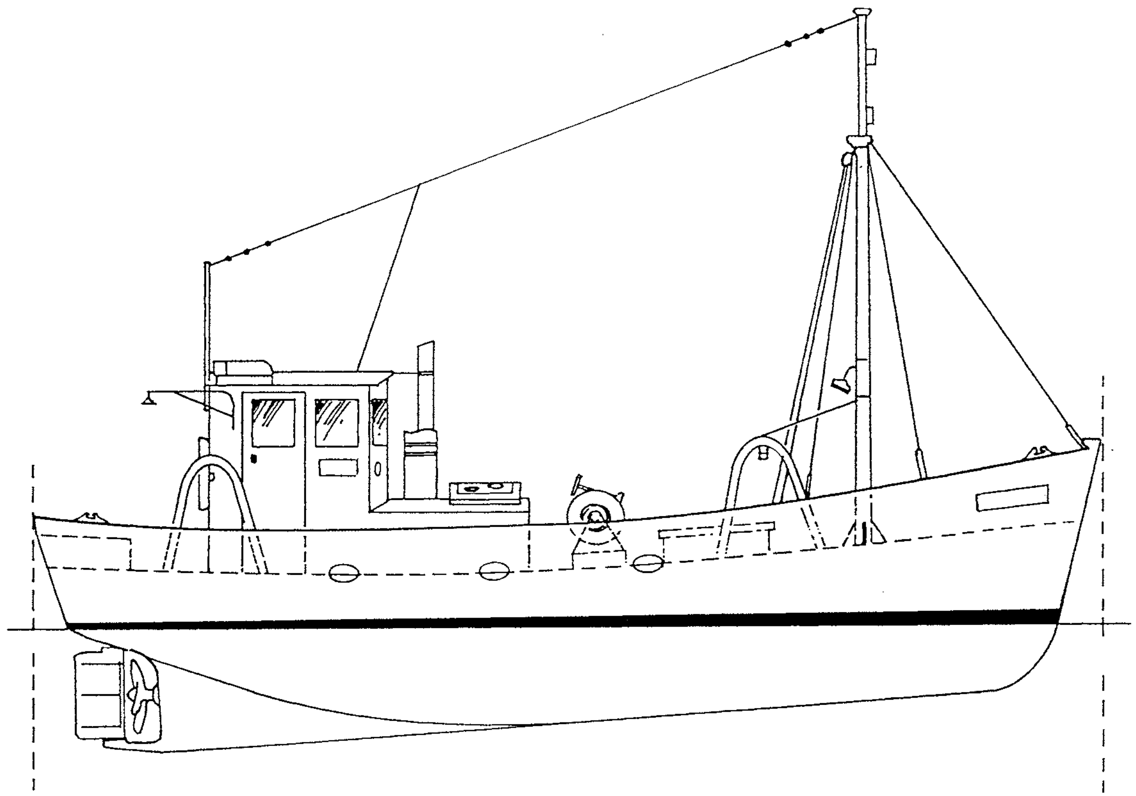
Complète la phrase suivante :

Toutes les dimensions de l'otarie grise ont été multipliées par ...



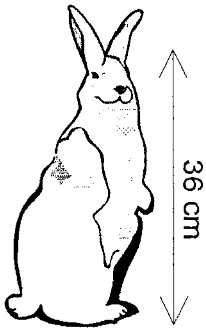
Parmi ces trois agrandissements, lequel a la même forme que l' otarie grisée ?

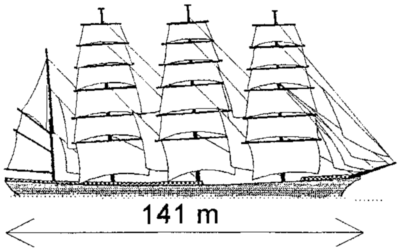
Pour cet agrandissement, toutes les dimensions de l'otarie grisée ont été multipliées par ...

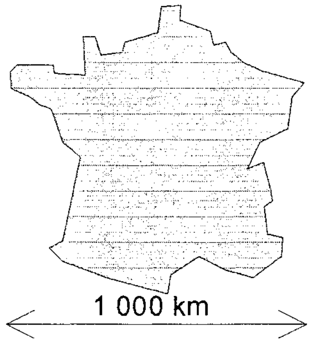
Mouche  Ce dessin est à l'échelle 10 Calculer la longueur du corps de la mouche, en réalité.	**Chalutier breton**  Dessin à l'échelle $\frac{1}{70}$. Calculer la longueur du chalutier. Un marin de 1,72m peut-il rentrer dans la cabine sans se baisser ?

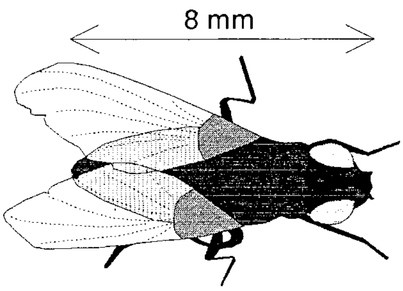
ECHELLES

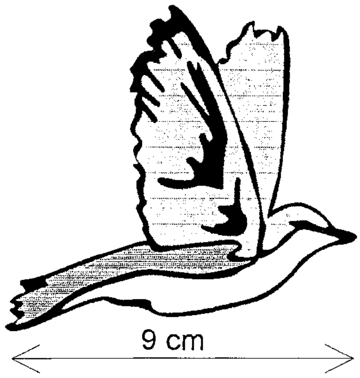
Trouver l'échelle de chaque dessin.

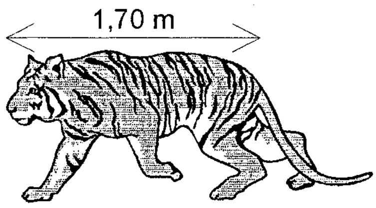


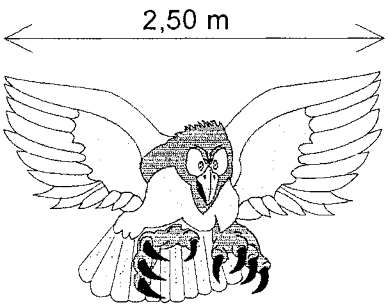


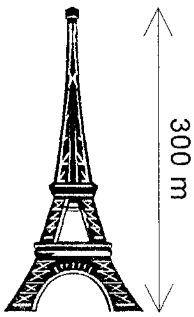


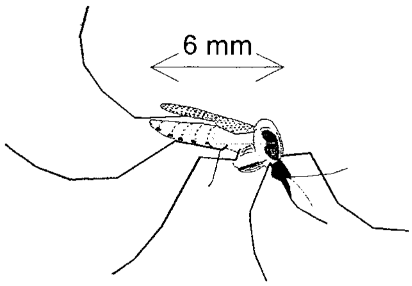


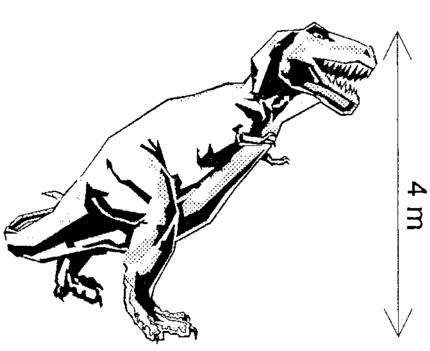


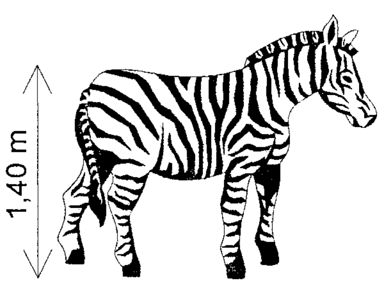








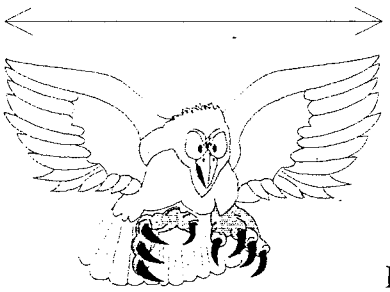




ECHELLES

REDUCTION à l'échelle $\frac{1}{500}$	**AGRANDISSEMENT à l'échelle 10**
500 cm en réalité $\xrightarrow{:500}$ 1 cm sur le plan	1 cm en réalité $\xrightarrow{\times 10}$ 10 cm sur le plan
Les dimensions sur le plan sont............................	Les dimensions sur le plan sont ....

Comment calculer une dimension réelle ?



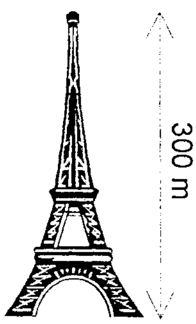
Echelle $\frac{1}{50}$

Comment calculer une dimension sur le plan ?

Un poteau mesure 1,80 m.

Calculer sa dimension sur un dessin à l'échelle $\frac{1}{50}$.

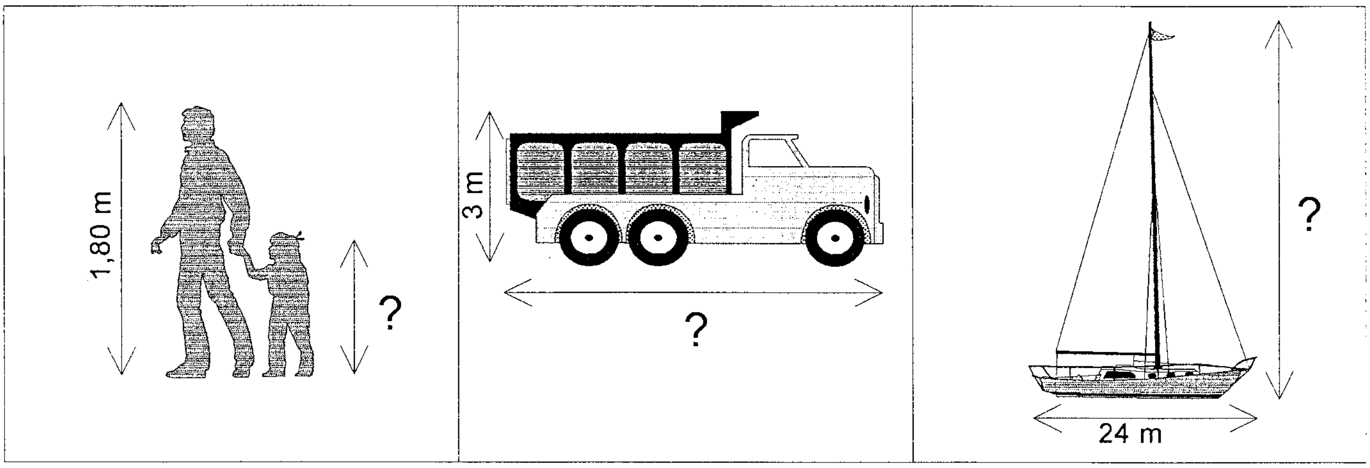
Comment calculer l'échelle d'un dessin ?



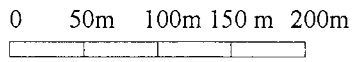
... cm en réalité $\longrightarrow$ ..... cm sur le dessin

EXERCICES

1- Calculer les dimensions manquantes.

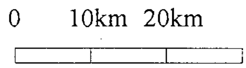


2- Sur une carte , il y a cette représentation :



Quelle est l'échelle de cette carte ?

3- Même question avec :



4-Sur la maquette, un immeuble de 25 m de haut est représenté par un pavé droit de 5 cm de haut et 3 cm de long.

a) Quelle est la longueur de l'immeuble ?

b) Le mur qui borde le parking mesurera 70 m. Quelle est sa longueur sur la maquette.

5- La distance entre 2 villes est 82 km.
Sur une carte au $\frac{1}{200\ 000}$, combien de cm séparent ces 2 villes ?

6- Sur une carte au $\frac{1}{3\ 000\ 000}$, la distance entre 2 villes est 4,2 cm.
Combien de km séparent ces 2 villes.

7- Soit une chambre rectangulaire, de 3,80 m sur 3,40 m.
Faire le plus grand plan possible, de cette chambre, sur une feuille $21 \times 29{,}7$.
Quelle est l'échelle de ce plan ?

Même question pour une mouche de 1,2 cm de long sur 0,5 cm de large .

LES FORMATS

Cette série d'activités s'adresse à des élèves de troisième.

Des formats utilisés couramment (photo, télévision, cinéma, papier) servent de support à divers exercices. Il convient toutefois d'attirer l'attention du lecteur et des élèves sur la polysémie ou l'imprécision de la définition du mot « format ». En effet :

- le format du négatif d'une photo est donné par l'indication 24 x 36 alors que le format des téléviseurs est donné par 4 / 3 ou 16 / 9.
- on peut dire de deux téléviseurs de tailles différentes qu'ils ont le même format.
- peut-on dire de deux feuilles de papier, l'une A4 (21 x 29,7), l'autre A3 (29,7 x 42), qu'elles ont le même format ?

Activité 1.

LE FORMAT 24 X 36 :

C'est le format le plus employé en photographie.
Dans ce format le négatif mesure 24 mm sur 36 mm.
Au tirage, le négatif est agrandi proportionnellement sur papier.

1°) Quelles seront les dimensions d'une photo obtenue en agrandissant 6 fois le négatif ? En l'agrandissant 7 fois ?

Dans chaque cas, calculez le rapport $f = \frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}}$. Justifiez le résultat.

2°) Quelle est la longueur d'une photo de 10 cm de large ? La largeur d'une photo de 18 cm de long ?

3°) Quelles sont les dimensions de la plus grande photo que l'on peut tirer sur une feuille 18 cm x 24 cm ?

Commentaires:

Il s'agit :

- de caractériser un format par le rapport $\frac{L}{l}$.
- de lier la notion d'agrandissement et de réduction à l'idée de « format identique » : on ne déforme pas une image si on conserve les rapports internes (les proportions).
- de travailler sur des égalités de fractions du type $\frac{a}{b} = \frac{\dots}{d}$ ou $\frac{a}{b} = \frac{c}{\dots}$ ...

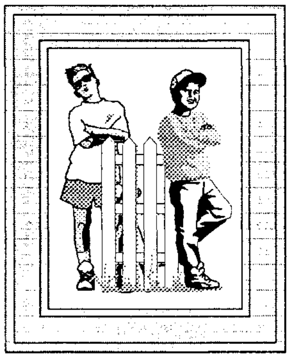
La question 3 demande réflexion et laisse de nombreux élèves perplexes.

Activité 2.

LE FORMAT D'UN RECTANGLE

1°) Dessinez un rectangle dont le format ($f = \frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}}$) est égal à 10 ; à $\frac{4}{3}$.

2°) Quel est le plus petit format possible pour un rectangle ?



3°) Les dimensions de cette photo sont 45 cm sur 60 cm.

La largeur du cadre est 10 cm.

Le cadre et la photo ont-ils le même format ?

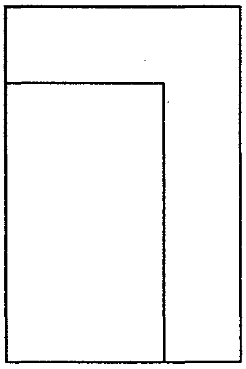
Quel est le rectangle le plus allongé ?

4°) La largeur d'un rectangle est 18 cm.
Quelle doit être sa longueur pour qu'il ait le même format que le rectangle 24 cm x 36 cm?
Calculez pour ces 2 rectangles, l'angle que forment une diagonale et une largeur.

5°) On a superposé 2 rectangles par une largeur et un sommet.

Comment peut-on reconnaître simplement sans calcul, s'ils ont le même format ?

Justifiez.



Commentaires :

Après avoir défini le format d'un rectangle comme le rapport $\frac{L}{l}$, on propose de reconnaître deux rectangles de même format par différents moyens :

- par comparaison des rapports $\frac{L}{l}$

- par superposition des deux rectangles par un sommet et une largeur après avoir constaté que pour des rectangles de même format, l'angle formé par une diagonale et une largeur est le même.

Attention, pour la question 4, l'étude préalable de la trigonométrie est souhaitable pour utiliser la tangente.

Activité 3.

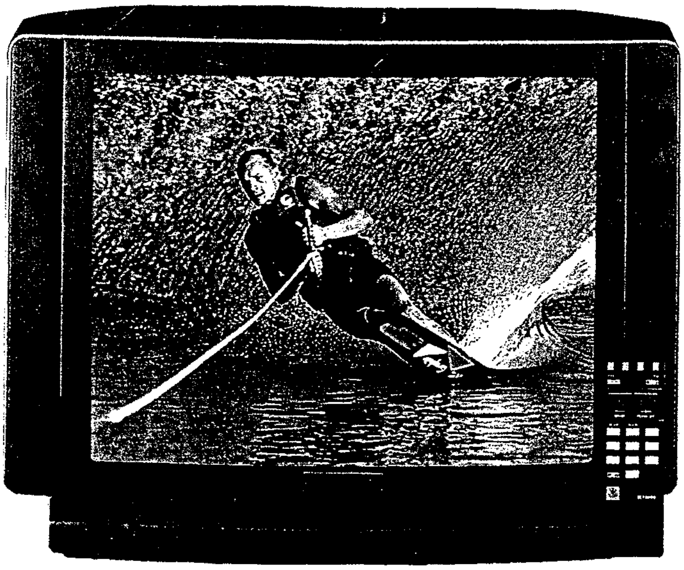
LES FORMATS DE TELEVISION

1°) Le format 4 / 3 :

a) Calculez le format de l'écran de cette télévision ?

(Rappel : format = $\frac{\text{Longueur}}{\text{largeur}}$)

b) Pourquoi dit-on qu'elle est au format 4 / 3 ?



2°) Dessinez un rectangle 4 cm x 3 cm. Que mesure sa diagonale ?

3°) Complétez ce tableau

	Télévisions (format 4 / 3)		
marque	**A**	**B**	**C**
largeur	21 cm		
longueur		44 cm	
diagonale *			70 cm

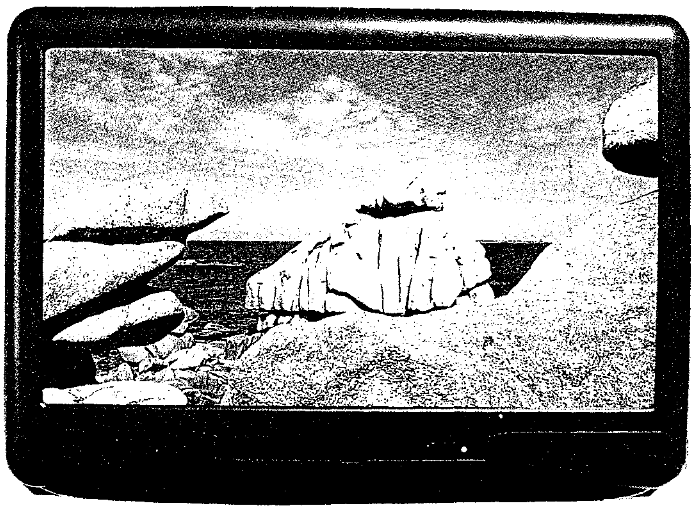
* Une télévision 70 cm est une télévision dont la diagonale mesure 70 cm

4°) Certains cinéastes utilisent le format 1,75 pour leurs films.
Que se passe-t-il lorsqu'on les projettent à la télévision ?

5°) a) Vérifiez que cette télévision est au format 16 / 9.

b) Quel est l'avantage du format 16 / 9 sur le format 4 / 3 ?

c) Représentez un écran 16 / 9 et la partie utilisée par un film au format 4 / 3.



Commentaires :

Les réponses proposées aux questions 1 et 5 sont assez variées en raison des imprécisions de mesure.

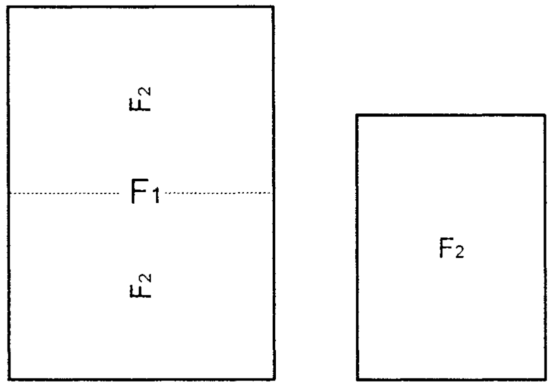
A la question 3, la recherche des dimensions des téléviseurs A , B et C est simple.

La question 4 est l'occasion d'expliquer un phénomène connu des élèves.

A la question 5, l'enseignant peut juger du degré de compréhension des élèves puisqu'ils sont confrontés à des difficultés déjà rencontrées dans les questions précédentes.

Activité 4.

LE FORMAT METRIQUE :



en découpant une feuille F1 du format métrique en deux dans le sens de la longueur, on obtient deux feuilles F2 de même format que F1.
On pourra par exemple, les utiliser pour effectuer des réductions de F1 à la photocopieuse.

a) les feuilles 24 cm x 32 cm et 21 cm x 29,7 cm appartiennent-elles au format métrique ?

b) Quel est le rapport entre les aires de F1 et de F2 ?
Quel est donc le rapport entre leur longueur.
En déduire la valeur du format métrique?

c) La feuille de base du format métrique s'appelle A0.
Son aire est 1 m².
Calculez ses dimensions
Retrouvez celles des feuilles A3 et A4.

Commentaires :

Les élèves connaissent les feuilles A_4, l'activité permet de comprendre le pourquoi de ces curieuses dimensions (21 cm x 29,7 cm).

A la question 2 la réponse concernant le rapport entre les aires est immédiate.

Pour le rapport entre les longueurs la démarche est simple si les élèves connaissent et pensent à utiliser le résultat :

dans un agrandissement ou une réduction, si les longueurs sont multipliées par k alors les aires sont multipliées par k^2.

Dans le cas contraire, des valeurs approchées seront probablement proposées par les élèves. Il sera alors intéressant de les guider pour obtenir la valeur exacte en manipulant l'égalité : $\frac{L}{l} = \frac{l}{0,5L}$

A la question 3, plusieurs élèves n'utilisent pas la démarche attendue et ne peuvent retrouver les dimensions des feuilles A_3 et A_4. En effet, ils obtiennent les dimensions de la feuille A_0 après avoir trouvé successivement les dimensions des feuilles A_3 , A_2 et A_1.

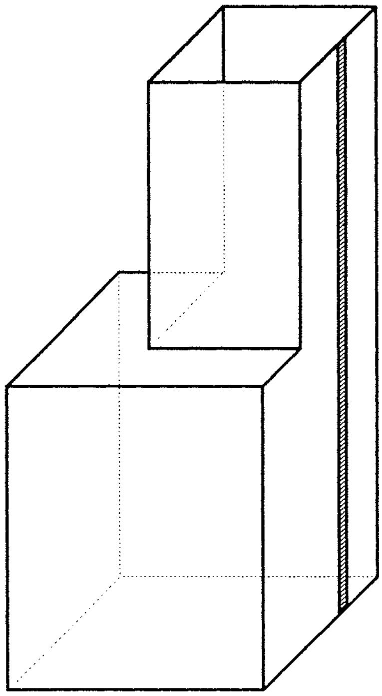
Comme on pouvait s'y attendre, aucun élève n'a résolu l'équation $l \times l\sqrt{2} = 10000$

Par contre plusieurs ont obtenu les dimensions de la feuille A_0 après avoir trouvé que la feuille A_0 a une aire 16 fois plus grande que la feuille A_4, d'où les dimensions de la feuille A_0 sont 4 fois plus grandes que celles de la feuille A_4.

LE RESERVOIR

Cette activité s'adresse à des élèves de $3^{ème}$.

LE RESERVOIR



Pour arroser son jardin, Jules récupère l'eau de pluie dans un drôle de réservoir dessiné ci-dessous.

Pour graduer ce réservoir, il a dressé le tableau suivant :

Hauteur d'eau en centimètres	volume d'eau en litres
10	45
30	135
50	225
90	405
110	450
130	490
150	530
180	590

1. Peux-tu trouver le volume d'eau lorsque la hauteur d'eau est de 40 cm ? Si oui, donne ce volume en expliquant comment tu l'as obtenu; sinon explique pourquoi tu ne peux pas le trouver.

2. Réponds aux mêmes questions pour toutes les hauteurs d'eau suivantes :
   a) 60 cm. b) 75 cm. c) 100 cm. d) 120 cm.

3. Détermine la hauteur de la partie la plus large du réservoir.

Objectifs.

- Utiliser la proportionnalité entre Volume et hauteur de liquide dans un récipient de section constante pour calculer un volume.
  Donner un exemple d'application linéaire.
- Mettre en évidence la proportionnalité des accroissements.
  Donner un exemple d'application affine.
- Ecrire une équation, là résoudre.
- Réaliser un graphique (utilisation possible d'un tableur).
- Utiliser un graphique pour résoudre un problème.

Commentaires :

Cette situation problème a été proposée aux élèves d'une classe de 3ème polytechnologique pour introduire la notion d'application affine.

Recherche du problème.

<u>Question 1 et 2-a</u>.

La réussite est bonne, les procédures sont variées mais en grande majorité, les élèves utilisent la linéarité.

<u>Question 2-b</u>.

La réussite est bonne, cette fois le coefficient de proportionnalité (4,5) est utilisé de façon beaucoup plus fréquente.

<u>Question 2-c -d</u>.

Pour h = 100 cm, l'utilisation du coefficient ou des propriétés de linéarité conduit au résultat 450 qui figure déjà dans le tableau pour une hauteur d'eau de 110 cm.

Certains ne se rendent pas compte immédiatement de « l'anomalie » et traitent de la même manière le cas où h = 120 cm.

Une fois « l'anomalie » repérée, son explication ne pose pas problème.

<u>Question 3</u>.

Cette question est volontairement ouverte, l'objectif étant de laisser les élèves prendre des initiatives et peut-être des procédures différentes.

En fait, dans ma classe de troisième polytechnologique, personne ne pense par exemple à faire un graphique, les élèves bloquent; la conclusion se limite à : la hauteur cherchée est entre 90 cm et 110 cm ou bien entre 90 cm et 100 cm.

Pour avancer, j'ai dû proposer des aides à l'ensemble des élèves.

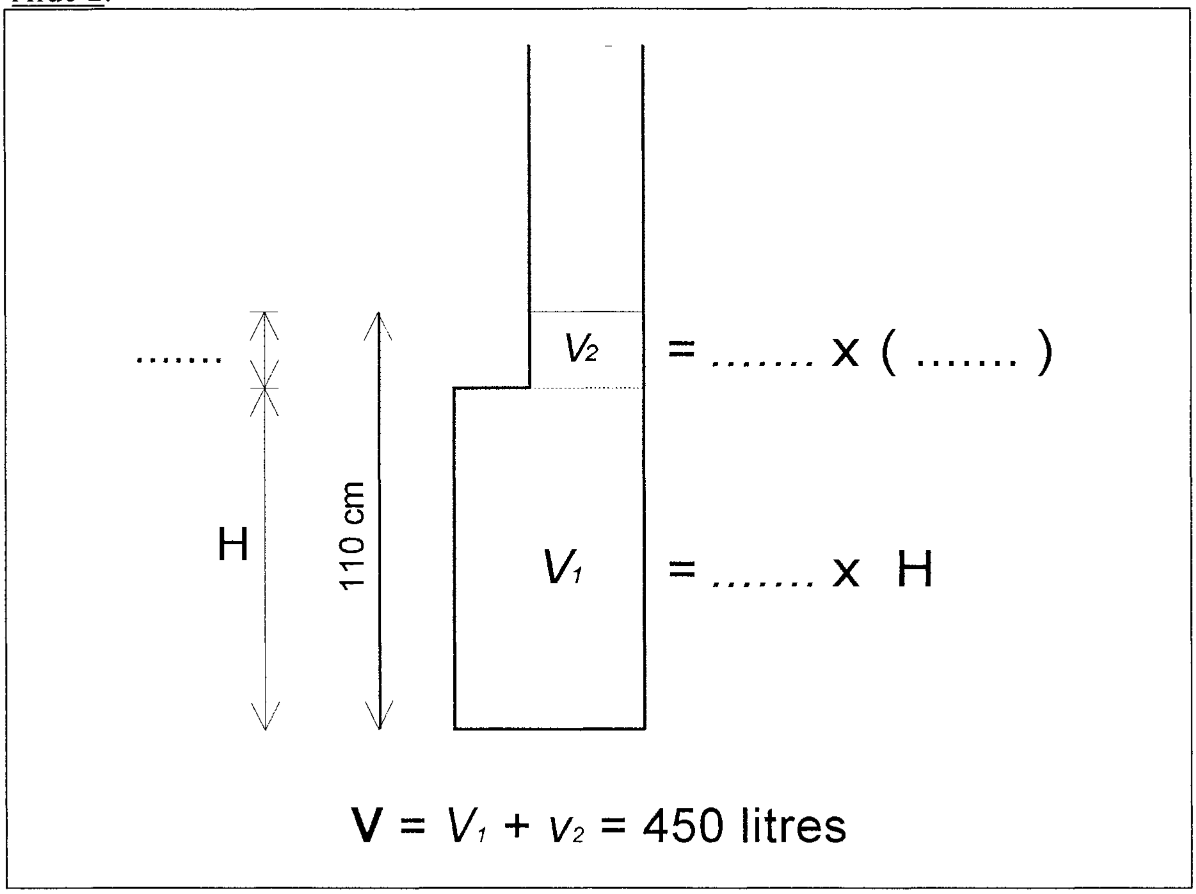
Aide 1.

Complète le tableau suivant:

hauteur h en cm	**accroissement de h**	volume V en l	**accroissement de V**
180		590	
	+ ...		+ ...
150		530	
	+ ...		+ ...
130		490	
	+ ...		+ ...
110		450	
	+20		+ ...
90		405	
	+40		+ ...
50		225	
	+20		+ ...
30		135	
	+20		+ ...
10		45	
	Détermine la hauteur de la partie la plus large du réservoir.		

Une fois, le tableau compris et rempli, la proportionnalité des accroissements apparaît clairement. Malheureusement, cela ne suffit pas à débloquer la situation.

Aide 2.



L'annotation du dessin est faite en classe entière à partir des propositions des élèves.

L'expression : $V = V_1 + V_2 = 450$

prend alors la forme de l'équation suivante : $4{,}5 \times H + 2 \times (110 - H) = 450$

Cette équation est dans l'ensemble résolue avec succès.

Suite de l'activité et synthèse.

Compte tenu du fait qu'aucun élève n'a fait de graphique, je demande d'en réaliser un.

REALISATION D'UN GRAPHIQUE

> Sur une feuille de papier millimétré, représente graphiquement le volume V en litres en fonction de la hauteur h en cm.
>
> *Sur l'axe des abscisse,* 1 cm *représente une hauteur de* 10 cm.
>
> *Sur l'axe des ordonnées,* 4 cm *représentent un volume de* 100 litres.

La plupart des élèves placent uniquement les points correspondant au tableau donné dans le texte. Quelques uns placent aussi les points associés aux hauteurs 40, 60, 75, 100 et 120 cm après avoir fait les calculs.

On fait observer que ce graphique, réalisable dès le début du problème, permet de donner des réponses (parfois approximatives) aux questions du problème.

OBSERVATION DU GRAPHIQUE

* Les deux "parties" de la courbe ont un point commun; le point (92 ; 415) qui correspond au changement de section du réservoir.

* Les points de la première partie de la courbe (pour les hauteurs comprises entre 0 cm et 92 cm inclus) sont alignés sur une droite passant par l'origine.

Tous les points de cette droite sont caractérisés par la relation suivante :

V = 4,5 x h **_Le volume est proportionnel à la hauteur d'eau._**

Remarque: le point correspondant à la hauteur de 92 cm a en fait pour ordonnée 414 (et non 415 , valeur obtenue par lecture du graphique).

* Pour les hauteurs supérieures à 92 cm, les points sont alignés sur une droite.
  Quelle est la relation qui caractérise les points de cette droite ?

Ici le volume n'est pas proportionnel à la hauteur d'eau mais

l'accroissement du volume est proportionnel à l'accroissement de la hauteur,

on a donc:

V = 4,5 x 92 + 2 x (h -92) d'où V = 2 x h + 230

* Quelle est la partie du réservoir qui a pour volume 230 litres ?
  Où apparaît le " 230 " sur le graphique ?

SYNTHESE

Dans cet exercice on a obtenu deux relations (2 formules)

V = 4,5 x h et V = 2 x h + 230.

Ces deux formules sont des procédés de calcul du type: *x* ---------> *y* = a *x* + b appelés **applications affines**.

La première : h -----------> V = 4,5 x h est une **application linéaire**.

Le volume V est proportionnel à la hauteur h.

Les points du graphique sont alignés sur une droite qui passe par le point (0 ; 0) , origine du repère.

La deuxième : h ----------> V = 2 x h + 230 est une **application affine**.

L'accroissement du volume V est proportionnel à l'accroissement de la hauteur h.

Les points du graphique sont alignés sur une droite qui passe par le point (0 ; 230).

Remarque : une application linéaire est une application affine particulière .

LES ANNEXES

Le travail du groupe de recherche a été l'occasion de débats quelquefois assez vifs sur la manière de concevoir la notion de proportionnalité. Pour simple qu'elle soit sur le plan mathématique, chacun a sa propre manière de comprendre cette notion ... et donc de l'enseigner.

Nous proposons ici trois textes qui résultent de ces discussions et qui cherchent chacun à clarifier un aspect théorique de la proportionnalité sans refléter nécessairement une vision commune à tous les membres du groupe (ils conviendront donc bien à certains lecteurs, peut-être moins à d'autres...).

Pour approfondir d'autres aspects des problèmes ardus que pose l'enseignement de la proportionnalité, on peut aussi se reporter au livre publié en 1994 par une équipe de l'IREM de Rennes :

La proportionnalité et ses problèmes
Boisnard D., Houdebine J., Julo J., Kerboeuf MP., Merri M.
(Hachette, 1994)

ANNEXE 1

L'ECRITURE FRACTIONNAIRE

I - LES DIFFERENTES UTILISATIONS DES FRACTIONS

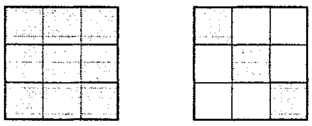
Le résultat d'un partage en parts égales.

Au delà des tartes ou des tablettes de chocolat, c'est à l'occasion du partage des figures géométriques planes (segments, cercles et rectangles) en parties superposables que se fait la première rencontre avec les fractions.

Cette première rencontre avec une écriture telle que $\frac{3}{4}$ comme un rapport entre la partie et le tout marquera fortement les représentations futures qu'elle induira :

- $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$ on est loin du quotient de 3 par 4.
- on divise d'abord par 4 puis on multiplie par 3.
- le numérateur doit être inférieur au dénominateur
- les références restent implicites, ce qui rend ambiguë certains exercices :

Quelle est la fraction coloriée ?

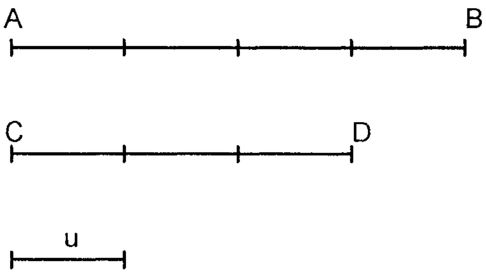


s'agit-il de $\frac{12}{9}$ (d'un carré)

ou

de $\frac{12}{18}$ (des 2 carrés c'est-à-dire du tout)

Le rapport des longueurs de deux segments.



$AB = 4\ u$ donc $u = \frac{AB}{4}$

$CD = 3\ u$ donc $CD = 3\ \frac{AB}{4} = \frac{3}{4} AB$

de même $AB = \frac{4}{3}\ CD$

Ce procédé très utilisé par les Grecs a progressivement disparu avec l'utilisation d'unités universelles, on le retrouve encore dans le théorème de Thalès sous la forme du rapport $\frac{AB}{CD}$

Ce rapport est un nombre, il peut être calculé en divisant les mesures de ces longueurs, il est indépendant de l'unité utilisée : $\frac{AB}{CD} = \frac{3\ u}{4\ u} = \frac{3}{4}$

Cette situation permet d'introduire l'inverse d'une fraction et les fractions supérieures à l'unité.

Les fractions d'une grandeur mesurable

Sur le modèle des partages, on calcule une fraction d'une grandeur en la divisant par le dénominateur puis en multipliant le résultat par le numérateur.

Par exemple : les $\frac{3}{4}$ de 240 F = (240 F : 4) x 3 = 60 F x 3 = 180 F

Le vocabulaire laisse planer une ambiguïté : quelle est la fraction ? $\frac{3}{4}$ ou 180 F ?

Les nombres rationnels et les divisions

Pour les mathématicien $\frac{a}{b}$ ($b \neq 0$) est le nombre x tel que : $b\,x = a$.

Autrement dit, la barre de fraction remplace le signe de la division $3 : 4 = \frac{3}{4}$

Si a et b sont des entiers $\frac{a}{b}$ est un nombre rationnel.

On peut les comparer, effectuer les quatre opérations, les représenter sur une droite graduée...etc.

L'écriture fractionnaire et la proportionnalité

Une des caractéristique d'un problème de proportionnalité est la multitude des procédures pour le résoudre.

Exemple :

Pour fabriquer 100 g de pâte à tartiner "LUNETTA" il faut 30 g de cacao et 12 g de noisettes.

Quelle quantité de noisettes faut-il ajouter à 1 kg de cacao pour fabriquer du "LUNETTA" ?

Voici 4 procédures parmi d'autres :

a)	b)	c)	d)
1000 g : 30 g = 33,33... 12 g x 33,33... = 400 g	30 g : 12 g = 2,5 1000 g : 2,5 = 400 g	12 g : 30 = 0,4 g 0,4 g x 1000 = 400 g	$\frac{q}{1000} = \frac{12}{30}$
$q = \frac{1000}{30} \times 12$	$q = \frac{1000}{\left(\frac{30}{12}\right)}$	$q = \frac{12}{30} \times 1000$	$q = \frac{12 \times 1000}{30}$

On voit que ce sont les propriétés des opérations sur les fractions qui permettent de justifier l'équivalence de toutes ces procédures.

II - LE FORMALISME LIE AUX FRACTIONS

sixiéme :

définition $\frac{3}{4} = 3 \times \frac{1}{4}$

division $3 : 4 = \frac{3}{4} = 0{,}75$

fraction d'un nombre "*les* $\frac{3}{4}$ *de* 12" $= \frac{12}{4} \times 3$

simplification par division dans des cas simples $\frac{9}{12} \overset{:3}{=} \frac{3}{4}$

cinquiéme :

simplification par décomposition $\frac{21}{28} = \frac{3 \times 7}{4 \times 7} = \frac{3}{4}$

comparaison par réduction au même dénominateur

addition, soustraction $\frac{3}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3+2}{4}$ $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{1}{6}$

produit $\frac{3}{4} \times 12 = \frac{3 \times 12}{4}$

"*les* $\frac{3}{4}$ *de* 12" $= \frac{3}{4} \times 12$ $\frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5}$

quatriéme :

division $\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5}$

équation $4x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{4}$

produit en croix $\frac{n}{5} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\,n = 3 \times 5$

Tout ce formalisme n'est enseigné qu'en un peu plus de deux ans, ce qui peut paraître impressionnant quand on compare avec les autres opérations. La distributivité par exemple, n'est abordée en tant que propriété qu'en cinquième soit six ans après l'introduction du signe multiplié.

III - LES DIFFICULTES DE L'ENSEIGNEMENT DES FRACTIONS

Maîtriser tout ce formalisme ne se réduit pas à connaître une succession de règles d'écriture ou de calcul, d'autant que les différentes représentations des fractions peuvent se télescoper et compliquer fortement la compréhension.

En sixième, pour calculer " *les* $\frac{3}{4}$ *de* 5 ", " *on divise par* 4 *puis on multiplie par* 3 "

soit : *les* $\frac{3}{4}$ *de* $5 = \frac{5}{4} \times 3$ ($\frac{5}{4}$ représente ici une division et non une fraction.)

En cinquième, " *les* $\frac{3}{4}$ *de* 5 " $= \frac{3}{4} \times 5$

Il ne s'agit pas que de remplacer le " *de* " par le signe multiplié car :

- il faut rompre avec les habitudes de sixième
- on introduit ainsi une nouvelle opération : la multiplication par une fraction.

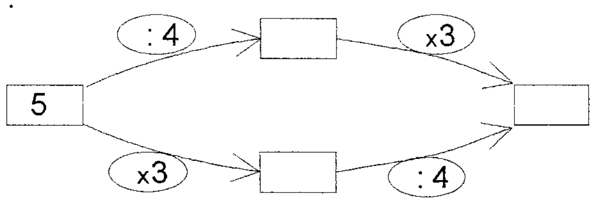
En effet malgré les apparences il ne s'agit pas de" *multiplier* $\frac{3}{4}$ *par* 5 " qui peut se ramener à une suite d'additions, mais de " *multiplier* 5 *par* $\frac{3}{4}$ " qui ne peut pas s'interpréter de la même manière.

La diversité des situations où intervient l'écriture fractionnaire fait tout son intérêt mais aussi toute la difficulté de son enseignement.
Quelle situation utiliser pour introduire tel ou tel formalisme ? Une situation suffit-elle ?
Les élèves feront-ils seuls le transfert vers les autres ?

<u>TEST</u> : qu'évoque pour vous $\frac{5}{4} \times 3 = \frac{5 \times 3}{4} = 5 \times \frac{3}{4}$?

A) le produit d'une fraction par un nombre $\frac{5}{4}$ fois $3 = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5 \times 3}{4}$

B) une propriété des opérations :



on peut inverser l'ordre de calcul entre une multiplication et une division

C) les 3 manières de calculer " *les* $\frac{3}{4}$ *de* 5 "

D) 3 calculs équivalents d'une quatrième proportionnelle ?

E) cette représentation serait-elle la même avec les expressions suivantes :

$\frac{5}{4} \times 300$ $\frac{500}{4} \times 3$ $\frac{57}{30} \times 36$?

Les mélanges et les proportions

Exemple 1 première version

Julie mange les $\frac{2}{7}$ *d'une tablette de chocolat, Tom en mange* $\frac{1}{4}$

Qui en a mangé le plus ?

Exemple 1 deuxième version

Julie mélange 2 verres de sirop avec 5 verres d'eau pour préparer sa boisson, tandis que Tom mélange 1 verre de sirop avec 3 verres d'eau.

Qui a la boisson la plus sucrée ?

Voilà deux exercices typiques pour amener les élèves à comparer deux fractions en les réduisant au même dénominateur. Pourtant les deux situations offrent des différences importantes qui peuvent générer chez les élèves des réactions fort différentes.

Dans la première version, les deux fractions portent sur une seule et même référence : la tablette de chocolat . Les fractions " réduites " au même dénominateur également, puisque cette "réduction" consiste à augmenter le nombre de parts sans changer la référence :

on remplace $\frac{2}{7}$ d'une tablette par $\frac{8}{28}$ de la même tablette.

On peut prolonger l'exercice en calculant la fraction totale mangée $\frac{8}{28}+\frac{7}{28}=\frac{15}{28}$

On raisonne ici sur des quantités, on ajoute des vingt-huitièmes comme on ajoute des pommes : 8 vingt-huitièmes + 7 vingt-huitièmes = 15 vingt-huitièmes . Le vingt-huitième est traité comme une unité : on a converti les septièmes en vingt-huitièmes.

Dans la deuxième version, la première différence est qu'on se trouve avec deux produits différents : la boisson de Julie et celle de Tom.

- $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{4}$ ne sont pas les seules fractions utilisables, on peut aussi comparer $\frac{2}{5}$ et $\frac{1}{3}$.

- La réduction au même dénominateur consiste à se ramener au même volume pour les deux boissons, on change ainsi la référence des fractions :

  on remplace $\frac{2}{7}$ d'un volume de 7 verres par $\frac{8}{28}$ d'un volume de 28 verres.

- On peut ajouter les deux boissons de 28 verres ainsi obtenues, cette nouvelle boisson de 56 verres contiendra 15 verres de sirop.

  Est-ce pour autant que $\frac{2}{7}+\frac{1}{4}=\frac{8}{28}+\frac{7}{28}=\frac{15}{56}$?

Non bien sûr.

Car $\frac{2}{7}$ et $\frac{1}{4}$ ne sont pas des quantités que l'on peut ajouter, mais des rapports qui indiquent des proportions.

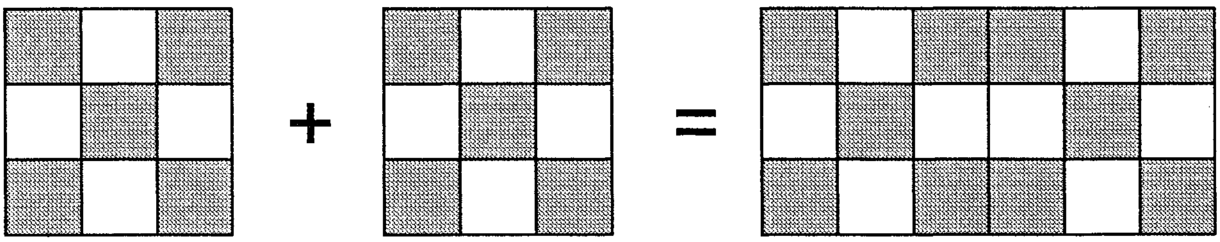
Pour obtenir la proportion du mélange, il faut en faire la moyenne :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{7}+\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{8}{28}+\frac{7}{28}\right)=\frac{15}{56}.$$

Cette dernière situation (mélange de mélanges) peut sembler trop particulière pour qu'on lui apporte de l'importance au collège, on la rencontre cependant plus souvent qu'on ne le croit sous des formes plus pernicieuses :

Exemple 2

La représentation ci-dessous pourrait laisser penser que $\frac{5}{9}+\frac{5}{9}=\frac{10}{18}$



Pour obtenir des écritures correctes, il faut expliciter les référentiels des fractions :

$\frac{5}{9}$ d'un carré + $\frac{5}{9}$ d'un carré = $\frac{10}{18}$ des 2 carrés = $\frac{5}{9}$ des 2 carrés = $\frac{10}{9}$ d'un carré

Exemple 3

Un élève obtient 2 notes : 6 sur 10 et 8 sur 10. Quelle est sa note sur 20 ?

réponse : $\frac{6}{10}+\frac{8}{10}=\frac{14}{20}$

Comment expliquer à un élève son erreur alors que le résultat est correct ?

IV - QUELQUES ELEMENTS POUR UNE PROGRESSION

A part pour la sixième, nous n'avons pas de progression complète et précise à proposer.

Pour les niveaux cinquième et quatrième, nous indiquons seulement quelques éléments disparates qui nous semblent utiles.

1°) Une série de sept activités pour la sixième construite sur les principes suivants :

- introduction par les partages
- varier le plus possible les représentations (part, rapport, division, nombre...)
- introduire très tôt la notation fractionnaire de la division

Les fiches :

LES FRACTIONS.

FRACTIONS D'UN NOMBRE

SIMPLIFIER UNE FRACTION

FRACTIONS ET DIVISIONS

FRACTIONS D'UN SEGMENT

FRACTIONS ET DROITE GRADUÉE

LES FRACTIONS ET LES NOMBRES DÉCIMAUX

Cette dernière fiche est à construire avec les élèves et n'est pas destinée à être distribuée telle quelle.

2°) Les pourcentages et les fractions

La fiche " **LES POURCENTAGES** " est une fiche de synthèse à construire avec les élèves de sixième. Elle insiste sur la relation essentielle pour la suite :

pourcentage ↔ fraction ↔ nombre décimal

Cette relation permet d'effectuer simplement le calcul d'un pourcentage en cinquième.

Exemple :

Dans une classe de collège de 24 élèves, il y a 13 filles.

Quel est le pourcentage de filles ?

Réponse : 13 sur 24 = $\frac{13}{24}$ = 0,5416... ≈ 54 %

3°) vers la multiplication par une fraction

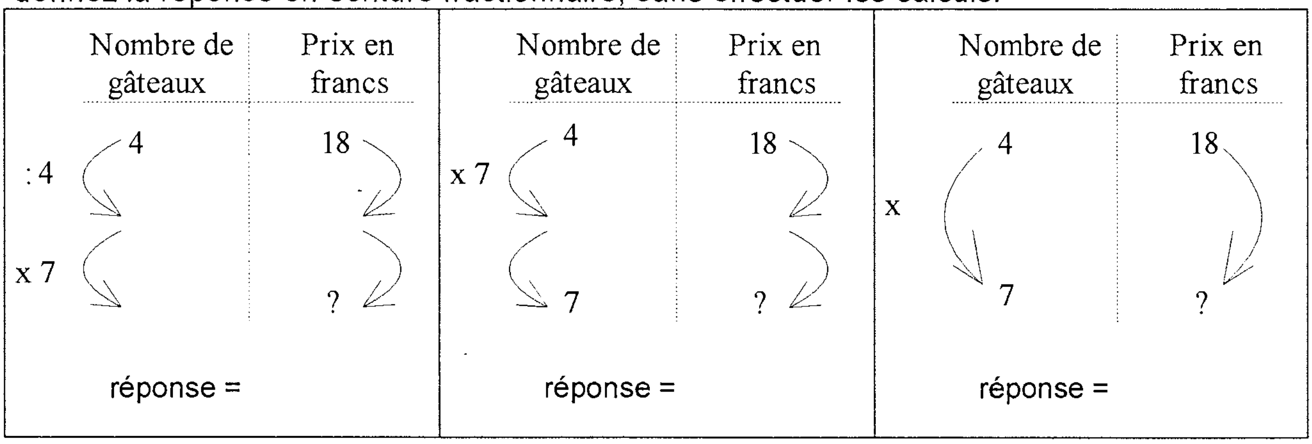
- L'objectif de la fiche " L'ÉCRITURE FRACTIONNAIRE " est d'habituer les élèves au début de la cinquième à utiliser systématiquement l'écriture fractionnaire.

- L'identité $\frac{18}{4} \times 7 = \frac{18 \times 7}{4} = 18 \times \frac{7}{4}$ doit être explicitement établie, la vérification sur une calculatrice n'est pas suffisante. On peut aussi, de manière très profitable, comparer les méthodes pour résoudre un problème de proportionnalité .

Exemple :

4 gâteaux coûtent 18 F. Quel est le prix de 7 gâteaux ?

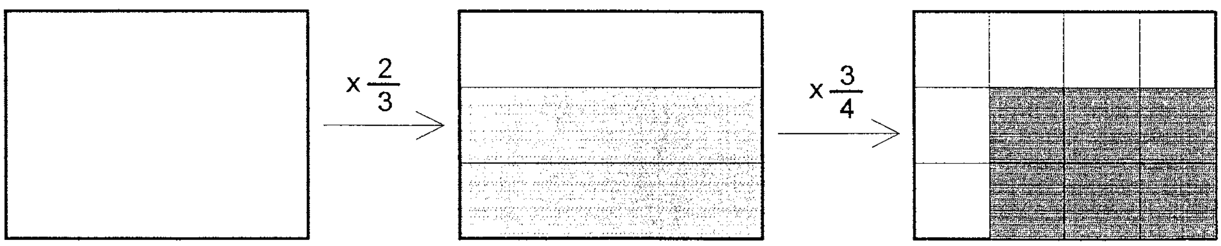
Voici 3 méthodes pour résoudre ce problème. Pour chacune d'elle, complétez le schéma et donnez la réponse en écriture fractionnaire, sans effectuer les calculs.



- La transformation : *les* $\frac{3}{4}$ *de* $15 = \frac{3}{4} \times 15$ peut maintenant se justifier .

$$\textit{les } \frac{3}{4} \textit{ de } 15 = \frac{15}{4} \times 3 = \frac{15 \times 3}{4} = \frac{3}{4} \times 15$$

- La multiplication de fractions peut s'illustrer par une fraction de fraction :



$$\textit{les } \frac{3}{4} \textit{ des } \frac{2}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3 \times 2}{4 \times 3}$$

4°) la fiche " **PUZZLES** "

Une occasion de faire des comparaisons sur des fractions qui représentent des proportions.

5°) La fiche " **Un coureur à pieds .....** " permet d'illustrer (de justifier ?) la règle de division par une fraction.

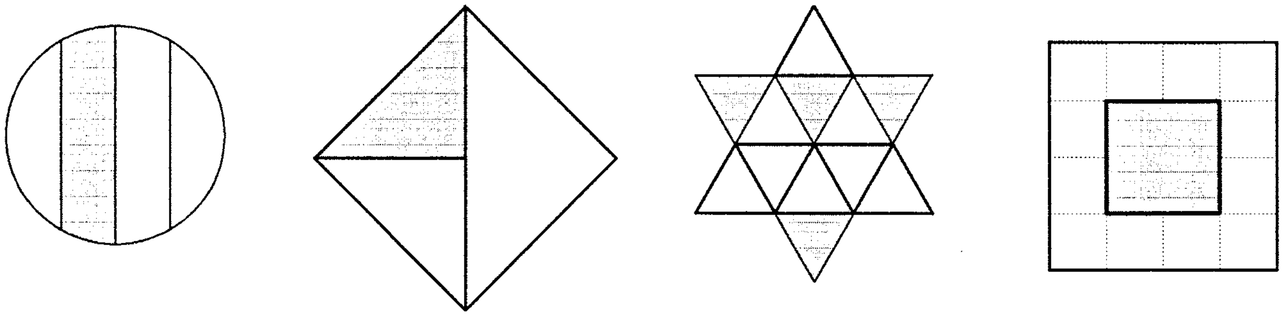
6°) La fiche " **Les cinémas bretons** "
Une introduction aux grandeurs quotients.

7°) Un exercice d'introduction à la notion de pente d'une droite

Quel est l'escalier le plus raide :
celui de l'étage avec des marches de 30 cm de profondeur pour 20 cm de hauteur ?
celui du perron avec des marches de 50 cm de profondeur pour 30 cm de hauteur ?
celui de la cave avec des marches de 25 cm de profondeur pour 15 cm de hauteur ?

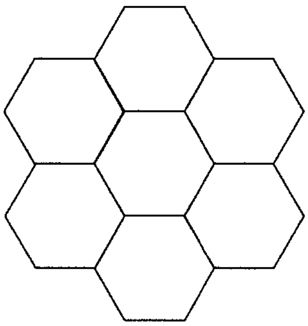
LES FRACTIONS

1°) Dans chacune des figures suivantes, on a cherché à colorier $\frac{1}{4}$ de l'aire.

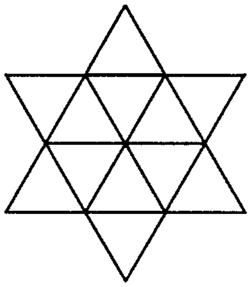


Lesquelles vous semblent justes ? Expliquez.

2°) Coloriez pour chaque figure la fraction indiquée :



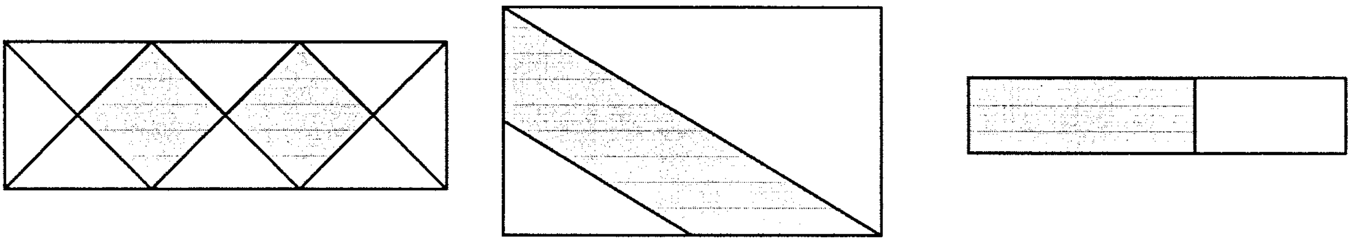
$\frac{4}{7}$



$\frac{3}{4}$

$\frac{2}{5}$

3°) Indiquez pour chaque dessin, quelle est la fraction coloriée.



4°) Pour fabriquer de l'orangeade je dois mettre 1 volume de sirop pour 5 volumes d'eau.
Quelle fraction de sirop y aura-t-il dans l'orangeade ?
Quelle fraction d'eau ?

5°) Si je dors 8 h par jour, je dors combien de mois par an ? Combien d'années en 90 ans ?

6°) Un poisson pèse 1 kg de plus que la moitié de son poids? Quel est son poids ?

FRACTIONS D'UN NOMBRE

1°) Complétez :

$\frac{3}{4}$ h = min $\qquad$ $\frac{3}{4}$ jour = h

$\frac{3}{4}$ litre = cl $\qquad$ $\frac{3}{4}$ kg = g

2°) Sébastien a perdu les $\frac{3}{4}$ de ses billes.

Il en avait 52, combien lui en reste-t-il ?

3°) Une chaîne Hi-Fi est vendue 5 400 F aux conditions suivantes :

- un tiers à la commande
- un sixième à la livraison
- le reste en dix mensualités identiques.

Calculez le montant de chaque mensualité.

4°) Le maillechort est un alliage utilisé pour du matériel de précision,

Il est composé de $\frac{1}{3}$ de nickel, de $\frac{4}{9}$ de cuivre et le reste de zinc.

a) Combien y a-t-il de kg de nickel dans 90 kg de maillechort ?
Même question pour le cuivre et le zinc.

b) Si on ne met que 12 kg de nickel, combien faut-il mettre de cuivre et de zinc ?

5°) Pour préparer l'orangeade, je mélange 1 volume de sirop pour 5 volumes d'eau.

a) Quelle fraction de sirop y a-t-il dans l'orangeade ?
Quelle fraction d'eau ?

b) Quelle quantité d'eau doit-on verser avec 12 cl de sirop ?
Quelle sera la quantité d'orangeade ?

c) Quelle est la quantité de sirop nécessaire pour fabriquer 3 litres d'orangeade ?

d) Quelle quantité d'orangeade peut-on fabriquer avec 1 litre d'eau ?

6°) Quel est l'angle entre les 2 aiguilles d'une horloge à

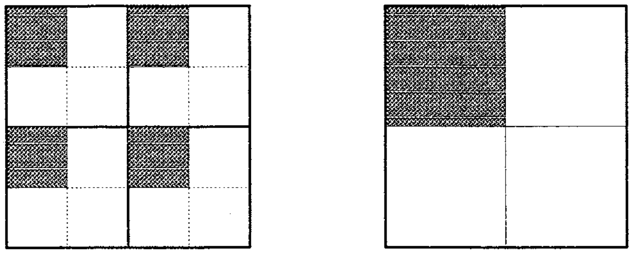
a) 1 h ? 3 h ? 6 h ?

b) 6 h 30 ? 1 h 30 ? (faites un dessin précis)

c) 3 h 15 ?

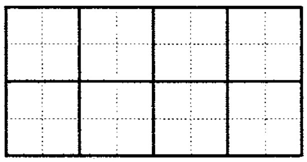
SIMPLIFIER UNE FRACTION

1°) Indiquez pour chaque carré quelle est la fraction coloriée ?

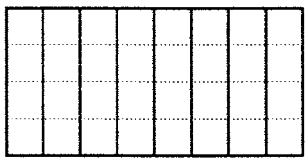


2°) Coloriez

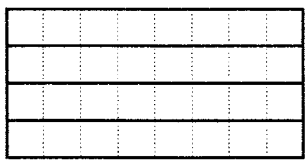
a) 3 cases sur 4



b) 3 colonnes sur 4

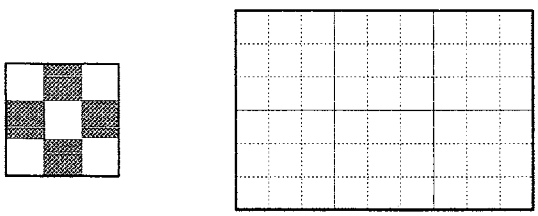


c) 3 lignes sur 4



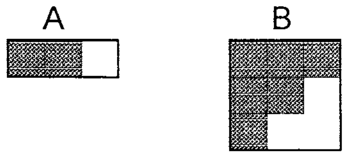
Pour chaque rectangle, indiquez quelle est la fraction coloriée ?

3°) Recouvrez le rectangle avec 6 carrés semblables à celui de gauche.



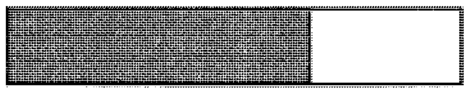
Quelle fraction du rectangle sera noire ?

4°) Ces 2 figures ont la même fraction coloriée . Vrai ou faux ?



Expliquez votre méthode.

5°) Quelle est la fraction coloriée ?
Donnez la fraction la plus simple.



6°) Pierre a perdu 8 billes, il en avait 20.
Quelle fraction lui reste-t-il ?
Donnez la fraction la plus simple.

7°) Un candidat a obtenu 250 voix sur 400 votants.
Quelle fraction des voix a-t-il eue?
Donnez la fraction la plus simple.

8°) Complétez par une fraction et simplifiez la.

45 min = h =

12 min = h =

20 min = h =

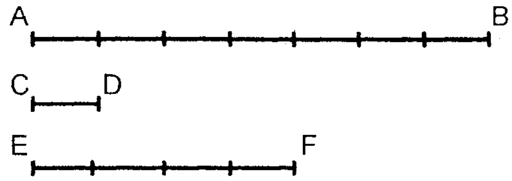
20 h = jour =

20 cl = litre =

20 g = kg =

FRACTIONS D'UN SEGMENT

Exemple :

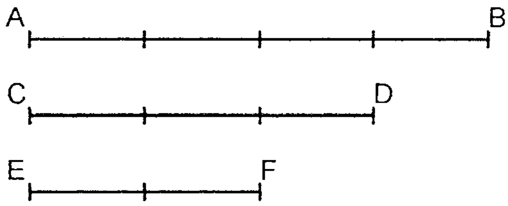


On écrit

$CD = \frac{1}{7} AB$ car $AB = 7\ CD$

$EF = \frac{4}{7} AB$ car $EF = 4\ CD$

1°) Complétez par une fraction :

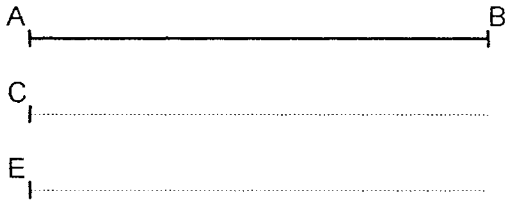


CD = ---- AB

EF = ---- AB EF = ---- CD

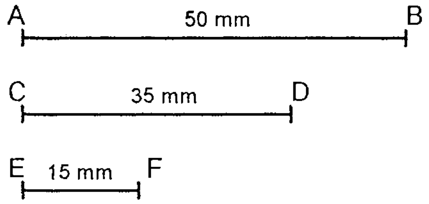
2°) Dessinez les segments [CD] et [EF] pour que :

$CD = \frac{3}{5} AB$ $EF = \frac{2}{3} CD$



Complétez : EF = ---- AB

3°) Complétez par une fraction :



CD = ---- AB

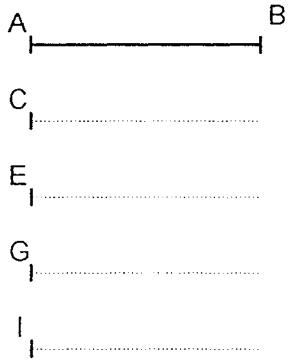
EF = ---- AB

EF = ---- CD

4°) Placez les points D, F, H, J pour que :

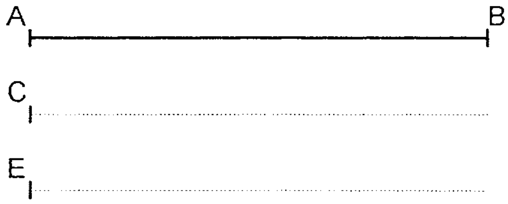
$CD = \frac{2}{3} AB$ $EF = \frac{3}{3} AB$

$GH = \frac{4}{3} AB$ $IJ = \frac{5}{3} AB$

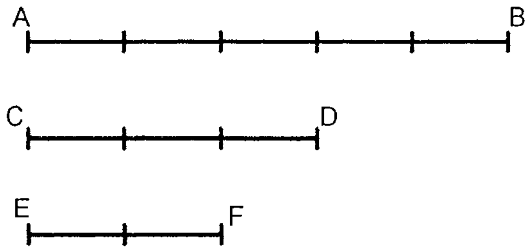


5°) Placez les points D et F pour que :

$CD = \frac{3}{4} AB$ $EF = \frac{4}{3} AB$



6°) Complétez par une fraction :



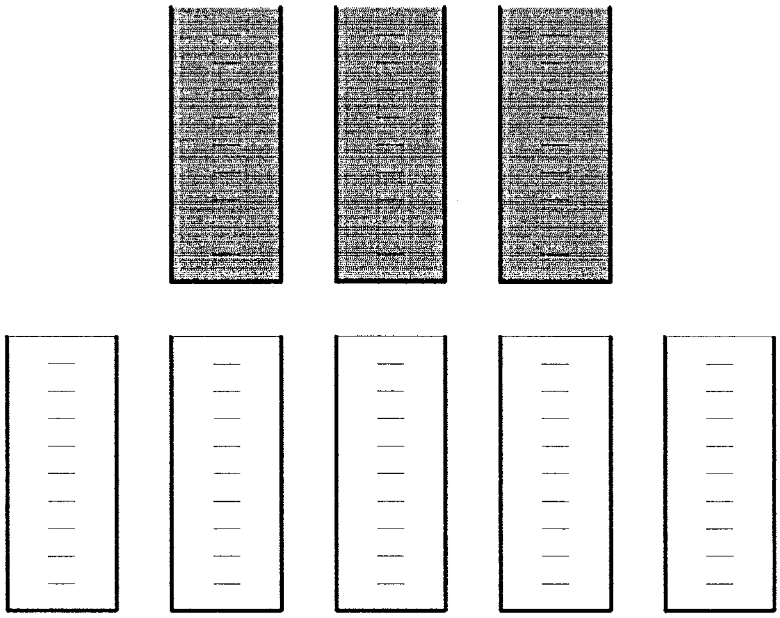
EF = ---- AB EF = ---- CD

AB = ---- CD AB = ---- EF

CD = ---- AB CD = ---- EF

FRACTIONS ET DIVISIONS

1°) Partagez équitablement le contenu des 3 verres pleins dans les 5 verres vides identiques du bas



Quelle fraction de chaque verre sera remplie ?

2°) Pierre, Paul et Jacques doivent se partager équitablement 2 baguettes pour leur pique-nique.

Comment peuvent-ils effectuer ce partage ?

Quelle fraction d'une baguette recevra chacun d'eux ?

3°) Julie, Sophie, Emilie et Stéphanie doivent assurer une permanence au club pendant 3 heures.

Elles décident de se partager équitablement cette période.

Combien de temps chacune d'elle devra-t-elle rester au club ?

4°) 6 camarades ont l'habitude de manger une barre de chocolat à la récréation. Aujourd'hui l'un d'entre eux a oublié son goûter. Ses 5 camarades lui donnent une fraction de leur barre.

Quelle fraction lui ont-ils donnée pour que tout le monde ait la même quantité de chocolat ?

Quelle fraction d'une barre, chacun a-t-il mangée ?

5°) Donnez le résultat de ces divisions sous forme de fraction simplifiée.

Vérifiez vos résultats en posant les divisions à la calculatrice.

40 : 200 =

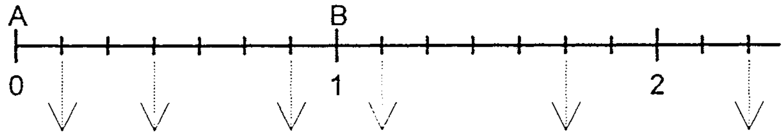
12 : 18 =

5 : 25 =

10 : 15 =

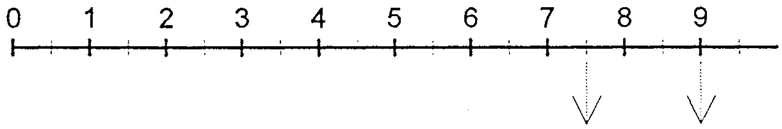
FRACTIONS ET DROITE GRADUEE

1°) Sur cette droite graduée, l'unité est le segment [AB]. Il est partagé en 7 parties égales.



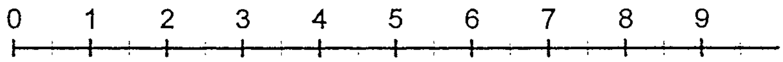
Indiquez sous chaque fléche la fraction correspondante.

2°) Placez sur cette droite graduée les fractions: $\frac{3}{2}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{6}{2}$

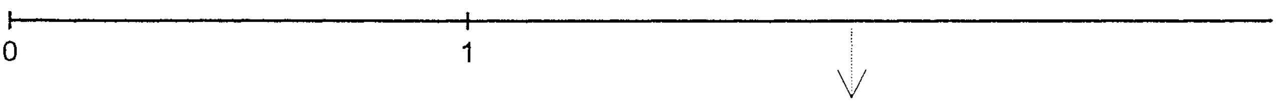


Complétez chaque flèche avec une fraction de dénominateur égal à 2.

3°) Placez approximativement sur cette droite les fractions : $\frac{11}{3}$ $\frac{32}{7}$ $\frac{15}{12}$ $\frac{56}{9}$

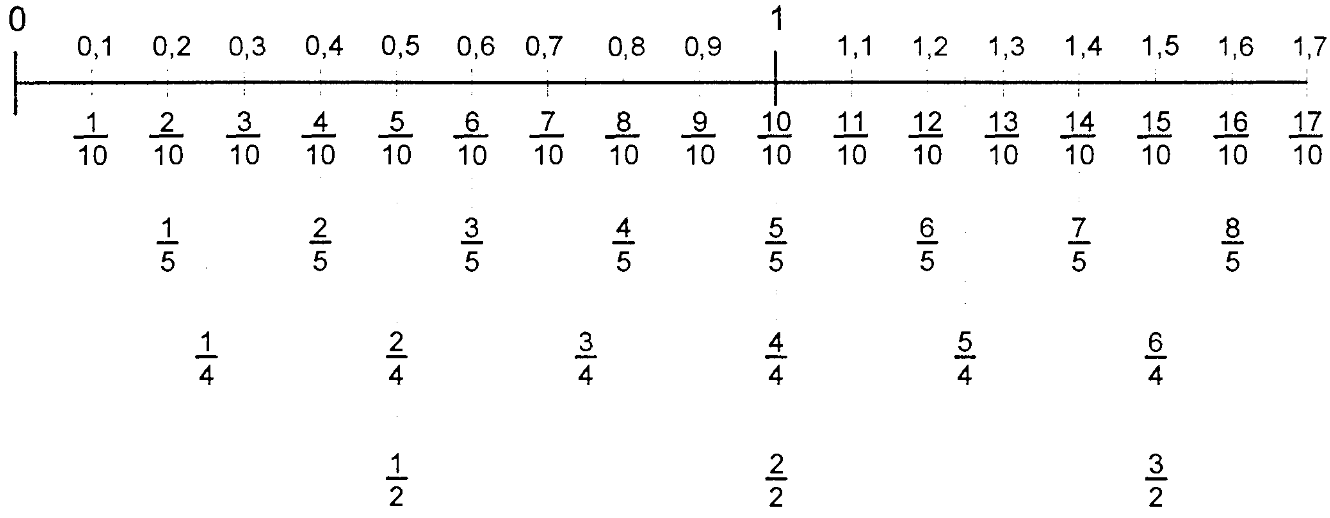


4°) Placez sur cette droite graduée, les fractions : $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{13}{6}$ $\frac{31}{12}$



Trouvez une fraction correspondant à la fléche.

LES FRACTIONS ET LES NOMBRES DÉCIMAUX



A RETENIR

$\frac{1}{2} = 0{,}5$	$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$
$\frac{3}{2} = 1{,}5$	$\frac{3}{4} = 0{,}75$	$\frac{1}{5} = 0{,}2$

Exercice 1 : **Trouvez le nombre décimal correspondant à la fraction $\frac{3}{8}$**

on pose la division :

$$\begin{array}{l|l} 3 & 8 \\ \hline 30 & 0{,}375 \\ \ \ 60 & \\ \ \ \ \ 40 & \\ \ \ \ \ \ \ 0 & \end{array}$$

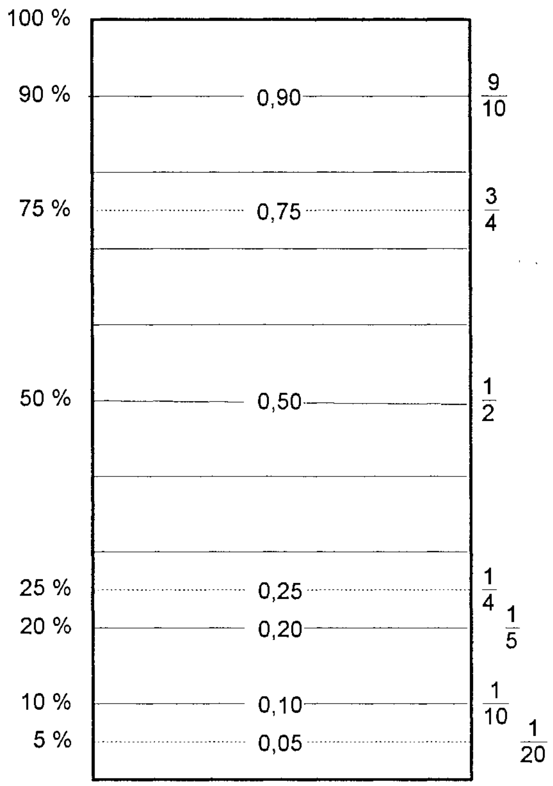
réponse : $\frac{3}{8} = 3 : 8 = 0{,}375$

Exercice 2 : **Trouvez une fraction égale à 2,75**

on écrit d'abord $2{,}75 = \frac{275}{100}$ puis on simplifie la fraction $2{,}75 = \frac{275}{100} = \frac{55}{20} = \frac{11}{4}$

vérification : $\frac{11}{4} = 11 : 4 = 2{,}75$

LES POURCENTAGES



$$\boxed{37\ \% = \frac{37}{100} = 0{,}37}$$

Un pourcentage est une fraction dont le dénominateur est 100

Exercice : **Un commerçant fait une remise de 15 % sur un article coûtant 360 F. Quel est le nouveau prix ?**

Solution :

1°) Montant de la remise :

$$\begin{cases} \dfrac{360}{100} = 3{,}60 \\ 3{,}60 \times 15 = 54 \end{cases} \qquad \underline{\text{ou}} \qquad \frac{360}{100} \times 15 = 54$$

2°) Nouveau prix :

360 - 54 = 306

L'ECRITURE FRACTIONNAIRE

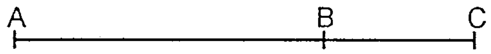
Pour chacun des exercices écrivez la solution en écriture fractionnaire **sans effectuer les calculs.**

Exemple :

Julien a eu 4 notes en mathématiques ce trimestre : 14; 12; 10; 16. Quelle est sa moyenne ?

Réponse : moyenne = $\frac{14+12+10+16}{4}$

1°) AC = 100 km BC = 40 km



K est le milieu de [AB]

Calculez AK

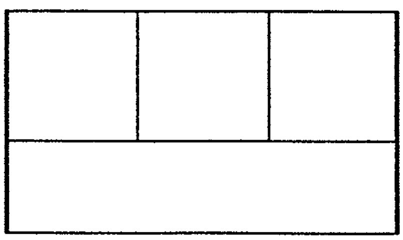
2°) Une chaine HI-Fi est vendue 5 400 F. 600 F comptant et le reste en 10 mensualités.

Quel est le montant d'une mensualité ?

3°) Un marchand achète 45 douzaines d'oeufs pour 315 F. Il les revend 11 F la douzaine.

Quel est son bénéfice sur chaque douzaine ?

4°) Les dimensions de ce terrain sont 246 m sur 145 m.



Il est partagé en 4 parcelles dont 3 sont carrées.

Quelle est l'aire de la parcelle rectangulaire?

5°) Pour fabriquer de la grenadine, on mélange un volume de sirop avec 4 volumes d'eau.

Quelle quantité de grenadine peut-on fabriquer avec 2 litres d'eau ?

6°) Pierre a effectué 12 vaisselles et Anne en a faites 8. Leur mère leur donne 100 F pour les récompenser.

Combien Pierre recevra-t-il ?

7°) Pour financer un voyage scolaire, un groupe d'élèves organise une vente de gâteaux. Ils les achètent 5F et les revendent 7F.

Combien devront-ils vendre de gâteaux pour gagner 1000 F de bénéfice?

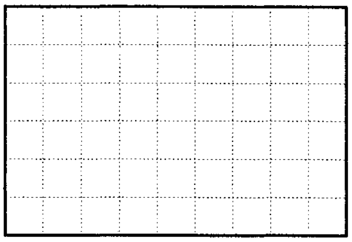
8°) Ma voiture consomme 7 litres d'essence aux 100 km.

Quel est le prix de revient d'un km si l'essence coûte 6 F le litre ?

PUZZLES

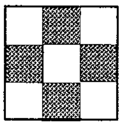
1°)

a) Combien y a-t-il de cases dans ce rectangle ?



b) Recouvrez le rectangle avec le motif A.

motif A

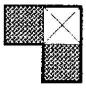


Combien y aura-t-il de cases noires ?

<u>calculs</u>:

c) Combien y aurait-il eu de cases noires si on avait utilisé le motif B ?

motif B

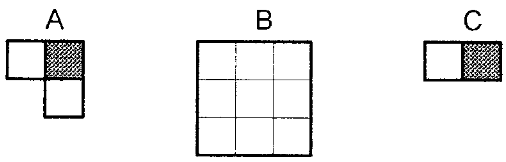


<u>calculs</u>:

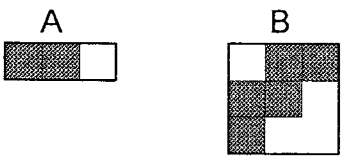
d) Conclusion :

quel est le motif le plus noir ?

2°) Coloriez le carré B pour qu'il soit plus noir que A et moins noir que C.



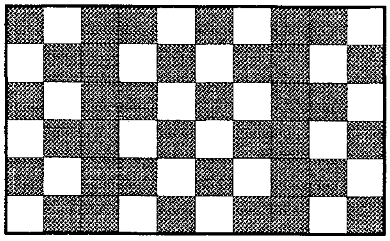
3°) Quelle est la figure la plus foncée ?



Expliquez votre méthode.

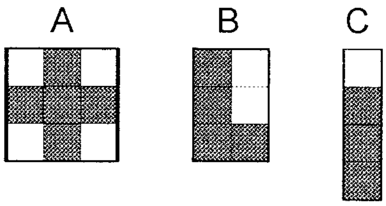
4°)

Voici la forme du motif qui a permis de recouvrir le rectangle ci-dessous.



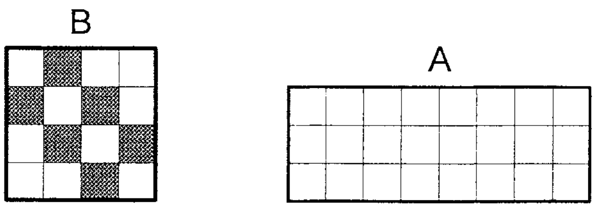
Combien y avait-il de cases noires dans ce motif ?

5°) Rangez ces trois figures de la plus foncée à la moins foncée.



Expliquez votre méthode.

6°) Coloriez le rectangle A pour qu'il ait la même proportion de cases noires que le carré B.



Un coureur à pieds a parcouru 15 km en 75 min .
Combien de temps a-t-il mis pour parcourir 6 km ?

Voici 6 solutions de ce problème, présentées sous forme de tableau :

	Distance km	Temps min
x 6	15	75
: 15		?

T =

	Distance km	Temps min
	15	75
	1	
	6	?

T =

	Distance km	Temps min
:	15	75
	6	?

T =

	Distance km	Temps min
x	15	75
	6	?

T =

Distance km		Temps min
15	$\xrightarrow{x}$	75
6	$\xrightarrow{x}$	?

T =

Distance km		Temps min
15	$\xrightarrow{:}$	75
6	$\xrightarrow{:}$	?

T =

Pour chacune d'elles :

a) complétez les calculs

b) écrivez les calculs sous forme fractionnaire (sans les effectuer)

Les cinémas bretons en 1991

	population (millions)	salles	spectateurs (millions)	recette H.T. (millions de F)
Bretagne	2,8	231	4,7	120
France	56,6	4 590	122	3 800

Utilisez les renseignement ci-dessus pour complétez ce tableau

	Bretagne	France
a) Le nombre moyen de salles pour 1 000 000 d'habitants		
b) Le taux de fréquentation annuel par habitant		
c) Le nombre moyen annuel de spectateurs par salle		
d) Le chiffre d'affaire H.T. moyen annuel d'une salle		
e) Le prix moyen H.T. d'une séance		

indiquez ci-dessous vos calculs pour la Bretagne :

a)

b)

c)

d)

e)

LES PROBLEMES DE RECHERCHE D'UNE 4ème PROPORTIONNELLE

A l'intérieur de l'apprentissage de la proportionnalité, les problèmes de recherche d'une 4ème proportionnelle occupent une place particulière car ils sont souvent considérés comme les plus simples. En fait, ils contiennent déjà toutes les difficultés de la proportionnalité et il est important d'accorder une grande attention à la manière dont les élèves apprennent à les dominer.

1 - Quelques exemples

Les problèmes de 4ème proportionnelle correspondent à la situation suivante : on sait que l'on a une relation de proportionnalité entre 4 nombres (ces nombres sont "en proportion" comme on disait autrefois), on connaît 3 de ces nombres et il faut déterminer le 4ème. Dans le domaine numérique, c'est par l'écriture de rapports que l'on définit généralement la relation :

exemple 1 *Trouver x tel que :* $\frac{2}{5} = \frac{6}{x}$

Ce genre d'exercice purement numérique n'a que peu d'intérêt, bien sûr, pour la compréhension de la proportionnalité. Dans le domaine des grandeurs, en revanche, la tâche devient plus intéressante car elle correspond à des situations que l'on rencontre en dehors du cours de mathématiques :

exemple 2 *Sachant qu'un ouvrier a gagné 216 francs en 12 jours, combien gagnera-t-il en un mois de 26 jours s'il travaille à la journée.*
(manuel d'arithmétique de 1920)

exemple 3 *Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m^2. Combien de m^2 peut-on peindre avec 4 kg de peinture ?*

exemple 4 *On photographie une affiche rectangulaire de 80 cm sur 40 cm. Le grand côté de l'affiche mesure 10 cm sur la photo. Combien mesure son petit côté sur la photo ?*

Notons que dans le passé on désignait souvent ces problèmes sous le nom de "règle de trois" tant leur résolution était associée à une mathématisation particulière, celle de l'égalité de rapports :

si $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

alors $x = \frac{b \times c}{a}$

2 - La structure des problèmes et ses représentations

Dans le cas d'une relation mettant en oeuvre des mesures, cette structure est celle d'un isomorphisme "simple" que les didacticiens ont proposé, ces dernières années, de représenter ainsi :

exemple 2

journées	salaire (en f)
12	216
26	x

Il faut remarquer que cette structure n'est pas différente lorsque le problème implique seulement une multiplication ou une division c'est-à-dire lorsque l'un des trois nombres donnés correspond à l'unité :

exemple 5 *Nicolas achète 16 albums de Mickey. Le prix d'un album est de 4 francs. Combien Nicolas doit-il payer ?*

albums	prix (en f)
1	4
16	x

La tâche consistant à calculer une $4^{\text{ème}}$ proportionnelle n'est donc qu'un cas particulier par rapport à cette structure générale mettant en oeuvre un isomorphisme simple entre deux espaces de mesures. Du point de vue mathématique, on sait que cette structure est dotée de nombreuses propriétés (dont celles dites de linéarité) sur lesquelles on peut s'appuyer pour résoudre le problème posé.

De quels moyens disposons-nous pour représenter la structure de ces problèmes ?
On peut distinguer au moins quatre langages différents.

Les tableaux : il en existe plusieurs variantes les plus habituelles étant celles-ci :

exemple 2

journées	salaire
12	216
26	x

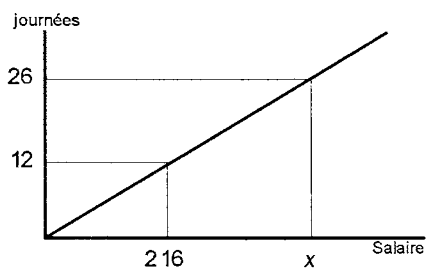
journées salaire

$12 \longrightarrow 216$

$26 \longrightarrow x$

Les graphiques :

exemple 2



Les proportions (au sens d'égalités de rapports) :

exemple 2 $\frac{12}{26} = \frac{216}{x}$ ou $\frac{216}{12} = \frac{26}{x}$

Les égalités algébriques :

exemple 2 $12 \times x = 216 \times 26$ ou $x = \frac{216 \times 26}{12}$

Pour la classe de 6$^{\text{ème}}$, c'est le langage des tableaux qui paraît le mieux adapté d'abord parce qu'il est compréhensible pour les élèves mais aussi parce qu'il se prête bien à la mise en oeuvre de nombreuses procédures.
De plus, la présentation avec des flèches (sans le cadre du tableau) est plus souple car elle laisse la possibilité d'intercaler des lignes :

exemple 2

journées		salaire (en f)
12	⟶	216
24	⟶	?
2	⟶	?
26	⟶	x

3 - Les procédures permettant de trouver une 4$^{\text{ème}}$ proportionnelle

Les recherches sur la proportionnalité menées ces dernières années ont clairement montré que les élèves sont plus à l'aise avec les raisonnements de type ***scalaire*** (qui portent sur les relations entre des mesures concernant une même grandeur) qu'avec les raisonnements de type ***fonction*** (qui impliquent la mise en relation de mesures concernant des grandeurs différentes) :

exemple 3 *Avec un pot de 6 kg de peinture, on peint une surface de 15 m^2.*
Combien de m^2 peut-on peindre avec 4 kg de peinture ?

les élèves vont spontanément se centrer sur la relation entre 6 kg et 4 kg plutôt que sur la relation entre 6 kg et 15 m^2.

Lorsque ce sont des rapports qui sont pris en compte, on parle aussi de rapports *internes* (du point de vue de la grandeur : 4 / 6 ou 6 / 4 dans l'exemple 3) et de rapports *externes* (6 kg / 15 m^2 ou 6 / 15 kg/m^2 dans l'exemple 3).

Dans le cas où les grandeurs sont de même nature cette distinction "interne/externe" peut concerner les objets physiques eux-mêmes lorsque ceci est pertinent :

exemple 4 *On photographie une affiche rectangulaire de 80 cm sur 40 cm.*
Le grand côté de l'affiche mesure 10 cm sur la photo.
Combien mesure son petit côté sur la photo ?

le rapport 80 / 40 n'a pas la même signification que le rapport 80 / 10.

La notion de ***procédure scalaire*** est intéressante car elle permet également de caractériser les procédures de décomposition très fréquentes chez les élèves de 6ème :

exemple 2 décomposition de 26 en 24 + 2 évoquée ci-dessus

exemple 3

peinture (en kg)	surface (en m^2)
6	15
2	?
4	x

Qu'en est-il maintenant du ***passage par la valeur unitaire*** ? Celui-ci peut correspondre à deux procédures différentes :

- soit il s'agit simplement d'un cas particulier de décomposition scalaire (c'est généralement le cas pour les élèves de 6ème) :

exemple 2

journées	salaire (en f)
12	216
1	?
26	x

- soit il résulte d'un raisonnement de type "fonction" dans lequel on cherche à conserver la signification du coefficient en termes de grandeurs :

exemple 2 journées salaire (en f)

$$12 \xrightarrow{\times\ 18\ f/j} 216$$

$$26 \xrightarrow[\times\ 18\ f/j]{} x$$

Toutes ces procédures avec leurs variantes sont à la portée des élèves de 6ème et éclairent chacune un aspect de la proportionnalité. C'est en découvrant peu à peu l'ensemble de ces points de vue que les élèves renforcent leur compréhension des propriétés mathématiques sous-jacentes.

La représentation sous la forme d'un tableau fléché est compatible avec tous ces points de vue et facilite grandement, en particulier, la mise en oeuvre des procédures de type scalaire les plus accessibles aux élèves de 6ème.

Il en va différemment, en revanche, pour les procédures dites de la *règle de trois* et du *produit en croix* qui ne peuvent avoir de sens qu'à partir du moment où les élèves sont très à l'aise avec le langage des proportions et avec l'écriture algébrique, c'est-à-dire en 4ème.
Ces deux procédures s'appuient sur des propriétés mathématiques mais n'ont aucune signification en termes de grandeurs et sont généralement perçues par les élèves comme des "trucs" qui leur donnent le résultat recherché mais sans qu'ils sachent pourquoi.
Il n'y a donc aucun intérêt à évoquer, avant la classe de 4ème, ces deux procédures algorithmiques qui n'apportent rien à la compréhension de la proportionnalité.

4 - Les obstacles dans la recherche d'une 4ème proportionnelle

On sait maintenant que la maîtrise complète d'une tâche comme celle-ci ne se fait pas "par tout ou rien". Des élèves qui ont compris le "principe" et qui sont capables de trouver une procédure de résolution pour certains problèmes peuvent échouer dans d'autres pourtant très proches. On peut distinguer au moins trois sortes d'obstacles dans le cas de la recherche d'une 4ème proportionnelle :

- des obstacles de nature numérique tout d'abord ; un ou plusieurs décimaux dans les données rendent la compréhension du problème plus difficile.
Il en est de même pour les rapports dont la complexité peut masquer la relation de proportionnalité et conduire, en outre, à des erreurs de calcul (par exemple 12 / 26 dans l'exemple 2) ;

- il existe aussi des obstacles liés à la nature des grandeurs ; les grandeurs discrètes sont généralement mieux traitées que les grandeurs continues ; certaines grandeurs, comme les prix, sont plus familières que d'autres, ce qui est généralement une aide mais peut aussi constituer un obstacle dans certains cas ;

- lorsque l'énoncé met en jeu des rapports particuliers comme les pourcentages ou les échelles, de nouveaux obstacles apparaissent immédiatement.

LES RECETTES et LES FRIANDISES.

Le groupe de recherche s'est intéressé ainsi à deux séries de quatre exercices .
Les valeurs numériques sont toujours les mêmes (3, 15, 72) mais chaque exercice correspond à l'une des quatre manières possibles de combiner ces nombres dans une structure de type 4ème proportionnelle.

LES RECETTES

exercice 1	Il faut 3 sucres pour 72 g d'eau, donc 15 sucres pour ..... g d'eau
exercice 2	Il faut 3 sucres pour 15 g d'eau, donc 72 sucres pour ..... g d'eau
exercice 3	Il faut 15 sucres pour 72 g d'eau, donc 3 sucres pour ..... g d'eau
exercice 4	Il faut 15 sucres pour 3 g d'eau, donc 72 sucres pour ..... g d'eau

LES FRIANDISES

exercice 1	3 friandises coûtent 72 F, 15 friandises coûtent ..... F
exercice 2	3 friandises coûtent 15 F, 72 friandises coûtent ..... F
exercice 3	15 friandises coûtent 72 F, 3 friandises coûtent ..... F
exercice 4	15 friandises coûtent 3 F, 72 friandises coûtent ..... F

Les taux de réussite obtenus pour chacun de ces huit exercices sont les suivants :

	LES RECETTES *N = 43*	LES FRIANDISES *N = 106*
exercice 1	**88 %**	**72 %**
exercice 2	**84 %**	**72 %**
exercice 3	**67 %**	**55 %**
exercice 4	**49 %**	**41 %**

On voit que les exercices friandises sont un peu moins bien réussis dans l'ensemble que les exercices recettes mais surtout qu'il existe un ordre de difficulté sur les quatre exercices de chaque sorte :

réussite ex 1 = réussite ex 2 > réussite ex 3 > réussite ex 4

Les exercices 3 et 4 se caractérisent par la nécessité de faire des calculs numériques moins "sympathiques" que ceux des exercices 1 et 2 (des divisions en particulier).

Il est intéressant aussi d'analyser la manière dont les élèves procèdent pour résoudre ces exercices. On peut facilement repérer, en particulier, ceux qui mettent en oeuvre une procédure scalaire (prise en compte des rapports internes aux grandeurs). Voici, parmi les élèves qui donnent des réponses correctes, ceux qui ont une telle procédure scalaire :

	LES RECETTES	LES FRIANDISES
exercice 1	**76 %**	**50 %**
exercice 2	**72 %**	**18 %**
exercice 3	**69 %**	**22 %**
exercice 4	**52 %**	**30 %**

ces pourcentages de procédures scalaires sont calculés
par rapport aux élèves qui réussissent chacun des exercices

On observe tout d'abord une différence importante entre les deux séries d'exercices :

- pour les recettes, la majorité des élèves qui réussissent raisonne de manière scalaire quel que soit l'exercice,
- pour les friandises, en revanche, il n'y a que pour l'exercice 1 que la proportion d'élèves qui raisonne de cette manière atteint 50 %.

Ceci s'explique par le fait qu'une situation portant sur des prix incite plus à raisonner à partir du prix unitaire sauf si le rapport interne est vraiment très simple comme dans l'exercice 1 (" 5 fois plus de friandises donc le prix est 5 fois 72 f ").

Dans le cas des recettes, on constate également que le recours à une procédure scalaire diminue lorsque le rapport devient plus complexe sur le plan numérique.
Ainsi pour l'exercice 4 il faut raisonner à partir de " 72 / 15 fois plus" ou " 4,8 fois plus " de sucres si l'on procède de manière scalaire. Pour cet exercice, les échecs deviennent beaucoup

plus nombreux (nous avons vu que seulement un élève sur deux réussit à le résoudre) et parmi ceux qui donnent la bonne réponse la moitié recourt à une autre procédure ; celle-ci consiste souvent à calculer la masse d'un sucre (3 g / 15).

Ces résultats montrent donc que l'on retrouve bien la prédominance des raisonnements de type scalaire chez les élèves de 6ème lorsqu'ils ont à résoudre un problème de 4ème proportionnelle mais que plusieurs facteurs peuvent les amener à utiliser une procédure différente :

- lorsque la valeur unitaire a un sens très fort, comme dans le cas des prix, les élèves se tournent plus facilement vers le calcul de celle-ci (mais le taux de réussite diminue alors),
- lorsque les calculs numériques résultant d'une procédure scalaire deviennent complexes, ils encouragent les élèves à chercher une autre procédure mais, ici encore, avec un taux d'échec qui augmente.

4 - Quel apprentissage ?

Dans le cadre du groupe de recherche, nous avons construit une séquence comportant une série de petits problèmes de 4ème proportionnelle classés en trois niveaux difficulté. Celle-ci n'a pas été suffisamment expérimentée pour que nous puissions la présenter comme un résultat de notre recherche.

La démarche adoptée pour le déroulement de cette séquence a consisté à laisser aux élèves un choix total dans les procédures de résolution mais à introduire progressivement la représentation sous la forme d'une correspondance fléchée. Sans que l'on puisse tirer de conclusion quant à l'efficacité de cette séquence particulière, nous pensons qu'il est souhaitable, en 6ème, de travailler spécifiquement ces problèmes de 4ème proportionnelle surtout dans le cas des élèves le plus en difficulté

A LA RECHERCHE DE LA PROPORTIONNALITE

" La proportionnalité n'est plus aujourd'hui dans les mathématiques savantes, ni comme objet d'étude ni comme outil de travail spécifique. On ne parle pratiquement de proportionnalité qu'à l'école primaire et dans les premières années du secondaire et, par le biais de l'école, dans la culture courante.
Cela noté, si on continue à considérer aujourd'hui la proportionnalité comme un objet mathématique, si on enseigne la proportionnalité et si on apprend à résoudre des problèmes de proportionnalité en classe de mathématiques, ce n'est plus en référence au travail des mathématiciens actuels mais en référence au système d'objets et de pratiques qui ont imprégné pendant des siècles le travail mathématique dans nos sociétés. "

Marianna Bosch I Casabò . La pensée sauvage (1994)

I. LA PROPORTIONNALITE ET SES PROPRIETES

A- Qu'est-ce qu'une situation de proportionnalité ?

- **UNE RELATION ENTRE DEUX GRANDEURS**

Commençons par un voyage. On peut imaginer avoir repéré à chaque instant notre position. On dispose ainsi pour chaque portion du trajet de deux grandeurs qui la caractérise : sa longueur et sa durée.

Pour qu'il y ait proportionnalité, il faut que le mouvement soit uniforme ce qui peut se traduire par : *si deux portions du trajet sont de longueurs égales elles seront parcourues en des temps égaux et réciproquement.*

C'est cette relation que l'on retrouve sous différents aspects à la base de toute situation de proportionnalité :

- Les corps homogènes

A conditions de températures et de pressions équivalentes, deux masses égales d'un même corps occupent des volumes égaux.

- Les partages équitables

L'équité pourra être que chacun reçoive la même somme; mais aussi que chacun reçoive selon son travail (à travail égal, salaire égal) ou selon le capital investi.
La proportionnalité devient alors la règle du calcul, mais sans justifier pour autant le choix effectué.

- Les mélanges

Pour savoir si la soupe est trop salée, une cuillerée suffit si la soupe a été bien remuée, toutes les cuillerées contiennent la même quantité de sel.

- **les échelles**

Pour qu'il n'y ait pas de déformation, il faut que 2 longueurs égales dans la réalité soient représentées par 2 longueurs égales sur le plan.

De plus si cette condition est réalisée dans une transformation plane, les angles et donc les formes sont conservées.

La Terre étant sphérique, on ne peut pas en obtenir une représentation plane où toutes les proportions entre les longueurs sont respectées.

Sur ce planisphère obtenu par la projection de Mercator (projection cylindrique), les régions polaires (le Groenland par exemple) sont disproportionnées par rapport à l'équateur.

C'est cependant une représentation conforme de la Terre (les angles sont conservés), pour garder son cap il suffit donc de suivre une ligne droite. Mais cette ligne droite (loxodromie) ne représente pas la route la plus courte entre 2 points (géodésique)

- **Les recettes de cuisines**

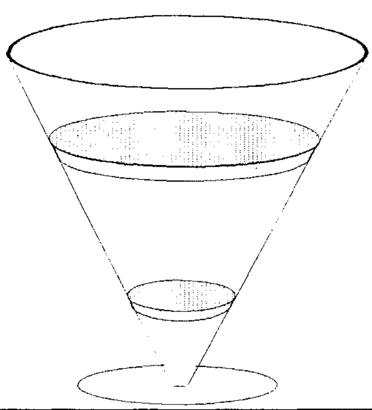
Elles sont données en général pour 4 personnes. Si ce n'est pas le cas, on calcule les nouvelles quantités proportionnellement au nombre de convives en considérant que tous les convives ont le même appétit.

- **Les conversions**

A part pour les mois et les années qui ne comptent pas tous le même nombre de jours, ce sont des problèmes qui relèvent de la proportionnalité. La généralisation du système métrique impose lentement et difficilement le système décimal, qui ramène toute conversion à un simple déplacement de virgule.
La persistance de l'utilisation des " anciens francs " nous montre que ce n'est pas là une mince affaire et que les difficultés rencontrées ne sont pas que du ressort des mathématiques. La création prochaine de " l'Euro ".sera l'occasion d'ouvrir un nouveau chantier.

On voit sur ces exemples que la proportionnalité côtoie des notions comme la régularité, l'homogénéité, l'équité, l'équivalence ...

Le volume de liquide dans ce verre conique est-il proportionnel à la hauteur d'eau ?



Réponse :

inutile ici de connaître de formule et de faire le moindre calcul, il n'y a pas proportionnalité tout simplement parce que deux tranches horizontales de hauteurs égales n'ont pas des volumes égaux.

L'intérêt essentiel de cette relation entre deux grandeurs proportionnelles est qu'elle permet de nous dispenser de raisonner sur les objets pour se placer directement dans le cadre des grandeurs.

En effet, inutile par exemple dans un problème de vitesse uniforme, d'identifier la portion du trajet qui mesure 12 km, puisque le temps de parcours est le même pour tous les trajets de 12 km.

C'est ce qui explique aussi, qu'elle soit souvent occultée au profit de la linéarité dans la mesure où les problèmes sont directement posés dans le cadre des grandeurs, ce qui est une manière de l'admettre implicitement.

Exemple :

j'ai acheté 4 tee-shirts pour 100 F. Quel est le prix d'un tee-shirt ?

Il faut bien admettre que tous les tee-shirts ont le même prix, si on veut résoudre le problème.

- **LA LINEARITE**

L'équivalence des grandeurs ne suffit pas à établir la proportionnalité, il faut aussi s'assurer de la compatibilité des additions

Exemple 1

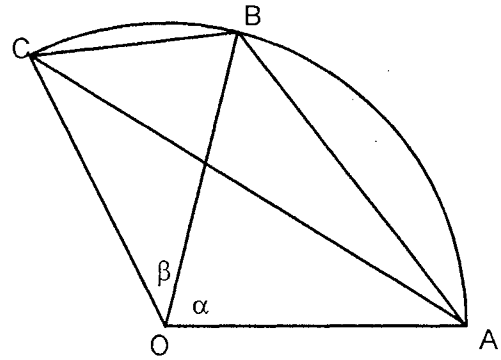
Dans un cercle donné, des angles au centre égaux interceptent des cordes de même longueur et des arcs de même longueur.

Mais seule la longueur des arcs de cercle est proportionnelle à l'angle au centre car :

$$\ell(\alpha) + \ell(\beta) = \ell(\alpha + \beta)$$

et

$$c(\alpha) + c(\beta) > c(\alpha + \beta)$$

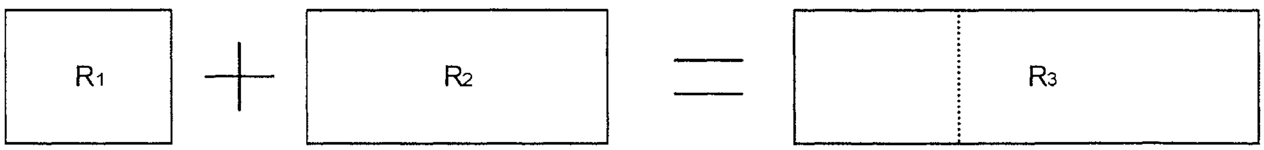


$\ell(\alpha)$ = la longueur de $\widehat{AB}$

$c(\alpha) = AB$

Exemple 2

On peut définir l'addition de rectangles de même largeur par leur réunion :



Les périmètres des rectangles ne s'ajoutent pas, c'est pourquoi le périmètre d'un rectangle n'est pas proportionnel à sa longueur.

Remarque : encore une fois, on peut reconnaître la proportionnalité sans faire de calcul et sans connaître de formule compliquée.

La linéarité se prolonge facilement à **la multiplication par un entier** :
si $f(x) + f(y) = f(x + y)$ alors $f(x) + f(x) = f(x + x)$ soit $2f(x) = f(2x)$
et par récurrence $k\,f(x) = f(kx)$ (k est un entier, x une grandeur)

Par exemple : " si je mange trois fois plus de gâteaux, je paierai 3 fois plus cher "

> <u>le test du double</u>:
> *Si un enfant mesure 1,20 m à 10 ans, il ne mesurera sans doute pas 2,40 m à 20 ans et en tout cas pas 4,80 m à 40 ans. La taille n'est donc pas proportionnelle à l'âge.*

Enfin si la division des grandeurs en jeu a un sens, on peut étendre la linéarité à la multiplication par un rationnel (p et q entiers)

$$q\,f\left(\frac{x}{q}\right) = f\left(q\,\frac{x}{q}\right) = f(x) \qquad \text{d'où} \qquad f\left(\frac{x}{q}\right) = \frac{1}{q}f(x) \qquad \text{et} \qquad f\left(\frac{p}{q}x\right) = \frac{p}{q}f(x)$$

Pour arriver aux nombres réels il faudrait d'autres hypothèses (continuité ou monotonie)

B- les deux grandeurs sont de nature différente

<u>Exemple</u> :

un coureur à pieds a parcouru 15 km en 75 min .
Combien de temps a-t-il mis pour parcourir 6 km ?

- **LES RAPPORTS INTERNES**

La linéarité suffit pour résoudre ce problème dans le cadre des grandeurs :

<u>passage à l'unité</u> :

	distance	temps	
	15 km	75 min	
: 15	1 km	5 min	: 15
x 6	6 km	t	x 6

<u>opérateur multiplicatif</u>

	distance	temps	
	15 km	75 min	
x 0,4	6 km	t	x 0,4

Dans le cas où les rapports ne sont pas décimaux, la deuxième méthode peut se traduire par l'égalité $\frac{6}{15} = \frac{t}{75}$ ce qui permet de déduire $t = \frac{6x75}{15}$

L'égalité de tels rapports fut la seule méthode générale utilisée pendant des siècles pour résoudre les problèmes de proportionnalité.

- **LES COEFFICIENTS DE PROPORTIONNALITE**

On peut aussi utiliser le rapport entre 15 et 75, mais ce rapport n'est pas un nombre puisque 15 km x 5 = 75 km et non pas 75 min.

Le refus d'utiliser de tels rapports a longtemps alourdi l'expression des lois physiques.

> " On sent bien qu'on ne peut diviser l'espace par le temps; ainsi quand on dit que les vitesses sont comme les espaces divisés par les temps, c'est une expression abrégée qui signifie [...] que si l'on prend, par exemple, le pied pour mesure des espaces, et la minute pour la mesure des temps, les vitesses de deux corps qui se meuvent uniformément sont entre elles comme les nombres de pieds parcourus divisés par les nombres de minutes employées à les parcourir, et non pas comme les pieds divisés par les minutes ."
> d'Alembert. *Traité de dynamique.* [1758]

Pour que ce rapport devienne un nombre, il est nécessaire de sortir du cadre des grandeurs en ne considérant plus que leurs mesures dans des unités fixes.

distance (km)	15	1	0,2	6	d	0,2 t
temps (min)	75	5	1	30	5d	t

x 5

on peut en déduire les formules algébriques : $t = 5\ d$ ou $d = \frac{t}{5}$

On pourrait utiliser le coefficient inverse, ce qui donne le choix entre multiplier par 5 ou diviser par son inverse 0,2.

Ces deux valeurs correspondent aux valeurs unitaires :

- 5 min au km
- 0,2 km à chaque min

Elles dépendent des unités choisies, si on change les unités, les coefficients de proportionnalité changent.

- **LES GRANDEURS-QUOTIENTS**

Mais peut-on considérer que pour un même mouvement uniforme, il y a autant de vitesses différentes que de manières de choisir les unités de longueurs et de temps ?

Notre expérience nous fait percevoir directement la vitesse comme une grandeur à part entière sans qu'il soit nécessaire de faire intervenir des mesures de distance ou de temps :

- quand un coureur dépasse un autre, quand un véhicule accélère.
- les compteurs des voitures indiquent directement la vitesse

- le vent de la vitesse, le bruit ou les vibrations sont autant d'éléments subjectifs d'appréciation de notre vitesse ...etc.

Le bon sens nous fait dire plus volontiers qu'il y a une seule vitesse et qu'elle a diverses expressions suivant les unités choisies.

Mais dans ce cas la vitesse n'est plus un nombre mais une grandeur qui se mesure avec des unités qui ont la dimension d'un quotient (m / s).

On peut alors utiliser un formalisme parfaitement cohérent sur les grandeurs en respectant les équations aux dimensions.

Exemple :

$$\begin{array}{ccccc} & \textbf{temps} & & \textbf{distance} & \\ & 75\text{ min} & \xrightarrow{\text{x V}} & 15\text{ km} & \\ (\text{x } 0{,}4) & \downarrow & & \downarrow & (\text{x } 0{,}4) \\ & t & \xrightarrow{\text{x V}} & 6\text{ km} & \end{array}$$

$$v = \frac{15\text{ km}}{75\text{ min}} = 0{,}2\text{ km / min}$$

$$t = \frac{6\text{ km}}{0{,}2\text{ km / min}} = 30\text{ min}$$

On utilise 4 grandeurs de types différents :

- les deux quantités proportionnelles (distance et temps)
- des rapports scalaires (sans dimension.) internes aux grandeurs
- une grandeur quotient : la vitesse $v = 0{,}2\text{ km / min} = \dfrac{0{,}2\text{ km}}{1\text{min}} = \dfrac{200\text{ m}}{60\text{ s}} \approx 3{,}33\text{ m / s}$

Les formules de calcul restent alors identiques quelles que soient les unités:

$$V = \frac{D}{T} \qquad D = VT \qquad T = \frac{D}{V}$$

> " Nous pensons que des grandeurs physiques ont leur place dans l'enseignement des mathématiques. Longueurs, aires et volumes relèvent de la géométrie. Pourquoi exclure masses, durées, vitesses, débits, masses volumiques sous le vain prétexte qu'ils relèvent de la Physique ? A moins qu'on estime que les calculs mettant en jeu des grandeurs physiques posent des problèmes délicats qu'il est bien agréable de confier au physicien. Ce serait, dans ce cas, chercher un refuge confortable dans une rigueur mathématique fallacieuse et glacée. Mais le confort serait-il alors pour l'élève ou pour le professeur ? "
>
> APMEP *MOTS Tome VI* (1982)

C- les deux grandeurs sont de même nature

1°) LES UNITES SONT DIFFERENTES

On se retrouve en fait dans le cadre précédent de deux grandeurs de nature différente, même si le rapport externe a la dimension d'un nombre .

Exemple 1 : pour convertir 3 min en secondes, le rapport est 60 s / min .

à noter $60 \text{ s/min} = \dfrac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}} = 1$.

Exemple 2 : dans un problème d'échelle sur une carte au $\dfrac{1}{200\,000}$, il est plus agréable d'utiliser le rapport " 1 cm sur la carte représente 2 km dans la réalité "..

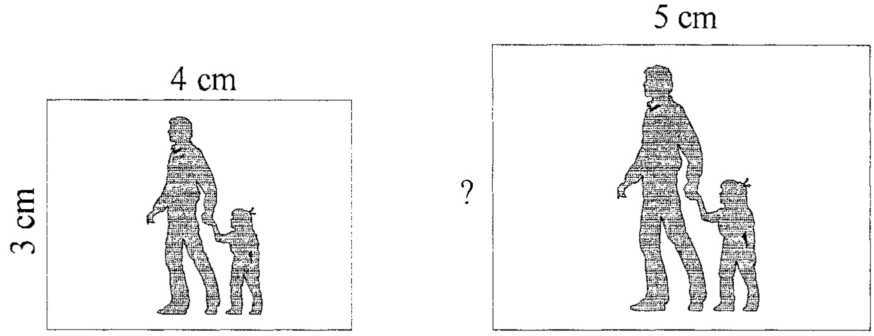
2 est le coefficient de proportionnalité quand les unités sont en cm et en km.

$\dfrac{1}{200\,000}$ est le rapport externe, c'est un nombre qui ne dépend pas des unités choisies . Par exemple $\dfrac{1 \text{ cm}}{2 \text{ km}} = \dfrac{1 \text{ cm}}{200\,000 \text{ cm}} = \dfrac{1}{200\,000}$.

2°) INTERNE OU EXTERNE ?

Si les deux grandeurs sont mesurées dans la même unité, la distinction entre rapport interne et externe devient bien délicate, d'autant que bien souvent plusieurs choix sont possibles.

- **LES AGRANDISSEMENTS**



Si l'image n'a pas été déformée, ce problème peut se résoudre dans un tableau à 4 cases :

	largeur	longueur
original	3	4
agrandissement		5

Mais qu'elles sont les grandeurs proportionnelles dans ce tableau ?

S'agit-il :

- des dimensions de l'original et de l'agrandissement ?

	largeur	longueur	diagonale	père	fille
original (cm)	3	4	5	2,6	1,3
agrandissement (cm)		5			

Le coefficient de proportionnalité $\frac{5}{4}$ est alors l'échelle de l'agrandissement.

- Les largeurs et les longueurs des rectangles ?

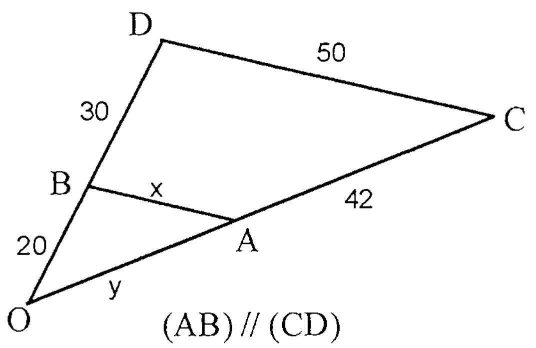
	largeur (cm)	longueur (cm)
original	3	4
agrandissement 1		5
agrandissement 2		6
agrandissement 3		7

Le coefficient de proportionnalité $\frac{4}{3}$ caractérise la forme de tous les rectangles obtenus à partir d'un même original. Les professionnels parlent du format $\frac{4}{3}$.

Dans ce modèle on privilégie les **rapports internes aux figures**.

C'est ainsi que la diagonale d'un carré est proportionnelle à son côté, de même que le périmètre d'un cercle est proportionnelle à son diamètre.

- **THALES**



On dispose de deux modèles de proportionnalité pour déterminer x et y et dans chaque cas, on peut utiliser les coefficients de proportionnalité ou les rapports internes

- la projection de (OD) sur (OC) parallèlement à (AB)

la droite (OD)	OB	OD	BD
la droite (OC)	OA	OC	AC

rapports internes $\frac{30}{20} = \frac{42}{y} = 1,5$ coefficients $\frac{y}{20} = \frac{42}{30} = 1,4$

Ce modèle très efficace pour obtenir y, ne permet pas d'atteindre la dimension x.

- l'homothétie de centre O

le triangle OAB	OA	OB	AB
le triangle OCD	OC	OD	CD

rapports internes $\frac{x}{20} = \frac{50}{30+20} = 1$ coefficients $\frac{50}{x} = \frac{30+20}{20} = \frac{y+42}{y} = 2,5.$

Ce grand éventail dans le choix des rapports égaux donne une grande souplesse dans l'utilisation du théorème de Thalès, mais c'est aussi la source des plus grandes difficultés dans la période d'apprentissage.

- **LES POURCENTAGES**

Exemple : *calculez une remise de 15 % sur 340 F.*

On peut utiliser deux modèles de proportionnalité pour ce problème :

prix	remise
100 F	15 F
10 F	1,50 F
300 F	45 F
40 F	6 F
340 F	51 F

+ +

x 0,15

remise %	remise montant
100 %	340 F
1 %	3,40 F
5 %	17 F
15 %	51 F

x 0,15 x 0,15

Le premier modèle est utilisé en primaire pour introduire les pourcentages par des décompositions, et au collège pour donner à un pourcentage le statut de coefficient de proportionnalité. Tous les nombres de la première colonne correspondent à 100 %.

Dans le second modèle, seul 340 F correspond à 100 %, les pourcentages deviennent une des deux grandeurs. Ils y sont utilisés comme des quantités (0,15 est un rapport interne) ou comme des fractions ($0,15 = \frac{15}{100}$).

Dans les deux cas on peut effectuer le calcul $\frac{340}{100}$ x 15, mais le sens en est différent :

premier modèle : " en 340 F, combien de fois 100 F ?

A chaque fois que j'ai 100 F, j'ai une remise de 15 F " soit $\frac{340\text{ F}}{100\text{ F}}$ x 15 F deuxième modèle : " je calcule 1 % (1 centième) de 340 F, puis je multiplie par 15 pour obtenir 15 % " soit $\frac{340 \text{ F}}{100} \times 15$

II. LES PROBLEMES DE PROPORTIONNALITE

Nous avons vu jusqu'à présent que la difficulté d'un problème de proportionnalité dépend pour beaucoup des grandeurs et des nombres en jeu. La structure du problème est une autre dimension qui joue également un rôle important.

1°) Les problèmes de proportionnalité simple

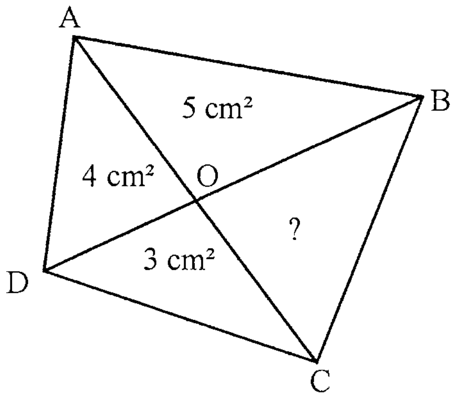
Simple dans le sens où il n'y a que deux grandeurs proportionnelles en jeu.

a) la recherche d'une quatrième proportionnelle

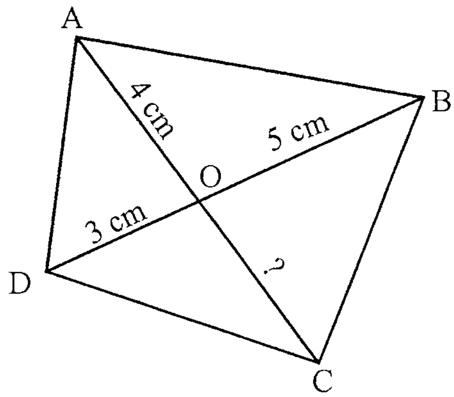
Pour une étude complète voir page 135

Ce problème et ses procédures standards ("le produit en croix ", " la règle de trois ") sont si présents que certains les identifient même à la proportionnalité.

Problème 1



Problème 2



On peut se réjouir de voir que beaucoup d'élèves de troisième résolvent correctement le problème1, mais quand on leur demande une justification, ils n'ont à répondre que

<< j'ai fait le produit en croix >>

en quelque sorte pour eux:" C'est proportionnel parce qu'on fait le produit en croix ".

On peut alors leur montrer le problème2 pour voir s'ils procèdent de la même manière. Auquel cas ils n'ont sans doute pas compris grand chose de plus que ceux qui ont répondu 6 cm².

Il est essentiel d'éviter ce genre d'attitude, contraire à l'esprit même des mathématiques, en ne séparant pas les techniques, aussi simples soient elles, des notions qui les soutiennent.

b) les coefficients de proportionnalité

Dans certaines situations, on utilise des coefficients de proportionnalité standardisés (%, échelles, vitesses ...). Il existe dans ce cas, trois types de problèmes :

Exemple des pourcentages :

Quel est le montant d'une remise de 12 % sur 240 F ?

A quel pourcentage correspond une remise de 4 F sur un prix de 20 F ?

J'ai obtenu 56 F de remise soit 7 %.. Quel était le prix de l'article ?

On peut les résoudre tous les trois de la même manière en se ramenant à la recherche d'une quatrième proportionnelle à l'aide d'un tableau.

prix	remise
100 F	12 F
240 F	?

prix	remise
20 F	4 F
100 F	?

prix	remise
100 F	7 F
?	56 F

Pourtant le programme ne considère pas ces trois problèmes du même niveau de difficulté. C'est qu'il s'agit d'enseigner un formalisme algébrique qui donnera toute son efficacité à l'utilisation des coefficients de proportionnalité. On réduit le problème à une seule opération. Dans le cas des pourcentages on commence par la multiplication :

Remise = Prix X Pourcentage

C'est l'apprentissage indispensable de ces nouvelles méthodes qui crée des différences entre les trois problèmes et des difficultés chez les élèves. Mais toutes ces méthodes doivent coexister, se compléter. La méthode algébrique n'est d'ailleurs pas toujours la plus efficace.

Exemple

Un aquarium en forme de parallélépipède rectangle de 45 cm de haut, a un volume de 60 litres. Quelle sera la hauteur d'eau si on n'y verse que 50 litres ?

La solution par proportionnalité évite le recours à la formule, à l'aire de base et surtout aux conversions cm^3 - litres.

hauteur	volume
45 cm	60 litres
?	50 litres

c) les partages proportionnels

Le texte n'indique pas de valeurs correspondantes, il y a un travail préalable pour exprimer la quantité à partager à l'aide d'une unité judicieusement choisie (le billet demi-tarif pour l'exemple 2)

Exemple 1

Dans un immeuble en copropriété, il y a 6 appartements F4 de 80 m^2 chacun et 3 appartements F3 de 60 m^2. La note totale du chauffage est de 79 200 F. Comment répartir cette somme proportionnellement à la surface ?

Exemple 2

La famille Dupont se rend à une soirée théâtre, ils payent 210 F l'entrée. Les 3 enfants payant demi-tarif, quel est le prix d'une place ?

2°) Les problèmes de comparaisons

Plus complexe que la proportionnalité simple, puisqu'il y a, à priori, 2 familles de deux grandeurs proportionnelles. Il faut donc prévoir deux tableaux.

Exemple 1

Le cuisinier a préparé 2 récipients de chocolat chaud pour le goûter. Dans le premier de 1,5 litres, il a mis 100 g de chocolat en poudre. Dans le second qui fait 2 litres, il en a mis 150 g. Quel est le récipient qui a le plus le goût du chocolat ?

On peut chercher :

- les quantités de poudre pour la même quantité de mélange (1l, 1 cl, 2l, 6l, ...)
- les quantités de mélange pour la même quantité de poudre (1g, 10g, 50g, 300g, ...) Attention dans ce cas à respecter l'ordre imposé par la question. (plus le mélange est important moins il aura le goût de chocolat)

Exemple 2

Dans ce magasin, on peut acheter de l'orangina 7F la bouteille de 1,5 l ou 10 F les 4 bouteilles de 50 cl. Quel est le conditionnement le plus avantageux ?

On peut calculer les prix de n'importe quelles quantités arbitrairement choisies, même si elles ne pourront pas être effectivement achetées. Certains ne sont satisfaits que si on respecte les conditionnements. Dans ce cas, la solution la plus simple pour cet exemple est de choisir 6 litres.

Exemple 3

Arthur a placé 15 fléchettes dans la cible sur 20 lancers. José en a placé 12 sur 15. Quel est le meilleur joueur ?

Ce genre d'exercice rencontré dans le chapitre " comparaison de fractions " invite donc l'élève à comparer les rapports $\frac{15}{20}$ et $\frac{12}{15}$, et d'admettre donc qu'il y a proportionnalité entre le nombre de lancers et le nombre de réussites, ce qui est loin de la réalité. C'est le genre d'exercice qui ne peut que renforcer les élèves dans l'idée que tout est proportionnel.

Exemple 4

Les 56 millions de français ont consommé 3 700 000 tonnes de pains en 1988 ? Quelle a été la consommation moyenne par habitant ?

La statistique est très friande de rapports, taux, indices pour ses comparaisons.

Cela revient à considérer chaque population comme homogène pour les grandeurs étudiées (autrement dit, elles sont proportionnelles : tous les français consomment la même quantité de pain). Il s'agit là souvent de résultats très grossiers sans grande signification pris isolément. Leur principal intérêt est de pouvoir faire des comparaisons entre régions et de suivre des évolutions dans le temps.

3°) Quelques problèmes plus complexes

Exemple 1

Une famille de 5 personnes a passé 4 jours à l'hôtel. Elle a payé 5000F. Combien paieraient 2 personnes pendant 3 jours ?

Le prix P est proportionnel au nombre de personnes N (pour un nombre de jours fixé) et au nombre de jours J (pour un nombre de personnes fixé).
Le prix de cet hôtel est donc 250 F /personnes/jours = 250 F / (personnes x jours)
La formule est $P = 250 \times N \times J$
Il s'agit bien d'un produit comme dans kW x h ou (kilomètres x passagers).

Exemple 2

Ma voiture consomme 8 litres aux 100 km. Quelle distance pourrai-je parcourir avec 100 F d'essence à 6 F le litre ?

distance (km)	consommation (litres)	prix (F)
100	8	
	1	6
?	c	100

La difficulté vient du fait que les valeurs indiquées ne se correspondent pas sur une même ligne comme dans un problème de recettes par exemple.

On peut calculer le nombre de litres pour 100 F puis la distance parcourue en utilisant successivement la proportionnalité prix-consommation et consommation-distance.

On peut aussi le coefficient de la proportionnalité prix-distance qui est le produit des deux autres : $\frac{8 \text{ litres}}{100 \text{ km}} \times \frac{6 \text{ F}}{1 \text{ litre}} = \frac{48 \text{ F}}{100 \text{ km}}$

Exemple 3

Un mélange de peinture contient 9 litres de blanc et 6 litres de bleu. Un deuxième pot contient 10 litres de blanc 15 litres de bleu. Quel est le pourcentage de peinture blanche dans chaque pot ? On mélange les 2 pots. Quel est le pourcentage de peinture blanche ?

	pot 1	pot 2	pot 3
blanc	9	10	19
total	15	25	40
%	60	40	47,5

Un mélange de mélanges. Les quantités s'ajoutent mais pas les rapports. Le nouveau rapport est une moyenne pondérée des deux autres.

La Règle de trois

Pour les nostalgiques ou pour tous ceux qui n'ont pas connu et qui voudraient connaître à force d'en entendre parler, voici trois extraits de manuels des niveaux CM, $6^{ème}$ et $3^{ème}$.

On s'aperçoit en lisant les 2 premiers extraits que la règle de trois est définie indépendamment de la proportionnalité. Il ne s'agit que de la possibilité d'intervertir l'ordre entre une multiplication et une division . On évite ainsi " la méthode ordinaire " en commençant par la multiplication ou par des simplifications.

La seule méthode proposée pour chercher une quatrième proportionnelle est le passage à l'unité. La linéarité n'est pas utilisée dans l'exemple du CM alors qu'elle offrait une solution très simple.
En sixième, la linéarité sert à définir la proportionnalité, mais cette propriété n'est toujours pas utilisée.

En troisième, la proportionnalité est définie par l'existence d'un rapport constant, mais ce rapport n'est jamais exprimé dans les calculs (sauf une fois timidement dans le cours). Tous les calculs sont basés sur la théorie des proportions . On y retrouve la règle de trois, mais aussi l'égalité des produits en croix (les moyens et les extrêmes).

Le coefficient de proportionnalité est le grand absent, il n'était pas encore né à cette époque.

Dans l'extrait du manuel de troisième, certains passages n'ont pas été repris pour ne pas alourdir le texte. Leur emplacement est signalé par [...]

ARITHMETIQUE NOUVELLE
CM
édition 1964
EDITIONS DE L'ECOLE

LA REGLE DE TROIS

EXEMPLE. - On a payé 360 F pour 21 m d'étoffe. Combien coûtent 7 m de cette étoffe ?

Disposition des données

21 m	....	360 F
7 m	....	F

21 m d'étoffe coûtent .... 360 F

1 m coûte 21 fois moins ou.. $\frac{360}{21}$ F

7 m coûtent 7 fois plus ou .... $\frac{360 \times 7}{21} = 120$ F

REMARQUES. - 1° Au lieu d'employer cette méthode, appelée règle de trois, nous aurions pu employer la méthode ordinaire.

1 m d'étoffe coûte .... 360 : 21 = 17,14 F

7m d'étoffe coûtent .... 17,14 x 7 = 119,98 F

2° Remarquons que les deux méthodes donnent des résultats un peu différents : 120 F et 119,98 F. C'est que dans la méthode ordinaire, on a commencé par faire la division (360 : 21). La règle de trois permet plus souvent de trouver un résultat exact

ARITHMÉTIQUE ET DESSIN GÉOMÉTRIQUE
CLASSE DE 6 ème
Programme de 1947
de C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

16e leçon

RÈGLE DE TROIS

113. Problème. - *Un ouvrier a reçu 11 200 francs pour 14 journées de travail. Combien recevra-t-il dans les mêmes conditions pour 21 journées de travail?*

1re Solution. - Salaire journalier de l'ouvrier : $\frac{11\,200 \text{ f}}{14} = 800$ f

Salaire en 21 jours : $800 \text{ f} \times 21 = 16\,800$ f.

2e Solution. - 11 200 francs est aussi bien le salaire journalier de 14 ouvriers.
D'où :

Salaire de 14 ouvriers en 21 jours : $11\,200 \times 21 = 235\,200$ f

Salaire d'un ouvrier en 21 jours : $\frac{132\,200}{14} = 16\,800$ f.

Dans le premier cas on a divisé 11 200 par 14 et multiplié le résultat par 21. Dans le deuxième cas on a multiplié 11 200 par 21 et divisé le résultat par 14. Les deux réponses sont identiques. Ceci est général :

114. ***Lorsqu'on a à effectuer une division et une multiplication successives sur un nombre donné, on peut intervertir l'ordre des opérations.***

Le résultat commun s'indique par le symbole : $\frac{11\,200 \times 21}{14}$

et s'appelle une ***règle de trois***.

Les deux nombres situés au-dessus de la barre horizontale sont les facteurs du dividende et le nombre situé en-dessous est le diviseur de la règle de trois.

Si la division ne se fait pas exactement il est préférable de commencer par la multiplication, mais en général il faut chercher à simplifier une règle de trois avant de l'effectuer.

115. Simplification d'une règle de trois. - Reprenons l'exemple du n° 113. Divisons 11 200 f par 2. Nous obtenons 5 600 f, salaire de l'ouvrier en 7 jours. Multiplions 5 600 par 3. Nous obtenons 16 800 f, salaire de l'ouvrier en 21 jours. Donc :

$$\frac{11\,200 \times 21}{14} = \frac{11\,200 \times 3}{2}$$

Or on passe de la première règle de trois à la seconde en divisant 21 et 14 par le même nombre 7. On obtient une nouvelle règle de trois plus simple.

On simplifie une règle de trois en divisant par un même nombre le diviseur et l'un ou l'autre des facteurs du dividende.

Répéter cette simplification si cela est possible.

116. Grandeurs proportionnelles. - ***On dit que deux grandeurs correspondantes sont directement proportionnelles si lorsque l'une d'elles devient 2, 3, 4 ou n fois plus grande il en est de même de l'autre.***

Exemples : Nombre de jours de travail et salaire d'un ouvrier.
Longueur d'un coupon d'étoffe et prix de ce coupon.
Longueur d'un trajet et temps mis pour le parcourir.....

Une règle de trois permet de résoudre les problèmes à trois données sur des grandeurs proportionnelles. On procède en général par ***réduction à l'unité***.

Pour l'exemple du n° 113 on pose directement la règle de trois en disant :

En 14 jours l'ouvrier gagne : 11 200 f.

En 1 jour il gagne 14 fois moins : $\frac{11\,200\text{ f}}{14}$.

Et en 21 jours il gagne 21 fois plus : $\frac{11\,200 \times 21}{14}$.

117. Remarque. - Dans certains cas il faut éviter cette méthode de raisonnement :

Exemple. - *6 ouvriers effectuent par jour 10 m de pavage dans une rue. Combien faut-il employer d'ouvriers pour paver journellement 25 m ?*

La réduction à l'unité conduit à la règle de trois $\frac{6\text{ ouv.} \times 25}{10}$ dont le résultat est correct, mais on est amené à dire :

Pour paver 1 m de rue il faut : $\frac{6\text{ ouv.}}{10}$ ce qui est absurde car 6 n'est pas divisible par 10.

Il est préférable dans les cas analogues de dire (n° 113, 2^{e} méthode).

Pour paver 10 x 25 m de rue il faut : 6 ouv. x 25.

Pour paver 25 m, il en faut 10 fois moins : $\frac{6\text{ ouv.} \times 25}{10} = 15$ ouv.

ALGEBRE, ARITHMETIQUE **ET GEOMETRIE**
CLASSE DE 3 ème
Programme de 1958
de C. LEBOSSÉ et C. HÉMERY

ALGEBRE ET ARITHMETIQUE

PREMIERE LEÇON

RAPPORTS

1. Rapport de deux nombres. - ***On appelle quotient exact ou rapport des nombres algébriques a et b, le nombre algébrique x dont le produit par b est égal à a.***

Le rapport x des nombres a et b se représente par le symbole $\frac{a}{b}$. Les nombres a et b sont les *termes* du rapport : a est le *numérateur*, b le *dénominateur*.

Les égalités : $\frac{a}{b} = x$ et $a = bx$ sont donc équivalentes.

EXEMPLES : $\frac{-2}{+3}$; $+\frac{0,7}{3,5}$; $\frac{3/8}{-7,2}$ etc...

2. Rapport de deux grandeurs. - ***Le rapport de deux grandeurs de même espèce est le nombre par lequel il faut multiplier la seconde pour obtenir la première.***

1ER EXEMPLE. - Un segment de droite AB est la somme de 3 segments égaux au segment CD (fig. 1). Donc:

AB = CD x 3 ou AB = 3 CD

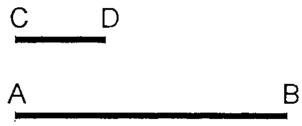


Fig. 1.

Le nombre 3 est le rapport des segments AB et CD,

ce qui s'écrit : $\frac{AB}{CD} = 3$.

On voit de même que $CD = \frac{1}{3} AB$, donc que : $\frac{CD}{AB} = \frac{1}{3}$.

2E EXEMPLE. - Un segment AB est la somme de 4 segments égaux au septième du segment CD (fig. 2).

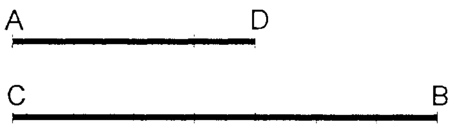


Fig. 2.

Donc $AB = \frac{4}{7} CD$. Le rapport des segments AB et CD est $\frac{4}{7}$.

On écrit $\frac{AB}{CD} = \frac{4}{7}$. De même $\frac{CD}{AB} = \frac{7}{4}$. On voit ainsi que :

Le rapport de deux grandeurs constitue la mesure de la première grandeur lorsqu'on prend la seconde pour unité.

Si CD = 1 mètre, on obtient (fig. 2) : $AB = \frac{4}{7}$ de mètre

3. Théorème. - ***Le rapport de deux grandeurs est égal au rapport de leurs mesures effectuées avec la même unité.***

[...]

Remarque.- Ce théorème ramène la recherche du rapport de deux grandeurs au calcul d'un quotient exact. Aussi, dans ce qui suit, ne sera-t-il question que de rapports de deux nombres.

4. Propriété fondamentale. - ***On ne change pas la valeur d'un rapport en multipliant ou en divisant ses deux termes par un même nombre.***

[...] Donc : $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{an}{bn} = \frac{a:n}{b:n}}$

[...]

6. Grandeurs directement proportionnelles. - ***On dit que les nombres** a, b, c, d...* ***sont directement proportionnels aux nombres** a', b', c', d'...* ***si l'on a la suite des rapports égaux :***

$$\boxed{\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{d}{d'} \ldots}$$

Ainsi 2, -8, -5 et 6,4 sont proportionnels à -3, 12, 7,5 et -9,6

car : $\frac{2}{-3} = \frac{-8}{12} = \frac{-5}{7{,}5} = \frac{6{,}4}{-9{,}6} = -\frac{2}{3}$

Nous voyons que : *Pour que deux groupes de nombres soient proportionnels, il faut et il suffit qu'il existe un rapport constant entre un nombre du premier groupe et le nombre correspondant du deuxième.* Plus généralement :

On dit que deux grandeurs qui dépendent l'une de l'autre sont proportionnelles lorsque les différentes mesures de l'une sont proportionnelles aux mesures correspondantes de l'autre.

Ainsi le *prix d'un coupon* d'une pièce d'étoffe est proportionnel à *sa longueur.*

Le rapport constant entre le prix et la longueur en mètres du coupon est égal au prix d'un mètre de cette étoffe. De même :

Le poids d'une substance donnée est proportionnel à son volume.

La distance parcourue par un mobile qui se déplace à une vitesse constante est proportionnel au temps mis pour parcourir cette distance etc...

En désignant le rapport constant qui existe entre les mesures correspondantes y et x de deux grandeurs directement proportionnelles on a :

$$\frac{y}{x} = a \qquad \text{soit} \qquad \boxed{y = ax}$$

DEUXIEME LEÇON

PROPORTIONS

10. Définition. - *On appelle proportion l'égalité de deux rapports.*

Ainsi les quatre nombres a, b, c, d sont en proportion lorsque le quotient du premier par le second est égal au quotient du troisième par le quatrième :

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

EXEMPLES : $\frac{25}{20}=\frac{5}{4}$; $\frac{+2}{-3}=\frac{-10}{15}$; $\frac{-3}{+4}=\frac{0,75}{-1}$

a, b, c, d sont les quatre *termes* de la proportion; a et d se nomment les deux *extrêmes*, b et c se nomment les deux *moyens*.

11. Définition. - ***Dans toute proportion le produit des extrêmes est égal au produit des moyens.***

HYPOTHESE : $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

CONCLUSION : $ad=bc$

[...]

12. Réciproque.- [...]

13 .Transformation d'une proportion.- *Dans toute proportion on peut :*

1° Intervertir les extrêmes $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ entraîne $\boxed{\frac{d}{b}=\frac{c}{a}}$

[...]

2° Intervertir les moyens $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ entraîne $\boxed{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}}$

3° Remplacer chaque rapport par son inverse $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}$ entraîne $\boxed{\frac{b}{a}=\frac{d}{c}}$

14 .Quatrième proportionnelle.- ***On appelle quatrième proportionnelle à trois nombres donnés, a, b , c, le nombre x tel que les quatre nombres a, b, c, x soient en proportion.***

Par hypothèse : $\frac{a}{b}=\frac{c}{x}$ [...] $x=\frac{bc}{a}$

D'une façon générale, si trois nombres d'une proportion sont connus, on peut calculer le quatrième.

[...]

15 .Moyenne proportionnelle ou géométrique.-. [...]

16 .Théorème.- Considérons la proportion $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

nous avons : $\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}}$

Dans une proportion o***n forme un rapport égal à chaque membre en divisant la somme des numérateurs par la somme des dénominateurs.***

[...]

CONCLUSION

Au fait ... La proportionnalité, qu'est-ce que c'est ? Pendant les deux ans que nous avons passé sur le sujet, nous n'avons pas apporté de définition à ce mot. Nous avons privilégié une approche de cette notion en termes de grandeur et de situation. On trouvera en annexe une justification de ce choix (cf."A la Recherche de la Proportionnalité", p 143). La question d'une définition vis à vis des élèves ne s'est donc pas posée. L'approche par les situations permet aux élèves de découvrir progressivement les propriétés de la proportionnalité, et à l'enseignant de les expliciter en douceur.

Pour chaque problème, il existe plusieurs procédures de résolution : on le constate dans les travaux des élèves. Les meilleurs passent allègrement de l'une à l'autre selon les opportunités, alors que les moins bons tentent d'appliquer la même recette. Il nous paraît important de laisser les élèves exprimer les différentes procédures utilisées et de les laisser conclure sur le choix de la (ou des) plus appropriée(s). Toutefois on préfère insister sur celles qui gardent leur sens aux opérations effectuées : la " règle de 3 " n'est donc pas retenue dans l'apprentissage de la proportionnalité, ni même le " produit en croix ", pourtant très en vogue.

Le repérage des situations et des grandeurs proportionnelles ne sont pas forcément évidentes pour les élèves. Il est donc important de ne pas masquer la complexité par des difficultés opératoires. Pour la vitesse, par exemple, à la notion délicate de grandeur quotient s'ajoutent les problèmes de conversions d'unités non décimales. Cependant, des rapports trop simples, comme le double ou la moitié, permettent une résolution intuitive, insuffisante pour l'apprentissage de la proportionnalité.

C'est en se confrontant à une grande variété de situations que peu à peu l'élève construit son raisonnement. Au début de la sixième, la linéarité revient fréquemment comme procédure de résolution, même si elle oblige à de nombreuses opérations. Mais peu à peu, le coefficient multiplicateur, la valeur unitaire ou le rapport de proportionnalité sont repérés. A partir de la quatrième, les procédures sont plus judicieuses, même si la formalisation est encore souvent floue. Il est vrai que la résolution d'équations issues de la modélisation des écritures apporte un bon coup de main.

Bref, pas de panique. Ce qui n'a pas été assimilé au cours d'une séquence le sera peut-être à la suivante, à condition de ne pas considérer que la Proportionnalité se traite en un chapitre avec les constructions de graphique. C'est d'ailleurs ce qui apparaît nettement à travers les nouveaux programmes du collège.

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Troisième Trimestre 1997
N° de publication : 97-04

I.R.E.M. DE RENNES - Université de RENNES I
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 63 42
Tél (commande) : 02 99 28 26 08
Fax : 02 99 28 16 38
e. mail : dirirem@ univ-rennes1. fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : Comprendre la proportionnalité au collège

IREM : RENNES

AUTEURS : BERTHELEU Régine, JULO Jean, LUCAS Jean-Yves, REVAULT Daniel, THOMANN Gérard, THOMAS Jean-Michel

DATE : SEPTEMBRE 1997

NIVEAU : Collège

PUBLIC CONCERNE : Enseignants de collège

MOTS-CLES :
- proportionnalité
- linéarité
- valeur unitaire
- coefficient multiplicateur (ou de proportionnalité)
- quatrième proportionnelle

RESUME :

La proportionnalité est l'un des thèmes mathématiques dont l'intérêt général est incontestable. Son acquisition se heurte à d'importantes difficultés d'enseignement ce qui conduit à s'interroger sur l'efficacité des techniques pédagogiques « traditionnelles ».

Cette brochure est le résultat d'une réflexion sur les stratégies à mettre en oeuvre pour enseigner la proportionnalité et permettre aux élèves de surmonter leurs difficultés.

Le lecteur y trouvera :

- une présentation du groupe et du travail réalisé
- une présentation des différentes étapes par lesquelles les élèves devront passer pour maîtriser la notion : ce qu'ils ont vécu à l'école élémentaire, les apprentissages prioritaires au début du collège
- pour les classes de sixième et cinquième, deux séquences d'enseignement sur deux thèmes (prix, vitesses)
  Chaque séquence regroupe plusieurs activités. Le groupe a tenté d'établir une progression en organisant ces activités en prenant en compte les objectifs visés et certains choix didactiques.
  Pour chaque séquence, des commentaires donnent des précisions à propos
  - de l'enchaînement des activités dans la séquence
  - des moments forts que constituent les synthèses (contenus, exigences de savoir et de savoir-faire) et les évaluations
  - des représentations des problèmes et des langages utilisés dans la classe
  - des procédures de résolution privilégiées lors de la correction en classe de certains problèmes.
- un recueil de quelques activités qui nous semblent intéressantes pour les classes de collège.
- en annexe, quelques réflexions sur l'enseignement de la proportionnalité (recherche d'une quatrième proportionnelle, l'écriture fractionnaire)

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 × 29,7	165	4 €	350 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-032-7