Gérard HAMON
IREM RENNES
Université RENNES 1

BOMBELLI, *L'ALGEBRA*

Ce document est constitué de plusieurs pièces :

BOMBELLI

L'ALGEBRA

FRAGMENTS

Gérard Hamon

I.R.E.M. de Rennes
Mai 1996

-

BOMBELLI

L'ALGEBRA

Bologne - 1572

Les "Imaginaires", le "Second Degré" et quelques Fragments

I.R.E.M. DE RENNES
Mai 1996

Gérard HAMON – Irem de Rennes

Bombelli, *L'Algebra*

Bologne 1572

LES « IMAGINAIRES », « LE SECOND DEGRÉ »

ET QUELQUES AUTRES FRAGMENTS

J'ai toujours vu Rafael Bombelli cité par l'unique passage concernant ce que nous appelons aujourd'hui nombres complexes :

« *Piu di meno via piu di meno, fa meno … meno di meno via meno di meno, fa meno*. »

Aussi j'ai souhaité en savoir plus sur le travail de cet ingénieur italien du XVI$^{\text{ème}}$ siècle, en particulier son travail sur les nombres complexes, « *Nombres sophistiqués* » disait-il, et sur son travail mathématique en général. Je n'ai pas beaucoup appris sur le personnage, il a été beaucoup moins disert sur lui-même que Jérôme Cardan qui lui est allé jusqu'à écrire *Propria Vita* (Ma vie). Cependant la lecture de son unique ouvrage : *L'ALGEBRA*, m'a beaucoup appris sur ses mathématiques, celles de l'Italie et de l'Europe de son siècle. Ces mathématiques sont d'un niveau remarquable pour son époque, c'est pourquoi je m'étonne toujours qu'il n'ait pas été plus cité par ses lecteurs contemporains et ses successeurs. Son ouvrage était pourtant connu des grands scientifiques, y compris de manière critique.

C'est Leibniz, en 1682, dans une lettre à Huygens qui écrit :

« *Je vous envoye le livre de Bombelli, dont je vous ay parlé. Vous y verrez page* 292 *comment il se sert des racines imaginaires (il appelle par exemple* $\sqrt{-121}$ *ou* $11\sqrt{-1}$ *: piu di meno* 11 *et* – $\sqrt{-121}$ *ou* – $11\sqrt{-1}$: *meno di meno* 11), *et comment il trouve par là la racine de l'équation* $1\overset{3}{\smile} = 15\overset{1}{\smile}$ *plus* 4 … »

Et la réponse de Huygens à Leibniz :

« *Pour ce qui est de l'usage des racines de Cardan dans les cas mesmes ou celles meslées de quantités imaginaires, il est certain qu'elles servent toujours dans les problèmes d'Arithmétique, et vous avez plus fait que Bombelli en faisant voir que lors mesme que l'on ne peut pas tirer la racine des binômes, leurs racines ne laissent pas de signifier des quantités réelles*. »

De même Wallis dans son *Algebra* de 1673, déclare dans un plaidoyer contre Descartes :

« *Mais il n'y a pas de règle (que je n'ai pas trouvée chez Harriot*[1]*) pour transformer une Équation biquadratique (dont le second terme est absent) en deux Quadratiques par le moyen d'une Équation cubique de racine évidente (comme Bombelli et Viète ont fait avant lui). Et*

[1] Thomas Harriot, Oxford 1560-Londres 1621. Il a contribué à l'algèbre par une théorie des équations algébriques.

ceci (d'aussi loin que je m'en souvienne) est la seule chose qu'il ait ajoutée à ce que j'ai relaté à propos d'Harriot. Ses règles[2] *ne diffèrent pas en substance de celles de Bombelli ou de Viète* » (p.208).

Ce à quoi Montucla, dans son Histoire des Mathématiques de 1802, répond :

« *Avant que de sortir de l'Italie, nous avons encore à parler de Raphaël Bombelli, qui fit des découvertes utiles en analyse, et dont l'algèbre parut en* 1579. *Il développa d'abord dans cet ouvrage, d'une manière plus claire, ce que Cardan avoit dit sur les équations du troisième et du quatrième degré. A l'égard de ces dernières, il ne fit que suivre la méthode de Ferrari … M. Wallis montre encore ici qu'il n'avoit lu Bombelli qu'avec beaucoup d'inattention : il tombe même à son égard dans une double faute ;* 1° *en lui faisant honneur de la résolution des équations du quatrième degré, que Bombelli attribue expressément à Ferrari ;* 2° *en disant que la méthode de Bombelli est la même que celle de Descartes. Cela est entièrement faux, et il falloit être aveuglé comme l'était Wallis, par l'envie de déprimer le géomètre François, pour tomber dans une pareille inexactitude. Bombelli ne divise point, comme fait Descartes, une équation biquadratique, en deux du second degré qui la produisent par leur multiplication mutuelle : il n'y en a pas la moindre trace même dans la page* 253 *que cite Wallis …* "

L'ALGEBRA de Bombelli n'a jamais été publiée en Français. En ayant déjà traduit plusieurs passages, il m'a paru utile de les rassembler et d'y ajouter plusieurs compléments, en particulier tout ce qui concerne la résolution des équations de second degré. Je suis parti de l'édition intégrale publiée chez Feltrinelli en 1966, apparemment très difficile à trouver en France. C'est donc de l'italien du XVI^e siècle que j'ai recomposé les textes de BOMBELLI. Ils sont inédits en français, c'est pourquoi je me suis efforcé de donner des passages assez longs permettant de se faire une idée de la pensée de ce scientifique, j'en espère la lecture pas trop fastidieuse.

De nombreux problèmes se sont posés et sur lesquels je n'ai pu m'attarder. D'une part, dans quelle mesure ne pas trahir l'auteur du point de vue du style ? Pour des raisons de facilité de

---

[2] Les règles de Descartes.

lecture, j'ai restructuré certaines phrases de compréhension très difficile et j'ai introduit une ponctuation permettant d'éviter des phrases qui sont longues de plusieurs dizaines de lignes. Pour ce qui est des notations, j'ai essayé d'adopter une formulation identique ou proche de la nôtre. Cela fait sans doute perdre aux textes une partie de leur poids historique et symbolique, mais c'est une contrainte à laquelle on ne peut que difficilement échapper.

Dans ma traduction, l'inconnue au Carré (*Potenza*) au sens puissance deux est notée avec un C majuscule et les carrés (*quadrato*) géométriques sont notés avec un c minuscule. L'inconnue est désignée par le *Tanto* (*Tanto, Tanti*). L'élévation au carré sera désignée par le terme « quarrer ». Prendre le côté, c'est prendre le côté du carré que l'on connaît. *R.q.* désigne la racine carrée, R.c. désigne la racine cubique et [__] désigne des parenthèses[3]. Ces symboles ne sont d'ailleurs pas ceux utilisés par Bombelli dans son manuscrit, il les emploie reliés, comme on peut le voir sur la reproduction d'une page (p.29) du manuscrit [0 *m*.121] L'incidence des contraintes typographiques sur les notations serait sans doute intéressante à étudier. Les symboles + et – ne sont pas les notations Bombelli, il écrit *p.* et *m*., j'ai mis + et – pour une lecture plus aisée.

Enfin, il use des termes *nomio* (monôme), *binomio,* (binôme), *trinomio* (trinôme) : *R.q*.3, pour $\sqrt{3}$, R.c.5 pour $\sqrt{5}$ sont des monômes, 2 + *R.q*.3, *R.q*.3 + *R.c*.5 sont des binômes, 2 + *R.q*.3 + *R.c*.5 est un trinôme.

Par exemple, Bombelli demande (page 132) :

« *Partarsi* 72 *per* 2 + *R.c.* [R.q. 68 + 2] – *R.c.* [R.q. 68 – 2] », c'est-à-dire : « Diviser 72 par 2 + $\sqrt[3]{\sqrt{68}+2}$ + 2 – $\sqrt[3]{\sqrt{68}+2}$ » et sa réponse est « 16 + Rc.[Rq. 5640192 + 2368] – Rc. Rc.[Rq. 5640192 – 2368], ce qui signifie : 16 + $\sqrt[3]{\sqrt{5640192}+2368}$ + $\sqrt[3]{\sqrt{5640192}-2368}$.

Pour résoudre les problèmes de calcul avec ces quantités, Bombelli est amené à inventer de nouvelles expressions, il les appelle résidus, nous les appelons maintenant, expressions conjuguées. Ainsi, le résidu de 3 + $\sqrt{5}$ est 3 – $\sqrt{5}$. Bombelli ajoute : « *On doit être prévenu que lorsqu'on parle du résidu d'un binôme, ce qui s'appelle plus de moins dans le binôme s'appellera moins de moins dans le résidu* », c'est la définition du conjugué d'un nombre

[3] Tartaglia utilisait notre notation ( ).

complexe $a + ib$, « *piu di meno* 1 » et « *meno di meno* 1 » correspondant à $+ i$ et $- i$. Si a et b sont des racines cubiques, le résidu de $a + b$ est $a^2 - ab + b^2$ puisque $(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$; si a, b et c sont des racines cubiques, le résidu de $a + b + c$ est $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$, leur produit donnant $a^3 + b^3 + c^3$.

Il est à noter que sur son manuscrit, Bombelli écrit par exemple le nombre négatif – 121 sous la forme 0 m. 121. Cela signifie qu'à cette époque la question des nombres négatifs n'est pas réglée. Ceci est d'autant plus surprenant que Bombelli manipule les imaginaires (sophistiqués dit-il, comme Cardan) sans trop d'états d'âme semble-t-il.

RAFAEL BOMBELLI, L’HOMME

Rafael Bombelli de Bologne (1526-1572) n’est connu que par un seul ouvrage de mathématiques. C’est peu en comparaison des publications innombrables de Hieronimo Cardano (Jérôme Cardan, 1501-1576). Mais, si ce dernier a atteint l’âge de 75 ans, comme il en avait fait la prédiction, Bombelli n’a vécu que 46 ans, ce qui est bref pour quelqu’un dont les mathématiques n’étaient pas l’occupation principale. Ingénieur, il a dirigé l’assèchement des marais de Chiana en Toscane et après la découverte dans la bibliothèque vaticane d’un manuscrit des œuvres de Diophante, il en a traduit cinq livres sur sept, avec Antonio Maria Pazzi, lecteur public de mathématiques à Rome.

Quelques mathématiciens de son époque

1484 Chuquet, *Triparty en la science des nombres*- manuscrit écrit à Lyon.
1514 Köbel, *An neu geordnet Rechenbiechlin*-Augsbourg.
1554 Peletier, *Algèbre*-Lyon.
1494 Pacioli, *La Summa*-Venise.
1525 Rudolff, *Die Coss*-Königsberg.
1543 Recorde, *The Ground of Arts.*
1544 Stifel, *Arithmetica Integra*-Nuremberg.
1544 Fine, *De Arithmetica Practca*-Paris.
1545 Cardan, *Ars Magna*-Nuremberg (Bâle-1570 et Lyon-1663).
1546 Cataneo, *Le praliche*-Venise.
1546 Tartaglia, *Quesiti et Inventioni diverse*-Venise.
1556 Tartaglia, *General Trattato & numeri et misui.*
1557 Recorde, *Wetstone of Witte*-Londres.
1559 Borrel, *Logistica quae et arithmetica vulgo dicitur-Lyon.*
1563 Gemma-Frisius, *Arithmetica practicae methodusfacilis*-Paris.
1563 Peletarius, *Commentaires sur l’Arithmétique de Gemma Frisius*-Lyon.
1569 Ramus, *Arithméiicae libre duo, geomtriæ septem et virginti*-Bâle.
1569 Ramus, *Scholarwn mathematiticarum unus et triginta*-Bâle.
1570 Fine, *Pratique de la géométrie.*
1579 Viète, *Canon Mathématicus*-Tours.
1585 Stévin, *La Disme*-Leyde.
1592 Dasypodius, *Institutionum Mathématicarum*-Strasbourg.
1595 Pistico, *Trigonometria.*

1600 Rothe, *Arithmetica philosophica*-Nuremberg.

L'ALGEBRA

Bombelli a écrit *L'Algebra* dans les années 1560. Elle est publiée en 1572, année de son décès et l'éditeur en est Giovanni Rossi, de Bologne. Dans la préface, en date du 22 juin 1572, Bombelli rend hommage à son protecteur l'évêque Alexandre Rufini. *L'Algebra* était constituée alors de trois livres et comprenait 654 pages dont une table et la préface était placée au début du livre 3. Quelques exemplaires portent la date de 1579, mais il s'agit de l'édition d'origine dont le frontispice a été changé et la dédicace réimprimée- Les livres IV et V, extraits d'un manuscrit de 1569, ont été publiés en 1929, par Ettore Bortolotti, dans la collection « *Per la storia e la filosofla delle matematiche*, n° 7 », chez l'éditeur Nicola Zanichelli à Bologne. Enfin, une édition des livres I à V a été réalisée par l'éditeur Feltrinelli à Milan en 1966, avec une introduction de Forti et une préface de Bortolotti.

Dans le **livre premier** de *L'Algebra*, Bombelli développe le calcul des radicaux et en particulier l'extraction exacte et l'extraction approchée des racines carrées arithmétiques. Il traite aussi des racines d'ordre 3, 4, 5 ... Dans ce premier livre, il rappelle la controverse au cours de laquelle Tartaglia affirmait que Ferrari ne savait pas extraire les racines de degré élevé selon la méthode que lui, Tartaglia, retenait pour la meilleure. Bombelli déclare « *Il n'était pas de mon intention de traiter ainsi des racines. Ne le jugeant pas nécessaire, je n'avais pas écrit de règles pour résoudre le premier degré non ordonné ou bien en relation avec les autres puissances, mais, à la requête d'amis j'ai été forcé de les mettre. Ils me déclaraient que, si jamais il venait un autre Tartaglia, il dirait que je n'en avais pas mis parce que je ne savais pas en faire le calcul* ».

Dans le **livre second,** il étudie les polynômes et les équations algébriques jusqu'au quatrième degré. Il désigne l'inconnue par « *il Tanto* » (la quantité). Dans le manuscrit, les puissances sont notées de façon exponentielle avec un petit demi-cercle sous les exposants, par exemple : « *Aggualisi* 2 $\overset{2}{\cup}$ *p.* 12 $\overset{1}{\cup}$ *a* 32 » signifie « $2x^2 + 12x$ égal à 32 » ou parfois sous une forme plus classique pour l'époque « l *Z p. R. m*.4. » c'est-à-dire « 1 Zénus plus res minus 4 ». Il n'utilise pas de symbole d'égalité, il utilise l'expression « *Aggualisi* … *a* … », le symbole « = » a été introduit en 1557 par Robert Recorde. Ces notations ont sans doute influencé Bürgi (1552-1632) qui notait l'expression $x^4 + 3x^2 - 7x$ sous la forme suivante « $\overset{IV}{1} + \overset{II}{3} - \overset{I}{7}$ » et Stévin notait la même équation sous la forme « $1^{\textcircled{4}} + 3^{\textcircled{2}} - 7^{\textcircled{1}}$ ».

L'équation du second degré de la forme $x^2 + ax = b$ avec a et b positifs est traitée uniquement sur des exemples numériques, en ajoutant $\frac{a^2}{4}$ aux deux membres ; le premier devient $(x + \frac{a}{2})^2$ et il suffit d'extraire la racine carré du second pour pouvoir terminer la résolution.

Voici par exemple la résolution de l'équation $x^2 + 6x = 16$ traitée[4] par Bombelli :

$$1\overset{2}{\cup}\ \textit{p.}\ 6\overset{1}{\cup}\ \textit{eguali a}\ 32$$

« *Opérez comme il a été montré plus haut, quand on dit de prendre la racine carrée de l'inconnue et de ses puissances. Alors, la moitié du coefficient de l'inconnue étant pris, c'est* 3, *et l'ajoutant à la racine de la puissance*[5], *qui est* $1\overset{1}{\cup}$, *cela fait* $1\overset{1}{\cup}$*p.* 3, *dont le carré est* $1\overset{2}{\cup}$*p.* $6\overset{1}{\cup}$ *p.* 9. *Nous, nous voulons* $1\overset{2}{\cup}$*p.* $6\overset{1}{\cup}$, *mais en ajoutant* 9 *à la fois aux deux parties, on aura* $1\overset{2}{\cup}$*p.* $6\overset{1}{\cup}$ *p.*9 *égal à* 25. *Alors, en prenant la racine de* $1\overset{2}{\cup}$*p.* $6\overset{1}{\cup}$ *p.*9, *qui est* $1\overset{1}{\cup}$ *p.* 3, *et ceci étant égal à la racine de* 25, *qui est* 5, *alors, le* 3 *étant ôté de chacune des parties, il restera* 2 *égal à* $1\overset{1}{\cup}$ *et l'inconnue vaudra* 2. »

Le **livre trois** est un recueil de problèmes allant du premier au quatrième degré où les procédés analytiques sont alliés à l'interprétation géométrique. Il y subsiste encore la tradition médiévale avec les « *Dimostratione in linea* », « Démonstrations par segments ».

Bombelli traite ainsi le problème suivant :

« *Faire de* 10 *deux parties telles que l'une multipliée par l'autre fasse* 16 ».

La résolution numérique est suivie de l'énoncé d'une règle générale puis d'une démonstration géométrique.

« *Quand on aura à diviser une quantité en deux parties, telles que l'une multipliée par l'autre fasse un nombre donné, on prendra la moitié de la quantité. Celle-ci étant divisée puis élevée au carré, du résultat on retranche le nombre donné et du reste on prend la racine*

[4] Dans R^+.

[5] C'est la puissance 2 de l'inconnue.

carrée qu'on ajoute à la moitié de la dite quantité ; alors la somme sera une des parties demandées. »

Autrement dit, si on cherche x et y tels que $x + y = a$ et $xy = b$, on calcule $\frac{a}{2}$, $(\frac{a}{2})^2$, puis $(\frac{a}{2})^2 - b$ et enfin $\frac{a}{2} + \sqrt{(\frac{a}{2})^2 - b}$.

Comme son prédécesseur Cardan, Bombelli énonce des règles générales, ce qui est un progrès. Nous n'en sommes pas encore à une notation utilisant les coefficients indéterminés, il faudra attendre Viète, quelques années plus tard, mais l'avancée est certaine.

Les **livres quatre et cinq** contiennent, comme Bombelli l'a promis dans son livre trois, des applications géométriques. Mais ces deux derniers livres ne seront pas connus de ses contemporains ni pendant les deux siècles suivants.

Livre quatre : algèbre, représentation géométrique des irrationnels, construction géométrique de problèmes algébriques.

Livre cinq : problèmes de géométrie plane, polyèdres réguliers et semi-réguliers.

I- LES INTENTIONS

Dans plusieurs passages de ses livres, Bombelli expose sa pensée, ses réflexions et ses objectifs. C'est dans le livre 3 que ce qui peut être considéré comme la préface de son travail apparaît.

AUX LECTEURS (p.7 de l'édition Feltrinelli)

Je sais que ce serait perdre du temps si je voulais m'efforcer à présent de faire connaître avec des mots parfaits quelle est l'excellence infinie des disciplines mathématiques, et ceci, après qu'elles aient été célébrées par de rares Auteurs aussi intelligents et loués. Cependant, aussi faible que soit mon témoignage, il me parait néanmoins nécessaire de m'efforcer de faire savoir que la partie supérieure de l'Arithmétique (aujourd'hui appelée Algèbre par tous) tient la primauté parmi ces disciplines parce que toutes ont besoin de se prévaloir d'elle. Ainsi, déjà l'Arithméticien, comme le Géomètre, ne pourrait résoudre ses problèmes et faire la preuve par ses démonstrations, ni l'Astrologue mesurer les cieux, les degrés et retrouver avec le Cosmographe l'intersection des cercles et des lignes droites par lui-même et sans avoir à se fier aux tables faites par les autres. Lesquelles sont assez corrompues, pour avoir été imprimées tant et plus et par des gens ayant peu de connaissances de cette discipline. Celui qui calcule (par la faute de cela) commet une infinité d'erreurs pour trouver chaque parallèle, ligne droite, cercles et degrés. Sans celle-ci, le musicien n'aura pas ou que peu de connaissance de sa quantité raisonnable et à la fin ne jouira pas de la découverte de sa proportion musicale. Mais que dirons nous de l'Architecture ? Elle seule peut nous donner l'usage et la manière (par la force des lignes) de fonder les forteresses, les machines de guerre, chaque mesure, corps et proportion et ainsi des perspectives comme de chacune de ses autres parties, et elle ne lui fait rien moins que connaître les erreurs qui peuvent survenir dans celle-ci. Laissant donc toutes ces choses (comme étant déjà assez bien notées) de côté, je dirai seulement cela : que, ou du fait de la difficulté de la matière, ou de l'écriture confuse des écrivains qui en ont traité jusqu'à présent, d'autant plus l'Algèbre est parfaite, d'autant moins je ne vois donner d'œuvre de celle-ci, j'en ai plusieurs fois fait moi-même la constatation. Ne me sachant imaginer de quoi cela procédait (quoique, de par la défiance qu'en ont les hommes, du fait de ne pouvoir l'apprendre à cause du peu de connaissance qu'il y en a**,** ainsi que de son usage, je leur dirai de s'arrêter) mais (pour le dire comme je l'entends) je pense que beaucoup voulaient se protéger avec cela. Si je voulais dire la vérité, cela révélerait la faiblesse de leur talent et leur grossièreté, parce que les Mathématiques versant toutes autour de la spéculation, celui qui n'est pas spéculatif se fatigue en vain à vouloir les apprendre. Je ne nie d'ailleurs pas que la confusion des écrivains et le peu d'ordre qu'il y a dans cette discipline ne soient cause d'un très grand travail et une gêne pour les professeurs de cette discipline. Pour lever finalement chaque empêchement aux spéculatifs et aux désireux de cette science et ôter toute excuse aux lâches et aux inaptes, je me suis mis en tête de vouloir la réduire à un ordre parfait et en parler dans mon œuvre présente autant que les autres ont été silencieux. Je me suis mis à la composer pour que cette belle science te soit connue et tout autant pour être utile à tous. Afin que je puisse plus facilement le faire, j'ai voulu d'abord voir la plus grande partie des Auteurs qui ont jusqu'à présent écrit à son sujet en sorte que dans ce que eux ont manqué moi je puisse y suppléer. Il y en a beaucoup, parmi lesquels un certain Muhammad ibn Musa[6], Arabe, qui est tenu pour être le premier, dont on peut voir une petite œuvre, mais de peu de valeur, et duquel je crois est venu ce terme d'Algèbre. Ceci, parce qu'il y a plusieurs années le Frère Luca del Borgo Saint Sépulcre de l'ordre des Mineurs s'étant mis à écrire aussi bien en latin qu'en langue vulgaire sur cette science, a dit que le mot Algèbre était Arabe, lequel dans notre langue veut dire équation, et que cette science était venue des Arabes. C'est ce qu'également nombre de ceux qui ont écrit après lui, ont cru et dit ensuite. Mais, ces dernières années, dans la bibliothèque de Monseigneur au Vatican, une œuvre grecque a été retrouvée, composée par un certain Diophante[7] d'Alexandrie, auteur grec du temps d'Antonin le Pieux. Messire Antonio Maria Pazzi, de Reggio, lecteur public de Mathématiques à Rome, me l'a fait voir. Comme lui, je l'ai jugé être un Auteur ayant une grande intelligence des nombres (encore qu'il ne traite pas des nombres irrationnels, mais, qu'il se voit chez lui seulement un ordre parfait). Lui et moi, pour enrichir le monde d'une œuvre ainsi faite, décidâmes de la traduire, et nous en avons traduit cinq livres (des sept qu'il y a). Le restant nous n'avons pu le finir à cause du travail qui nous a pris l'un et l'autre. Dans

[6] AI Khwarizmi, dates supposées: 780-850. Originaire des bords de la mer d'Aral, il participe aux travaux de la Maison de la Sagesse fondée à Bagdad par le calife AI-Mamoun.
[7] Cette traduction influencera bien sûr le contenu de l'ouvrage et les notations de Bombelli.

cette œuvre nous avons retrouvé qu'il cite beaucoup de fois les Auteurs Indiens et c'est par cela que j'ai su que cette discipline fut ouverte par les Indiens avant les Arabes. Léonard de Pise[8] a écrit plus tard sur cela (mais cela fut après un grand intervalle de temps) en langue latine. Après lui il n'y a pas eu de choses bien dites avant Frère Luca susdit lequel (bien qu'il fut un écrivain négligent et pour cela commit quelques erreurs) fut cependant vraiment celui qui le premier donna de la lumière sur cette science. Encore, que quelques uns aient été cavaliers, et se soient attribué tout l'honneur, en accusant avec malveillance le frère de quelques petites erreurs et en taisant sa bonne œuvre. Depuis, en notre temps, des Etrangers[9] et des Italiens ont ensuite écrit, Oronce, Schreiber et « il Boglione », des Français, le Jeune Allemand Stifel et un certain Espagnol[10] qui en a beaucoup écrit dans sa langue. Mais, aucun autre ne s'est vraiment autant introduit dans le secret de la chose que Cardan[11] le Milanais dans son *arte magna* où il est dit beaucoup sur cette science, mais son expression fut obscure. Il en a traité aussi dans certaines de ses affiches qu'il écrivit avec Lodovico Ferrari, notre Bolognais, contre Niccolò Tartaglia de Brescia et dans lesquelles se voient de très beaux et talentueux Problèmes. Mais, Tartaglia avait autant d'aussi peu de modestie (il était comme cela de sa nature, habitué à dire du mal, et il pensait avoir fait ses preuves avec honneur alors que pour d'aucun il avait médit), qu'il offensa presque tous les nobles esprits, menant et Cardan et Ferrari à le malmener, des esprits qui, en ces temps qui sont les nôtres, sont divins plutôt qu'humains. Il y en a encore d'autres qui ont écrit, ceux-ci, si je voulais tous les nommer, j'aurais beaucoup à faire. Mais, pour le peu de profit qu'ont été leurs œuvres, je les tairai. Seulement (comme au début) je dis qu'ayant donc vu ces Auteurs qui en ont traité, j'ai ensuite avec ordre continué aussi a assembler l'œuvre présente pour le bénéfice commun, la divisant en trois livres : en insérant dans le premier toute la pratique du dixième livre d'Euclide, le calcul des Racines cubes, comme lui[12] opère pour les carrées, ce qui sert là où interviennent des cubes ou des corps. Dans le second, j'ai traité de tous les Algorithmes de

[8] Léonard de Pise ou Fibonacci, XIII$^{\text{ème}}$ siècle.
[9] Barbari.
[10] Oronce Finé (1494-1555), Henri Schreiber d'Erfurt, « il Boglione » pourrait désigner Lodovico Ferrari natif de Bologne, Michel Stifel (Esslingen 1487- Iéna 1567), l'Espagnol est sans doute le Portugais Pedro Nunez.
[11] Jérôme Cardan (1501-1576) de Pavie.
[12] Euclide.

l’Algèbre où interviennent les quantités inconnues, avec leurs résolutions et démonstrations géométriques dans l’ordre. Dans le troisième, j’ai mis (comme pour preuve de la science) près de trois cent Problèmes, afin que se voit (en les lisant) ce que cette discipline a de studieux et combien est suave le fruit de cette science. Que le Lecteur accepte donc avec l’esprit libre de toute passion mon œuvre, en fasse la compréhension et voit de combien de profit elle sera. Cependant, je l’avise, s’il n’a pas de capacité sur la partie mineure de l’Arithmétique, qu’il ne se jette pas dans 1’entreprise de vouloir apprendre l’Algèbre, parce que ce serait du temps perdu. Que l’on ne me taxe pas non plus si quelque erreur ou incorrection se retrouve dans ce travail, il n’est pas de mon fait mais de l’imprimeur, encore qu’on ait usé et fait user de toute la diligence qu’il a été possible. Mais on est dans l’impossibilité qu’il n’en advienne pas dans une œuvre semblable et de même que si dans la trame des paroles se voit quelque inconvenance et un style peu charmant, que l’on ne considère pas cela comme chose due au fait que ceci est bien loin de ma profession, mais seulement dû à l’essence des choses et que le poli de l’expression est de peu de relief en une telle matière. Je n’ai pas voulu cette finalité, mais seulement (comme je l’ai d’abord dit) enseigner la discipline et l’usage de la partie majeure de l’Arithmétique (ou Algèbre dit-on) par la grâce de Dieu, bénit soit-il, au bénéfice des vivants.

Livre 3 (p. 315)

Mon intention était de regrouper toutes les opérations de l’Algèbre afin que cette œuvre suffise à elle seule pour celui qui voudrait apprendre cette science. Il m’est apparu cependant nécessaire de bâtir ce troisième livre sur des demandes afin de démontrer en donnant les solutions.

Voilà pourquoi je commencerai à un niveau si bas que cela paraîtra de peu de valeur aux connaisseurs, j’en ai jugé ainsi parce que c’est nécessaire à un débutant. Ensuite les demandes faciles serviront aussi à faire les plus ardues. Nombre d’entre elles ont deux solutions et pourtant tout se fera sans autre nécessité ni mystère pour plus de compréhension de l’art. Je ne veux pas manquer cela dans ce troisième livre alors qu’il a peut être paru à quelques uns que je l’ai manqué dans le livre précédent. Il semblera peut être aux débutants que j’ai été trop bref, surtout dans les quarante deux derniers Cas, et aux connaisseurs, que j'ai été trop long. Quant aux premiers Cas, je dis qu'ils sont très difficiles. Si un débutant n'a pas été guidé auparavant afin de ne rien perdre du livre cité, surtout pour les Cas du Cube, du Carré, du *Tanto* et de la Constante (*numero*), il ne pourra pas comprendre les Cas susdits, mais j'ai mis un exemple pour chacun d'eux où il paraîtra peut être que j'ai été trop bref. Quant à cela, je dis que les possibilités dans ces Cas sont telles que si j'avais voulu mettre une par une toutes leurs conséquences comme je l'ai fait les autres fois, je n'aurais pas eu assez de toute cette œuvre pour elles seules. Je dis qu'avec un seul exemple par Cas, bien que celui qui opère ne comprenne ni les fondements ni d'où naissent leurs règles, rien qu'avec les exemples que j'ai donnés, il pourra résoudre toutes les équations, c'est possible.

Où je dis ôte *Tanto* de *Tanto* et que cela soit supérieur à ce dont on a à retrancher, ce n'est pas parce que le reste est moindre[13] que la règle ne sera pas bonne pour autant. De la sorte, rien ne manquant au sujet des règles données, cela sera aussi satisfaisant que si j'avais mis tous les exemples pour chaque définition elle-même.

C'est pour cela que je répète qu'autant j'ai été bref pour les débutants, autant j'ai été trop long pour les connaisseurs. Mais dans le livre présent aucun ne doit tenir pour médiocre les demandes simples que je ferai au début parce que tout est fait comme je l'ai dit avant pour celui qui voudra se donner les principes pour apprendre la dite science et l'Art.

La méthode de résolution est de toujours poser que la valeur de la chose demandée soit une quantité. Celle-ci d'après les inventeurs de cet art a été appelée chose, bien que, à mon avis, il conviendrait mieux de dire quantité. Ayant été une invention arabe, il se pourrait que dans cette langue ce chose signifie quantité. Alors autant dire quantité quand il s'agit de chose numérique, bien que je ne l'impose pas. Le carré de la dite quantité a été appelé Cens (*Censo*), je ne sais d'où un tel nom est dérivé, il serait mieux, quant à moi, de dire carré de quantité. Le Cube porte son nom juste, parce qu'un cube est un corps semblable à un dé, il a une longueur, une largeur et une hauteur, il lui est donc identique. Ainsi, le Cube en Algèbre est la multiplication de la chose triplée, ce qui revient au même. Néanmoins, j'ai suivi et je suivrai l'ordre des autres parce que ce n'est pas fondamental.

---

[13] D'une certaine manière Bombelli accepte ici les solutions « négatives ». Elles ressortent de la règle qui est générale.

Je viendrai aux demandes par leurs modes de résolution. On doit remarquer que toutes les demandes qui amènent à l'égalisation de la Chose à un nombre peuvent encore se résoudre par la règle de la proportion appelée la règle de trois, ou bien par la méthode du Cataino[14]. Qui ne connaît pas la dite règle de trois et la pratique des rompus[15] pourra mal comprendre la pratique présente. Il est nécessaire de connaître les principes premiers pour comprendre cet art. Après cela, j'en viendrai aux exemples. D'abord je traiterai des demandes qui se résolvent avec le premier Cas sur la Chose égale à un nombre et, peu à peu, suivant l'ordre des Cas du livre précédent, je formulerai et résoudrai les demandes du livre présent.

M'étant mis en tête, quand je me suis résolu à composer l'œuvre présente, de vouloir (à l'imitation des écrivains recommandés, autant antiques que modernes) procéder selon un ordre distributif dans la trame de celle-ci, je l'ai divisée en trois parties qui sont les livres. Ainsi, dans le premier, j'ai raisonné avec les termes simples de cette discipline, leurs règles et opérations. Dans le second, j'ai traité des *Tanti* et de leur résolution. Maintenant, dans ce troisième et dernier livre, avec un plaisir non diminué, je parviens à la fin désirée de cette discipline. Il a le pouvoir, au moyen des règles enseignées dans le premier et le second livre, de lever tous les doutes sur les Problèmes Arithmétiques, autant des nombres rationnels qu'irrationnels. Sujet non moins épuisant qui sera ensuite plaisant au professeur de cette discipline. Je parlerai donc de ceci dans le troisième livre présent de manière diffuse, voilà pourquoi j'exhorte le Lecteur à s'y appliquer totalement en esprit et de ne pas avoir de pensée de satisfaction et profit. Quand (je ne sais ce que le dire me vaudra des jouteurs ou même des calomniateurs) il entendra m'accuser ou taxer d'homme ayant presque totalement dévié des usages des écrivains de cette discipline, ce sera parce que moi seul ai effectué des opérations avec des inconnues. Alors qu'eux, c'est ce qui se voit le plus, quand ils ont voulu traiter de Problèmes Arithmétiques, ils l'ont toujours fait sous le voile des actions ou des affaires humaines (comme il en est des ventes, achats, restitutions, permutations, changes, intérêts, défalcations, règle des monnaies, des métaux, poids, compagnie et avec les pertes et les gains, jeux et autre infinité d'actions semblables et opérations humaines comme on le voit chez ces

[14] Double fausse position.
[15] Fractions.

écrivains avec à peine plus de détails). Alors, si je suis sollicité maintenant, pour me défendre, je réponds que si je me suis mis à l'esprit de vraiment enseigner la partie supérieure de l'Arithmétique (dite Algèbre) en imitant les auteurs antiques et quelques uns des modernes, c'est parce que les autres qui en sont restés au mode dit précédemment, avec des exemples semblables aux activités humaines, ont été plus pratiques que scientifiques. Il se voit clairement dans chaque science s'enseigner à chaque instant la Théorie et non la pratique parce qu'on pense que la capacité de l'intellect humain est telle qu'il doit ensuite, possédant la Théorie, venir à l'usage de la pratique et majoritairement dans les sciences mathématiques parce qu'elles versent (comme on sait) dans les spéculations. On se doit de croire que le professeur sera théoricien et conséquemment saura mettre en œuvre cette science, la réduisant aux actes pratiques et s'il n'en était ainsi, qu'il ne s'épuise pas sur une telle discipline qui lui ferait perdre son temps. Je ne veux pareillement m'empêcher de dire que le lecteur ne doit pas se scandaliser s'il ne voit dans ce troisième livre aucun problème semblable à ceux qui ont été mis par les autres auteurs (pareillement, je le confesse, ceux de Diophante autrefois appelé par moi Auteur très intelligent de cette science, y sont) parce que (on le sait) ces démonstrations mathématiques contiennent immédiatement et probablement les principes en elles-mêmes. Par conséquent il faut que j'en dise quelque chose que les autres n'ont pas dit, et ainsi, pourra le dire aussi la postérité. Il est bien vrai, si ce n'est complètement au moins en partie, que les méthodes opératoires sont différentes entre les rédacteurs. Que ma méthode d'opérer soit bonne ou coupable, c'est au lecteur lui-même de juger. Il me semble cependant avoir donné une telle image de moi dans les deux précédents livres qu'il pourra facilement la reconnaître. Donc, que cessent les calomniateurs et que les étudiants de cette science jugent l'âme libre de toute passion des effets de la vérité pour laquelle tout est fait quand j'en viens à traiter de ces très beaux Problèmes. Je leur rappelle encore ceci, que celui qui opère ne s'étonne pas si aucune des équations différentes n'est traitée. Ainsi, en parlant des Inconnues (*Tanti*) supposées par moment avec plus, par moment avec moins et des fois sans aucun nombre, c'est-à-dire en parlant des puissances qui seront mises parfois seules, parfois accompagnées, il ne sera donné sur cela, aucune règle. C'est parce qu'il me parait que, depuis que je l'ai dit quand j'ai parlé de cela, c'est la pratique qui doit l'enseigner. Si on voulait mettre dans les problèmes graves chaque cause minime des opérations, on n’en verrait jamais la fin. Cela répugne extrêmement à ma nature, studieuse dans la brièveté, par contre j’ai plutôt voulu citer les opérations de l’autre livre (on le verra en légende).

Un exemple de l'édition de 1572

Cas du Cube égal à des *Tanti* et constante

Voulant égaliser un cube à des *Tanto* et constante, on prend le tiers des *Tanti* et on les cube. Le produit se retranche du carré de la moitié de la constante. De cela, ce qui reste, on en prend le côté auquel on ajoute et on retranche la moitié de la constante. De la somme et du reste, on prend le côté cubique de chacun d'eux. Ces deux côtés joints ensemble sont la valeur du *Tanto* (comme on le verra dans l'exemple ci-dessous).

$1.\overset{3}{\cup}$ égal à $\underline{6.}\overset{1}{\cup}$ *p.* $\underline{40.}$ On prend le tiers des *Tanti*, c'est 2, cubé cela fait 8. Ceci se retranche du carré de la moitié du nombre, qui est 400, il reste 392. De ceci on prend le côté, qui est *R.q.*392. et s'ajoute à la moitié …

$1.\overset{3}{\cup}$ égal à $\underline{6.}\overset{1}{\cup}$ *p.* $\underline{40.}$

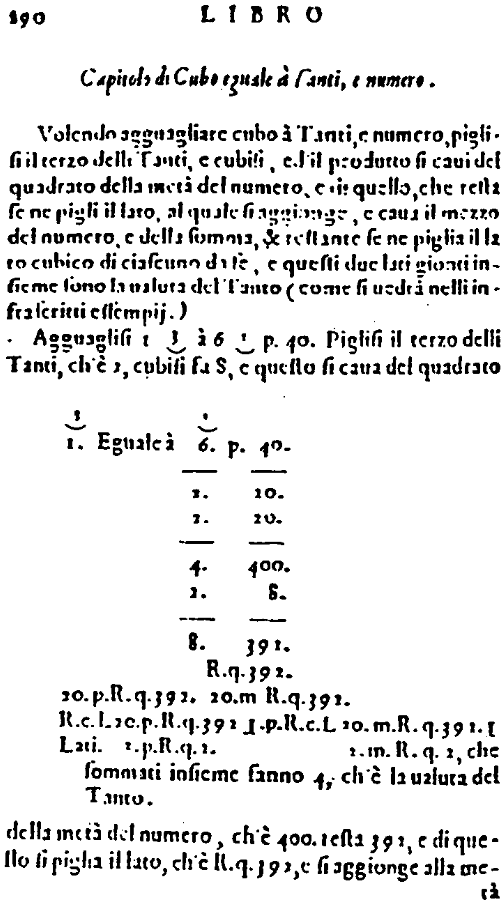
2.	20.
$\underline{2.}$	$\underline{20.}$
4.	400.
$\underline{2.}$	$\underline{8.}$
8.	392.

*R.q.*392.

20.*p.R.q.*392. 20.*m.R.q.*392.

R.c.[20.p.*R.q.*392.] .*p.R.c.*[20.*m.R.q.*392]

Racines 2.*p.R.q.*2. 2.*m.R.q.*2. qui ajoutés ensemble font 4, qui est la valeur de l'inconnue[16].


190 LIBRO

Capitolo di Cubo eguale à Tanti, e numero.

Volendo agguagliare cubo à Tanti, e numero, piglisi il terzo delli Tanti, e cubisi, e del il prodotto si caui del quadrato della metà del numero, e di quello, che resta se ne pigli il lato, al quale si aggionge, e caua il mezzo del numero, e della somma, & restante se ne piglia il lato cubico di ciascuno da se, e questi due lati gionti insieme sono la ualuta del Tanto (come si uedrà nelli infrascritti essempij.)

Agguaglisi 1 $\overset{3}{\cup}$ à 6 $\overset{1}{\cup}$ p. 40. Piglisi il terzo delli Tanti, ch'è 2, cubisi fa 8, e questo si caua del quadrato della metà del numero, ch'è 400. resta 392, e di quello si piglia il lato, ch'è R.q.392, e si aggionge alla metà

$\overset{3}{\cup}$ 1. Eguale à $\overset{1}{\cup}$ 6. p. 40.

2.	20.
2.	20.
4.	400.
2.	8.
8.	392.

R.q.392.

20.p.R.q.392. 20.m R.q.392.

R.c.L.20.p.R.q.392 ⅃.p.R.c.L 20.m.R.q.392.⅃

Lati. 2.p.R.q.2. 2.m.R.q.2, che sommati insieme fanno 4, ch'è la ualuta del Tanto.

[16] Solution dans R+, les racines $-2+i\sqrt{6}$ et $-2-i\sqrt{6}$ sont omises.

L'ALGEBRA

OPERA...

Di Rafael Bombelli da Bologna

... Diuisa in tre Libri.

Con la quale ciascuno da se potrà venire in perfetta cognitione della teorica dell'Arimetica.

Con vna Tauola copiosa delle materie, che in essa si contengono.

Posta hora in luce à beneficio delli Studiosi di detta professione.

IN BOLOGNA,

Per Giouanni Rossi. MDLXXIX..

Con licenza de' Superiori.

II-LES DÉFINITIONS

Bombelli écrivait l'équation $x^2 + 6x = 16$ *sous la forme* « $1.\overset{2}{\smile}p.6.\ 1.\overset{1}{\smile}$ *eguali a* 16 ». *Une définition systématique des termes employés et l'explicitation des règles de calcul apparaissent dès le début de l'ouvrage avec des exemples particuliers. Les constructions géométriques apparaissent comme illustrations plutôt que comme des démonstrations. Un début de libération des contraintes d'homogénéité semble se faire, les raisonnements en termes de longueur, surface et volume s'atténuent.*

Les problèmes traités, ainsi que les exemples donnés sont purement numériques ou géométriques et Bombelli insiste sur cet aspect de son livre. Il y a là une rupture avec ses prédécesseurs qui présentent souvent des situations plutôt artificielles pour illustrer leur propos. Cela ouvre d'ailleurs un débat sur ce qu'est un livre de mathématiques, de ce que l'on doit y traiter et sur la manière de faire comprendre les notions présentées. Enfin, ce qui est encore nouveau, c'est le ton et la tentative de dialogue avec le lecteur : Bombelli réfléchit tout haut. Tout cela concerne sans doute une histoire de la didactique encore à faire.

Voici plusieurs longs passages dont la lecture me semble essentielle à la compréhension du cheminement intellectuel de Bombelli.

Livre 1

Définition du nombre carré (p.11)

Le Produit de tout nombre multiplié par lui-même est un nombre carré, comme le sont 4, 9, 16, 25, 36, 81 et 100, lesquels naissent de la multiplication de chacun des suivants par eux-mêmes, c'est à dire 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 et ceux-ci seront appelés par moi, côtés des nombres carrés définis avant. Ainsi, 2 sera le côté de 4 nombre carré, 3 sera le côté de 9, 4 de 16, et ainsi, de proche en proche. On doit noter que bien que l'unité ne soit pas un nombre, dans les opérations elle est utilisée comme les nombres. 1 est carré et son côté est l'unité elle -même et ainsi de toutes les autres puissances qui suivent, le côté est toujours le 1 lui-même (comme c'est démontré dans le livre XI des Éléments d'Euclide).

Définition du nombre cube (p. 11)

Le produit de chaque nombre carré par son côté est un nombre cube, comme le produit de 9, nombre carré, par 3, son côté, est 27**,** lequel 27 est un nombre cube et son côté est 3. 125 aussi est un nombre cube parce que c'est le produit de 25, nombre carré, et de 5, son côté, et le côté cubique de 125 est 5.

Définition de la Racine carrée, dite sourde ou indiscrète (p.13)

La Racine carrée est le côté d'un nombre non carré dont la dénomination[17] est impossible à faire, cependant elle s'appelle Racine sourde ou indiscrète. Comme si on avait à prendre le côté de 20, cela ne veut rien dire d'autre que trouver un nombre qui multiplié par lui-même fasse 20 ; ce qu'il est impossible de trouver, parce que 20 n'est pas un nombre carré. Ce côté on le dira être Racine 20, mais on doit être averti que quand on dira simplement Racine on entendra carrée, laquelle s'écrira ainsi: *R.q.*

Définition de la racine cubique (p.13)

La Racine cubique est le côté cubique d'un nombre non cubique, cependant elle s'appelle Racine cubique comme ce serait si on avait à prendre le côté cubique de 24 ; lequel est impossible à trouver, parce que 24 n'est pas un nombre cubique, pour cela ce côté cubique se dira être Racine cubique 24, je vous avertis que cette sorte de racine s'écrira ainsi, *R.c.*

Livre 2 (p. 155)

Quelques uns s'étonneront peut-être que j'aille à l'encontre de l'usage antique des auteurs italiens, de ceux qui ont jusqu'à ce jour écrit sur la science Arithmétique. Quand ils ont eu à traiter de la quantité inconnue, ils l'ont toujours désignée sous le vocable Chose qui est le vocable commun à toutes les choses inconnues. Moi je désigne maintenant ces quantités par *Tanto*. Celui qui considérera bien ce fait réalisera que ce vocable *Tanto* convient mieux que celui de Chose. Ceci parce qu'on doit se dire que *Tanto* est le terme approprié pour les quantités numériques. Cela ne peut être dit du mot chose, chose étant le terme universel et commun pour toute substance autant inconnue que connue. En outre, j'ai trouvé que l'Auteur Grec Diophante la nommait ainsi, ceci n'est pas un mince argument, venant de la propre et

[17] L'expression sous forme de puissance.

vraie parole d'un Écrivain aussi antique et d'une telle valeur (comme je l'ai dit dans le premier livre).

Que le Lecteur ne s'étonne donc pas si ma dénomination paraît nouvelle aux modernes bien qu'elle soit très antique pour les anciens. Mais afin qu'on puisse opérer au mieux sur ces quantités inconnues dont je traite dans mon second livre, il contient des propositions qui cherchent à en rendre parfaitement apte. Je les ai mises au début (comme des règles) en donnant brièvement une définition pour chacune d'entre elles, en suivant l'ordre croissant et obligé pour ces quantités. Chacune d'elles est notée avec son signe, ou caractère, avec lequel elle s'écrira désormais. Cela aura cette force et cette valeur qui se verront dans le contenu des définitions et des propriétés. Pour ne plus m'étendre en paroles, j'en viens à ces définitions et je parlerai d'abord du *Tanto*.

Définition du susdit *Tanto* (p. 155)

Le *Tanto* donc, est une quantité inconnue, avec laquelle à la fin des opérations on en vient à trouver un nombre qui lui soit identique, ou égal. Arrivé à cette fin, on trouvera ce que vaut un *Tanto* (comme on le montrera dans la résolution d'équation). Ce *Tanto* se notera par le symbole $\overset{1}{\cup}$.

Définition de la puissance deux (p. 156)

Parce que dans les opérations il est nécessaire de multiplier d'assez nombreuses fois les *Tanti* entre eux et que le produit se dit de manières diverses. Un tel produit est appelé « Cens » (*censo*) par beaucoup, vocable tellement malséant qu'on devrait ne plus l'utiliser parce qu'il me semble ne point convenir en matière de nombres. On sait suffisamment ce que signifie ce vocable de Cens sans que j'ai à le redire. Il a été ensuite appelé carré par d'autres ; ce nom est susceptible de générer la confusion parce qu'il est nécessaire ensuite de désigner les nombres carrés et les surfaces carrées. Donc je me suis résolu à suivre Diophante (comme je l'ai fait pour le reste) et l'ai appelé « Puissance » (*Potenza*). Cette Puissance apparaît quand on fait le carré du *Tanto* et elle se notera par ce symbole $\overset{2}{\cup}$.

Définition du Cube (p. 156)

Le Cube est le produit de la *Potenza* multipliée par son *Tanto* et nous mène à l’usage de l’ordre des cubes. Alors que le produit d’un nombre carré par sa racine produit un nombre cube, pareillement la puissance, qui est un carré, multipliée par le *Tanto*, sa racine, produit le cube, lequel se notera par $\overset{3}{\cup}$.

Définition de la Puissance de Puissance (p. 156)

La Puissance de Puissance (*Potenza di Potenza*) est le carré carré du *Tanto* ou bien le carré de la *Potenza* ou bien le produit du Cube par le *Tanto*, elle se notera $\overset{4}{\cup}$.
Tous seront appelés *Dignita* mais selon ma brièveté habituelle (pour ne pas m’étendre trop), je ne les définirai pas particulièrement. Il me semble que cela suffit parce qu’ensuite toutes naissent de la même manière et je mettrai seulement leur nom et leur symbole.

L’Inconnue *(Tanto)* $\overset{1}{\cup}$.
Le Carré (*Potenza*) $\overset{2}{\cup}$.
Le Cube (*Cubo*) $\overset{3}{\cup}$.
Le Carré de Carré (*Potenza di Potenza*) $\overset{4}{\cup}$.
La Puissance Cinquième (*Primo Relato*) $\overset{5}{\cup}$.
Le Cube de Carré de Carré (*Cubo di Potenza di Potenza*) $\overset{12}{\cup}$.

Dans la partie mineure de l’Arithmétique, quatre actions sont nécessaires, ce sont Multiplier, Diviser, Sommer et Soustraire et, c’est ainsi, que la partie majeure en nécessitera cinq, les quatre citées avant et la résolution des équations (*agguagliare*). C’est cette cinquième qui est la plus difficile et la plus importante et je m’efforcerai de la présenter de sorte qu’elle soit comprise de chacun ...

Sommare di dignità compoſte.

Lo ſommare di dignità compoſte non è differente dal ſommare del più, e meno delli numeri detti nel primo libro, e di numero, e R.q. però ponerò ſolo li eſſempij ſenz'altro commento, parendomi ſuperfluo.

Somma	$\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$ p. 4.	$\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$ p. 4.
Con	$\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$ p. 6.	Con $\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$ m. 3.
Fa	$\overset{\overset{1}{\smile}}{11}$ p. 10.	$\overset{\overset{1}{\smile}}{11}$ p. 1.
	$\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$ p. 4	$\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$ m. 2.
Con	8 m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{2}$.	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$ m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{2}$.
	$\overset{\overset{1}{\smile}}{4}$ p. 12.	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$ p. $\overset{\overset{1}{\smile}}{4}$ m. 2
	$\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$ p. 8.	$\overset{\overset{2}{\smile}}{12}$. m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$. p. 4
	m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{15}$.	$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$. p. $\overset{\overset{1}{\smile}}{9}$. m. 5.
	8. m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{9}$	$\overset{\overset{2}{\smile}}{17}$. p. $\overset{\overset{1}{\smile}}{3}$. m. 1.

III- LES « IMAGINAIRES »

Bombelli est surtout cité par les historiens des mathématiques pour son introduction des imaginaires dans les calculs. Á vrai dire, le premier calcul avec une racine carrée de nombre négatif a été publié par Cardan en 1545, mais il suffit de comparer les textes pour voir les progrès réalisés en une quinzaine d'années. Les problèmes soulevés par les formules de résolution des équations du troisième degré semblent avoir été un puissant stimulant. Ce n'était pas l'avis de Stévin qui déclarait « Il y déjà tant de choses sûres sur lesquelles travailler qu'il n'y a aucun besoin de se fatiguer sur les choses incertaines ».

Livre 1 (pages 133, 134)

J'ai trouvé une autre sorte de racine cubique d'expressions entre parenthèses très différente des autres. Celle-ci est issue du Cas sur le Cube du *Tanto* égal au *Tanto* et à une Constante[18], quand le cube du tiers du nombre de *Tanti* est plus grand que le carré de la moitié de la Constante, comme cela va être démontré pour ce Cas. Cette sorte de racine carrée contient dans son algorithme de calcul, des opérations différentes des autres et a un nom différent, parce que, quand le cube du tiers du nombre de *Tanti* est supérieur au carré de la moitié de la Constante, la racine carrée de leur différence ne peut s'appeler ni plus ni moins, c'est pourquoi je l'appellerai *plus de moins*[19] quand celle-ci devra être ajoutée et, quand elle devra être ôtée, je l'appellerai *moins de moins.* Cette opération est bien plus nécessaire que celle de l'autre calcul de la racine cubique d'expressions entre parenthèses, vu avec les Cas consacrés aux Carrés de Carrés accompagnés de Cubes, ou du *Tanto* ou des deux ensemble. Les situations de résolution où apparaissent cette sorte de racines sont bien plus nombreuses que celles où naît l'autre, cela paraîtra à nombre d'entre vous plus sophistiqué que réel. Moi aussi, j'ai eu une telle opinion jusqu'à ce que je trouve la rédaction de sa démonstration (comme cela sera démontré dans la démonstration du Cas des surfaces planes) et avant de traiter de la multiplication, je pose la règle du plus et du moins :

Plus par plus de moins donne plus de moins[20]

[18] Forme $x^3 = px + q$ avec $(\frac{p}{3})^3$ supérieur à $(\frac{q}{2})^2$

[19] *Piu di meno,* il semble que ce soit une abréviation de *Piu Radice di meno,* plus racine de moins.

[20] *Piu via piu di meno, fa piu di meno.*

Moins par plus de moins donne moins de moins

Plus par moins de moins donne moins de moins

Moins par moins de moins donne plus de moins

Plus de moins par plus de moins donne moins

Plus de moins par moins de moins donne plus

Moins de moins par plus de moins donne plus

Moins de moins par moins de moins donne moins

On doit être averti que de telles sortes de racines liées ne peuvent intervenir sans que le binôme ne soit accompagné de son conjugué, comme cela serait pour R.c.[2.*plus de moins R.q.*2.] dont le conjugué sera R.c.[2.*moins de moins Rq*.2.] ; pour de telles sortes de *R.c.*, il ne m'est jusqu'à présent encore jamais arrivé d'avoir travaillé sur l'une sans l'autre …

L'utilité des imaginaires pour trouver les racines cubiques

Voici maintenant, la démarche de Bombelli pour simplifier les expressions de la forme $\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}$ *ou encore* $\sqrt[3]{\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}}$ *dans le cas où* $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$.

Manière de trouver le côté cubique de mêmes sortes de racines (pages 140, 141)

Bombelli décrit la recherche d'un nombre dont le cube est 2 + 11*i et il trouve* 2 + *i*. *en voulant trouver le côté cubique de racines de même espèce on retiendra la pratique de cette méthode*.

« On ajoute le carré de la Constante au carré de la racine et de cette somme on prend le côté cubique, puis on cherche à tâtons à trouver un nombre et une racine carrée tels que leurs carrés ajoutés ensemble fassent autant que le côté cubique donné précédemment. Ensuite, du cube du nombre étant retranché le triple du produit du nombre par le carré de la racine, ce qui restera sera la valeur de la racine que l'on cherche. Ce serait ainsi si l'on voulait avoir le côté de *R.c*. [2. *piu di meno R.q.*121]. On trouve qu'en additionnant le carré de la *R.q.*, qui est 121, avec 4, le carré du 2, cela donne 125, cube dont le côté est 5. Maintenant, on a besoin de trouver un nombre dont le carré soit inférieur à 5 et dont le cube soit supérieur à 2. C'est ainsi qu'en posant que c'est 1, la *R.q.* dont on a besoin sera *R.q.*4, les carrés ajoutés ensemble font

5 et le cube du nombre est 1. La multiplication du nombre par le carré de la *R.q.* donne 4 qui triplé fait 12, ce qui ne peut être retranché du cube du nombre qui est seulement 1. C'est pourquoi 1 n'est pas bon. D'où on prend 2, la *R.q.* sera *R.q.*1. dont on voit que si on ajoute le carré de la Constante et le carré de la *R.q.* cela fait 5. Le cube du nombre est 8, duquel est retranché le triple de la multiplication du nombre par le carré de la *R.q.*, qui est 6. Il reste 2, qui est le nombre qui était accompagné du *piu di meno R.q.*121., c'est pourquoi son côté est 2. *piu di meno* 1. Je dois prévenir, pour R.c. [2. *piu di meno R.q.*121.], comme 121 est le carré du nombre dont le côté est 11, on pourra dire que c'est 2 *piu di meno* 11 et on voit que son côté est 2. *piu di meno* 1. où il ne vient pas de *R.q.*, mais un côté constitué de deux nombres (comme l'était 2. *piu di meno* 11.) »

Le calcul qui suit ne peut que confirmer la maîtrise de Bombelli dans les calculs avec les nombres complexes.

« Il y a encore de ces sortes de racines dont la recherche, au lieu d'un nombre comme il est arrivé dans les autres cas, donnera un binôme ou un résidu. C'est beaucoup plus fatigant qu'avec les précédentes, comme par exemple si on avait à trouver le côté cubique de 8 *piu di meno Rq.*$232\frac{8}{27}$. En ajoutant ensemble les carrés de 8 et de *Rq.*$232\frac{8}{27}$, cela donnera $296\frac{8}{27}$ dont le côté cubique sera $6\frac{2}{3}$. Maintenant, on doit chercher un nombre dont le carré sera inférieur à $6\frac{2}{3}$ et dont le cube sera supérieur à 8, le nombre du binôme dont on doit trouver le côté cubique. Si on prend 2, son carré sera inférieur à $6\frac{2}{3}$, mais son cube ne sera pas supérieur à 8, et il en est de même pour 3 qui n'est pas bon. Mais on voit que le 2 est plus proche que le 3, c'est pourquoi on doit trouver une quantité qui soit supérieure à 2 et inférieure à 3, Rq.2 + 1 a cette qualité, parce que son carré, qui est 3 + *Rq.*8, est inférieur à $6\frac{2}{3}$ et son cube est *Rq.*50 + 7 qui est supérieur à 8. Maintenant, voyons si nous satisfaisons au reste : élevé au carré, *Rq.*2 + 1 fait 3 + *Rq.*8 et retranché de $6\frac{2}{3}$, il reste $3\frac{2}{3}$ – *R.q.*8 et ceci doit être la *Rq.* dont le côté cherché a la qualité proposée, en ayant pour nombre *Rq.*2 + 1 et pour racine *R.q.*[$3\frac{2}{3}$ – *Rq.*8], c'est pourquoi nous dirons que le côté est *Rq.*2 + 1 *piu di meno R.q.*[$3\frac{2}{3}$ – *Rq.*8]. »

Dans cet exemple, Bombelli décrit le calcul de la « racine cubique » a + ib du nombre complexe A + iB.

$A + iB = 8 + i\sqrt{232\frac{8}{27}}$ *(en écriture actuelle). Il ne faut pas s'étonner que les calculs aboutissent ; Bombelli est sûrement parti, sans nous le dire, d'une équation du troisième degré. En effet,* R.c.[8 + $i\ \sqrt{232\frac{2}{3}}$] *intervient*[21] *dans les formules de Cardan donnant les racines de* $x^3 + px + q$ *avec* $\frac{q}{2} = 8$ et $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -232\frac{8}{27}$ *soit* $q = -16$ et $p = -20$, *c'est-à-dire de l'équation*[22] $x^3 - 20x - 16 = 0$. *Cette dernière s'écrit encore* $(x + 4)(x^2 - 4x - 4) = 0$.

On remarquera que Bombelli calcule le module $a^2 + b^2$ *comme racine cubique de* $A^2 + B^2$ $(a^2 + b^2 = \sqrt[3]{A^2+B^2})$ *soit de* $(6\frac{2}{3})^3$. *Il remarque que* a^2 *doit être inférieur à* $\sqrt[3]{A^2+B^2}$ soit ici à $6\frac{2}{3}$ *et* a^3 supérieur à 8. *En effet* $(a + ib)^3 = A + iB$ *implique* $A = a^3 - 3ab^2$ donc $a^3 > A$. *Ce qui nous paraît naturel ne l'était certainement pas à celui qui était le premier à défricher ce terrain. On peut critiquer Bombelli feignant de trouver « à tâtons » entre* 2 *et* 3 *la valeur* $1 + \sqrt{2}$ *, mais on lui pardonnera pour n'y avoir pas insisté et avoir su si bien conduire le reste de ses calculs.*

La suite du texte de Bombelli, qui n'est pas citée ici, est une vérification du résultat, fort longue. Bombelli se refuse à écrire des expressions de la forme $P\sqrt{Q}$ *, faisant toujours entrer le P sous le radical, ce qui donne* $\sqrt{P^2Q}$ *qui, pour peu que P et Q soient des binômes, est assez compliqué. D'autre part, il indique à la fin de son calcul qu'il a tout de même vu que* $\sqrt{\frac{11}{3}-\sqrt{8}} = \sqrt{3} - \sqrt{\frac{2}{3}}$ *; le désir de bien montrer comment conduire les calculs sur les racines lui a fait préférer sa présentation.*

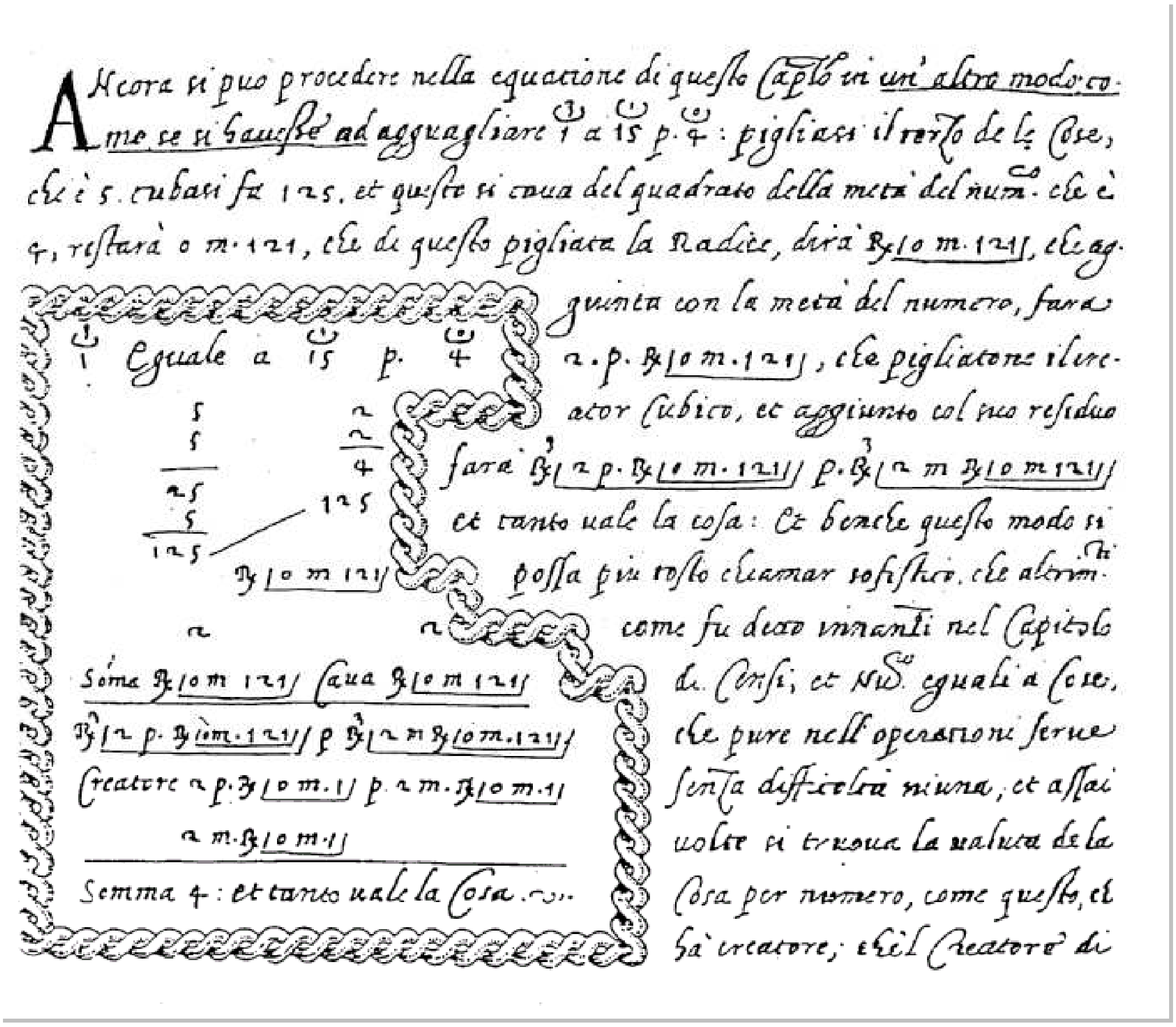
Les seuls calculs de Cardan pouvant mener à des nombres complexes concernaient des équations du second degré pour lesquelles une racine complexe n'avait pas beaucoup d'intérêt pratique. Avec Bombelli, les nombres complexes sont essentiels pour comprendre le

---

[21] L'écriture $\sqrt[3]{8+i\sqrt{232\frac{2}{3}}}$ serait abusive car elle sous-entend ou omet qu'il y a trois complexes ayant ce nombre pour cube. Les écritures R.c. et R.q. ont l'avantage de ne pas s'appesantir sur une question que Bombelli ne se posait pas.

[22] $x^3 = 20x + 16$.

cas irréductible des équations du troisième degré et les méthodes de calcul sont bien maîtrisées.



Ancora si può procedere nella equatione di questo Capitolo in un'altro modo come se si havesse ad agguagliare $\overset{3}{1}$ a $\overset{1}{15}$ p. 4: pigliasi il terzo de le Cose, che è 5, cubasi fa 125, et questo si cava del quadrato della metà del numero che è 4, restarà 0 m. 121, che di questo pigliata la Radice, dirà R[0 m. 121], che aggiunta con la metà del numero, farà 2 p. R[0 m. 121], che pigliatone il creator Cubico, et aggiunto col suo residuo farà R³[2 p. R[0 m. 121]] p. R³[2 m R[0 m 121]] et tanto vale la cosa: Et benche questo modo si possa più tosto chiamar sofistico, che altrimenti come fu detto innanti nel Capitolo di Cubi, et numero eguali a Cose, che pure nell'operationi serve senza difficoltà niuna, et assai volte si trova la valuta de la Cosa per numero, come questo, che ha creatore; e che il Creatore di

$\overset{3}{1}$ Eguale a $\overset{1}{15}$ p. $\overset{0}{4}$

Soma R[0 m 121] Cava R[0 m 121]

R³[2 p. R[0 m. 121]] p R³[2 m R[0 m. 121]]

Creatore 2 p. R[0 m. 1] p. 2 m. R[0 m. 1]

Somma 4: et tanto vale la Cosa.

Page du manuscrit de Bombelli correspond au calcul rapporté avant. Il est à remarquer que l'inconnue y est désignée par *la Cosa* et que les notations *piu di meno* et *meno di meno* n'y sont pas utilisées mais *R*[0 *m*.121].

Sotrare di dignità composte.

Lo sotrare di dignità composte non è differente da sotrare di p. e m. detto nel primo libro, e come si è proceduto nel sommare, così si farà nel sotrare le figure senz'altro comento.

Di	$\overset{\overset{1}{\smile}}{4}$ p. 6.	$\overset{\overset{1}{\smile}}{4}$ p. 6.
Caua	$\overset{\overset{1}{\smile}}{2}$ p. 5.	$\overset{\overset{1}{\smile}}{5}$ m. 8.
Resta	$\overset{\overset{1}{\smile}}{2}$ p. 1.	m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{1}$ m. 2.

$\overset{\overset{2}{\smile}}{5}$ m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{8}$ p. 2.

$\overset{\overset{2}{\smile}}{4}$ p. $\overset{\overset{1}{\smile}}{6}$ m. $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$.

$\overset{\overset{2}{\smile}}{1}$ m. $\overset{\overset{1}{\smile}}{14}$ p. $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ p. 2.

Moltiplicare di Dignità composte.

Moltiplichisi 4 $\overset{1}{\smile}$ via 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 8. farà 24 $\overset{2}{\smile}$ p. 32 $\overset{1}{\smile}$, e questo si fa semplicemente moltiplicando 4 $\overset{1}{\smile}$ via 6 $\overset{1}{\smile}$ fanno 24. $\overset{2}{\smile}$, e moltiplicando 8 uia 4 $\overset{1}{\smile}$ fanno 32 $\overset{1}{\smile}$, che aggionti con 24 $\overset{2}{\smile}$ fanno 24 $\overset{2}{\smile}$. p. 32 $\overset{1}{\smile}$, e questo è il produtto.

Moltiplichisi 6 $\overset{1}{\smile}$ uia 7. m. 2 $\overset{1}{\smile}$ prima si moltiplica

6 $\overset{1}{\smile}$

IV- LE SECOND DEGRÉ

Dans ce qui suit, Bombelli résout les équations de la forme $ax^2 = bx$, $ax^2 + bx = c$, $ax^2 = bx + c$, $ax^2 + c = bx$, a, b et *c étant des nombres positifs. Chacune des résolutions est algébrique, avec des cas particuliers suivis de leur validation géométrique. Il expose à la fin la résolution par « transmutation » permettant de résoudre une équation du type $ax^2 + bx = c$ en passant par la résolution d'une équation du type $ax^2 = bx + c$. Il traite clairement les équations menant à des solutions complexes,* 4 *piu di meno* 2 *et* 4 *meno di meno* 2, *qu'il exprime comme telles. Ceci a de quoi nous interroger, car il évite au contraire soigneusement les solutions négatives. Enfin, à l'inverse de Cardan qui s'efforce d'associer à ses solutions imaginaires des représentations géométriques sur lesquelles il s'arrête, dans ces situations Bombelli ne se lance pas dans des essais d'interprétation. Lucidité ou pas, il est évident que cette attitude créé une ouverture. En ne pointant pas ce problème d'interprétation géométrique et en se lançant dans l'utilisation calculatoire des racines carrées de nombres négatifs, il aborde un domaine où ces calculs pourront rapidement se développer sans attendre leur interprétation géométrique.*

Livre II (p. 190)

CAS DES CARRÉS ÉGAUX AUX *TANTI* ($ax^2 = bx$)

Quand on aura des Carrés égaux aux *Tanti*, on divisera le nombre de *Tanti* par celui du nombre de Carrés et ce qu'il adviendra sera la valeur du *Tanto*. Soit $10\overset{1}{\smile}$ égalé à $40\overset{1}{\smile}$. En divisant 40 par 10, il vient 4, et 4 vaut le *Tanto*. Et pour se ramener au Cas des *Tanti* égaux à la Constante, on fait à cette guise : on simplifie l'une et l'autre partie, comme cela a été enseigné en son lieu, de sorte qu'en enlevant une puissance à chacune des parties, on aura $10\overset{1}{\smile}$ égaux à 40. Et si on avait eu $10\overset{4}{\smile}$ égaux à $90\overset{2}{\smile}$, on enlèverait deux puissances à chacune des parties : on aurait $10\overset{2}{\smile}$ égaux à 90 et ainsi, on pourra par cette méthode résoudre toutes les puissances quand une sera égale à l'autre, excepté lorsque les puissances seront toutes d'une seule nature, parce qu'on ne peut égaliser des *Tanti* à des *Tanti*, ni des Carrés à des Carrés, ni une Constante à une Constante, et ainsi des autres.

CAS DES CARRÉS ET DES *TANTI* ÉGAUX A LA CONSTANTE ($ax^2 + bx = c$)

Quand il s'agit de Carrés et de *Tanti* égaux à une Constante, il y a deux méthodes. La première est celle-ci : on divise chaque terme par le nombre[23] de Carrés, puis on prend la moitié[24] du nombre de *Tanti* que l'on quarre et ce qui en résulte est ajouté à la Constante. De cette somme, on en prend le côté[25] et de ce côté on retire la moitié du nombre de *Tanti*. Ce qui en restera sera la valeur du *Tanto*. Ainsi, par exemple pour $2\overset{2}{\cup} + 12\overset{1}{\cup}$ égaux à 32, chaque terme est divisé par 2, nombre de Carrés, il en viendra $1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}$ égaux à 16. On prend la moitié du nombre de *Tanti*, qui est 3, quarré cela fait 9, joint à 16 cela fait 25. De cela, on en prend le côté, qui est 5, dont on retranche la moitié du nombre de *Tanti*, il reste 2 et 2 vaut le *Tanto*. Mais si on veut un procédé se ramenant au Cas dit des « *Tanti* égaux à la Constante » et qu'en opérant d'une telle manière cela soit comme une démonstration, cela se fait à cette guise : $2\overset{2}{\cup} + 12\overset{1}{\cup}$ égalisé à 32. Réduisant à $1\overset{2}{\cup}$ (comme il a été dit plus avant) on aura $1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}$ égaux à 16. On opère comme il a été montré, quand il s'agissait de prendre le côté des Carrés et des *Tanti*. La moitié du nombre de *Tanti*, qui est 3, étant prise et l'ajoutant au côté du Carré, qui est $1\overset{1}{\cup}$, cela fait $1\overset{1}{\cup} + 3$ dont le carré est$1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup} + 9$. Nous, nous voulons $1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}$, mais, si on ajoute 9 à la fois aux deux parties, ont aura $1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}+ 9$ égaux à 25. On en retire que le côté de $1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}+ 9$ sera $1\overset{1}{\cup} + 3$ et ceci est égal au côté de 25, qui est 5. En ôtant 3 de chacune des parties, il restera 2 égal à $1\overset{1}{\cup}$ et le *Tanto* vaudra 2.

L'autre méthode est celle-ci : multiplier le nombre de Carrés par la Constante et ajouter ce produit au carré de la moitié du nombre de *Tanti*. On prend le côté de la somme, duquel on retire la moitié du nombre de *Tanti*. Ce qui reste est divisé par le nombre de Carrés et ce qui advient est la valeur du *Tanto*. Comme par exemple : $3\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}$ égaux à 24. Le nombre de Carrés, 3, multiplié par 24 fait 72 et à cela on ajoute 9, carré de la moitié du nombre de *Tanti*, cela fait 81. Son côté est 9, duquel on en retranche 3, moitié du nombre de *Tanti* : reste 6. De ceci divisé par 3, le nombre de Carrés, il en vient 2, et 2 est la valeur du *Tanto*. Cette méthode

---

[23] Le coefficient de la puissance deux.
[24] La moitié du coefficient.
[25] La racine carrée.

est très utile pour simplifier les fractions et sert beaucoup pour la formation de la fraction dans l’extraction des *R.c.* (comme il a été dit dans cette extraction).

Soit $2\overset{2}{\cup} + 16\overset{1}{\cup}$ + égalé à 40. On divise chaque terme par le nombre de Carrés, c’est-à-dire par 2, il en vient $1\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup}$ égaux à 20. En prenant la moitié du nombre de *Tanti*, qui est 4, en la joignant au côté de $1\overset{2}{\cup}$ qui est $1\overset{1}{\cup}$, cela fait $1\overset{1}{\cup} + 4$ dont le carré est $1\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup} + 16$. Nous voudrions que cela fasse seulement $1\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup}$, alors, on adjoint 16 à chaque partie, et on aura $1\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup} + 16$ égal à 36 et ainsi, le côté de $1\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup} + 16$ étant pris, on aura $1\overset{1}{\cup} + 4$. Le côté de 36 est 6, en sorte que $1\overset{1}{\cup} + 4$ est égal à 6. En ôtant 4 de chaque partie, il reste $1\overset{1}{\cup}$ égal à 2 et 2 est la valeur du Tanto. Soit $1\overset{1}{\cup} + 2$ égal à *R.q.*$[2\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup}]$. En élevant au carré les deux côtés à la fois on aura $2\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup}$ égaux à $1\overset{2}{\cup} + 4\overset{1}{\cup} + 4$; et en ôtant $4\overset{1}{\cup}$ de chaque partie, on aura $2\overset{2}{\cup} + 4\overset{1}{\cup}$ égaux à $1\overset{2}{\cup} + 4$. En ôtant $1\overset{2}{\cup}$ de chaque partie, on aura $1\overset{2}{\cup} + 4\overset{1}{\cup}$ égaux à 4 et, selon le Cas, le *Tanto* vaudra *R.q.*8 – 2.

Soit $4\overset{1}{\cup} + 8$ – *R.q.* $[128 + 8\overset{2}{\cup}]$ égal à zéro. On enlève le moins et on le met dans l’autre partie, on aura $4\overset{1}{\cup} + 8$ égaux à *Rq.*$[128 + 8\overset{2}{\cup}]$. Chacune des parties étant quarrée, on aura $16\overset{2}{\cup} + 64\overset{1}{\cup} + 16$ égal à $128 + 8\overset{2}{\cup}$. Le $8\overset{2}{\cup}$ étant ôté de chacune des parties on aura $8\overset{2}{\cup} + 64\overset{1}{\cup} + 64$ égal 128 ; en enlevant le 64 de chaque partie on aura $8\overset{2}{\cup} + 64\overset{1}{\cup}$ égaux à 64. En réduisant à $1\overset{2}{\cup}$ et en résolvant (comme il est dit plus avant), le *Tanto* vaudra *R.q.*24 – 4.

$4\overset{1}{\cup} + 8$ – *Rq.*$[128 + 8\overset{2}{\cup}]$ égal à 0
$4\overset{1}{\cup} + 8$ égal à *Rq.*$[128 + 8\overset{2}{\cup}]$
$16\overset{2}{\cup} + 64\overset{1}{\cup} + 16$ égal à $128 + 8\overset{2}{\cup}$
$8\overset{2}{\cup} + 64\overset{1}{\cup} + 16$ égal à 128
$16\overset{2}{\cup} + 64\overset{1}{\cup}$ égal à 64
$1\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup}$ égal à 8
$16\overset{2}{\cup} + 8\overset{1}{\cup} + 16$ égal à 24
$1\overset{1}{\cup} + 4$ égal à *R.q.*24
$1\overset{1}{\cup}$ égal à *R.q.*24 – 4.

Soit 4 + *Rq.*[24$\overset{1}{\cup}$ – 20] égal à 2$\overset{1}{\cup}$. Pour une semblable résolution, on a toujours besoin de chercher à ce que la *Rq.* du tout reste seule, c’est pourquoi on ôtera le 4 des deux parties à la fois et on aura *R.q.*[24 – 20$\overset{1}{\cup}$] égale à 2$\overset{1}{\cup}$ – 4. Chacune des parties étant quarrée, on aura 24 – 20$\overset{1}{\cup}$ égal à 4$\overset{2}{\cup}$ – 16$\overset{1}{\cup}$ + 16. En enlevant les moins de chacune des parties et, en mettant dans l’autre partie, on aura 4$\overset{2}{\cup}$ + 20$\overset{1}{\cup}$ + 16 égal à 24 + 16$\overset{1}{\cup}$. En enlevant 16$\overset{1}{\cup}$ à chaque partie, on aura 4$\overset{2}{\cup}$ + 4$\overset{1}{\cup}$ + 16 égal à 24 et en ôtant 16 de chacune des parties on aura 4$\overset{2}{\cup}$ + 4$\overset{1}{\cup}$ égal à 8. En réduisant à 1$\overset{2}{\cup}$ on aura 1$\overset{2}{\cup}$ + 1 égal à 2 ; de sorte qu’en suivant le Cas, le *Tanto* vaudra 1.

4 + *Rq.*[24 – 20$\overset{1}{\cup}$] égal à 2$\overset{1}{\cup}$

R.q.[24 – 20$\overset{1}{\cup}$]   égal à 2$\overset{1}{\cup}$ – 4

24 – 20$\overset{1}{\cup}$ égal 4$\overset{2}{\cup}$ – 16$\overset{1}{\cup}$ + 16

24 + 16$\overset{1}{\cup}$ égal à 4$\overset{2}{\cup}$ + 20$\overset{1}{\cup}$ + 16

24   égal à 4$\overset{2}{\cup}$ + 4$\overset{1}{\cup}$ + 16

8   égal à 4$\overset{2}{\cup}$ + 4$\overset{1}{\cup}$

2   égal à 1$\overset{2}{\cup}$ + 1$\overset{1}{\cup}$

2 + $\frac{1}{4}$ égal à 1$\overset{2}{\cup}$ + 1$\overset{1}{\cup}$ + $\frac{1}{4}$

1 + $\frac{1}{2}$ égal à 1$\overset{1}{\cup}$ + $\frac{1}{2}$

1   égal à 1$\overset{1}{\cup}$

Soit 1$\overset{2}{\cup}$ + *R.q.*8$\overset{1}{\cup}$ + 2 égal à 20. La moitié du nombre de *Tanti* est prise, c’est *R.q.*2 + 1 et ajoutée au côté de 1$\overset{2}{\cup}$, cela fait 1$\overset{1}{\cup}$ + *Rq.*2 + 1 dont le carré sera 1$\overset{2}{\cup}$ + *Rq.*8$\overset{1}{\cup}$ + 2$\overset{1}{\cup}$ + 3 + *R.q.*8. De la sorte on voit qu’il faut ajouter 3 + *Rq.*8 à chacune des parties, cela fait 23 + *R.q.*8 égal à 1$\overset{2}{\cup}$ + *Rq.*8$\overset{1}{\cup}$ + 2$\overset{1}{\cup}$+ 3 + *R.q.*8. Le côté de chacune des parties étant pris cela fera 1$\overset{1}{\cup}$ + *Rq.*2 + 1 égal à *Rq.*[23 + *R.q.*8]. *R.q.*2 + 1 étant ôté de chaque partie il restera 1$\overset{1}{\cup}$ égal à *Rq.*[23 + *Rq.*8] – *Rq.*2 – 1 et ceci est la valeur du *Tanto*.

1$\overset{2}{\cup}$ + *Rq.*8 + 2   égal à 20

1$\overset{2}{\cup}$ + *Rq.*8$\overset{1}{\cup}$ + 2$\overset{1}{\cup}$ + 3 + *R.q.*8. égal à 23 + *Rq.*8

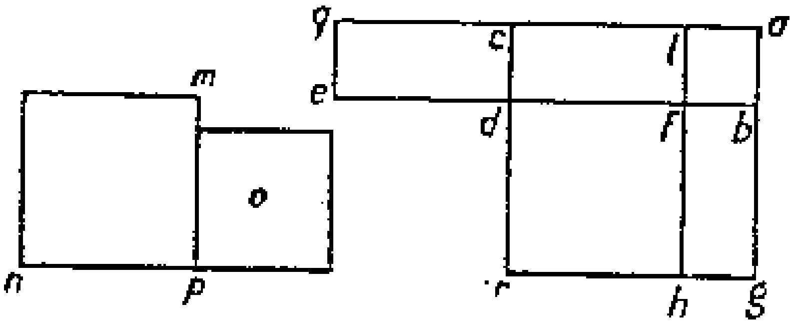
$1\overset{1}{\cup}$ + *R.q.*2 + 1 égal à *Rq*.[23 + *Rq*.8]

$1\overset{1}{\cup}$ égal à *Rq*.[23 + *Rq*.8] – *Rq*.2 – 1.

Et bien que je puisse mettre une infinité de tels exemples, je n’en mettrai néanmoins pas d’autre, parce que celui qui comprendra bien ceux-ci, pourra s’en servir pour toutes les autres occurrences de même nature.

DÉMONSTRATION DU CAS SUSDIT DES CARRÉS ET *TANTI* ÉGAUX A UNE CONSTANTE.

Soient $\overset{1}{\cup}$ le carré .a.b.f.l. et 6$\overset{1}{\cup}$ le parallélogramme[26].f.e.q. égaux au parallélogramme .n.p.m. lequel soit 16. Il est manifeste que si le Carré .a.b.f. est 1$\overset{2}{\cup}$, son côté .l.f. est 1$\overset{1}{\cup}$ et, .l.f. étant 1$\overset{1}{\cup}$, .f.e. sera 6, parce que tout le parallélogramme .f.e.q. est 6$\overset{1}{\cup}$. Alors, (pour en venir à la résolution), le parallélogramme .f.e.q. est divisé en deux parties égales par le segment .c.d., en sorte que .f.d. et .d.e. soient égales, chacune d'elles est 3. Le parallélogramme .c.d.e. se mettant sur .d.f. fait le parallélogramme .b.f.h.g. égal au parallélogramme .c.d.e.. Nous aurons le gnomon .a.g.h.f.d.c. égal au parallélogramme .a.b.e.q. Le dit gnomon étant égal au dit parallélogramme, le gnomon sera égal au nombre .n.p.m. qui est 16.



Voulant terminer la résolution, on réalise le carré .a.c.r.g. en joignant au gnomon .a.g.h.f.d.e le carré .f.h.r.d. Celui-ci est 9, parce que nous savons que .f.d. est 3 et .f.h. 3, la moitié de .f.e., le nombre de *Tanti*. Au nombre .n.p.m., qui est 16, nous adjoindrons un carré .o. qui soit égal au carré .f.d.r.h. de façon à ajouter également à chacune des parties. Le tout, le nombre .n.p.m. avec le carré .o., sera 25 et sera égal au carré .a.g.r.c.. Le carré .a.g.r.c. étant égal au dit nombre, le dit carré sera 25. Le carré .a.g.r.c. étant 25 son côté .g.r. sera 5. Le segment .g.r. étant 5 et .h.r. 3, .h.g. sera 2, et 2 est la valeur du *Tanto* parce que .h.g. était 1 *Tanto*.

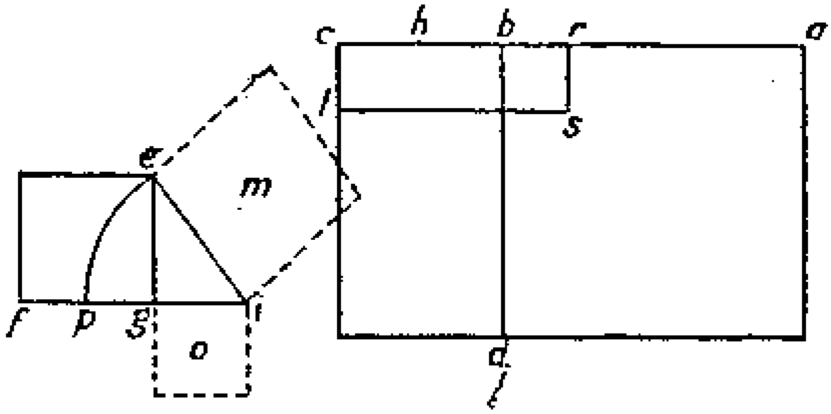
Par cette démonstration, on voit qu'on prend la moitié du nombre de *Tanti*. On la quarre, on joint le Carré à la Constante et on prend le côté de la somme obtenue. Du côté on retranche la moitié du nombre de *Tanti*, le restant est la valeur du *Tanto*.

[26] Par parallélogramme, Bombelli désigne un rectangle, cela correspond au produit de deux nombres différents.

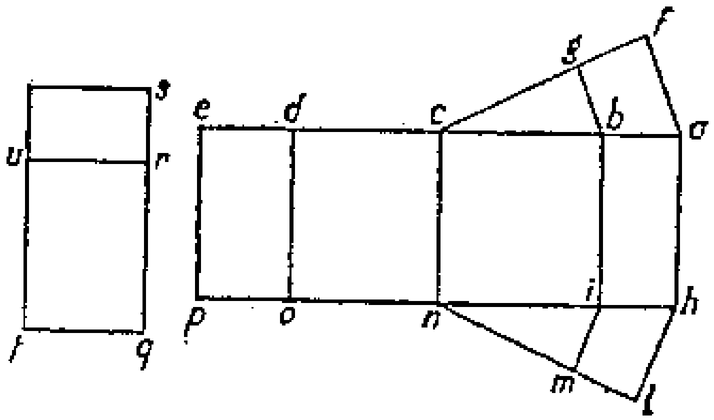
De ceci on trouve une autre démonstration en segment et en nombre qui a le même effet (comme il a été dit dans la règle des *Tanti* égaux à la Constante).

Soit le Carré .a.b.d. et les *Tanti* .d.b.c égaux au carré .f.g.e.. Pour trouver combien doit être .b.a. on divise .b.c. en deux parties égales par le point .h. et on prolonge .f.g. jusqu'en .i. faisant .g.i. égal à .h.c. et on trace .i.e.. En plaçant le pied immobile du compas au point .i. et l'autre au point .e., on tourne jusqu'en .p. : le reste .p.g. sera la valeur du *Tanto* et ceci est prouvé par la démonstration précédente.

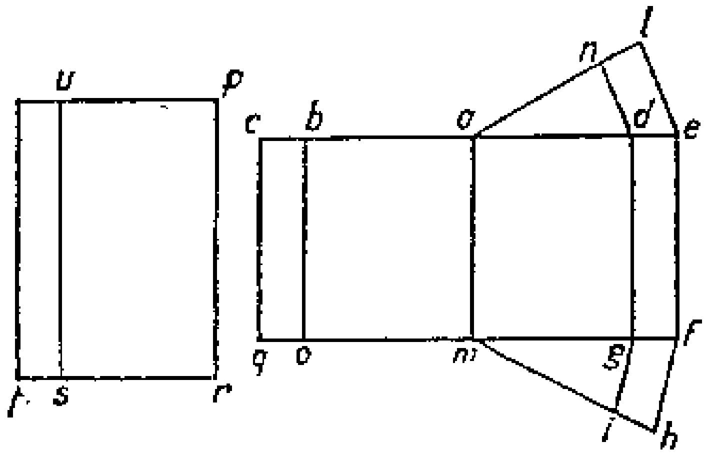
On prend ensuite la moitié du nombre de *Tanti*, on l'élève au carré et on l'ajoute à la Constante. Alors, on fait le carré .o. sur .g.i., égal à la moitié du nombre de *Tanti* et, sur .i.e., le carré .m.. Ce carré .m. sera égal aux deux carrés .f.g.e. et .o.. Ayant à retrancher du segment .e.i. la moitié du nombre de *Tanti*, nous ferons .i.p. égal à .i.e. et le morceau .g.i. égal à la moitié du nombre de *Tanti*, le restant .g.p. est égal à la valeur du *Tanto*.



Pour le démontrer en nombre, soit le carré .a.b.d. et .d.b.c. les 6 *Tanti* égaux au carré .f.g.e. qui est 16. Le segment .g.e. sera 4 et .g.i. 3 (pour être la moitié de .b.c. qui est 6). Alors, .i.e. sera 5 parce que le carré de .g.i. est 9 et le carré de .g.e. est 16, qui ajoutés ensemble font le carré de .i.e., parce que l'angle .i.g.e. est droit. Alors, .i.e. sera le côté de 25, qui est 5, et .i.p. étant 5 (pour être égal à .i.e.) et .i.g. étant 3, .g.p. sera 2. Alors, .a.b. sera 2, faisant .b.r. et .r.s. 2 et .c.t. 2. Le Carré .s.r.b. sera 4 et le parallélogramme .b.c.t. 12, parce que .b.c. étant 6 et .c.t. 2 ; joints ensemble, ils feront 16, ce qui est égal au carré .f.g.e.



Mais si le nombre de Carrés .a.b.d. était plus ou moins qu’un Carré, il y aurait besoin de raccourcir ou d’allonger le nombre de *Tanti* et la Constante en proportion (comme cela fut montré dans la démonstration des Carrés égaux à une Constante). Ainsi, par exemple, si .a.h. eut été un *Tanto* et .a.c. eut été plus qu’un *Tanto*, il serait alors nécessaire d’enlever un morceau de .a.c. de sorte que cela reste égal à .a.h., et ainsi enlever à .c.e. un morceau en proportion comme, par exemple, .a.b. est à .a.c.. Soient les Carrés .a.c.n. et les *Tanti* .c.n.p. égaux au parallélogramme .t.q.s. et, soient .c.n. 1 $\overset{1}{\smile}$ et, .a.c. plus d’1 $\overset{1}{\smile}$. Alors, on fait .c.b. égal à .c.n. et on trace .c.f. égal à .c.e.. On trace .a.f. et, du point .b., le segment .b.g. parallèle à .a.f.. On fait .c.d. égal à.c.g., du point .d. on trace la perpendiculaire .d.o. et, du point .b., la perpendiculaire .b.i.. Du point .n., on trace .n.l. égal à .q.s. et puis on trace .h.l.. Du point .i., on trace le segment .i.m. parallèle à .h.l., et on fait .q.r. égal à .m.n..On trace la perpendiculaire .r.u.. Je dis qu’on aura le Carré .b.i.n. et les *Tanti* .c.n.o. égaux à la Constante .t.q.r., parce que le parallélogramme .a.c.n. et le carré .b.i.n. sont dans la même proportion que le parallélogramme .c.n.p. l’est avec le parallélogramme .c.n.o. et le parallélogramme .t.s.q. avec le parallélogramme .t.q.r. Et pour suivre la résolution en segment (la Constante .t.q.r. étant un parallélogramme et non un carré), on fera un carré qui lui soit égal (comme il a été montré dans la résolution des Carrés égaux à une Constante) et, quand le dit carré sera fait, on suivra la résolution comme il est montré sur la figure précédente. Mais, si les Carrés eussent été moins d’un Carré, il aurait été nécessaire de faire croître les *Tanti* et la Constante en proportion. Ainsi, par exemple : soit .a.m.g. la partie d’un Carré, que .a.m. soit un *Tanto* et les *Tanti* .a.m.o. égaux à la Constante .p.r.s. On allonge .a.d. jusqu’en .e., de sorte que .a.e. soit égal à .a.m., pour faire le Carré .e.a.m. Puis, en traçant .a.n. égal à .a.b. et, du point .d., le segment .n.d. et du point .e. le segment .e.l. parallèle à .d.n.. En prolongeant .a.n. jusqu'à ce qu'il coupe .e.l. et en prolongeant .a.b. jusqu'en .c., faisant .a.c. égal au segment .a.l. et sur .a.c. et .a.m., en faisant le parallélogramme .m.a.c. et ceux-ci seront les *Tanti*, et, de la moitié



de .m.a. et ceux-ci seront les *Tanti*, et, de la moitié de .m.a. et .a.e. en faisant le carré .m.a.e., cela sera le Carré. Pour faire croître la Constante dans la même proportion, on trace le segment .m.i. égal à .r.s., du point .g. le segment .g.i. et, du point .f. le segment .f.h. parallèle à .g.i. de la même façon que pour .e.l. C'est-à-dire qu'on prolonge .m.i. jusqu'en .h. et qu'on prolonge .r.s. jusqu'en .t., de sorte que .r.t. soit égal à .m.h. De .p.r. et .r.t. on fait le parallélogramme .p.r.t. Je dis que le Carré .e.a.m. et les *Tanti* .m.a.c. sont égaux à la Constante .p.r.t., parce que le tout a crû en proportion, telle que le parallélogramme .m.a.d. est au carré .m.a.e. comme le parallélogramme .m.a.b. l'est au parallélogramme .m.a.c. et le parallélogramme .u.p.r. au parallélogramme .p.r.t. Ainsi, la résolution est menée comme il est montré sur la figure ci-dessus et on aura la valeur du *Tanto*.

CAS DES CARRÉS ÉGAUX À DES *TANTI* ET UNE CONSTANTE ($ax^2 = bx + c$)

Ayant à résoudre des Carrés égaux à des *Tanti* et une Constante, on divise le tout par le nombre de Carrés puis on prend la moitié du nombre de *Tanti* et on la quarre. Ce qui est produit s'ajoute à la Constante et, de la somme on prend le côté. Á ce dit côté, on ajoute la moitié du nombre de *Tanti* et la somme est la valeur du *Tanto*. Ainsi, quand on a à résoudre $1\overset{2}{\smile}$ égal à $12\overset{1}{\smile} + 11$, on prend la moitié du nombre de *Tanti* qui est 6, son Carré est 36, qui joint à 11 fait 47, dont le côté fait *R.q.*47. Lui adjoignant la moitié du nombre de *Tanti*, cela fait *R.q.*47 + 6 et ceci est la valeur du *Tanto*. Mais, voulant réduire ce Cas à celui des *Tanti* égaux à la Constante, afin que cela serve à celui qui n'a pas en tête ces Cas qui ont été donnés, il y a toujours besoin que les *Tanti* soient avec les Carrés. Donc, si de chaque partie on retranche $12\overset{1}{\smile}$ on aura $1\overset{2}{\smile} - 12\overset{1}{\smile}$ égaux à 11. En prenant le côté du Carré, on aura $1\overset{1}{\smile}$, auquel on ajoute la moitié du nombre de *Tanti*, c'est – 6, on aura $1\overset{1}{\smile} - 6$. Son carré est $1\overset{2}{\smile} - 12\overset{1}{\smile} + 36$, il y a + 36 avec $1\overset{2}{\smile} - 12\overset{1}{\smile}$ Alors, en ajoutant 36 aux deux parties à la fois, on aura $1\overset{2}{\smile} - 12\overset{1}{\smile} + 36$ égaux à 47, de sorte qu'en prenant à la fois le côté des deux parties on aura $1\overset{1}{\smile} - 6$ égal à *R.q.*47. En ajoutant 6 à la fois aux deux parties, c'est-à-dire en l'enlevant des *Tanti* et en l'ajoutant à *R.q.*47, cela voudra dire que *R.q.*47 + 6, qui est égal à $1\overset{1}{\smile}$, est le *Tanto*, c'est-à-dire que *R.q.*47 + 6 vaut le *Tanto*. Ce Cas peut se résoudre de l'autre manière qui a été donnée, sans diviser chaque chose par le nombre de Carrés. On multiplie le nombre de Carrés par la Constante et à ce qui est produit on ajoute le carré de la moitié du nombre de *Tanti*. De la somme on prend le côté, auquel on adjoint la moitié du nombre de *Tanti*. Cette somme est divisée par le nombre de Carrés et ce qu'il advient est la valeur du *Tanto*. Comme par exemple : en égalisant $4\overset{2}{\smile}$ à $8\overset{1}{\smile} + 18$. En multipliant 4, le nombre de Carrés, par 18, cela fait 72, et à cela on ajoute 16, carré de la moitié des *Tanti*, cela fait 88 duquel on prend le côté, qui est *R.q.*88. Á cela on ajoute 4, moitié des *Tanti*, cela fait *R.q.*88 + 4 et ceci est divisé par 4, le nombre de Carrés, il en vient *R.q.*$5\frac{1}{2} + 1$ et *R.q.*$5\frac{1}{2} + 1$ est la valeur du *Tanto*.

En égalisant $1\overset{2}{\smile} - $ *R.q.*$8\overset{1}{\smile}$ à 6.

$\overset{2}{\smile} - $ *R.q.* $8\overset{1}{\smile}$ égal à 6

$\overset{2}{\smile} - $ *R.q.* $8\overset{1}{\smile} + 2$ égal à 8

$\overset{1}{\smile} - $ *R.q.*2 égal à *R.q.*8

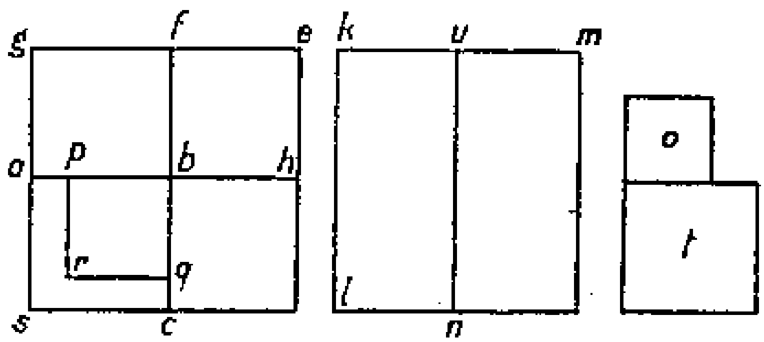
$\overset{1}{\cup}$ égal à *R.q.*8 + *R.q.*2, c'est-à-dire *R.q.*18 et *R.q.*18 vaut le *Tanto*.

En prenant la moitié des – *R.q.*8, il en vient – *R.q.*2, qui joint à $1\overset{1}{\cup}$, côté du Carré, donnera $1\overset{1}{\cup}$ – *R.q.*2 ; son carré sera $1\overset{2}{\cup}$ – *R.q.*$8\overset{1}{\cup}$ + 2, ce qui fait 2 en plus. Alors, en joignant 2 à $1\overset{2}{\cup}$ – *R.q.*$8\overset{1}{\cup}$ et à 6 cela fait $1\overset{2}{\cup}$ – *R.q.*$8\overset{1}{\cup}$ + 2 égal à 8. En prenant le côté de chacune des parties on aura $1\overset{1}{\cup}$ – *R.q.*2 égal à *R.q.*8, en joignant *R.q.*2 à *R.q.*8 cela fait *R.q.*18 et ceci est égal à $1\overset{1}{\cup}$. Alors, le *Tanto* vaudra *R.q.*18 et je dois prévenir que *R.q.*$8\overset{1}{\cup}$ n'ayant pas le symbole des *R.q.* d'un tout[27], c'est seulement la *R.q.* du nombre sans l'inconnue.

[27] Le tout désigne une expression entre parenthèses. Ici, il s'agit de $\sqrt{8}x$ et non de $\sqrt{8x}$.

DÉMONSTRATION DU CAS PRÉCÉDENT DES CARRÉS ÉGAUX A DES *TANTI* ET UNE CONSTANTE

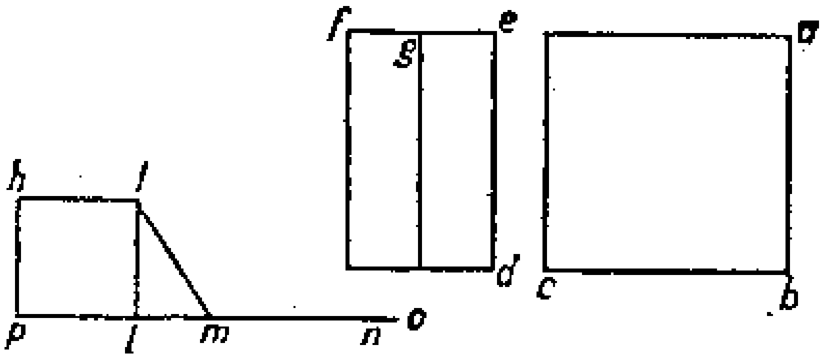
Soit le Carré .s.g.e. égal aux *Tanti* .l.k.m. (.l.k. étant égal à .s.g. et .k.m. étant 8) et à la surperficie .o., laquelle est 9. Ici, il est manifeste que si du carré .s.g.e. on enlève une partie égale au parallélogramme .l.k.m., le restant sera égal à la superficie .o. pour que .l.k.m. et .o. soient égaux à .s.g.e. Et .s.g.e. étant un carré, ses côtés seront un *Tanto* et, .l.k.m. étant 8 *Tanti*, .l.k. est un *Tanto* et .k.m. vaut 8. Pour enlever du Carré .s.g.e. une partie égale à .l.k.m., on divise .k.m. en deux parties égales en .u. et on trace .u.n. parallèle à .l.k.. Le parallélogramme .l.k.m. sera divisé en deux parties égales. Maintenant, on met la partie .l.k.u. sur .e.f.c. faisant l'angle .e. commun, il en restera la partie .s.g.f. de laquelle on veut enlever un morceau égal à la superficie .n.u.m. En le posant dessus et en faisant l'angle .g. commun, on en viendra à tailler le parallélogramme .a.g.f. auquel il manque, pour être égal au parallélogramme .n.u.m., le carré de .f.e. lequel est 16, parce qu'il est composé de deux segments égaux à .k.u. et .u.m., chacun desquels fait 4. Alors, si du carré .s.a.b. on enlève le carré .r.p.b. égal au carré .b.f.e., toute la superficie .a.p.r.q.c.h.e.g. est égale à .l.k.m. parce que .c.e. est égal à .l.k.u. et .a.p.r.q.f.g. est égal au morceau .n.u.m. C'est pourquoi, le gnomon .s.a.p.r.q.c. est égal à la surface .o., de sorte que le dit gnomon, en se joignant à la surface .r.b., qui est 16, deviendra un carré. Mais, si on joint au dit gnomon et à la surface .o. un carré égal à .r.b. et qui soit le carré .t., alors le carré .s.b. sera égal à la surface .o., qui est 9, et à la surface .t. qui est 16. Alors, le carré .s.b. sera 256, parce qu'égal aux dites surfaces, et le carré .s.b. étant 25, son



côté est 5, .a. sera 5 et .a.g. 4 parce qu’égal à .k.u. qui est la moitié de .k.m. qui est 8. .a.g. étant 4 et .a.s. 5, .s.g. entier sera 9. Au début, c’était un *Tanto*, alors le *Tanto* sera donc 9, parce que le segment .s.g. est un *Tanto* et 9 pour la raison dite et avancée.

DÉMONSTRATION DU CAS SUSDIT PAR SEGMENTS

Soit le carré .a.b.c. égal aux inconnues .d.e.f. et à la surface qui sera notée .h.i.l. Que .d.e. soit égal à .a.b., c'est-à-dire que chacun soit $1\overset{1}{\cup}$, on veut alors trouver combien doit être .a.b.. Si la surface .h.i.l. n'est pas carrée on la réduit à un carré en faisant un carré qui lui soit égal. Mais, étant supposé qu'elle soit un carré, on divise .e.f. au point .g. en deux parties égales et puis on prolonge .p.l. jusqu'en .o. Puis on fait .l.m. égal à .e.g., on trace .i.m. et .m.n. égaux à .m.i. Le segment .n.l. sera la valeur du *Tanto* et chacun des segments .a.b., .b.c., .d.e. sera égal



au dit segment .n.l. De la sorte, le carré .a.b.c. est égal au parallélogramme .d.e.f. et au carré .h.i.l.. En présupposant que .h.i.l. est égal à 16 et .e.f. à 6, le segment .l.m. sera 3, pour être égal au segment .e.g., moitié de .e.f. .Le segment .i.l. est 4, parce que le carré .h.i.l. est 16, et le segment .n.m. sera 5 parce qu'égal au segment .i.m., et le segment .l.n. en entier sera 8.

Alors, les segments .a.b., .b.c. et .d.e. devant être autant et chacun d'eux étant 8, le carré .a.b.c. sera 64 et le parallélogramme .d.e.f. sera 48 pour que .d.c. soit 8 et .e.f. 6. .d.e.f. étant 48 et .h.i.l. 16, joints ensemble, ils sont égaux au carré .a.b.c. qui est également 64 (comme cela a été dit).

CAS DES CARRÉS ET CONSTANTE ÉGAUX AUX *TANTI* ($ax^2 + c = bx$)

Dans l'étude de ce Cas, les racines carrées de nombres négatifs apparaissent. Contrairement à ce qui se passe pour les Cas dans lesquels devraient apparaître des solutions négatives que Bombelli ne mentionne pas, les solutions "complexes" dans notre langage actuel sont mentionnées comme telles.

Quand on a à résoudre des Carrés et Constante égaux aux *Tanti*, on prend la moitié du nombre de *Tanti* et on les quarre et de ce qui est produit on retranche la Constante. Du restant, on prend le côté et on l'ajoute ou le retranche de la moitié du nombre de *Tanti* et la somme ou le restant sera la valeur du *Tanto*. Mais, on doit être averti que dans ces cas (bien que rarement) le reste ne sert pas alors que, bien sûr, la somme sert toujours. On doit être aussi averti que lorsqu'on ne pourra retrancher la Constante du carré de la moitié des *Tanti*, une telle résolution ne pourra se faire. Cela ne sera pas un défaut du Cas mais il s'agira d'un problème impossible ou qu'on n'aura pas su mettre en équation. De l'un et de l'autre je vais donner un exemple. D'abord on égalise $1\overset{2}{\smile} + 12$ à $8\overset{1}{\smile}$. On prend la moitié du nombre de *Tanti*, qui est 4, quarrée c'est 16, dont 12 étant retiré, il reste 4 dont le côté est 2. Ceci s'ajoute ou se retranche de 4 (qui en l'ajoutant sera 6 et en le retranchant sera 2) et ainsi, d'une manière et de l'autre donnera la valeur du *Tanto*, cela concerne le premier exemple. Mais, quand on aura à égaler $1\overset{2}{\smile} + 20$ à $8\overset{1}{\smile}$, dont le carré de la moitié du nombre de *Tanti* est 16, lequel est inférieur à 20, cette résolution ne peut se faire sinon de la manière sophistiquée. En retranchant 20 de 16, il reste - 4 dont le côté est *piu di meno* 2[28] et ceci se retranche et s'ajoute à la moitié du nombre de *Tanti*, cela fera 4 *piu di meno* 2 ou 4 *meno di meno* 2 et chacune de ces quantités sera la valeur du *Tanto*.

Il y a de même un autre mode sophistiqué tel que si on ne peut retrancher le 20 du 16 on l'ajoute, cela fait 36, dont le côté est 6, ceci ajouté à la moitié du nombre de *Tanti*, fait 10 et ce 10 n'est rien moins que la valeur du *Tanto*[29].

Mais, en voulant ramener ce Cas à celui des *Tanti* égaux à la Constante (comme cela a été fait dans les deux précédents), on prend la voie que l'on va voir dans l'exemple ci-dessous.

[28] $2i$.

[29] Cet autre Cas donné par Bombelli est erroné.

On doit être averti que lorsque cette résolution ne survient pas, ce n'est pas un défaut du Cas mais un défaut de la mise en équation, c'est-à-dire qu'au début, la mise en équation a été fausse ou qu'il est impossible de trouver ce que l'on cherche (comme cela sera éclairci en son lieu).

En égalisant $1\overset{2}{\cup}$ + 12 à $8\overset{1}{\cup}$, on enlève $8\overset{1}{\cup}$ à chacun des membres, cela fera $1\overset{2}{\cup} - 8\overset{1}{\cup} + 2$ égaux à zéro. On prend la moitié du nombre de *Tanti*, qui est – 4, en l'adjoignant au côté du Carré cela fera $1\overset{1}{\cup} - 4$. Quarré, cela fait $1\overset{2}{\cup} - 8\overset{1}{\cup} + 16$, de sorte qu'à 12, on a besoin d'ajouter 4. Alors, en ajoutant 4 à chacun des deux membres, on aura $1\overset{2}{\cup} - 8\overset{1}{\cup} + 16$ égal à 4, dont le côté de chacun des deux étant membres pris, cela donnera $1\overset{1}{\cup} - 4$ égal à 2, de sorte qu'en enlevant ce qui est moins on aura $1\overset{1}{\cup}$ égal à 6 et 6 est la valeur du *Tanto*.

Je dois avertir que, lors de la prise du côté de $1\overset{2}{\cup} - 8\overset{1}{\cup} + 16$, cela pouvait être encore $4 - 1\overset{1}{\cup}$ dont le carré est aussi $1\overset{2}{\cup} - 8\overset{1}{\cup} + 16$, de sorte qu'ayant $4 - 1\overset{1}{\cup}$ égal à 2 et le moins étant enlevé cela ferait 4 égal à $1\overset{1}{\cup} + 2$ et le *Tanto* vaut 2 qui d'une manière comme de l'autre est bon[30].

Ce Cas peut également se résoudre comme de la manière dite dans les deux précédentes. Sans diviser le tout par le nombre de Carrés, mais en retranchant du carré de la moitié du nombre de *Tanti*, le produit de la Constante par le nombre de Carrés. En prenant le côté du restant et ajoutant ou retranchant celui-ci de la moitié du nombre de *Tanti*, la somme ou le restant étant divisé par le nombre de Carrés, ce qui en adviendra sera la valeur du *Tanto*.

Comme par exemple $3\overset{2}{\cup} + 20$ égalisé à $16\overset{1}{\cup}$. En prenant la moitié du nombre de *Tanti*, qui est 8, quarrée cela fait 64, duquel on retranche 60, produit de la Constante par le nombre de Carrés. Il reste 4, dont le côté, qui est 2, retranché de 8 et ajouté à 8 fait 6 et 10, lesquels sont divisés par 3, nombre de Carrés. Il en vient 2 et $3\frac{1}{3}$ et chacun d'eux est la valeur du *Tanto*.

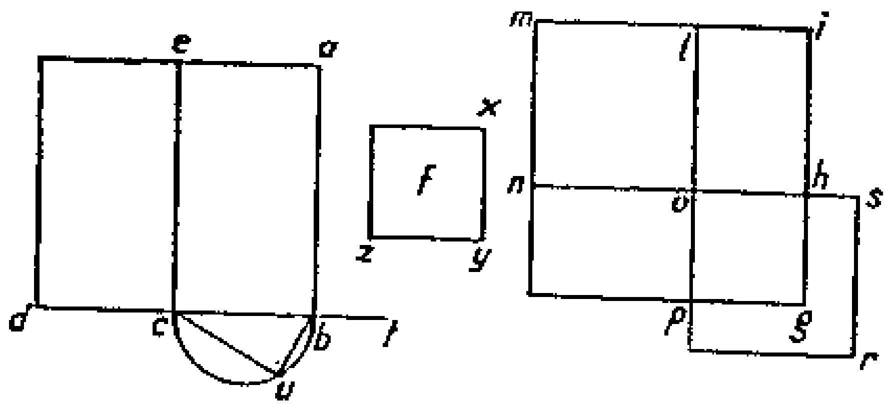
Pour ne pas en rester à toujours dire la même chose, je dis que c'est ce même Cas qui est celui à utiliser dans tous les autres cas semblables à ces trois là.

[30] Ici Bombelli, sans en faire la remarque, dit que deux nombres opposés ont le même carré, ce qui peut surprendre car il prend toujours soin de ne pas évoquer les solutions négatives.

DÉMONSTRATION DU CAS CI-DESSUS DES CARRÉS ET UNE CONSTANTE ÉGAUX À DES *TANTI*

Soient le carré .g.i.m. un Carré du *Tanto* et la surface .f. qui fasse 16 nombres et ensemble soient égaux au parallélogramme .a.b.d., lequel soit 10 *Tanti*. Faisant que .a.b. soit 1$\overset{1}{\smile}$ et que .b.d. soit 10., i.m. étant égal à .a.b., on divisera (comme avant) le parallélogramme .a.b.d. en deux parties égales par le segment .c.e. et .b.c. et .c.d. seront chacun 5, pour que .b.d. en entier soit 10. Alors, en taillant dans le carré .g.i.m. le morceau .h.i.m. égal à toute la partie .a.b.c., et du restant .g.h.m. (si on en a à enlever un morceau) égal à .e.c.d. et en enlevant le morceau .p.l.m. égal au morceau .e.c.d., il vient à manquer le carré .o.l.m. Mais, du carré .g.h.o., on enlève le carré .r.o.s. égal au carré .o.l.m. et on aura fait comme il était proposé.

Et, parce qu'il nous manque le gnomon .h.s.r.p.g. et que nous avons la surface .f., il y a nécessairement besoin que ce gnomon soit égal à cette superficie .f., en sorte que le carré .i.m. avec la surface .f. soient égaux au parallélogramme .a.b.d. Le gnomon .h.s.r.p.g. étant 16, c'est à dire égal à la surface .f., tout le carré .r.s.o.

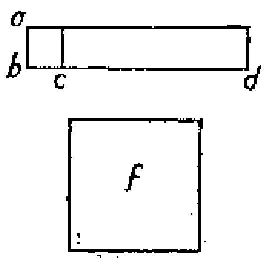


est 25, parce qu'il est composé du segment .s.o. égal à .o.l. lequel est égal à .b.c. Mais, le gnomon .h.s.r.p.g. étant 16, le carré .g.h.o. sera 9, de sorte que tout le carré .r.s.o. soit 25. Le carré .g.h.o. étant 9, le segment .o.h. sera 3, c'est-à-dire le côté de 9. Alors, .o.n. est 5 parce qu'égal à .b.c. et .h.n. en entier sera 8, lequel est égal à .g.i. Alors, le côté du Carré .g.i.m. sera 8, c'est-à-dire le côté .g.i. qui est la valeur du *Tanto*. .g.i. étant 8, .a.b.c. sera 8 pour être lui aussi un *Tanto* et tout le parallélogramme .a.b.d. sera 80. Le Carré .g.i.m. sera 64 et, en lui joignant la surface .f., cela fera 80. On voit que le carré .g.i.m. avec la surface .f. est égal au parallélogramme .a.b.d. (comme il a été proposé). Mais, en voulant faire une telle résolution géométriquement, il faut que l'on réduise la surface .f. à une surface carrée sur le segment .b.c. Que l'on trace le demi-cercle .b.u.c. et .c.u. égal à .x.y. Du point .u., on trace .u.b. et on prolonge .c.b. jusqu'en .t., de sorte que .b.t. soit égal à .u.b., tout .c.t. sera la valeur du *Tanto*, c'est-à-dire quand il doit être .b.a. ou .g.i.

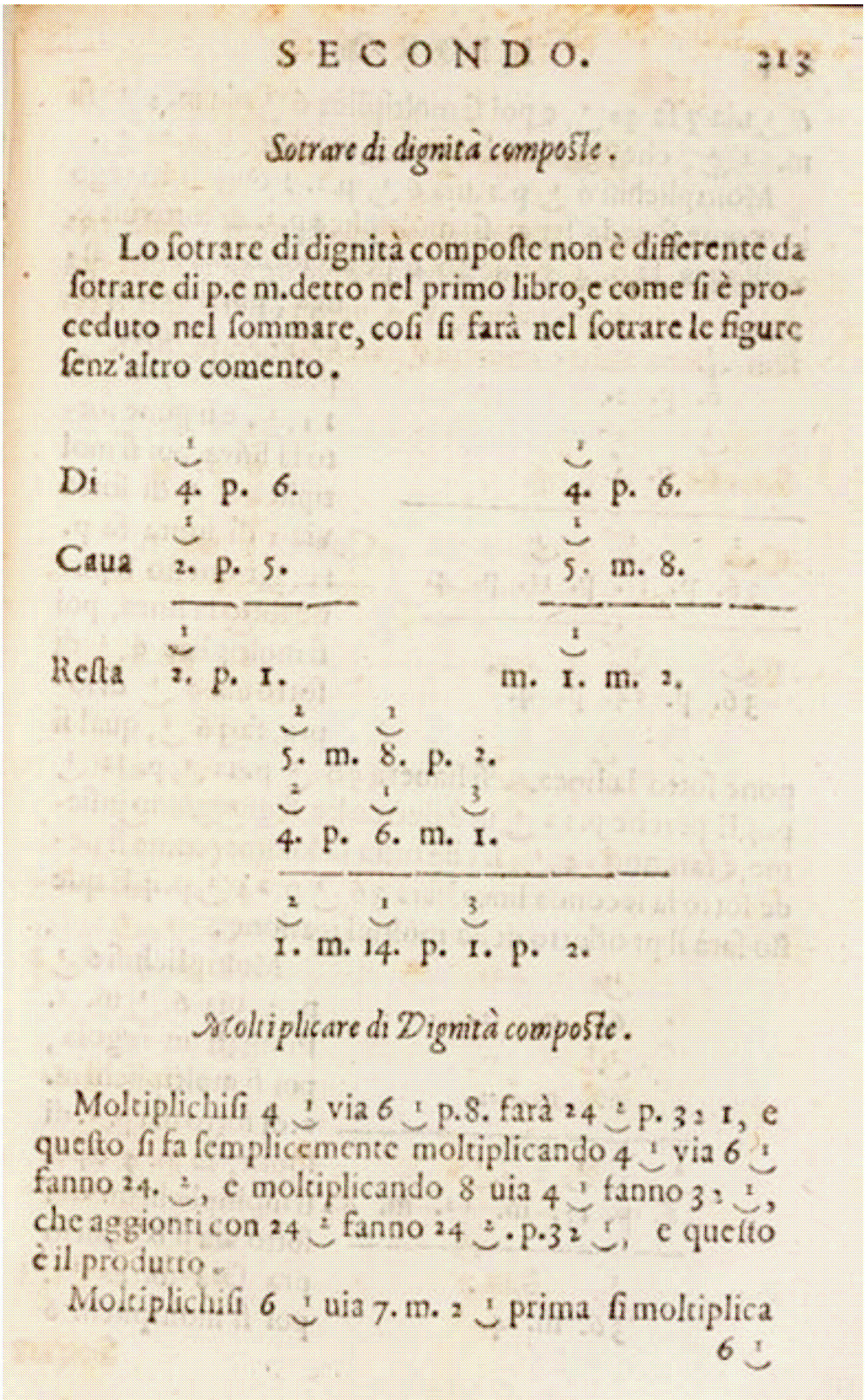
TRANSMUTATION DES CAS PRÉCÉDENTS

Quand on voudra transmuter un Carré et des *Tanti* égaux à une Constante, on pourra transmuter en Carré égal à des *Tanti* et une Constante en divisant la valeur de la Constante par la valeur du *Tanto*, il en viendra la valeur du *Tanto* avant la transmutation. Ainsi, si on a à égaler $1\overset{2}{\cup} + 6\overset{1}{\cup}$ à 16, on pourra transmuter en $1\overset{2}{\cup}$ égal à $6\overset{1}{\cup} + 16$, dont la valeur du *Tanto* sera 8 et ,du 16 divisé par 8, il vient 2 et ce 2 est la valeur du *Tanto* avant la transmutation. Et le Cas des $\overset{2}{\cup}$ égaux à $\overset{1}{\cup}$ et Constante peut se transmuter en $\overset{2}{\cup}$ et $\overset{1}{\cup}$ égaux à une Constante, laquelle transmutation, bien qu'elle ne serve pratiquement à rien dans ces Cas, sert beaucoup dans le Cas de Cubes, Carrés et Constante. Cette transmutation naît de la démonstration ci-après.

Soit le parallélogramme .a.b.d. dont .a.b. soit $1\overset{1}{\cup}$ et .b.c. $1\overset{1}{\cup}$ et .c.d. 6,. Alors, tout .b.d. en entier sera $1\overset{1}{\cup} + 6$. Que le parallélogramme .a.b.d. soit égal au parallélogramme .f. lequel soit 16. Alors, le parallélogramme .a.b.d. qui est 16, pour être égal à .f. et .a.b.d. vaut 6 de plus que .a.b. Alors, on peut dire : trouve un parallélogramme qui soit de surface 16 et dont le grand côté soit 6 de plus que le petit. En posant que l'un des côtés soit $1\overset{1}{\cup}$, l'autre sera 16 sur $1\overset{1}{\cup}$, de sorte que l'un multiplié par l'autre fasse 16. Il reste à voir si l'un des côtés est 6 de plus



que l’autre. En prenant le 16 sur $1\overset{1}{\smile}$ pour le plus petit, en lui joignant 6, cela fait 16 + $6\overset{1}{\smile}$ sur $1\overset{1}{\smile}$, et ceci est égal au plus grand des côtés, qui a été posé $1\overset{1}{\smile}$. La fraction étant levée on aura 16 + $6\overset{1}{\smile}$ égaux à $1\overset{2}{\smile}$, dont la résolution donnera un *Tanto* qui vaut 8. Ceci sera la partie supérieure et la partie inférieure qui valait 6 de moins, sera 2, ou bien, de 16 divisé par la valeur de $1\overset{1}{\smile}$, il vient 2 parce qu’on avait mis 16 sur $1\overset{1}{\smile}$.



SECONDO. 213

Sotrare di dignità composte.

Lo sotrare di dignità composte non è differente da sotrare di p.e m.detto nel primo libro, e come si è proceduto nel sommare, cosi si farà nel sotrare le figure senz'altro comento.

Di	$4\overset{1}{\smile}$. p. 6.	$4\overset{1}{\smile}$. p. 6.
Caua	$2\overset{1}{\smile}$. p. 5.	$5\overset{1}{\smile}$. m. 8.
Resta	$2\overset{1}{\smile}$. p. 1.	m. $1\overset{1}{\smile}$. m. 2.

$5\overset{2}{\smile}$. m. $8\overset{1}{\smile}$. p. 2.
$4\overset{2}{\smile}$. p. $6\overset{1}{\smile}$. m. $1\overset{3}{\smile}$.

$1\overset{2}{\smile}$. m. $14\overset{1}{\smile}$. p. $1\overset{3}{\smile}$. p. 2.

Moltiplicare di Dignità composte.

Moltiplichisi $4\overset{1}{\smile}$ via $6\overset{1}{\smile}$ p.8. farà $24\overset{2}{\smile}$ p. 32 1, e questo si fa semplicemente moltiplicando $4\overset{1}{\smile}$ via $6\overset{1}{\smile}$ fanno 24. $\overset{2}{\smile}$, e moltiplicando 8 uia $4\overset{1}{\smile}$ fanno $32\overset{1}{\smile}$, che aggionti con $24\overset{2}{\smile}$ fanno $24\overset{2}{\smile}$.p.$32\overset{1}{\smile}$, e questo è il produtto.

Moltiplichisi $6\overset{1}{\smile}$ uia 7. m. $2\overset{1}{\smile}$ prima si moltiplica

$6\overset{1}{\smile}$

6 $\overset{1}{\smile}$ uia 7 fa 42 $\overset{1}{\smile}$, e poi si moltiplica 6 $\overset{1}{\smile}$ uia m. 2 $\overset{1}{\smile}$, fa m. 12 $\overset{2}{\smile}$, che aggionti con 42 $\overset{1}{\smile}$ farà 42 $\overset{1}{\smile}$ m. 12 $\overset{2}{\smile}$.

Moltiplichisi 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 2. uia 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 2. Pongasi in regola (come si uede) poi si moltiplica p. 2. di sotto uia p. 2. di sopra, fa p. 4, e questo si pone sotto la prima linea, poi si moltiplica p. 2. di sotto via p. 6 $\overset{1}{\smile}$ di sopra, fa 12 $\overset{1}{\smile}$, e si pone sotto la linea, poi si moltiplica 6 $\overset{1}{\smile}$ di sotto via 2 di sopra fa p. 12 $\overset{1}{\smile}$, e questo si pone sotto la linea, poi si moltiplica 6 $\overset{1}{\smile}$ di sotto uia 6 $\overset{1}{\smile}$ di sopra, fa 36 $\overset{2}{\smile}$, qual si pone sotto la linea, e si hauerà 36 $\overset{2}{\smile}$ p. 12 $\overset{1}{\smile}$ p. 12. $\overset{1}{\smile}$ p. 4. E perche p. 12 $\overset{1}{\smile}$ ui è due uolte, si gionghino insieme, e faranno 24 $\overset{1}{\smile}$, si che tutta la somma (come si uede sotto la seconda linea) sarà 36 $\overset{2}{\smile}$ p. 24 $\overset{1}{\smile}$ p. 4, E questo sarà il produtto della moltiplicatione.

$$\begin{array}{l}
\quad\ 6\overset{1}{\smile}\ \text{p. } 2. \\
\quad\ 6\overset{1}{\smile}\ \text{p. } 2. \\
\hline
36\overset{2}{\smile}\ \text{p. } 12\overset{1}{\smile}\ \text{p. } 12\overset{1}{\smile}\ \text{p. } 4. \\
\hline
36\overset{2}{\smile}\ \text{p. } 24\overset{1}{\smile}\ \text{p. } 4.
\end{array}$$

Moltiplichisi 6 $\overset{1}{\smile}$ p. 2 uia 6 $\overset{1}{\smile}$ m. 2. Pongasi in regola, poi si moltiplichi m. 2. di sotto uia p. 2. di sopra, fa m. 4, e poi si moltiplichi m. 2. di sotto via p 6 $\overset{1}{\smile}$ di sopra farà m. 12 $\overset{1}{\smile}$, poi si moltiplichi 6

$$\begin{array}{l}
\quad\ 6\overset{1}{\smile}\ \text{p. } 2. \\
\quad\ 6\overset{1}{\smile}\ \text{m. } 2. \\
\hline
36\overset{2}{\smile}\ \text{p. } 12\overset{1}{\smile}\ \text{m. } 12\overset{1}{\smile}\ \text{m. } 4 \\
\hline
\quad 36\overset{2}{\smile}\ \text{m. } 4.
\end{array}$$

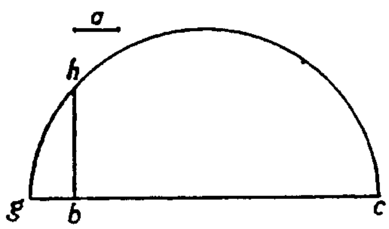
V- GÉOMÉTRIE

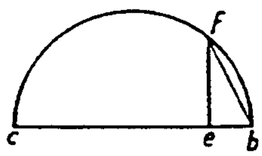
MODO DI TROVARE IL LATO DI UN NUMERO IN LINEA (Livre 1, p.41)

Façon de trouver le côté (la racine carrée) d'un nombre (représentant un segment) géométriquement.

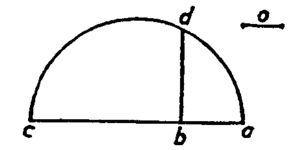
Il s'agit là d'un exemple de la construction géométrique de la racine carrée d'un nombre, exercice classique de la géométrie euclidienne.

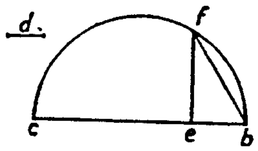
Soit le segment a., une mesure donnée pour l'unité, comme le seraient la palme, le pied, la brasse ou similaire, et le segment c.b. qui vaut 7 de cette dite mesure dont on veut le côté. On prolonge c.b. jusqu'en g., faisant b.g. égal au segment a. et, sur c.g., on fait le demi-cercle c.g.h. et, à partir du point b., on trace b.h. à angle droit sur le segment c.g. jusqu'à la circonférence en .h.. Le segment -b.h. sera le côté de b.c., c'est-à-dire de 7, et le segment b.h. sera ainsi :





racine de 7 qui est le côté de 7, ce qui n'est autre, en terme de nombres, que trouver un nombre qui, multiplié par lui-même, fasse 7, et en terme de segments, signifie avoir un carré construit sur le segment a. et puis vouloir faire un carré qui soit égal à 7 carrés faits sur le segment a., dont le côté sera le segment b.h., parce que g.b., qui est 1, par b.c., qui est 7, est autant que b.h. par lui même et parce que moyenne proportionnelle entre g.b. (qui est égal au segment a.) et b.c.. On peut encore opérer de cette autre façon, c'est-à-dire sur le segment c.b. construire le demi-cercle c.b.f. et, sur le segment c.b., placer le point e. en faisant le segment



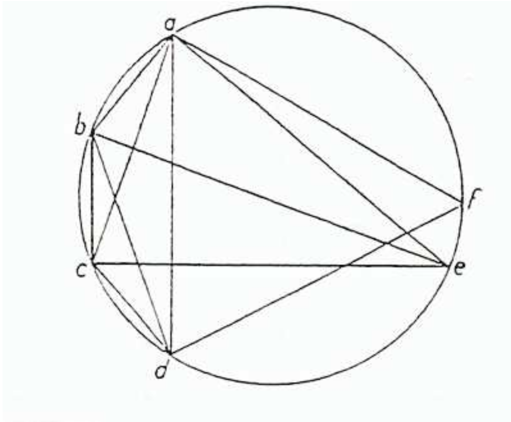


e.b. égal au segment a.. Puis, tracer du point e. jusqu’à la circonférence en f., le segment e.f. perpendiculaire au segment b.c. et tracer le segment b.f., lequel sera le côté de 7 que l’on cherchait, parce que le segment b.e. par b.c. est autant que b.f. par lui-même. Mais, quand les nombres sont grands, on ne peut comprendre en quel endroit doit se faire la démonstration : on s’en tiendra à l’ordre soussigné, comme si on avait à trouver le côté de 32 et que la mesure de l’unité soit un segment o.. Il se trouve deux nombres qui multipliés ensemble font 32., ce sont 4 et 8. Tracer le segment b.c en faisant pour a.b. 4 et pour b.c. 8, c’est-à-dire, l’un quatre fois le segment o., qui soit a.b., et l’autre huit fois. Sur cette a.b.c., que l’on fasse le demi-cercle a.d.c., et du point b., on trace jusqu’à la circonférence le segment b.d. perpendiculaire au segment a.c.. Je dis que le segment b.d. est le côté de 32, parce que a.b. par b.c. est autant que b.d. par lui-même. C’est encore par cette autre règle qu’on peut trouver le côté d’un nombre, comme par exemple, si le nombre était 40et la mesure de l’unité le segment d.. Il se trouve deux nombres qui multipliés l’un par l’autre fassent 40, ce sont 5 et 8 qui est huit fois le segment d. et le segment b.e. cinq fois. Sur le segment b.c. on fait le demi-cercle b.f.c. et, du point e., on trace la perpendiculaire e.f. au segment b.c., puis on trace le segment b.f. lequel sera le côté de b.c., parce que -b.e. par b.c. est autant que b.f. par lui-même.

TRISECTION DE L’ANGLE, Livre 5, Ex. 135 (p.639)

C’est dans ce passage que BombeIli établit une relation entre la résolution de l’équation cubique dans le cas irréductible et la trisection de l’angle.

Soit le cercle a.b.c.d.e.f., dont le diamètre be. est *Rq*.132, dans lequel nous voudrions construire un ennéagone de côtés égaux. On se demande de combien sera un de ses côtés. Cette demande, jusqu’à présent je la tiens pour impossible, ceci jusqu’à ce que la méthode générale de résolution du Cas du Cube et de la Constante égaux aux *Tanti* ne soit retrouvée. Et pour donné que ce Cas se retrouve, ce sera chose difficile que dans cette résolution n’intervienne pas quelque Racine Cubique, ce qui serait un indice que cet ennéagone on ne peut le faire autrement que par la voie instrumentale bien que Oronce (Finé) et Albert Durer ont donné des règles pour le construire, lesquelles sont totalement inexactes et pour que ce soit une chose claire, je ne m'épuiserai pas à vouloir le démontrer, mais que j'en viendrai à la question présente.



On construit dans le dit cercle le triangle équilatéral a.b.f., qui par les règles données fera 12 de côté et sous le côté a.b., on supposera avoir divisé la portion .a.b.c.d. en trois parties égales et avoir tracé les trois segments a.b., b.c. et c.d., les trois seront égaux, chacun d'eux étant ainsi le côté demandé.

Alors, on pose que chacun des trois segments soit $2\overset{1}{\cup}$. Pour savoir combien sont .b.d. et .a.c., lesquels sont égaux, on multipliera .b.c. par .a.d., ce qui fait $24\overset{1}{\cup}$, .a.b. par c.d., ce qui fait $4\overset{2}{\cup}$ et, ajoutés ensemble, cela fait $4 + 24\overset{1}{\cup}$. C'est autant de faire a.c. par b.d. car ce sont les deux diagonales du quadrilatère a.b.c.d.. Il suffit alors de prendre, parce qu'ils sont égaux, la racine carrée de $4 + 24\overset{1}{\cup}$ qui sera *R.q.*$[4 + 24\overset{1}{\cup}]$ et égale à .a.c. ou .b.d..

Pour pouvoir faire une égalisation, on cherchera a.c. par cette autre méthode.

On trace le diamètre b.e. et, le carré de a.b. étant retiré de celui de b.e., il restera $192 - 4\overset{2}{\cup}$ dont la racine carrée est *R.q.*[192 - 4w], qui est autant que a.c. ou c.e. parce qu'ils sont l'un et l'autre égaux et les angles e.a.b. et b.c.e. droits. C'est autant de faire le côté b.c. par a.e. et a.b. par c.e., que b.e. par a.c., qui sont les deux diagonales du quadrilatère a.b.c.e., et que multiplier a.b. par c.e. et b.c. par a.e. Les produits ajoutés ensemble feront :

$$R.q.[3072\overset{2}{\cup} - 64\overset{4}{\cup}]$$

qui divisé par .b.c. donnera :

$$R.q.[16\overset{2}{\cup} - \frac{1}{3}\overset{4}{\cup}]$$

et ceci est égal à :

$$R.q.[4\overset{2}{\cup} + 24\overset{1}{\cup}].$$

En quarrant l’une et l’autre partie cela donnera

$$4\overset{2}{\cup} + 24\overset{1}{\cup} \text{ égal à } 16\overset{2}{\cup} - \frac{1}{3}\overset{4}{\cup}$$

Réduit à $1\overset{4}{\cup}$, le plus petit Carré et le – enlevés on aura

$$1\overset{4}{\cup} + 72\overset{1}{\cup} \text{ égal à } 36\overset{2}{\cup}$$

de sorte que chacune des parties étant divisée par $1\overset{1}{\cup}$ cela donne

$$1\overset{3}{\cup} + 72 \text{ égal à } 36\overset{1}{\cup}$$

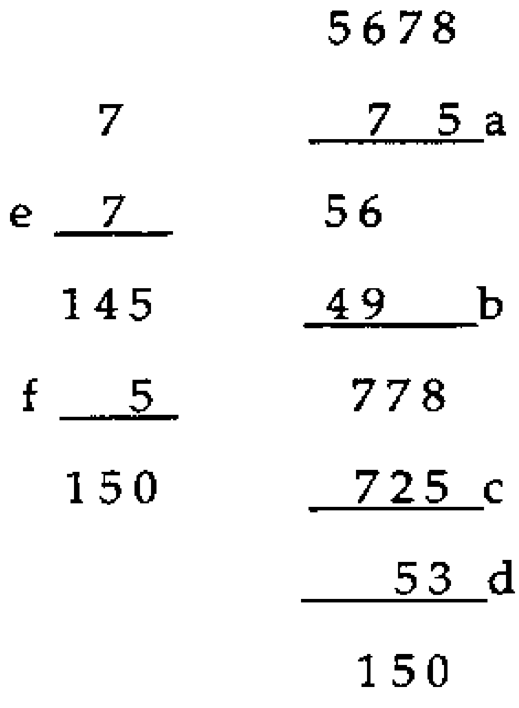
De ceci, jusqu’à présent, il n’y a pas de Cas de résolution parce qu’il n’y a pas de proportion entre eux, comme il a été dit au début.

VI- CALCULS DE RACINES CARRÉES ET APPROXIMATIONS

Bombelli s'est intéressé aux méthodes de calcul arithmétique. Il donne dans son œuvre les méthodes de calcul manuel des racines carrées (voir ci-dessous), de racines cubiques mais aussi les méthodes de calcul approché.

Méthode pour trouver le côté carré duquel on veut la valeur (Livre 1, p. 34)

Si on avait à trouver le côté, comme par exemple avec 5678, que l'on fasse comme on voit ci-dessous. On tire la ligne a. suffisamment loin pour que sous le nombre soit contenu un autre agencement de caractères. Sur le 8 on fait un point, ensuite en venant à main gauche, laissant un caractère au milieu, sous le 6 on met un autre point et, si le nombre était plus grand, on poursuivrait à mettre les points, mais en interposant un point d'un caractère à l'autre. Ceci fait, on recommence à l'autre début à main gauche en allant vers la droite, on prend les caractères qu'il y a jusqu'au premier point, ils se mettent sous la ligne .a., Ces



caractères qu'il y a jusqu'au premier point, ils se mettent sous la ligne .a., c'est 56. Ceci fait on trouve un nombre carré le plus proche de 56 mais qui ne soit pas supérieur, ce sera 49, dont le côté est 7. Ce 7 se met au dessus de la ligne .a., sous le 6 au dessus duquel est le premier point. Deux autres 7 se mettent de côté, sous lesquels se tire le trait .e., ensuite on additionne, ce qui fait 14. Le produit de ces deux 7 l'un par l'autre est 49, il se met sous le 56, on tire le trait .b., retranché de 56 il reste 7 et c'est fini pour le premier point. Pour continuer plus avant ce reste s'adjoint au 7 qui est au dessus du trait .a., entre le 6 et le 8, cela fera 77.

Maintenant on voit combien il va de fois le 14 qui est sous le trait .e. dans 77, il y va 5 fois, ce 5 se met à côté du 14, cela fera 145. Un autre 5 se met sous cela et ils s'ajoutent (en tirant le trait .f.) et cela fait 150. Le même 5 se met sous le 8, sur lequel est l'autre point. Le 8 se met sous la ligne .b. auprès du 77, cela fait 778 sous lequel se met le produit de 145 par le 5 qui est en dessous, c'est 725. On retranche l'un de l'autre (en tirant le trait .c.) et il reste 53, sous lequel se tire la virgule .d., on lui met dessous le 150 qui est sous le trait .f., cela $\frac{53}{150}$ signifiera et l'extraction est finie. Alors, le côté approché de 5678 sera 75 et $\frac{53}{150}$ qui en seront seulement différents d'autant que le carré de la fraction, c'est-à-dire $\frac{2809}{22500}$. Mais, voulant faire que la différence soit inférieure, j'en donnerai la règle ci-dessous et pour encore plus de clarté, j'en mettrai un autre exemple semblable au suivant avant qu'on en vienne à la dite règle.

Ayant à prendre le côté de 5267890134, on met les points (comme il a été enseigné précédemment), le premier sur le 4, le second sur le 1, le troisième sur le 9, le quatrième sur le 7 et le cinquième sur le 2 et ensuite on trace le trait .b.. En dessous se met le 52 qui est le nombre qui va jusqu'au premier point en commençant à main gauche et en allant vers la droite.

```
5267890134
7          72580b
a 7        52
142        49c
h 2        367
1445    d 284
i 5        8389
14508   e 7225
l 8      116401
145160  g 116064
33734
145160
```

2

n4	0p
m4	0q

Ensuite, on cherche le carré le plus proche de 52, mais ne lui soit pas supérieur, ce sera 49. Il se met sous le 52, on trace le trait .c. et on retranche l'un de l'autre, il reste 3. Le côté de 49, qui est 7, se met de côté et en dessous de lui on en met un autre. On trace le trait .a., ils se somment et font 14. Un autre 7 se met sous le 2 sur lequel est le premier point et, au 3 qui est sous le trait .c., on adjoint le 6 qui est entre le point du 2 et celui du 7, cela fait 36. Maintenant, on regarde combien de fois le 14 qui est sous le trait .a. va dans le 36 qui est sous la ligne .c., il y va 2 fois. Alors, à côté du 14 on met un 2, en dessous d'où le 2 se tient, on en mettra un autre et on trace le trait h.. Ils se sommeront et feront 144, un autre 2 se met sous le 7 sur lequel est le second point. Au 36 qui était sous le trait .c., on lui adjoindra le 7 qui est sous le second point. Cela fera 367, sous lequel on mettra 284, produit de 242, qui est sous le trait .a., multiplié par 2 (qui lui est en dessous). Le retranchant il reste 83 et c'est fini pour le second point. Voulant aller plus loin, au 83 qui est en dessous du trait .d., on adjoint le 8 qui est celui qui suit le 7 du second point, cela fait 838. Maintenant on regarde combien de fois il y va 144 qui est sous le trait .h., il y va 5 fois. Alors, à côté du 144 on adjoindra un 5, cela fera 1445 sous lequel on met un autre 5. En tirant dessous le trait .i., ils se somment et font 1450. Un autre 5 se met sous le 9 qui est sous le troisième point. Á 838, qui est sous le trait .d., on adjoint le 9 qui est sous le troisième point. Cela fait 8389 duquel on en retranche le produit de 1445, qui est sous le trait .h., par 5 qui lui est en dessous, c'est 7225, il reste 1164 qui est sous le trait .e., et c'est fini pour le troisième point. Voulant continuer encore, à 1164 on adjoint le 0 qui suit le 9 du troisième point et cela fait 11640. Alors, on regarde combien de fois il y va 1450 qui est sous le trait .i., il y va 8 fois. Alors, à côté de lui on met le 8, cela fait 14508 et en dessous de lui, on met un autre 8 et on tire le trait .1. Ils se somment, cela fait 14516, et un autre 8 se met sous le 1 qui est sous le quatrième point. Á 11640, qui est sous le trait .e., on adjoint 1 qui est sous le quatrième point. Cela fait 116401 duquel on en retire le produit de 14508, qui est sous le trait .i., par 8, qui lui est en dessous, cela fait 116064, il reste 337 et c'est fini pour le quatrième point. Voulant aussi encore poursuivre, on lui adjoint 3, qui est celui qui suit le 1 sous le quatrième point et cela fait 3373. Alors, on a besoin de voir combien de fois il y va 14516, qui pour lui être supérieur n'y va pas. Alors, on lui mettra un 0 à côté, et cela donnera 145160, un autre 0 se mettra sous le 4 qui est sous le cinquième point et à 3373, on adjoindra le dit 4 du cinquième point. Cela fait 33734 et pour que cela soit fini, on lui mettra en dessous 145160 qui est sous le trait .l. En y plaçant entre l'un et l'autre la virgule .g., il se formera la fraction et le côté proche du nombre proposé sera $72520\frac{33734}{145160}$. Voulant en faire la preuve (bien qu'elle ne soit pas réelle mais échouera de très rares fois) on procède dans l'ordre suivant. On fait la croix que l'on voit dans la figure, à son sommet on met le 2, nombre qui reste de la preuve par 9 de 33374. Puis, on fait la preuve par 9 de 72580, qui est le 4 qui se met dans l'angle .m. de la croix, un autre se met dans l'angle .n. et on les multiplie l'un par l'autre, cela fait 16. Ensuite, on ajoute le 2 qui est au sommet de la croix, cela fait 18 et sa preuve par 9 est 0 qui se met dans l'angle .p. de la croix. Puis on fait la preuve par 9 de 5267890134, qui est 0 qui se met dans l'angle .q. de la croix. et, l'angle .p. étant égal à l'angle .q., l'extraction peut être bonne. Mais, s'ils ne sont pas égaux, il est certain qu'elle est fausse.

Bien que tous les autres auteurs aient fait une telle extraction par la « *galera* » (galère)[31] à moi il m'est paru néanmoins, nécessaire de la faire par la « *danda*[32] », parce qu'on voit plus clairement que la *galera* ne le fait. Et bien qu'il soit plus intelligent et plus charmant d'utiliser la *galera* que la *danda,* à cause de la difficulté de son écriture, les caractères étant effacés, et que cela génère de la confusion chez celui qui ne sait pas, j'ai mis la *danda* plus par nécessité que par volonté. Maintenant, il me reste à dire (comme je l'ai promis) comment se forme la fraction, cela sera dans ce qui suit …

Une méthode de recherche de la valeur approchée d'une racine carrée « irrationnelle » (p.37).

De nombreuses méthodes de formation des fractions ont été données dans les travaux d'autres auteurs, l'un attaquant et accusant les autres sans cause valable (selon mon opinion) parce que finalement elles se ressemblent toutes. Il est cependant vrai qu'une méthode peut être plus rapide qu'une autre, mais il est suffisant que toutes soient utilisables et que celle qui est la plus facile soit sans hésitation acceptée par tous et utilisée sans lancer de calomnie sur une autre méthode.

C'est pourquoi il se peut qu'aujourd'hui j'enseigne une règle qui soit plus acceptable que celles données par le passé mais il se peut que d'autres soient découvertes plus tard. Si l'une d'entre elles était trouvée plus plaisante et plus facile, elle devrait être acceptée sur le champ et la mienne abandonnée parce que, comme le dit le dicton : « *L'expérience est notre maître et le résultat fait l'éloge du travailleur* ». Je vais établir brièvement la méthode qui me plaît le mieux actuellement et il restera au jugement de tous d'évaluer ce qu'ils voient. En attendant je continue mon discours et entre dans la discussion elle-même.

[31] Cette méthode de calcul est appelée ainsi à cause de la ressemblance de son aspect global avec les galères antiques. Dans cette méthode on reporte seulement les restes des soustractions comme dans nos divisions actuelles, c'est la méthode « courte ».

[32] *Danda* vient de *dare*, donner. Dans *Le pratiche,* Cataneo déclare « Cette méthode est appelée *a danda* parce qu'a chacune des soustractions faites on lui donne une ou plusieurs figures du côté droit ». C'est la méthode « longue » dans laquelle on écrit à chaque fois sous le dividende le produit du diviseur par le quotient en effectuant ensuite la soustraction.

Description de la méthode

Admettons d'abord que, si nous voulons trouver une racine approximative ce 13, celle-ci sera 3 et le reste 4. Ce reste doit être divisé par 6 (le double du 3 donné avant) ce qui donne $\frac{2}{3}$. C'est la première fraction qui doit être ajoutée au 3, faisant $3\frac{2}{3}$ qui est la racine approchée de 13. Comme le carré de ce nombre est $13\frac{4}{9}$, c'est trop grand de $\frac{4}{9}$.

Si quelqu'un veut une meilleure approximation, le 6, qui est le double de 3, doit être ajouté à la fraction $\frac{2}{3}$, donnant $6\frac{2}{3}$. Avec ce nombre, on doit diviser 4, qui est la différence entre 9 et 13. Le résultat est $\frac{3}{5}$ qui , ajouté au 3, fait $3\frac{3}{5}$. C'est une meilleure approximation de la racine carrée de 13 parce que son carré est $12\frac{24}{25}$ qui est plus proche que celui de $3\frac{2}{3}$.

Mais si je veux une meilleure approximation, j'ajoute cette fraction au 6, faisant $6\frac{3}{5}$ divisant 4 par cela et obtenant $\frac{20}{33}$. Ceci doit être ajouté au 3 comme précédemment faisant $3\frac{20}{33}$. C'est une meilleure approximation parce que son carré est $13\frac{4}{1099}$ qui est trop grand de $\frac{4}{1099}$.

Explication de la méthode

Étant donné que, si on a à trouver la racine la plus proche de 13, le carré de l'entier le plus proche est 9 et la racine est 3, alors, je pose que la racine la plus proche de 13 est 3 + 1 *Tanto* et son carré est 9 + 6 *Tanti* + 1 Carré. Et ils ont seulement égalé 6 *Tanti* à 4, de sorte que le *Tanto* vaudrait $\frac{2}{3}$ et ont fait que l'approximation vaudrait $3\frac{2}{3}$, parce que la supposition 3 + 1 *Tanto* vient à être $3\frac{2}{3}$.

Mais voulant encore tenir compte du carré du *Tanto*, le *Tanto* valant $\frac{2}{3}$, le Carré vaudra $\frac{2}{3}$ du *Tanto* qui, étant ajouté aux 6 *Tanti* du début donnera : $6\frac{2}{3}$ de *Tanti* égaux à 4, que je résous. Le *Tanto* vaudra $\frac{3}{5}$ et parce qu'il a été posé 3 + 1 *Tanto*, on aura $3\frac{3}{5}$ et le *Tanto* valant

$3\frac{3}{5}$, le Carré vaudra $3\frac{3}{5}$ de *Tanti* et on aura $6\frac{3}{5}$ de *Tanti* égal à 4. C'est ainsi que l'on voit d'où naissent les règles vues ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

Bombelli Rafael : L'Algebra.- Réédition, Milan : Feltrinelli, 1966.

Hamon Gérard : Histoires de complexes.- Colloque Inter-IREM de Cherbourg, 1995.

Hamon Gérard : Cardan et Bombelli, deux précurseurs du calcul algébrique in Bulletin d'information de l'I.r.e.m. de Rennes n° 34.- I.R.E.M. de Rennes, 1994.

Itard jean : Matériaux pour l'histoire des nombres complexes. - Brochure A.P.M.E.P., 1969.

Testa Giuliano : Équations du troisième degré et nombres complexes.- Première université d'été européenne d'histoire et d'épistémologie dans l'éducation mathématique, 1993.

Groupe de recherche I.R.E.M. de Rennes : Faire des mathématiques à partir de leur histoire, Tome II.- I.r.e.m. de Rennes, 1996.

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Deuxième Trimestre 1996
N° de Publication : 96-03

Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 99 28 63 42

FICHE DUBLIREM

TITRE : *BOMBELLI - L'ALGEBRA - FRAGMENTS*

I.R.E.M. : RENNES

AUTEUR : Gérard HAMON

DATE : NOVEMBRE 1996 (Deuxième édition modifiée)

NIVEAU : Terminale - Supérieur

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de Mathématiques, Chercheurs.

MOTS-CLES :

- Histoire Mathématique
- Algèbre
- Géométrie

RESUME :

Traduction avec quelques commentaires de plusieurs passages de l'Algèbre de Bombelli. L'œuvre de l'auteur du XVIè siècle n'a fait à ce jour l'objet d'aucune traduction en langue française.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX T.T.C.	TIRAGE
21 × 29,7	63	30 F	200 Ex.

2-85728-025-4

Traductions Complémentaires figurant sur le site de l'IREM de Rennes

Équations du troisième degré
Bombelli revoit Cardan

Dans le paragraphe « *Des transformations de différentes manières* » de son livre II de *L'Algebra*[33], Bombelli résout seize équations[34]citées par Cardan dans son *Ars Magna*, chapitre XXV « *Sur les règles imparfaites et particulières* ». Il montre qu'à l'aide des règles de résolution d'équations qu'il a données dans les paragraphes précédents[35], il peut résoudre toutes ces équations du troisième degré.

Bombelli a successivement donné les méthodes de résolution des équations suivantes :

- $x^3 + px = q$ puis le passage à l'équation $y^3 = py^2 + q^2$;
- $x^3 = px + q$ en proposant, pour le cas irréductible (trois racines réelles obtenues sous une forme qui leur donne une apparence complexe), quand c'est possible, une méthode par division permettant de passer à une équation de degré inférieur. Ce paragraphe est complété par le passage à l'équation $y^3 + py^2 = q^2$;
- $x^3 + q = px$ puis le passage à l'équation $y^3 + q^2 = py^2$;
- $x^3 = rx^2 + q$ puis le passage à l'équation $y^3 + rqy^2 = q^2$;
- $x^3 + rx^2 = q$ et sa transformation en $y^3 + (q - \frac{2p^3}{27}) = \frac{p^2}{3}y$ ou $y^3 = \frac{p^2}{3}y + (q - \frac{2p^3}{27})$;
- $x^3 + q = rx^2$ et son passage suivant les cas à $y^3 + (q - \frac{2r^3}{27}) = \frac{r^2}{3}y^2$ ou $y^3 + q^2 = rqy$.

Toutes ces règles de résolution sont associées à une démonstration géométrique.

Nous donnons ci-après la traduction de la partie correspondant à la page du manuscrit qui est jointe.

Il faut remarquer qu'il y a plusieurs différences importantes entre le manuscrit composé vers 1560 et l'ouvrage édité en 1572, année de son décès. On relève que dans le manuscrit l'inconnue est désignée par *la cosa* alors que c'est *il Tanto* qui est utilisé dans l'ouvrage imprimé. Le manuscrit dit *regola sofistica* alors que le livre dit *regola di piu di meno* qui correspond à l'introduction de notre *i* imaginaire. Ainsi le nombre dont le carré est – 4 est noté *piu di meno* 2 et son conjugué *meno di meno* 2. De la même manière la règle de résolution d'une équation de la forme $x^3 = px + q$ ne conduisant pas à l'utilisation des imaginaires, est désignée par *regola de Scipione del Ferro* alors qu'elle est désignée par *regola del taglio del cubo* dans le livre. On trouve aussi dans le manuscrit des écritures comme *R.c.*[12 *p. R.q.*(0. *m.* $1069\frac{17}{27}$)] et dans l'ouvrage imprimé des nombres qu'ils désigne par *sophistiqués* comme *R.c.*[12. *piu di meno R..q.*$1069\frac{17}{27}$]. L'utilisation de ces nombres que nous désignons aujourd'hui par imaginaires est d'autant plus paradoxale qu'il ne cite pas les racines négatives des équations qu'il examine. Ceci est d'ailleurs confirmé par le fait qu'il n'écrit pas *m.* $1069\frac{17}{27}$ mais 0. *m.* $1069\frac{17}{27}$.

Dans le même ordre d'idée, il faut remarquer que le paragraphe du livre imprimé en 1572 : « Démonstration du cube égal aux inconnues et au nombre en aire plane[36] », ne figure pas dans le manuscrit[37].

Traduction de la page correspondant à celle du manuscrit représentée en fin de document

---

[33] Rafael Bombelli (1526 – 1572) a écrit *L'Algebra* vers 1560, la publication s'est faite en 1572.

[34] Nous présentons les six équations correspondant à la page du manuscrit qui est représentée en fin de texte. Les équations traitées par Cardan sont de la forme $x^3 = px + q$, $x^3 + q = px$, $x^3 + rx^2 = q$ et $x^3 + q = rx^2$.

[35] Il s'agit de la transformation des équations puis de leur simplification par un polynôme diviseur commun ramenant à la résolution d'une équation du second degré, de l'utilisation des imaginaires « *piu di meno, meno di meno* » et de la règle de résolution des équations du troisième degré divulguée par Cardan après avoir été mise au point par Scipione del Ferro d'un côté et Tartaglia de l'autre.

[36] *Dimostratione di Cubo eguale a Tantoi e numero in superficie plane.*

[37] Cette remarque est faite par Ettore Bortolotti dans l'édition intégrale (Milan : Feltrinelli, 1966) de *l'Algebra*, dans son analyse d'introduction aux livres I, II et III.

Et c'est parce qu'en arrière sont mises de nombreuses équations algébriques ne pouvant se résoudre et que pour cela Cardan a donné autant de Règles pour résoudre de tels cas imparfaits, certes de très belles inventions (comme on le voit dans la vingtième règle de résolution de son Ars Magna), mais néanmoins tous peuvent se résoudre par les règles données, comme je le montrerai un par un.

Le premier[38] dit : résous $\overset{\overset{3}{\cup}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{20}$ *p*. 32. Ceci peut se résoudre en ajoutant 8 à la fois aux deux parties et on aura $\overset{\overset{3}{\cup}}{1}$ *p*. 8 égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{20}$ *p*. 40 de sorte que les deux parties étant divisées par $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ *p*. 2, il en vient $\overset{\overset{2}{\cup}}{1}$ *m*. $\overset{\overset{1}{\cup}}{2}$ *p*. 4 égal à 20 et en suivant la règle de résolution, la chose vaudra[39] *R.q.*17. *p*. 1.

Le second[40] dit : résous $\overset{\overset{3}{\cup}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{32}$ *p*. 24. Ceci peut se résoudre par la règle du *piu di meno*[41]que j'ai démontrée et la chose[42] vaudra *R.c.*[12 *piu di meno R.q.*1069$\frac{17}{27}$] *p. R.c.*[12 *meno di meno R.q.*1069 $\frac{17}{27}$] et parce que les deux *R.c*. conjuguées ont pour valeur[43] 3 *plus de moins R.q.*1$\frac{2}{3}$ et 3 *moins de moins R.q.*1$\frac{2}{3}$ qui, ajoutées ensemble, font 6. Par conséquent la chose vaut 6. Ces racines pourront facilement se retrouver en recourant aux règles données ci-dessus dans le livre premier.

Le troisième[44] dit : résous $\overset{\overset{3}{\cup}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{10}$ *p*. 24. Ceci peut se résoudre par la règle de la coupe du cube[45] (comme cela se montre en son lieu) de sorte que la chose vaudra *R.c.*[12 *p. R.q.*106 $\frac{26}{7}$] + *R.c.*[12 *m. R.q.*106 $\frac{26}{7}$] et parce que les deux racines ont pour valeurs 2 *p. R.q.*$\frac{2}{3}$ et 2 *m. R.q.*$\frac{2}{3}$ qui ajoutées ensemble font 4, alors la chose[46] vaut 4.

Le quatrième[47] dit de résoudre $\overset{\overset{3}{\cup}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{19}$ *p*. 30. En ajoutant 27 à chacune des parties, on aura $\overset{\overset{3}{\cup}}{1}$ *p*. 27 égal à $\overset{\overset{1}{\cup}}{10}$ *p*. 57. Chacune des parties étant divisée par $\overset{\overset{1}{\cup}}{1}$ *p*. 3, il en vient $\overset{\overset{2}{\cup}}{1}$ *m*. $\overset{\overset{1}{\cup}}{3}$ *p*. 9 égal à 19 qui, résolu, donnera 5 pour valeur de la chose[48].

[38] Il s'agit de l'équation $x^3 = 20x + 32$.
[39] Solution $1 + \sqrt{17}$. Bombelli omet les racines négatives -2 et $1 - \sqrt{17}$.
[40] Équation $x^3 = 32x + 24$.
[41] Le manuscrit dit *Regola Sofistica*.
[42] Avec l'abus d'utilisation du symbole racine cubique Bombelli écrit $\sqrt[3]{12+i\sqrt{1069\frac{17}{27}}} - \sqrt[3]{12-i\sqrt{1069\frac{17}{27}}}$.
[43] Dans le manuscrit Bombelli écrit *Creatore* pour *lato*, côté ou racine, écrit dans l'ouvrage imprimé. Bombelli omet les racines négatives $-3 + \sqrt{5}$ et $-3 - \sqrt{5}$.
[44] Équation $x^3 = 10x + 24$.
[45] Le manuscrit dit *Regola di Scipione del Ferro*.
[46] Les solutions non réelles $-2 + i\sqrt{2}$ et $-2 - i\sqrt{2}$ sont omises.
[47] Équation $x^3 = 19x + 30$.
[48] Les solutions -2 et -3 sont omises.

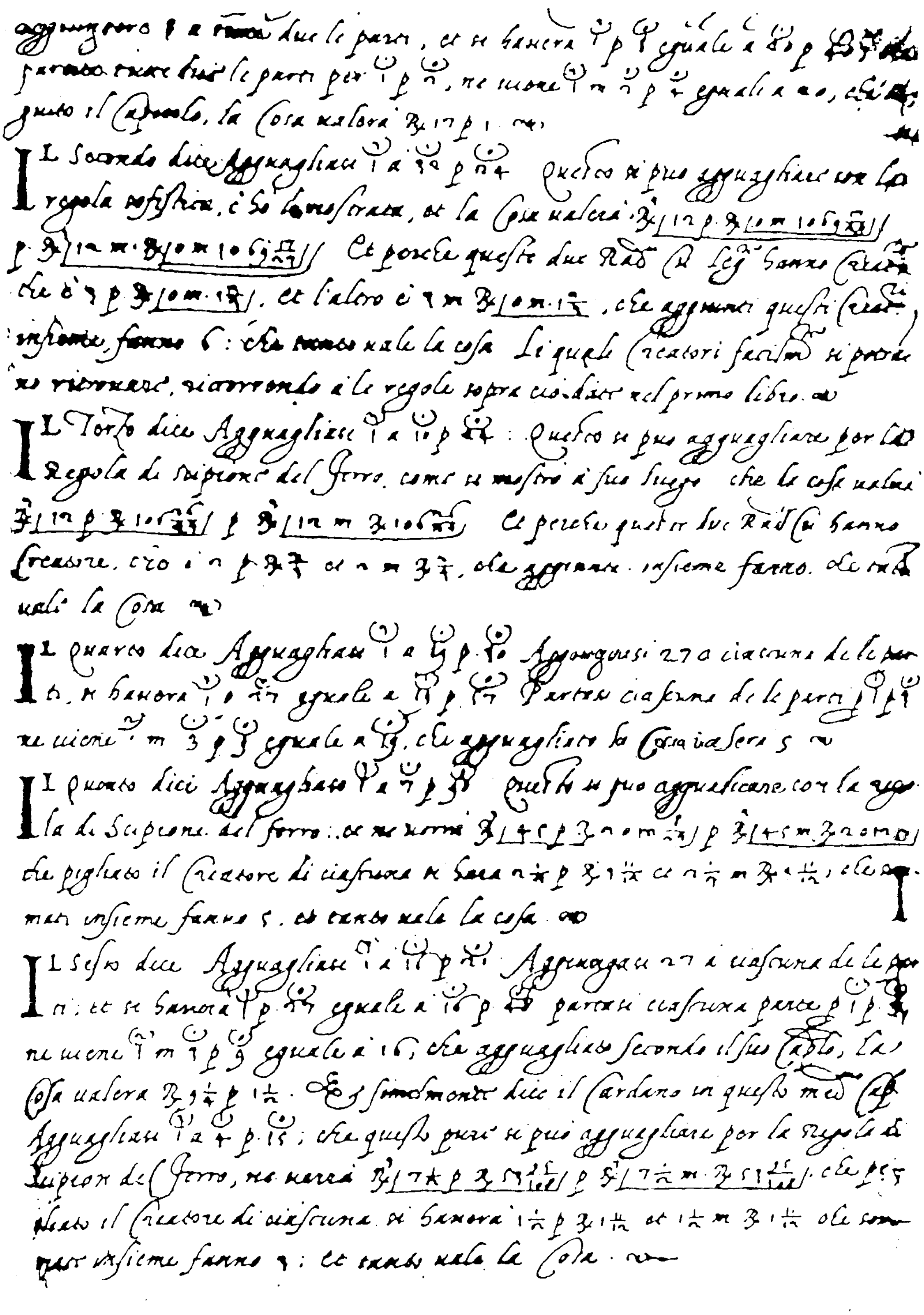
Le cinquième[49] dit : résous $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\smile}}{7}$ *p*. 90. Ceci peut se résoudre par la règle de la coupe[50] du cube et il en viendra *R.c.*[45 *p. R.q.*2012 $\frac{8}{27}$] *p. R.c.*[45 *m. R.q.*2012 $\frac{8}{27}$] dont la racine de chacun étant prise, on aura $2\frac{1}{2}$ *p. R.q.*$3\frac{11}{12}$ et $2\frac{1}{2}$ *m. R.q.*$3\frac{11}{12}$ qui ajoutés ensemble font 5 et la chose[51] vaut 5.

Le sixième[52] dit : résous $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\smile}}{16}$ *p*. 21. En ajoutant 27 à chacune des parties, on aura $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ *p*. 27 égal à $\overset{\overset{1}{\smile}}{16}$ *p*. 48, chacune des parties divisée par $\overset{\overset{1}{\smile}}{1}$ *p*. 3, il en vient $\overset{\overset{2}{\smile}}{1}$ *m*. $\overset{\overset{1}{\smile}}{3}$ *p*. 9 égal à 16 et ainsi en résolvant selon la méthode, la chose[53] vaudra *R.q.* $9\frac{1}{4}$ *p.* $1\frac{1}{2}$.

De la même manière, dans le même chapitre, Cardan dit : résous[54] $\overset{\overset{3}{\smile}}{1}$ égal à $\overset{\overset{1}{\smile}}{4}$ *p*. 15. Cela peut se résoudre par la taille du Cube[55]. Il en viendra *R.c.*[7 $\frac{1}{2}$ *p. R.q.*53 $\frac{95}{108}$] *p. R.c.*[7 $\frac{1}{2}$ *m. R.q.*53 $\frac{95}{108}$] de sorte que chacune des racines étant calculée, on aura $1\frac{1}{2}$ *p. R.q.*$1\frac{11}{12}$ et $1\frac{1}{2}$ *m. R.q.*$1\frac{11}{12}$ qui ajoutés ensemble font 3 et l'inconnue[56] vaut 3.

Gérard HAMON
Irem de Rennes
Octobre 2009

[49] Équation $x^3 = 7x + 90$.
[50] Le manuscrit dit *Regola di Scipione del Ferro*.
[51] Les solutions non réelles $-5 + i\sqrt{47}$ et $-5 - i\sqrt{47}$ sont omises.
[52] Équation $x^3 = 16x + 21$.
[53] Les racines négatives -3 et $\frac{3-\sqrt{37}}{2}$ sont omises.
[54] Équation $x^3 = 4x + 15$.
[55] Le manuscrit dit “*Regola di Scipione del Ferro*”.
[56] Les racines non réelles $\frac{-3+i\sqrt{11}}{2}$ et $\frac{-3-i\sqrt{11}}{2}$ sont omises.



Page du manuscrit de Bombelli, chapitre « *Delle transmutationi in diversi modi* »

Une résolution plane d'une équation du troisième degré
Bombelli ALGEBRA[57]

Dans ce chapitre, en écho à la décomposition d'un cube sur lequel s'appuie la résolution des équations du troisième degré, Bombelli démontre comment on peut résoudre, en s'appuyant sur un raisonnement dans le plan, une équation du troisième degré de la forme $x^3 = Px + Q$. De manière « matérielle », il s'agit de déplacer convenablement deux équerres pour « lire » ensuite une solution de l'équation.

Traduction	Aide à la lecture
Démonstration du *Cube* égal aux *Tanti*[58] et *nombre* par les aires planes Soit $1\overset{3}{\smile}$ égal à $6\overset{1}{\smile}$ plus 4 et soit .*q*. l'unité. Tracer .*m.e*. et faire .*m.l*. qui soit égal à .*q*., c'est-à-dire qui soit 1, et .*l.f*. 6, c'est à dire autant que le nombre d'inconnues (*Tanti*). Sur .*l.f*., on construit un rectangle tel que son aire soit 4, c'est-à-dire autant que le nombre, ce sera le rectangle .*a.b.f*.. Ensuite prolonger .*a.b*. jusqu'en .*d*. et .*a.l*. jusqu'en .*r*., puis ayant deux équerres, on en pose une avec l'angle sur la ligne .*r.e*. de sorte que l'un des bras touche l'extrémité .*m*.. Cette équerre s'élève ou s'abaisse jusqu'à ce qu'on puisse tracer une ligne à partir de l'angle de l'équerre passant par l'extrémité .*f*. qui va toucher .*b.d*. en un endroit tel qu'en mettant une autre équerre avec l'angle en ce point de contact et avec l'un des bras sur .*d.a*., elle va croiser le bras de l'autre équerre sur la ligne passant par .*f*.. Ceci étant fait, je dis que la ligne qui va du point .*l*. jusqu'à l'angle de l'équerre est la valeur du *Tanto* et je le prouve de la manière qui suit. Je suppose qu'on a élevé ou abaissé l'équerre jusqu'en .*i*. je trace .*i.f*. jusqu'à .*c*. et que le bras de l'équerre .*p*. coupe l'autre équerre en .*g*. sur la ligne .*g.e*.. Ceci fait, je dis que la ligne .*l.i*. est la valeur du *Tanto* parce que .*l.i*. étant $1\overset{1}{\smile}$ et .*ml*. 1, . *lg*. sera $1\overset{2}{\smile}$ du fait que .*m.l*. par .*l.g*. est autant que .*l.i*. par lui-même (l'angle en .*i*. étant droit). Le rectangle .*i.l.g*. vaudra un cube et le rectangle .*i.l.f*. vaudra $6\overset{1}{\smile}$ parce que .*i.l*. vaut $1\overset{1}{\smile}$ et .*l.f*. vaut 6. Le rectangle .*h.f.g*. vaudra 4 parce qu'il est égal au rectangle .*a.l.f*. qui valait 4. Comme .*i.l.g*. vaut en tout $6\overset{1}{\smile}$ et 4 et que par l'autre raisonnement il est prouvé être $1\overset{3}{\smile}$ alors, $1\overset{3}{\smile}$ sera égal à $6\overset{1}{\smile}$.*p*. 4 et .*i.l*. vaudra$1\overset{1}{\smile}$. Selon le mode de résolution enseigné, .*l.i*. vaudra R.q.3 *p*. 1, .*l.g*. vaudra 4 *p*. Rq. 12 ; .*f.g*. vaudra R.q. 12 *m*. 2, le rectangle .*i.l.f*. vaudra R.q. 108 *p*. 6 parce que la ligne .*i.l*. vaut R.q. 3 *p*. 1 et .*l.f*. 6, le rectangle .*h.f.g*. vaut 4 qui joint avec R.q. 108 *p*. 6 fait R.q. 108 *p*. 10 qui est égal au cube .*i.l.g*. (comme il a été proposé).	**Démonstration de la résolution par les aires planes de l'équation $x^3 = Px + Q$** L'équation à résoudre est $x^3 = 6x + 4$. On définit une unité q qui aura pour valeur 1. Sur la demi-droite $[me[$ on place les points l tel que $ml = 1$ et f tel que $lf = 6$ (coefficient de l'inconnue). On construit le rectangle $lfba$ d'aire 4 ($la = fb = 4/lf$ et $ab = lf = 6$) ; son aire est égale à la constante de l'équation. On trace la demi-droite $[ad)$ contenant b et la demi-droite $[ar)$ contenant l. On utilise ensuite deux équerres : - la première d'angle droit en r (mobile) placé sur $[ar)$ de sorte que l'angle $\widehat{mrg}$ soit droit, g étant l'intersection de la perpendiculaire en r à (mr) avec $[lf)$, - la deuxième d'angle droit en p (mobile) placé sur $[ad)$ de sorte que l'angle $\widehat{bpg}$ soit droit. La position de r recherchée est celle qui entraîne l'alignement de r avec f et p. Cette position de r est notée i et celle de p est alors notée c. Bombelli affirme ensuite que li représente la valeur de l'inconnue que nous notons x.o (li) étant la hauteur relative à l'hypoténuse du triangle rectangle mlg : $\frac{li}{lm} = \frac{lg}{li}$ soit $\frac{x}{1} = \frac{lg}{x}$ et donc lg sera x^2. L'aire du rectangle $ilgk$ sera $il \times lg = x \times x^2 = x^3$, celle du rectangle $ilfh$ sera $6x$ parce que il vaut x et lf vaut 6 et celle du rectangle $hfgk$ sera 4 parce qu'égale à l'aire du rectangle $alfb$ qui est 4. Le rectangle $ilgk$ les réunissant a pour aire $6x + 4$ et par l'autre raisonnement, elle a été démontrée valoir x^3 donc x^3 sera égal à $6x + 4$ et il vaudra x. Selon la méthode de résolution enseignée dans un autre chapitre, on a $li = \sqrt{3} + 1$, $lg = 4 + \sqrt{12}$, $fg = \sqrt{12} - 2$, l'aire du rectangle $ilfh$ vaudra $\sqrt{108} + 6$ parce que il vaut $\sqrt{3} + 1$ et lf vaut 6. L'aire du rectangle $hfgk$ vaut 4 qui ajouté à $\sqrt{108} + 6$ fait $\sqrt{108} + 10$, ce qui est égal au cube $ilgk$.

La résolution de Bombelli fait appel à deux équerres qui sont amenées à se chevaucher ainsi qu'une règle permettant de vérifier l'alignement des points. Ceci n'est guère réalisable d'une manière pratique, même en

---

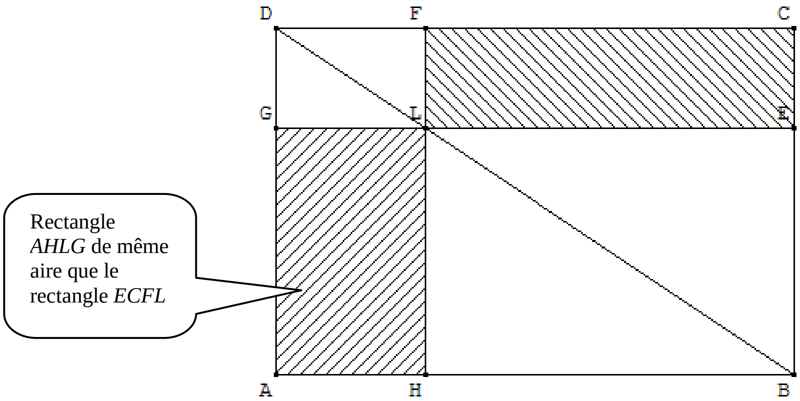
[57] *Algebra* livre 2, p 228, préface Bortolotti, éditeur Feltrinelli, Milan 1966.

[58] Par *Cube*, Bombelli désigne le cube de l'inconnue noté $\overset{3}{\smile}$. L'inconnue est désignée par *Tanto* (*Tanti* au pluriel) notée $\overset{1}{\smile}$.

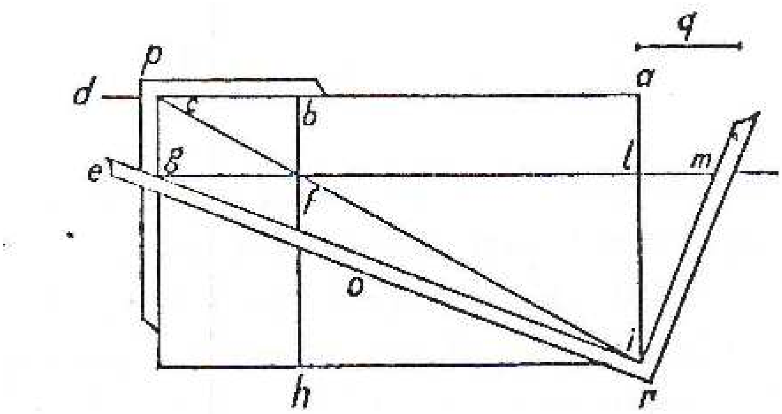
utilisant des matériaux très minces. Aujourd'hui nous disposons cependant de logiciels géométriques dynamiques nous permettant des réaliser la suggestion de Bombelli. C'est ce qui est réalisé un peu plus loin.

La proposition 43 du livre I des Éléments d'Euclide

Dans sa démonstration, Bombelli fait référence à la proposition 43 du livre I des Éléments d'Euclide : *Dans tout parallélogramme les compléments des parallélogrammes qui entourent la diagonale sont égaux entre eux*[59].



Quelques explications sur la démonstration



On se réfère à la figure tracée ci-après avec Geoplan.

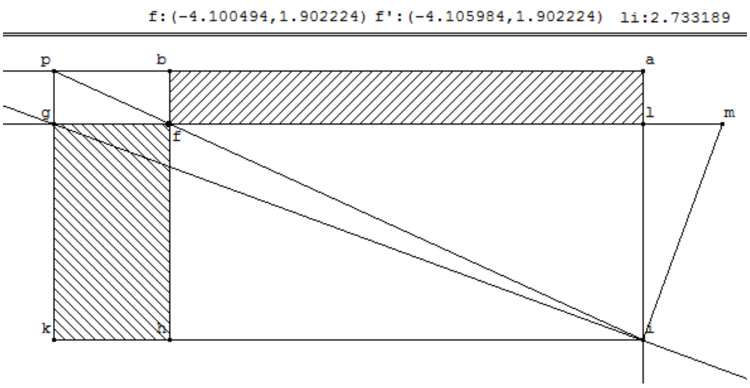
L'aire du rectangle *labf* vaut $\frac{4}{6} \times 6 = 4$. Si on admet que $li = 1\overset{1}{\cup}$, on a vu qu'alors $lg = 1\overset{2}{\cup}$ et donc que l'aire du rectangle de diagonale *gi* est $il \times lg = 1\overset{1}{\cup} \times 1\overset{2}{\cup} = 1\overset{3}{\cup}$. L'aire du rectangle de diagonale *if* est $lf \times il = 6\overset{1}{\cup}$. Comme l'aire du rectangle de diagonale *af* qui vaut 4 est égale à l'aire du rectangle de diagonale *gh* (Euclide proposition 53 L 1), l'aire de ce dernier est aussi 4. Le rectangle de diagonale *gi* étant la réunion des rectangles de diagonales respectives *gh* et *if*, son aire vaut $6\overset{1}{\cup} + 4$. On en conclut que $1\overset{3}{\cup} = 6\overset{1}{\cup} + 4$. La longueur *li* représente bien la solution de l'équation proposée.

[59] Euclide d'Alexandrie, traduction et commentaires de Bernard Vitrac, Presses Universitaires de France Paris 1990.

Tracé et résolution réalisés à l'aide de Géoplan

----- OBJETS CRÉÉS -----
m point libre
l image de m par la translation de vecteur $-\vec{i}$
f image de l par la translation de vecteur $-6\vec{i}$
a image de l par la translation de vecteur $\frac{4}{lf}\vec{j}$
(unité de longueur U_{oxy})
b image de f par la translation de vecteur $\frac{4}{lf}\vec{j}$
(unité de longueur U_{oxy})
Demi-droite [al)
Demi-droite [mf)
Demi-droite [ab)
r point libre sur la demi-droite [al)
Segment [mr]
P_1 droite perpendiculaire à (mr) passant par r
g point d'intersection des droites P_1 et (ml)
p projeté orthogonal de g sur (ab)
k image de g par la translation de vecteur $\overrightarrow{lr}$
h image de f par la translation de vecteur $\overrightarrow{lr}$
Segment [pg]
Segment [gk]
Segment [bf]
Segment [fh]
Segment [kr]
Segment [pr]
f' point d'intersection des droites (pr) et (ml)
S_1 polygone bfla
S_2 polygone gfhk
----- AFFICHAGES -----
A_{f0} affichage des coordonnées du point f (repère R_{oxy}) (6 décimales)
A_{f1} affichage des coordonnées du point f' (repère R_{oxy}) (6 décimales)
A_{f2} affichage de la longueur du segment [lr] (unité de longueur U_{oxy})
(6 décimales)

Il va de soit qu'excepté des cas particuliers, les équations du troisième degré n'étant pas résolubles à la règle et au compas, il n'est pas possible, même par cette méthode de trouver des solutions théoriquement exactes. En effet, l'approximation vient du fait que l'alignement des points *p*, *f* et *i* ou encore la coïncidence de *f'* (intersection de (*ip*) et (*mg*)) avec *f* est réalisé par glissement. Ainsi, en ayant agrandi la figure au maximum afin d'avoir une coïncidence optimale de *f'* et *f*, on obtient le résultat ci-dessous : *li* = 2,733 alors que $\sqrt{3}$ + 1 a pour valeur approchée 2,732.



Les méthodes de résolution exactes de Bombelli

Bombelli donne une des solutions exactes, $\sqrt{3}$ + 1. C'est en fait l'unique solution positive de l'équation, donc pouvant être associée à une longueur, alors que les autres solutions sont 1 – $\sqrt{3}$ et – 2.

Pour la solution $\sqrt{3}$ + 1, Bombelli dit qu'elle est obtenue suivant une méthode précédemment explicitée. Il sait résoudre les équations du 3ème degré y compris en passant par l'intermédiaire des nombres complexes, il en est l'inventeur. Cependant, il ne précise pas laquelle des méthodes il utilise dans ce cas précis.
Il en a développé trois dans des paragraphes précédents, les voici :

Première méthode

Si[60] on veut résoudre le cube égal à l'inconnue et au nombre [$x^3 = Px + Q$][61], on prend le tiers du coefficient de l'inconnue [$\frac{P}{3}$] qu'on élève au cube [$(\frac{P}{3})^3$] qui est retranché du carré de la moitié du nombre [$\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3$] puis on ajoute ou on retranche sa racine carrée [$\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}$] à la moitié du nombre [$\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}$ et $\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}$]. On prend la racine cubique de cette somme et de cette différence et ces deux racines jointes ensemble [$\sqrt[3]{\frac{Q}{2} + \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{Q}{2} - \sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 - \left(\frac{P}{3}\right)^3}}$] sont la valeur de l'inconnue (comme on le verra dans les exemples donnés ci-après).

Pour résoudre[62] $1\overset{3}{\cup}$ égal à $6\overset{1}{\cup} + 40$, on prend le tiers de l'inconnue, c'est 2 dont le cube fait 8. De ceci on retire le carré de la moitié du nombre, qui est 400, il reste 392 et de ceci on prend la racine carrée qui est R.q. 392 [$\sqrt{392}$] et elle s'ajoute à la moitié du nombre, cela fera 20 + R.q. 392 [$20 + \sqrt{392}$] et la racine cubique de ce binôme ajoutée à la racine cubique de son conjugué, c'est à dire avec R.c.$\llcorner$ 20 – R.q. 392 $\lrcorner$ [$\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$]. Ces deux racines cubiques sont 2 + R.q. 2 [$2 + \sqrt{2}$] pour l'une et 2 – R.q. 2 [$2 - \sqrt{2}$] pour l'autre. Ajoutées ensemble elles donnent 4 et 4 est la valeur de l'inconnue.

Deuxième méthode

Pour la résolution[63] de $1\overset{3}{\cup}$ égal à $12\overset{1}{\cup} + 9$, Bombelli indique que la résolution ne peut être réalisée par la méthode indiquée précédemment parce que le cube du tiers du coefficient de l'inconnue est supérieur au carré de la moitié du nombre. Dans ce cas, il propose, selon la règle indiquée par Cardan[64], d'ajouter ou retrancher un nombre cube à chaque membre de sorte qu'on parvienne à une simplification faisant baisser le degré de l'équation (en fait, cela revient à trouver une racine évidente, ce qui est rarement possible). Ainsi pour $1\overset{3}{\cup}$ égal à $12\overset{1}{\cup} + 9$, il propose d'ajouter 27, ce qui le conduit à $1\overset{3}{\cup} + 3^3$ égal à $12\overset{1}{\cup} + 36$, soit encore $1\overset{3}{\cup} + 3^3$ égal à 12 $(1\overset{1}{\cup} + 3)$. En divisant chaque membre par $(1\overset{1}{\cup} + 3)$, il parvient à $1\overset{2}{\cup} - 3\overset{1}{\cup} + 9$ égal à 12 soit[65], $1\overset{2}{\cup} = 3\overset{1}{\cup} + 3$ dont la résolution donne R.q. $5\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}$ [$\frac{3+\sqrt{21}}{2}$].

Troisième méthode

Bombelli propose enfin ceci : on peut encore procéder à la résolution de ce type d'équation de la manière qui suit. Pour résoudre[66] $1\overset{3}{\cup}$ égal à $15\overset{1}{\cup} + 4$, on prend le tiers de l'inconnue, c'est 5. Son cube fait 125 et on le retranche du carré de la moitié du nombre qui est 4, il reste – 121 dont la R.q. sera *piu di meno* 11 [$11i$] qui ajoutée à la moitié du nombre fait 2 *piu di meno* 11 [$2 + 11i$], dont la racine cubique et celle de son conjugué font 2 *piu di meno* 1 [$2 + i$] et 2 *meno di meno* 1 [$2 - i$] qui ajoutés ensemble font 4 et 4 est la valeur de l'inconnue. Pour cette équation, on a $\left(\frac{4}{2}\right)^2 - \left(\frac{15}{3}\right)^3 = -121$ qui, bien que du même type que l'équation qui va suivre est

[60] Page 222 « $x^3 = 6x + 40$ ». Cette équation est traitée par Cardan dans son *Ars Magna* au chapitre XII. Il s'arrête aux écritures $\sqrt[3]{20+\sqrt{392}}$ et $\sqrt[3]{20-\sqrt{392}}$.

[61] Les notations entre crochets ne figurent pas dans le texte.

[62] Page 229 « $x^3 = 12x + 9$ ».

[63] P 224, équation $x^3 = 12x + 9$.

[64] Cardan, *Ars Magna*, chapitre XXV « À propos des règles imparfaites et particulières ». Il prend l'exemple de résolution rédigé sous une forme actuelle $x^3 = 16x + 21$ qui donne $x^3 + 27 = 16x + 48$ puis $x^2 = 3x + 7$ par simplification par $x + 3$.

[65] $x^2 = 3x + 3$ dont la solution positive est 1,5 + $\sqrt{5{,}25}$.

[66] $x^3 = 15x + 4$.

traitée différemment car Bombelli sait déterminer des nombres dont le cube est 2 + $\sqrt{121}\, i$ par des méthodes d'encadrement « à tâtons ». Sa méthode, *Manière de trouver la racine cubique de semblable types d'expressions*[67], est basée sur le fait que de $a + bi = (x + yi)^3$ on déduit que $x^2 + y^2 = \sqrt[3]{a^2+b^2}$ et $x^3 - 3xy^2 = a$. Il s'agit alors de trouver les nombres x et y répondant à ces contraintes. En particulier on doit avoir $x^2 < \sqrt[3]{a^2+b^2}$ et $x^3 > a$ (x supposé positif). Pour 2 + $\sqrt{121}\, i$, on a $2^2 + (\sqrt{121})^2 = 125 = 5^3$. On cherche donc x et y répondant aux conditions citées. Bombelli, après avoir vérifié que $x = 1$ et $x = 3$ ne conviennent pas, en déduit que s'il existe une solution entière, ce ne peut être que 2 … qui convienne et conduit à la solution $2 + i$ qui est toujours accompagnée de son conjugué $2 - i$ et $(2 + i) + (2 - i) = 4$.

Pour l'équation $x^3 = 12x + 9$ vue en deuxième méthode, on a $\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{12}{3}\right)^3 = -\frac{175}{4}$ qui n'est le carré d'aucun réel, ce qui justifie que Bombelli n'applique pas la première méthode. Il lui faut déterminer des nombres dont le cube est $\frac{9}{2} + i\sqrt{\frac{175}{4}}$, ce qu'il ne sait pas faire avec de tel nombres.

La résolution de l'équation $x^3 = 6x + 4$

Par la méthode de Cardan et Tartaglia (ou par application de formules), avec $x = u + v$, l'équation $x^3 = 6x + 4$ devient $(u + v)^3 = 6(u + v) + 4$ soit $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) = 6(u + v) + 4$. En fixant $uv = 2$ on déduit que $u^3v^3 = 8$ et $u^3 + v^3 = 4$. Alors u^3 et v^3 sont solutions de l'équation $X^2 - 4X + 8 = 0$. Cette équation de discriminant – 16 a pour solutions $2 + 2i$ et $2 - 2i$, solutions que Bombelli écrivait 2 *piu di meno* 1 et 2 *meno di meno* 2. Il s'agit alors de trouver des complexes dont le cube est égal à ces nombres. Pour $2 + 2i$, on a $\sqrt[3]{a^2+b^2} = 2$ et $a = 2$, donc le carré de x doit être inférieur à 2 et son cube supérieur à 2. Il n'y a pas de nombre simple répondant à cette condition. La méthode « à tâtons » ne fonctionne pas.

Dans ce cas, on peut supposer que Bombelli utilise la deuxième méthode, tout en se disant que cette équation n'a pas été choisie au hasard, mais pour son adaptation à cette méthode sans doute par une création à rebours : $x^3 = 6x + 4$ donne $x^3 + 2^3 = 6x + 4 + 8$ soit $x^3 + 2^3 = 6(x + 2)$. Ayant $x^3 + 2^3 = (x + 2)(x^2 - 2x + 4)$, la simplification par $x + 2$ conduit à l'équation $x^2 = 2x + 2$ dont les solutions sont $1 + \sqrt{3}$, qui est positive et peut être retenue par Bombelli, et $1 - \sqrt{3}$ qui est négative.

Méthode actuelle

On a $2 + 2i = 2\sqrt{2}\,(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{i}) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et il s'en déduit 3 nombres complexes dont le cube est égal à $2 + 2i$, ce sont :

$\sqrt{2}\,(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}) = \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i)$;

$\sqrt{2}\,[\cos(\frac{9\pi}{12}) + i\sin(\frac{9\pi}{12})] = \sqrt{2}\,[\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})] = \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\, i) = -1 + i$;

$\sqrt{2}\,[\cos(\frac{17\pi}{12}) + i\sin(\frac{17\pi}{12})] = \sqrt{2}\,[\cos(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12}) + i\sin(\frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{12})] = \sqrt{2}\,(-\sin\frac{\pi}{12} - i\cos\frac{\pi}{12}) =$
$\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\, i)$.

Les conjugués sont aussi solutions : $\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i)$, $\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\, i)$ et $-1 - i$.

Il y a 9 combinaisons possibles de ces valeurs, mais la condition $uv = 2$ contraint à une association des valeurs possibles de u et de v donnant seulement 3 solutions qui sont :

$\sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} + \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i) + \sqrt{2}\,(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} - \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\, i) = \sqrt{2}\,\sqrt{2+\sqrt{3}} = \sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{1+2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} =$
$\sqrt{(1+\sqrt{3})^2} = 1 + \sqrt{3}$;

$(-1 + i) + (-1 - i) = -2$;

---

[67] *Algebra* Livre 1 page 140 et suivantes.

$\sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad - \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\,i) \quad + \quad \sqrt{2}\,(-\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2} \quad + \quad \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\,i) \quad = \quad \sqrt{2}\,\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad = \quad \sqrt{4-2\sqrt{3}} \quad =$
$\sqrt{1-2\sqrt{3}+\sqrt{3}^2} \ = \sqrt{(1-\sqrt{3})^2} \ = 1 - \sqrt{3}$.

La méthode fonctionne bien parce qu'elle conduit à des arcs multiples de $\frac{\pi}{12}$ dont les lignes trigonométriques exactes sont connues.

Gérard HAMON
12/11/11

Recherche de la racine cubique par la géométrie[68].

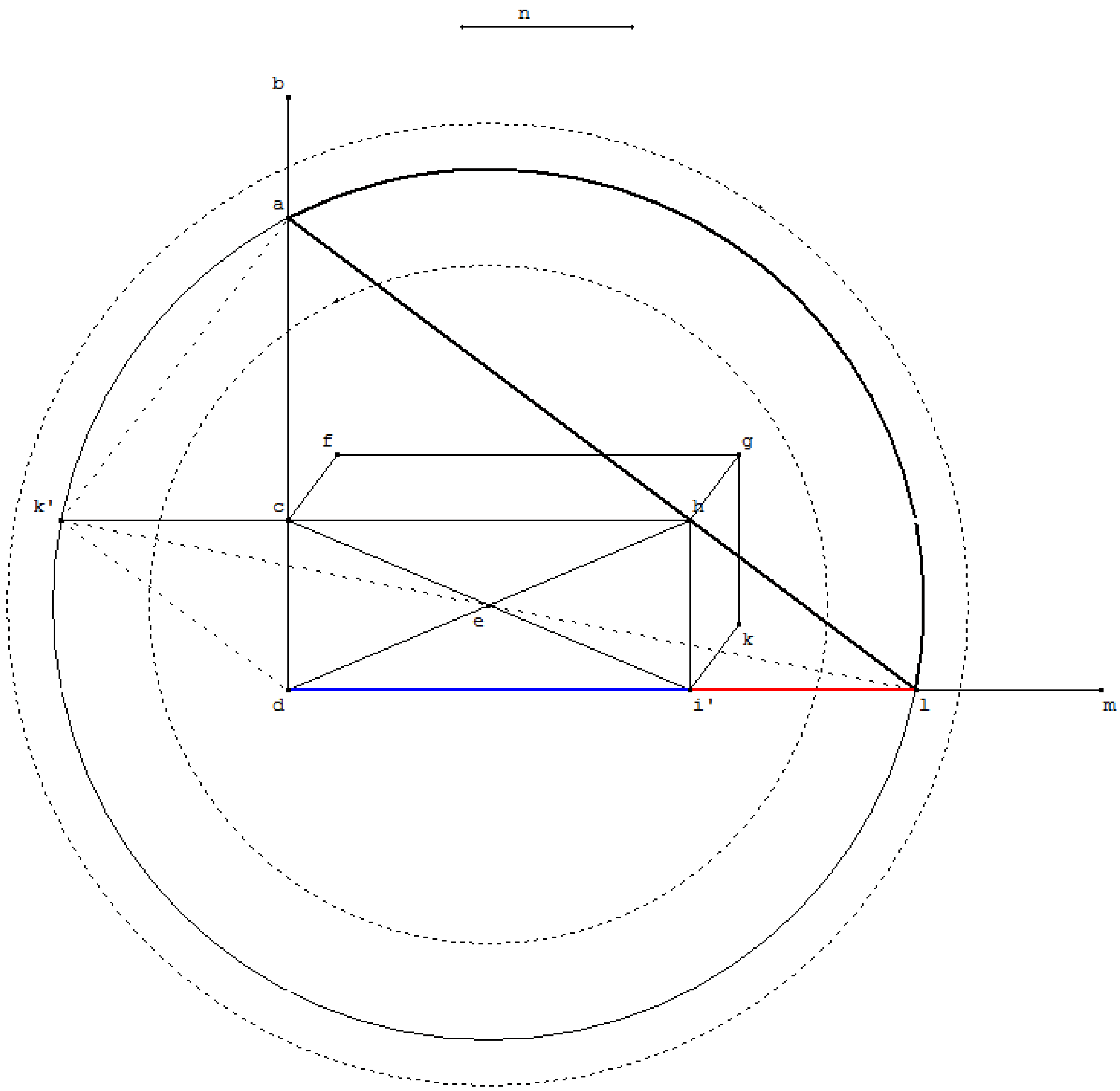
Trouver la racine cubique d'une ligne dont la mesure est donnée n'est rien d'autre que trouver le côté d'un cube qui soit égal à un parallélépipède donné dont la base est un carré sur la mesure donnée et dont la hauteur est la ligne dont on doit extraire la racine cubique. Ou encore, c'est trouver deux moyennes proportionnelles entre la mesure commune et la ligne dont on veut extraire la racine cubique. La plus petite sera cette racine.

Nombreux sont ceux qui se sont usés à trouver ces deux lignes, mais jusqu'à présent il ne s'en est pas trouvé qui en ont fait la démonstration sinon par la méthode instrumentale dont je donnerai deux manières, l'une étant plus utilisée que l'autre. Soit la ligne .d.i'., la ligne .n. la mesure commune et on doit extraire la racine cubique de .d.i. On trace .d.b. à angle droit avec .d.i'. et on prolonge .d.i'. jusqu'en .m. On fait .d.c. égale à .n. et du point .i'. on trace .i'.h. égal à .n. et parallèle à .d.c. Puis on trace .d.h. qui partage le parallélogramme .e'.d.i.h. puis on trace .c.i'. qui coupe .d.h. en .e. point sur lequel on placera la pointe immobile du compas. On trace l'arc .o.r. d'un cercle au hasard puis on trace le segment .o.r. Il passera au-dessus ou au-dessous ou sur le point .h. S'il passe sur le point .h. on aura réussi. Mais au cas où il passe au-dessus on réduira le compas et on tracera l'arc .q.p. d'un cercle ; et au cas où passe au-dessous, on fera autant de cercles ayant toujours pour centre .e. jusqu'à ce que la corde de l'un touche l'angle .h. On remarque que ces parties de cercle touchent à l'extrémité la ligne .d.b. et la ligne .d.m. de sorte que la corde .a.l. touchant l'angle .h., .i'.l. sera la racine cubique demandée.

Et cette démonstration ne consiste en rien d'autre que de trouver deux lignes moyennes entre .n. et .d.i. ce qui est une proportion continue. Ainsi par cette démonstration on aura .h.i'. (égale à .n.) à .i'.l. comme .a.c. est à .c.h. qui est égale à .d.i'. Le rapport de .n. à .i'.l. est comme le rapport de .i'l. à .a.c. et le parallélogramme construit sur .i'.l. et .a.c. est égal au parallélogramme .c.d.i'.h. Cela se démontre ainsi : étant donné le parallélépipède .c.d.i'.h.f.g. dont la base .g.h.i'.k. est un carré de côté égal à .n., c'est à dire à .i'.h. et dont la hauteur est égale à .d.i'. Bien que sur cette figure le parallélépipède soit couché et non dressé et que si tu cherches le côté d'un Cube, il est par quadrature égal à ce parallélépipède.

Il y a plusieurs manières de démontrer que k', point d'intersection de (le) et de (hc), est situé sur le cercle de centre e. Parmi elles, la suivante qui ne pouvait être proposée par Bombelli : la symétrie centrale de centre e laisse globalement invariants le cercle adéquat de centre e et la droite (le). La droite (di) a pour symétrique la droite (hc). Il en ressort que le point l intersection de (le) et (di) situé sur le cercle a pour symétrique le point k intersection de (hc) et de (le) situé sur le même cercle. On en conclut que l'angle en a est droit. Du fait que (ca) est hauteur du triangle k'ac rectangle en a, on a $\frac{k'c}{ac} = \frac{ac}{ch}$ *et donc* $\frac{k'c}{ac} = \frac{ac}{di'}$ *car ch = di'. Si on considère les triangles semblables ach et hil, on déduit que* $\frac{hi'}{i'l} = \frac{ac}{ch}$ *et comme hi' = n et k'c = i'l, on a* $\frac{n}{i'l} = \frac{ac}{di'}$*. De tout ceci on déduit* $\frac{n}{i'l} = \frac{i'l}{ac} = \frac{ac}{di'}$ *et que i'l et ac sont les deux moyennes proportionnelles recherchées entre l'unité n et di'. On a finalement n.ac =* $i'l^2$ *et* ac^2 *= i'l.di' et comme n = 1,* $i'l^4$ *=i'l.di' soit* $i'l^3$ *= di', i'l est la racine cubique recherchée.*

[68] Cette partie n'a pas été publiée dans *L'Algebra*, Feltrinelli, Livre 4, Pages 489-491.



Gérard HAMON
08/11/15

Ce que Bombelli nous apprend des nombres complexes

Je ne vais pas reprendre in extenso ce que j'ai déjà mis dans des écrits précédents, mais surtout m'attarder sur ce qui ne s'y trouvait pas.

Dans l'ouvrage de Bombelli il est clair que c'est à partir des problèmes de résolution des équations du troisième degré qu'émerge l'idée de créer ces nombres. Il y introduit des nombres différents de ceux qui sont jusqu'à présent connus des mathématiciens. C'est la résolution de ces équations qui oriente toutes ses recherches et tous ses calculs illustratifs dans ce domaine. Durant la période où il écrit, cette question est une des grandes affaires qui viennent de secouer le monde mathématique italien. Tartaglia a fait état de ses trouvailles, Cardan les lui a extorquées et en a fait la publication en dépit de ce qu'il lui avait promis. D'après Cardan et son disciple Lodovico Ferrari, ils auraient vu les travaux de Scipione Del Ferro. Ce dernier aurait devancé Tartaglia et Cardan justifiera ainsi son parjure. Étant donné l'importance de la question, il est pour le moins surprenant que les travaux de Del Ferro n'aient jamais été publiés. D'après ce que j'en sais, aucune trace probante n'en a été retrouvée à ce jour.

J'ai trouvé[69] une autre sorte de racine cubique d'expressions entre parenthèses très différente des autres. Celle-ci est issue du Cas traitant du Cube du *Tanto*[70] égal au *Tanto* et à une Constante[71],

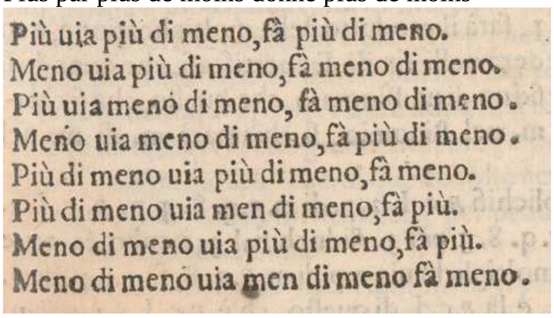
[69] *L'Algebra*, Bologne Giovanni Rossi, 1579, Libro primo, page 169 (Feltrinelli, pages 133-134).

quand le cube du tiers du nombre de *Tanti* est plus grand que le carré de la moitié de la Constante, comme cela va être démontré pour ce Cas. Cette sorte de racine carrée contient dans son algorithme de calcul, des opérations différentes des autres et a un nom différent, parce que, quand le cube du tiers du nombre de *Tanti* est supérieur au carré de la moitié de la Constante, la racine carrée de leur différence ne peut s'appeler ni plus ni moins, c'est pourquoi je l'appellerai *plus de moins*[72] quand celle-ci devra être ajoutée et, quand elle devra être ôtée, je l'appellerai *moins de moins.*

…

Bombelli donne ensuite de manière détaillée les **règles de multiplication** de ces nouvelles entités par un nombre puis entre elles.

Plus par plus de moins donne plus de moins[73]



Più uia più di meno, fà più di meno.
Meno uia più di meno, fà meno di meno.
Più uia menó di meno, fà meno di meno.
Meno uia meno di meno, fà più di meno.
Più di meno uia più di meno, fà meno.
Più di meno uia men di meno, fà più.
Meno di meno uia più di meno, fà più.
Meno di menó uia men di meno fà meno.

Moins de moins par moins de moins donne moins

De fait il définit la multiplication d'imaginaires entre eux puis avec des réels. Sans en dire plus, dans ses calculs, il décrit la **multiplication de nombres complexes entre-eux**. À ce stade de son travail, il ne propose pas de description de leur addition ou de leur soustraction. Il les a rencontrés sous la forme R.c.[a *piu di meno* b] expressions qui si elles se prêtent à la multiplication ne se prêtent pas à **l'addition et la soustraction** sauf cas particuliers. On les trouve cependant au cours de ses calculs sans qu'il attire l'attention sur celles-ci. Ainsi :

On[74] multiplie R.c.[3 *piu di meno* R.q. 5] par R.c.[6 *piu di meno* R.q. 20]. Pour le faire on commence de la même manière par multiplier *piu di meno* R.q. 5 par *piu di meno* R.q. 20 qui fera *meno* 10, **puis on multiplie 3 par 6 qui fait 18 qui joint avec *meno* 10 fait *piu* 8**. Ensuite on multiplie 3 par *piu di meno* R.q. 20 **qui fait *piu di meno* R.q. 180** et puis on multiplie 6 par *piu di meno* R.q. 5, **cela fait *piu di meno* R.q. 180. Ceci joint avec *piu di meno* R.q. 180 fait *piu di meno* R.q. 720 et ceci joint à *piu* 8** et la R.c. étant prise cela fait R.c.[**8 *piu di meno* R.q. 720**] qui est le produit de la multiplication.

On multiplie[75] R.c.[4 *piu di meno* R.q. 2] par R.c.[3 *piu di meno* R.q. 8]. **Nous multiplierons d'abord *piu di meno* R.q. 2 par *piu di meno* R.q. 8** qui fait *meno* 4. **Nous multiplierons 3 par 4** qui fait **12 qui ajouté au *meno* 4 fait *piu* 8**. Ensuite nous multiplierons **3 par *piu di meno* R.q. 2** qui fera *piu di meno* R.q. 18 et ensuite **4 par *piu di meno* R.q. 8** qui fait ***piu di meno* R.q. 128. Joint avec *piu di meno* R.q. 18 cela fait *piu di meno* R.q. 242**. Joint avec *piu* 8 et la R.c. prise , nous aurons R.c.[**8 *piu di meno* R.q. 242**] pour résultat de la multiplication.

J'ai mis en gras les parties qui indiquent que pour additionner des complexes, Bombelli applique (avec un langage actuel) : parties réelles additionnées entre-elles et parties imaginaires additionnées entre-elles. C'est ce qu'il fait figurer plus loin, donc après les avoir déjà utilisées.

Additionner[76] *piu di meno* et *meno di meno*

L'addition des *piu di meno* et *meno di meno* a ses règles (comme pour les autres) qui seront indiquées rapidement comme d'habitude.

Piu ne peut s'ajouter à *piu di meno* sans dire *piu di meno* comme si on disait ajoute 5 avec *piu di meno* 8 qui fait 5 *piu di meno* 8 et de même pour *meno di meno*.

---

[70] *Tanto* inconnue.

[71] Forme $x^3 = px + q$ avec $(\frac{p}{3})^3$ supérieur à $(\frac{q}{2})^2$

[72] *Piu di meno,* notre + *i* et *meno di meno notre – i* . Il semble que ce soit une abréviation de *piu radice di meno,* « plus racine de moins ».

[73] *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 169 *Piu via piu di meno, fa piu di meno.*

[74] *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 172 (Feltrinelli, page 135).

[75] *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 172 (Feltrinelli, page135).

[76] *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 190 (Feltrinelli, page 147).

Piu di meno avec *piu di meno* s'ajoute et fait *piu di meno*.
Piu di meno avec *meno di meno* se retranche et est du signe de la plus grande quantité.

Soustraire *piu di meno* et *meno di meno*

La soustraction[77] des *piu di meno* et *meno di meno* a ses règles (comme pour les autres) qui seront indiquées rapidement comme d'habitude.
Piu retranché de *piu di meno* ne peut se faire sinon par le moyen du *meno*. Ainsi, si on avait à retrancher 6 de *piu di meno* 12. Il restera *piu di meno* 12 *meno* 6. Il en est de même pour retrancher *meno* de *piu di meno* comme ce serait avec *meno* 8 de *piu di meno* 13 : cela fera *piu di meno* 13 *piu* 8 parce que le *meno* a pour effet de devenir *piu* en étant retranché.
Piu di meno retranché de *meno di meno* s'ajoute et fait *meno di meno*.
Meno di meno retranché de *meno di meno*, on retranche et il reste *meno* di *meno*. Mais si la quantité qui est retranchée est supérieure, il reste *piu di meno*.
Piu di meno retranché de *piu di meno*, si la quantité retranchée est inférieure, on les retranche l'une de l'autre et il reste *piu di meno*, mais si elle est supérieure il reste *meno di meno.*
Meno di meno retranché de *piu di meno* s'ajoute et fait *piu di meno*.

Dans ce même chapitre, il précise un objet très proche de ce que nous désignons par **conjugué**.

On[78] doit être averti que de telles sortes de racines liées ne peuvent intervenir sans que le binôme ne soit accompagné de son conjugué, comme cela serait pour[79] R.c.[2 *piu di meno* R.q.2] dont le conjugué sera R.c.[2 *meno di meno* R.q.2]. Pour de telles sortes de R.c., il ne m'est jusqu'à présent encore jamais arrivé d'avoir travaillé sur l'une sans l'autre …

Il y a cependant une restriction qui est précisée plus loin dans *L'Algebra* : Bombelli désigne par Binôme (Binomio) les seules expressions contenant un *piu di meno*. Ainsi 2 *piu di meno R.q.*2 est un Binôme, mais 2 *meno di meno R.q.*2 n'en est pas un. Seules les expressions contenant un *meno di meno* sont des Conjugués (Residuo).

Plus loin il multiplie un nombre complexe (Binomio) par son conjugué (Residuo).

On multiplie[80] R.c.[2 *piu di meno* R.q. 3] par R.c.[2 *meno di meno* R.q. 3]. On multiplie d'abord seulement ***piu di meno* R.q. 3 par *meno di meno* R.q. 3 qui fait *piu* 3**. Puis si **on multiplie 2 par 2 cela fait 4** qui ajouté à *piu* 3 fait *piu* 7. Si on multiplie **2 par *piu di meno* R.q. 3 cela donne *piu di meno* R.q. 12** et puis **2 par *meno di meno* R.q. 3 cela fait *meno di meno* R.q. 12 qui ajouté à *piu di meno* R.q. 12 fait exactement zéro parce que le *meno* est égal au *piu*.** Alors **le zéro ajouté au *piu* 7 fait 7** dont la racine cubique c'est à dire R.c. 7 est le produit de la multiplication

Comme il l'a expliqué dans l'exposé de son projet, Bombelli veut produire un écrit ordonné et complet. Aussi va-t-il examiner toutes les occurrences que peut présenter la **division** : un complexe par un nombre, un nombre par un complexe, …, un complexe par un complexe. Ceci est quelque peu surchargé par les racines cubiques qu'il fait intervenir partout. Toutefois il y montre sa maîtrise totale des calculs.

Diviser piu di meno ou *meno di meno*[81]

Quand on aura à diviser une quantité où se trouve *piu di meno* ou *meno di meno* par un nombre quelconque ou une R.q. simple et non composée, dans ce cas tous les *piu* restent *piu*, les *meno meno* ainsi que les *piu di meno* et les *meno di meno*.
…
On divise R.q. 72 *piu di meno* 4 par R.q. 5 + 1. On multiplie le diviseur par son conjugué, c'est à dire par R.q. 5 – 1, cela fait 4 et ceci est le diviseur et, pour plus de facilité on divise R.q. 72 *piu di meno* 4 par 4. Il en vient R.q. $4\frac{1}{2}$ *piu di meno* 1 et ceci on doit le multiplier par R.q. 5 – 1, conjugué de R.q. 5 + 1 le diviseur. Faisant comme il a été enseigné pour la multiplication, cela donne R.q. $22\frac{1}{2}$ + R.q. $4\frac{1}{2}$ *piu di meno* R.q. 5 – 1. C'est ce qui survient. On doit être avisé que depuis qu'a été désigné le *piu di meno* ou le *meno di meno*, tout ce qui suivra se comprend de la même manière, comme si on disait *piu di meno* R.q. 9 – 1 sera comme dire que prise R.q. 9 qui est

---

77 *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 192 (Feltrinelli, pages 148-149).
78 *L'Algebra* (Rossi) Libro primo page 170 (Feltrinelli, page 134).
79 R.c. correspond partiellement à Racine cubique, de même que R.q. correspond à racine carrée.
80 *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 170 (Feltrinelli, page 137).
81 *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 186 (Feltrinelli, page 144).

3, et le *meno* 1 retranché, il reste 2, que le dit 2 soit *piu di meno*. Donc il revient autant à dire *piu di meno* R.q. 9 – 1 que *piu di meno* 2.

On divise[82] **12 par**[83] **R.c.[2 *piu di meno* 11] + R.c.[2 *meno di meno* 11]**. D'abord il est nécessaire de trouver le conjugué du diviseur, c'est à dire des deux R.c.[, lesquelles se trouvent de la même manière que cela a été montré pour la division d'un Binôme cube. C'est pourquoi on prend les carrés des R.c.[2 *piu di meno* 11] et R.c.[2 *meno di meno* 11] qui sont R.c.[*meno* 117 *piu di meno* 44] et R.c.[*meno* 117 *meno di meno* 44] et puis on les multiplie l'une par l'autre[84]. Cela fait 5 lequel étant *piu* doit être changé de nature et indiqué *meno* de sorte que **le conjugué sera R .c.[*meno* 117 *piu di meno* 44] + R.c.[*meno* 117 *meno di meno* 44] *meno* 5** qui multiplié par R.c.[2 *piu di meno* 11] + R.c.[2 *meno di meno* 11] donne 4 avec lequel la division de 12 donne 3 et ceci multiplié par ledit conjugué fait R.c.[*meno* 3159 *piu di meno* 1188] + R.c.[*meno* 3159 *meno di meno* 1188] – 15 et ceci est le résultat de la division. Pour faire la division sans faire la multiplication, on ajoute les cubes des deux R.c.[du binôme diviseur qui sont 2 *piu di meno* 11 et 2 *meno di meno* 11 qui fait 4 parce que le *piu di meno* est égal au *meno di meno*. De plus, comme n'est pas intervenu que dans les R.c.[un premier nombre soit *meno*, il m'a paru utile de montrer comment ils peuvent intervenir. Il est évident, par les règles données, que la racine R.c.[2 *piu di meno* 11] est 2 *piu di meno* 1, son carré est 3 *piu di meno* 4 (comme cela a été démontré dans les multiplications) c'est pourquoi il convient que 3 *piu di meno* 4 soit R.c.[*meno* 117 *piu di meno* 44] car R.c.[*meno* 117 *piu di meno* 44] est le carré de R.c.[2 *piu di meno* 11]. Alors 3 *piu di meno* 4 mis au cube comme cela a été rapidement enseigné. C'est à dire : 3 au cube fait 27 et puis on multiplie 3 par 16, carré de 4, cela fait 48 et ceci se triple faisant 144 et c'est *meno*, qui retiré de 27 il reste *meno* 117 pour une partie. Pour trouver l'autre, 117 au carré donne 13 689 dont on retranche 15 625 le cube de 25, somme des carrés de 3 et 4. Il reste 1 936, dont la racine carrée est 44 et ceci est le *piu di meno* de l'autre partie. Ainsi tout le cube sera *meno* 117 *piu di meno* 44. Cependant voulant cuber par la méthode ordinaire, nous multiplierons d'abord 3 *piu di meno* 4 par 3 *piu di meno* 4 en multipliant 3 par 3 qui fait 9 et *piu di meno* 4 par *piu di meno* 4 qui fait *meno* 16 et joint à 9 donne *meno* 7. Puis en multipliant 3 par *piu di meno* 4 qui fait *piu di meno* 12 et pour l'autre donne de manière identique *piu di meno* 12 qui ajoutés ensemble donnent *piu di meno* 24 et ceci

3 *piu di meno* 4
3 *piu di meno* 4

9 *meno* 16 *piu di meno* 12 *piu di meno* 12

meno 7 *piu di meno* 24
3 *piu di meno* 4

meno 21 *meno* 96 *piu di meno* 72 *meno di meno* 28

meno 117 *piu di meno* 44

ajouté à *meno* 7 fait *meno* 7 *piu di meno* 24. Ceci doit être maintenant multiplié par 3 *piu di meno* 4 et en multipliant 3 par *meno* 7 cela donne *meno* 21. Ensuite *piu di meno* 4 avec *piu di meno* 24 cela fait *meno* 96 qui ajouté à *meno* 21 fait *meno* 117. Puis en multipliant *piu di meno* 24 par 3 cela fait *piu di meno* 72 et *piu di meno* 4 par *meno* 7 fait *meno di meno* 28. Étant ôté de *piu di meno* 72, il reste *piu di meno* 44 qui ajouté à *meno* 117 donne *meno* 117 *piu di meno* 44. Ceci est le cube de 3 *piu di meno* 4.

Les **équations du troisième degré**, ce sont elles qui ont motivé les travaux de Bombelli, ce sont elles qui lui font imaginer les nombres complexes et vers elles que tendent tous ses calculs avec ses *piu di meno* et *meno di meno*.

Le second[85] dit : résous $1\overset{3}{\cup}$ égal à $32\overset{1}{\cup}$ *p.* 24. Ceci peut se résoudre par la règle du *piu di meno*[86] que j'ai démontrée et la chose[87] vaudra *R.c.*[12 *piu di menoR.q.*$1069\frac{17}{27}$] *p. R.c.*[12 *meno di meno*

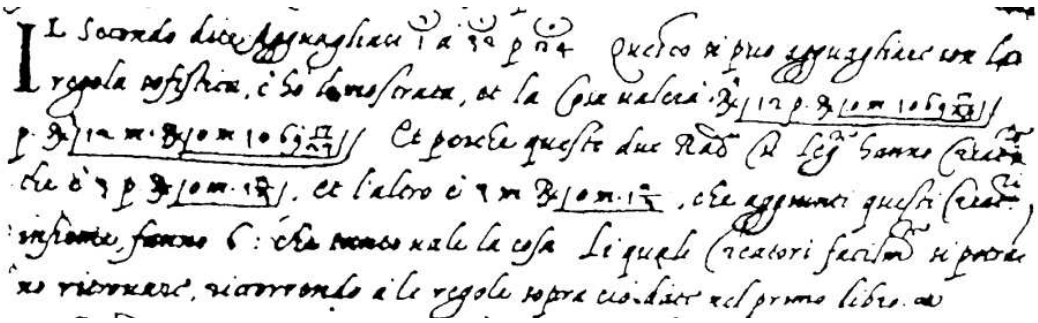
[82] *L'Algebra* (Rossi), Libro primo, page 187 (Feltrinelli, page 145).

[83] En fait 2 + 11*i* est le cube de 2 + *i* et par conséquent 2 – 11*i* le cube de 2 – *i*. On a donc R.c.[2 *piu di meno* 11] + R.c.[2 *meno di meno* 11] = 4 et il s'agit d'une division par 4. Les deux autres complexes conjugués dont 2 + 11*i* est le cube sont omis.

[84] $117^2 + 44^2 = 15625$ et $\sqrt[3]{15625} = 25$ puis $\sqrt{25} = 5$.

[85] *L'Algebra* (Rossi), Libro secondo, page 349 (Feltrinelli, page 266). Équation $x^3 = 32x + 24$.

*R.q.*1069 $\frac{17}{27}$] et parce que les deux *R.c.* conjuguées ont pour valeur[88] 3 *plus de moins R.q.*1$\frac{2}{3}$ et 3 *moins de moins R.q.*1$\frac{2}{3}$ qui, ajoutées ensemble, font 6. Par conséquent la chose vaut 6. Ces racines pourront facilement se retrouver en recourant aux règles données ci-dessus dans le livre premier.


IL Secondo dice agguagliaci 1 a 15 p 4 Questo si puo agguagliare con la regola sofistica, e s'ha l'operatione, et la cosa valerà R.c.[12 p. R.q.[0 m. 1069 17/27]] p. R.c.[12 m. R.q.[0 m. 1069 17/27]] Et perche queste due R.c. li suoi Creatori che è 3 p R.q.[0 m. 1 2/3], et l'altro è 3 m R.q.[0 m. 1 2/3], che aggiunti questi Creatori insieme, fanno 6: che tanto vale la cosa Li quali Creatori facilmente si poteranno ritrovare, ricorrendo a le regole sopra ciò date nel primo libro.

Pour résoudre une équation dans un tel cas on peut encore procéder de cette manière. Ayant[89] $1\overset{3}{\smile}$ égal à $15\overset{1}{\smile}$ *p.* 4, on prend le tiers des *Tanti* (le tiers du coefficient de *x*) qui est 5, cubé cela donne 125. Et ceci se retire de la moitié de la constante qui est 4, il reste *m.* 121 (lequel s'appellera *piu di meno*) duquel on prend la R.q. qui sera *piu di meno* 11. Ajouté à la moitié de la constante cela donne 2 *piu di meno* 11 dont on prend la racine cubique. Ajouté à son conjugué cela donne 2 *piu di meno* 1 et 2 *meno di meno* 1 qui joints ensemble font 4 et 4 est la valeur de l'inconnue. Et pour beaucoup cette chose paraîtra extravagante parce qu'à moi-même cette opinion me paraissait il n'y à pas si longtemps plutôt sophistiquée que vraie. Néanmoins je cherchais tellement que je trouvais la démonstration qui est indiquée ci-dessous. De sorte que celle-ci peut encore se démontrer géométriquement (*in linea*) et que même elle s'utilise sans aucune difficulté dans les opérations. Et assez souvent on trouve la valeur de l'inconnue en nombre (comme on l'a trouvé dans cet exemple).

$1\overset{3}{\smile}$ égal à $15\overset{1}{\smile}$ *p.* $\underline{4}$

5 2
$\underline{5}$ $\underline{2}$
25 4
$\underline{5}$ $\underline{125}$
125 R.q. *piu di meno* 121

2	2
on ajoute R.q. *piu di meno* 121	on retranche R.q. *piu di meno* 121
R.c. [2 R.q. *piu di meno* 121]	R.c. [2 R.q. *meno di meno* 121]
Racine 2 *piu di meno* 1	2 *meno di meno* 1

Ajoutés ils font 4 qui est la valeur de l'inconnue.

Démonstration[90] des R.c. Liées avec *piu di meno* et *meno di meno*

On a R.c.[4 *piu di meno* 11] *piu* R.c.[4 *meno di meno* 11]. Pour trouver sa représentation géométrique, on ajoute 16, le carré du 4, avec 11, le carré de R.q., cela fait 27. De cela on prend la racine cubique qui est 3 et, suivant la règle, on multiplie par 3 qui fait 9 qu'on met de côté. Puis par la règle on multiplie le 4 par 2 qui fait 8. Ces deux R.q. sont nées de la résolution de l'égalisation de $1\overset{3}{\smile}$ à $9\overset{1}{\smile}$ *p.* 8, c'est pourquoi on peut faire géométriquement la démonstration de

---

86 Le manuscrit dit *Regola Sofistica*.

87 R.c. désignant « un nombre dont le cube est … » ici c'est R.c.[12 + $\sqrt{1069\frac{17}{27}}$ *i*] + R.c.[12 – $\sqrt{1069\frac{17}{27}}$ *i*] .

88 Dans le manuscrit Bombelli écrit *Creatore* pour *lato*, côté ou racine, dans l'ouvrage imprimé. Bombelli omet les racines négatives – 3 + $\sqrt{5}$ et – 3 – $\sqrt{5}$.

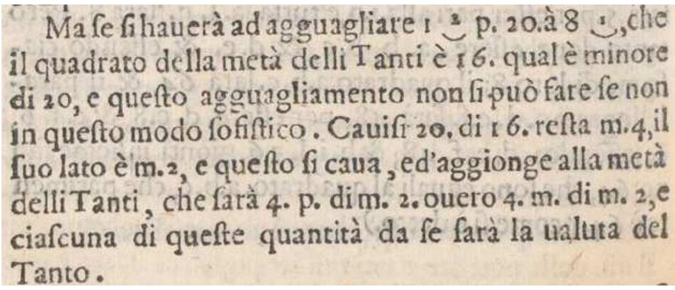
89 *L'Algebra* (Rossi), Libro secondo, page 293 (Feltrinelli, page 225). Équation $x^3 = 15x + 4$.

90 *L'Algebra* (Rossi), Libro secondo, page 294 (Feltrinelli, page 226).

$1\overset{3}{\cup}$ égal à $9\overset{1}{\cup}$ *p.* 8, c’est à dire en surface plane (comme cela a été enseigné dans l’exposition de ce chapitre) et qu’il est trouvé qu’on aura la longueur de l’inconnue qui sera encore la longueur des deux R.c. proposées.

Ayant résolu des équations du troisième degré par l’utilisation de nombres complexes, Bombelli n’a aucune difficulté à **résoudre les équations du second degré** dans le cas d’un, disons-nous aujourd’hui, discriminant négatif.

Quand on a à résoudre des Carrés et Constante égaux aux *Tanti*[91], on prend la moitié du nombre de *Tanti* et on les quarre et de ce qui est produit on retranche la Constante. Du restant, on prend le côté[92] et on l’ajoute ou le retranche de la moitié du nombre de *Tanti* et la somme ou le restant sera la valeur du *Tanto*. Mais, on doit être averti que dans ces cas (bien que rarement) le reste ne sert pas alors que, bien sûr, la somme sert toujours. On doit être aussi averti que lorsqu’on ne pourra retrancher la Constante du carré de la moitié des *Tanti*, une telle résolution ne pourra se faire. Cela ne sera pas un défaut du Cas mais il s’agira d’un problème impossible ou qu’on n’aura pas su mettre en équation. De l’un et de l’autre je vais donner un exemple. D’abord on égalise[93] $1\overset{2}{\cup} + 12$ à $8\overset{1}{\cup}$. On prend la moitié du nombre de *Tanti*, qui est 4, quarrée c’est 16, dont 12 étant retiré, il reste 4 dont le côté est 2. Ceci s’ajoute ou se retranche de 4 (qui en l’ajoutant sera 6 et en le retranchant sera 2) et ainsi, d’une manière et de l’autre donnera la valeur du *Tanto*, cela concerne le premier exemple. Mais, quand on aura à égaler[94] $1\overset{2}{\cup} + 20$ à $8\overset{1}{\cup}$, dont le carré de la moitié du nombre de *Tanti* est 16, lequel est inférieur à 20, cette résolution ne peut se faire sinon de la manière sophistiquée. En retranchant 20 de 16, il reste – 4 dont le côté est[95] *piu di meno* 2 et ceci se retranche et s’ajoute à la moitié du nombre de *Tanti*, cela fera 4 *piu di meno* 2 ou 4 *meno di meno* 2 et chacune de ces quantités[96] sera la valeur du *Tanto*.


Ma ſe ſi hauerà ad agguagliare 1 ² p. 20.à 8 ¹,che il quadrato della metà delli Tanti è 16. qual è minore di 20, e queſto agguagliamento non ſi può fare ſe non in queſto modo ſofiſtico. Cauiſi 20. di 16. reſta m.4, il ſuo lato è m.2, e queſto ſi caua, ed’aggionge alla metà delli Tanti, che ſarà 4. p. di m. 2. ouero 4. m. di m. 2, e ciaſcuna di queſte quantità da ſe ſarà la ualuta del Tanto.

L’apparition de solutions complexes ne trouble aucunement Bombelli. Il franchit pourtant là une frontière dont Cardan avait eu conscience. Le champ numérique ne s’arrête pas aux réels, ce qu’il ne formule bien sûr pas.

Pour la **détermination d’un complexe dont le cube est égal à un complexe donné** la méthode de Bombelli consiste à travailler par encadrement. Certes celle-ci ne fonctionne que pour des situations relativement simples, mais après tout c’était déjà une avancée.

Méthode pour trouver la racine cubique d’expressions contenant de telles racines carrées[97]

Pour trouver la racine cubique de semblables espèces de radicaux, on procèdera de la manière qui suit On ajoute le carré de la Constante au carré de la racine et de cette somme on prend le côté cubique, puis on cherche à tâtons à trouver un nombre et une racine carrée tels que leurs carrés ajoutés ensemble fassent autant que le côté cubique donné précédemment. Ensuite, du cube du nombre étant retranché le triple du produit du nombre par le carré de la racine, ce qui restera sera la valeur de la racine que l’on cherche. Ce serait ainsi si l’on voulait avoir le côté *R.c.* [2 *piu di meno R.q.*121]. On trouve qu’en additionnant le carré de la *R.q.*, qui est 121, avec 4, le carré du 2, cela donne 125, cube dont le côté est 5. **Maintenant, on a besoin de trouver un nombre dont le carré soit inférieur à 5 et dont le cube soit supérieur à 2**. C’est ainsi qu’en posant que c’est 1, la

91 *L’Algebra* (Rossi), Libro secondo, page 262 (Feltrinelli, pages 200-201). Équation $x^2 + a = bx$.

92 La racine carrée.

93 Équation $x^2 + 12 = 8x$.

94 Équation $x^2 + 20 = 8x$.

95 $2i$.

96 Solutions $4 + 2i$ et $4 – 2i$.

97 *L’Algebra* (Rossi),Livre 1, pages 180-181 (Feltrinelli, pages 140-141).

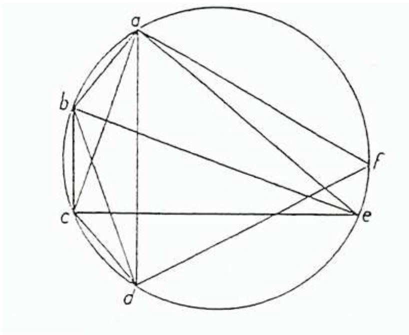
R.q. dont on a besoin sera *R.q.*4, les carrés ajoutés ensemble font 5 et le cube du nombre est 1. La multiplication du nombre par le carré de la *R.q.* donne 4 qui triplé fait 12, ce qui ne peut être retranché du cube du nombre qui est seulement 1. C'est pourquoi 1 n'est pas bon. D'où on prend 2, la *R.q.* sera *R.q.*1. dont on voit que si on ajoute le carré de la Constante et le carré de la *R.q.* cela fait 5. Le cube du nombre est 8, duquel est retranché le triple de la multiplication du nombre par le carré de la *R.q.*, qui est 6. Il reste 2, qui est le nombre qui était accompagné du *piu di meno R.q.*121, c'est pourquoi son côté est 2. *piu di meno* 1. Je dois prévenir, pour R.c. ⌊2 *piu di meno R.q.*121⌋, comme 121 est le carré du nombre dont le côté est 11, on pourra dire que c'est 2 *piu di meno* 11 et on voit que son côté est 2 *piu di meno* 1 où il ne vient pas de *R.q.*, mais un côté constitué de deux nombres (comme l'était 2 *piu di meno* 11).

Ici Bombelli base sa méthode sur le fait que de $a + bi = (x + yi)^3$ on déduit que $x^2 + y^2 = \sqrt[3]{a^2+b^2}$ et $x^3 - 3xy^2 = a$. Il s'agit alors de trouver les nombres x et y répondant à ces contraintes. En particulier on doit avoir $x^2 < \sqrt[3]{a^2+b^2}$ et $x^3 > a$ (x supposé positif). Pour $2 + \sqrt{121}\,i$, on a $2^2 + (\sqrt{121})^2 = 125 = 5^3$. On cherche donc x et y répondant aux conditions citées. Bombelli, après avoir vérifié que $x = 1$ et $x = 3$ ne conviennent pas, en déduit que s'il existe une solution entière, ce ne peut être que 2 … qui convient et conduit à la solution $2 + i$ qui est toujours accompagnée de son conjugué $2 - i$.

Pour ce qui est de la **géométrie**, il ne s'agit pas ici d'une recherche de représentation des nombres complexes. Nulle part Bombelli n'aborde la question laissant toujours en suspend le travail inachevé de Cardan. C'est dans les passages suivants que BombeIli établit une relation entre la résolution de l'équation cubique dans le cas irréductible et la trisection de l'angle.

De[98] sorte que (à mon avis) je tiens pour impossible de trouver une règle générale.. Et je ne me fie pas aux raisons données, quand cette résolution donne des disproportions telles qu'on n'a pas pu retrancher le cube du tiers des *tanti* du carré de la moitié du nombre, comme c'est pour $1\overset{3}{\smile}$ égal à $9\overset{1}{\smile}$ *piu* 9 (cette équation me servira à diviser l'angle en trois parties égales comme cela sera vu en son moment), j'en ai donné la preuve pour plusieurs sortes de transmutations.

Soit[99] le cercle a.b.c.d.e.f., dont le diamètre be. vaut *Rq*.132, dans lequel je voudrais construire un ennéagone de côtés égaux. On demande combien vaudra un de ses côtés. Cette demande, jusqu'à présent je la tiens pour impossible, aussi longtemps que la méthode générale de résolution du Cas du Cube et de la Constante égaux aux *Tanti* ne soit trouvée. Et pour donné que ce Cas se retrouve, ce sera chose difficile pour que dans cette résolution n'intervienne pas quelque Racine Cubique, ce qui serait un indice que cet ennéagone on peut le faire autrement que par la voie instrumentale bien que Oronce (Finé) et Albert Durer ont donné des règles pour le construire, lesquelles sont totalement inexactes. Pour que ce soit une chose claire, je ne m'épuiserai pas à vouloir le démontrer, mais que j'en resterai à la question présente.



On construit dans le dit cercle le triangle équilatéral a.b.f., qui par les règles données fera 12 de côté et sous le côté a.b., on supposera avoir divisé la portion .a.b.c.d. en trois parties égales et avoir tracé les trois segments a.b., b.c. et c.d., les trois seront égaux, chacun d'eux étant ainsi le côté demandé.

98 *L'Algebra* (Rossi), Libro secondo, page 321 (Feltrinelli, page 245).

99 Cette partie n'a pas été publiée dans *L'Algebra* de Rossi. Feltrinelli, Livre 5, pages 639-640-641.

Alors, on pose que chacun des trois segments soit $2\overset{1}{\smile}$. Pour savoir combien sont .b.d. et .a.c., lesquels sont égaux, on multipliera .b.c. par .a.d., ce qui fait $24\overset{1}{\smile}$, .a.b. par c.d., ce qui fait $4\overset{2}{\smile}$ et, ajoutés ensemble, cela fait $4 + 24\overset{1}{\smile}$. C'est autant de faire a.c. par b.d. car ce sont les deux diagonales du quadrilatère a.b.c.d.. Il suffit alors de prendre, parce qu'ils sont égaux, la racine carrée de $4 + 24\overset{1}{\smile}$ qui sera *R.q.*[$4 + 24\overset{1}{\smile}$] et égale à .a.c. ou .b.d..
Pour pouvoir faire une égalisation, on cherchera a.c. par cette autre méthode.

On trace le diamètre b.e. et, le carré de a.b. étant retiré de celui de b.e., il restera $192 – 4\overset{2}{\smile}$ dont la racine carrée est *R.q.*[192 - 4w], qui est autant que a.c. ou c.e. parce qu'ils sont l'un et l'autre égaux et les angles e.a.b. et b.c.e. droits. C'est autant de faire le côté b.c. par a.e. et a.b. par c.e., que b.e. par a.c., qui sont les deux diagonales du quadrilatère a.b.c.e., et que multiplier a.b. par c.e. et b.c. par a.e. Les produits ajoutés ensemble feront :

$$R.q.[3072\overset{2}{\smile} - 64\overset{4}{\smile}]$$

qui divisé par .b.c. donnera :

$$R.q.[16\overset{2}{\smile} - \frac{1}{3}\overset{4}{\smile}]$$

et ceci est égal à :

$$R.q.[4\overset{2}{\smile} + 24\overset{1}{\smile}].$$

En quarrant l'une et l'autre partie cela donnera

$$4\overset{2}{\smile} + 24\overset{1}{\smile} \text{ égal à } 16\overset{2}{\smile} - \frac{1}{3}\overset{4}{\smile}$$

Réduit à $1\overset{4}{\smile}$, le plus petit Carré et le – enlevés on aura

$$1\overset{4}{\smile} + 72\overset{1}{\smile} \text{ égal à } 36\overset{2}{\smile}$$

de sorte que chacune des parties étant divisée par $1\overset{1}{\smile}$ cela donne

$$1\overset{3}{\smile} + 72 \text{ égal à } 36\overset{1}{\smile}$$

De ceci, jusqu'à présent, il n'y a pas de Cas de résolution parce qu'il n'y a pas de proportion entre eux, comme il a été dit au début.

Passons au bilan du travail de Bombelli. Il a inventé les nombres complexes. Il a décrit les règles de calcul afférentes, à savoir multiplication, division, addition, soustraction et donné des pistes de recherche d'un complexe de cube donné. Il a relevé une relation entre un complexe et son conjugué. Il a montré la réalité des nombres complexes par leur efficience dans les résolutions d'équations du troisième et du deuxième degré ainsi que pour donner une justification de l'impossibilité de la trisection de l'angle par la géométrie. Il n'a pas abordé la question de leur représentation géométrique. Par le nombre des cas particuliers traités pour chacun des aspects cités, il a montré son aisance acquise pour leur manipulation. Bien que l'ayant fait pour des cubes, il ne s'est pas intéressé à la recherche de complexes de carré donné. Il a frôlé la notion de module d'un complexe sans en avoir conscience. Ainsi, en langage actuel, il a nécessairement vu 1) que si $a + bi = (x + yi)^3$ alors $a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^3$ et $\sqrt[3]{a^2+b^2} = x^2 + y^2$ soit $x^2 = \sqrt[3]{a^2+b^2} - y^2$ donc $x^2 < \sqrt[3]{a^2+b^2}$; 2) et par identification des parties réelles, que $a = x^3 – 3xy^2$ soit $x^3 = a – 3xy^2$ donc $x^3 > a$ en supposant x positif. Il ne pouvait affirmer ces conditions sans avoir fait ces raisonnements. Il a sans doute procédé par observation sur des cas particuliers, mais il n'en a rien déduit de spécifique en ce qui concerne un complexe et son conjugué. Au risque de me redire, sa tension vers la résolution des équations du troisième degré, l'a empêché de voir tout ce qu'il pouvait tirer des nouvelles entités qu'il venait de créer. Il y a aussi quelque chose à ne pas oublier, Bombelli est décédé à l'âge de 46 ans alors que son ouvrage n'était pas encore publié. Il lui a certainement manqué du temps pour développer sa création, entendre des questions, des oppositions. Bref il n'a pu bénéficier de tout ce qui aurait pu motiver l'approfondissement de son travail.

Gérard HAMON
16/11/15