Les fonctions : comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale.

L'apport d'un logiciel dédié.

Par le groupe Casyopée de l'IREM de Rennes

Les fonctions : comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale.

L'apport d'un logiciel dédié.

« Besides the concept of number, the concept of function is the most important one in mathematics »
David Hilbert

« L'utilisation de logiciels (…) change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation. En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements. »

Programmes de Mathématiques, rentrée 2011

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
http://www.irem.univ-rennes1.fr/

Institut Français de l'Éducation (ex. INRP)
http://ife.ens-lyon.fr/ife

Laboratoire de Didactique André Revuz – Université Paris Diderot- Paris 7
http://www.lar.univ-paris-diderot.fr/

The *ReMath* Project. Making sense of theory on learning mathematics with digital media
http://remath.cti.gr/1

Institut de Recherche de Mathématiques de Rennes
http://irmar.univ-rennes1.fr/

Nous remercions pour son soutien et ses conseils l'Inspection Pédagogique Régionale de Mathématiques de l'Académie de Rennes.

Table des matières

TABLE DES MATIERES **1**

PREFACE **3**

INTRODUCTION **5**

1. ENJEUX ET CHOIX DIDACTIQUES **7**

1.1. La construction des fonctions comme articulation de cadres et de registres : « la Nacelle », un exemple en classe de Terminale scientifique 7
1.2. Le jeu entre cadre geometrique et algebrique: un exemple en classe de Seconde 12
1.3. Les fonctions en classe de Troisieme et au lycee : approche epistemologique et choix didactiques 14

2. NOTRE CADRE DE TRAVAIL **19**

2.1. Les programmes : objectifs notionnels, competences visees, utilisation des logiciels 19
2.2. Le groupe Casyopee 20
2.3. Logiciel : objectifs et evolution 20
2.4. Faire partager notre demarche 31

3. UNE SITUATION DECLINEE DE LA CLASSE DE TROISIEME A LA CLASSE TERMINALE : LE TRIANGLE DE MINH **32**

3.1. Presentation du probleme 32
3.2. Experimentation en classe de troisieme : equation et courbe representative 36
3.3. Experimentation en classe de seconde : optimisation et courbe representative d'une fonction 40
3.4. Experimentation en classe de Premiere : Optimisation et expression d'une fonction 41
3.5. Experimentation en classe de Terminale S : etude avec parametre 43

4. UN EXEMPLE DE PRODUCTION : DISTANCE D'UN POINT A UNE PARABOLE **46**

4.1. Presentation de l'activite (niveau seconde) 46
4.2. Experimentation 48
4.3. Apport du logiciel 51

5. LA GOUTTIERE : UTILISATION DES POSSIBILITES DU CALCUL FORMEL **52**

5.1. Le probleme 52
5.2. Resolution dans l'environnement Casyopee 52
5.3. L'activite en classe 54
5.4. Deroulement de l'experimentation en 1ere S et en 1ere L 55

6. PRODUCTIONS DISPONIBLES SUR LE WEB **58**

6.1. Introduire une notion 60
6.2. Optimiser 63
6.3. Modeliser une situation physique 65
6.4. Etudier une situation geometrique 71

CONCLUSION **76**

POSTFACE : LE POTENTIEL SEMIOTIQUE DE CASYOPEE **78**

ANNEXE : PRESENTATION DE LA VERSION 3 DU LOGICIEL CASYOPEE **84**

Les quatre volets et le Bloc Note 84
La manipulation d'expressions 85
Fonctions 86
Geometrie Dynamique et Calcul Symbolique : le triangle de Minh 90

BIBLIOGRAPHIE **100**

Préface

Par Marie-Pierre Lebaud

Directrice de l'IREM de Rennes

La notion de fonction est un concept universel, présent dans toutes les disciplines scientifiques, mais aussi dans la vie courante. Pour les mathématiciens, c'est un objet usuel qui ne semble pas faire difficulté. Pourtant notre expérience d'enseignants nous prouve quotidiennement qu'il pose problème pour de nombreux élèves.

Plusieurs siècles ont été nécessaires à l'élaboration de ce concept : des tables numériques babyloniennes aux représentations graphiques traduisant des « lois de variation », avant l'apparition d'une notion de dépendance fonctionnelle puis de fonction. Son acquisition par l'élève est donc aussi le fruit d'un long processus d'apprentissage et de nombreux obstacles épistémologiques ou didactiques vont parsemer ce chemin : passage du numérique à l'algébrique, multiplicité des registres nécessaires (numériques, graphiques, algébriques, géométriques,…), confusion entre l'objet et une de ses représentations, passage du terme « en fonction de » au terme « fonction », notion de variable, de dépendance, de correspondance, de variation, problèmes de modélisation…

Faciliter cet apprentissage nécessite d'aider l'élève à changer de registres au travers de plusieurs cadres (géométriques et algébriques par exemple). Cette aide est nécessaire à une appréhension plus globale en permettant une exploration de plusieurs facettes de cette notion. Casyopée est cet artefact qui permet à l'élève de s'affranchir de certaines difficultés pour mieux appréhender et conceptualiser la notion de fonction. Les présentations faites par les membres du groupe dans de nombreux colloques (du Canada au Vietnam, en passant par le lac Léman, splendide sous sa couverture de glace, pour un colloque EMF à Genève) et les échanges qui s'en sont suivis, ont enrichi les scénarios d'usage du logiciel, lui permettant de vivre au mieux au sein de nos classes.

Développé au sein de l'IREM de Rennes, en partenariat avec l'IFÉ, ce logiciel, après avoir fait l'objet de nombreuses publications scientifiques et numériques (les « mini-sites »), est maintenant au centre de cette brochure. Comme dans toute brochure IREM, les situations proposées ont toutes été expérimentées et validées en classe. Le lecteur trouvera une mise en place très pratique des activités proposées mais aussi des réponses à des questions plus didactiques ou pédagogiques, réponses qui reflètent la réflexion des membres du groupe : comment aborder et présenter telle activité ? Comment la faire vivre dans la classe, avec quelle organisation ? Comment la prolonger ? Quelles procédures les élèves vont-ils utiliser ?

Les activités décrites sont également utilisables en dehors d'un environnement technologique et chacun pourra réfléchir sur sa pratique professionnelle à travers les nombreux exemples étudiés et les choix faits et justifiés dans ce travail.

J'ai beaucoup appris en lisant cette brochure. Je suis persuadée que les futurs lecteurs et lectrices y trouveront le même intérêt et souhaiteront expérimenter avec leurs élèves les situations qui y sont proposées.

Introduction

Cette brochure est le résultat du travail du groupe Casyopée de l'Institut de Recherche de l'Enseignement des Mathématiques de Rennes soutenu par l'Institut Français de l'Education.

Une question abordée par le groupe est celle de l'apport du calcul formel aux apprentissages des élèves. En effet, Casyopée veut dire Calcul Symbolique offrant des possibilités à l'élève et à l'enseignant. Nous nous sommes aussi posé la question de la contribution des Technologies d'Information et de Communication à un domaine d'enseignement particulier, mais crucial, celui des fonctions. Ce travail s'est déroulé sur plusieurs années alors qu'en parallèle les programmes officiels en Troisième et au Lycée et par conséquent les pratiques des enseignants mettaient l'accent de façon croissante sur cette notion de fonction.

Au-delà de la réflexion sur ces questions, nous avons travaillé au développement, à l'expérimentation et à la diffusion d'un logiciel formel et géométrique, dédié aux fonctions, qui s'appelle aussi Casyopée, ainsi qu'à la publication de ressources web sous forme de mini-sites pour la classe et la formation.

Cette brochure a comme objectif de présenter une synthèse en un seul document de notre démarche et de nos résultats. Notre réflexion et nos productions ont évoluées au cours des années ; l'expérimentation de situations de classe avec Casyopée, ainsi que les discussions que nous avons eues à partir de ces expérimentations à l'intérieur du groupe et au cours de rencontres avec d'autres collègues ont joué un grand rôle dans cette évolution. La brochure profite directement de ces expérimentations et de ces discussions. Précisons que chaque situation expérimentée et rapportée dans cette brochure fait l'objet d'un mini-site, accessible par le site http://casyopee.eu. Le lecteur y trouvera des compléments : fiche élève, objectifs et pré-requis détaillés, apports du logiciel, analyse du déroulement, travaux d'élèves…

Dans une première partie de la brochure, nous présentons les enjeux liés à la notion de fonction à travers deux exemples de situations. Un exemple en classe de Terminale scientifique présente de façon générale la construction des fonctions comme articulation de cadres et de registres, puis un exemple en classe de Seconde se centre plus particulièrement sur la transition entre cadre géométrique et algébrique. Nous faisons ensuite une présentation des enjeux épistémologiques autour de la notion de fonction de la Troisième à la Terminale, puis nous présentons nos choix didactiques.

La seconde partie précise le cadre où nous situons notre travail, comment nous comprenons les programmes officiels, l'historique du groupe, ainsi que les choix de conception et les évolutions successives du logiciel. Nous terminons cette partie en spécifiant ce qui nous semble important concernant l'activité des élèves sur les fonctions et ce à quoi l'usage du logiciel peut contribuer.

La troisième partie vise à faire partager notre démarche en s'appuyant sur l'exploitation d'une même situation expérimentée en classe, de la Troisième à la Terminale, en adaptant les objectifs et les choix.

Les trois parties suivantes sont consacrées à l'étude détaillée de deux exemples et à une présentation de nos productions disponibles sur le web.

Deux post faces apportent un regard extérieur à nos travaux. Maria Alexandra Mariotti professeure à l'université de Sienne (Italie) s'intéresse aux choix de conception du logiciel. L'exposé qu'elle donne de la théorie de la Médiation Sémiotique permet de mieux comprendre le processus par lequel, à partir de la manipulation du logiciel, les élèves accèdent aux significations mathématiques ainsi que le rôle joué par le professeur.

NGUYEN Chi Thanh professeur à l'Université Pédagogique de Hanoï nous informe sur l'enseignement de la notion de fonction au Vietnam et son expérience d'utilisation de Casyopée au lycée et dans la formation des enseignants.

Une présentation de la version 3 du logiciel est donnée en annexe.

1. Enjeux et choix didactiques

De façon à entrer concrètement dans les questions que nous voulons aborder, nous présentons d'abord deux exemples de situations, l'un en terminale scientifique, l'autre en seconde.

Nous élargissons la problématique par une présentation des enjeux épistémologiques autour de la notion de fonction, tels qu'ils s'observent dans le développement historique des Mathématiques notamment en distinguant les aspects « correspondance » et « dépendance », puis nous présentons nos choix didactiques.

1.1. La construction des fonctions comme articulation de cadres et de registres : « la Nacelle », un exemple en classe de Terminale scientifique

Texte élève

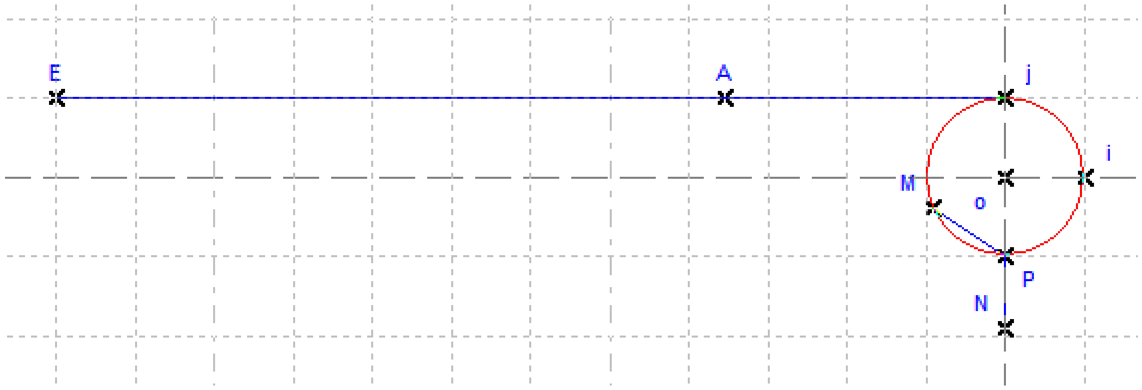
On considère une roue circulaire, de 1m de rayon, mobile autour de son axe horizontal. Une corde de 12m de long est enroulée autour de la roue, de telle façon que si l'on tire la corde par son extrémité libre A, la roue se met à tourner.

Le point E est la position la plus éloignée du point A par rapport au point j. Une autre corde de 2m de long est fixée en un point M de la circonférence, elle passe par un guide fixé en P, proche de la roue, à 1m de l'axe et sur la verticale (jo). La nacelle est accrochée à l'extrémité N de cette corde de 2m. Lors du lancement, le point A est en j et le point M est en i. On s'intéresse au mouvement du point N.

Le mouvement a été choisi pour qu'une personne placée dans la nacelle ressente différemment le passage au point haut et au point bas quand la roue est animée d'un mouvement uniforme. Il est attendu des élèves qu'ils identifient cette différence et qu'ils l'associent avec des propriétés différentes de la fonction (dérivabilité et non-dérivabilité) modélisant ce mouvement.

L'étude porte sur la différence de comportement de la nacelle entre son passage au point haut et son passage au point bas lorsque la corde est tirée de façon uniforme[1].

Nous distinguons trois cadres. Le premier est celui de l'objet physique qui permet le mieux de se représenter les relations mécaniques dans le montage et de se référer à l'expérience sensible de phénomènes de montée et de descente. En observant le montage, les élèves évoquent au point haut une vitesse qui diminue, s'annule puis « repart ». Au point bas, ils s'expriment de façon moins précise. L'expression qui revient le plus souvent est « il y a un amorti ».

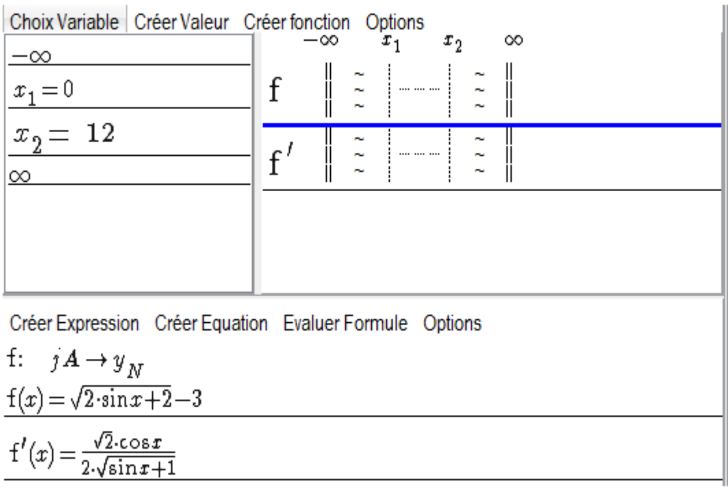


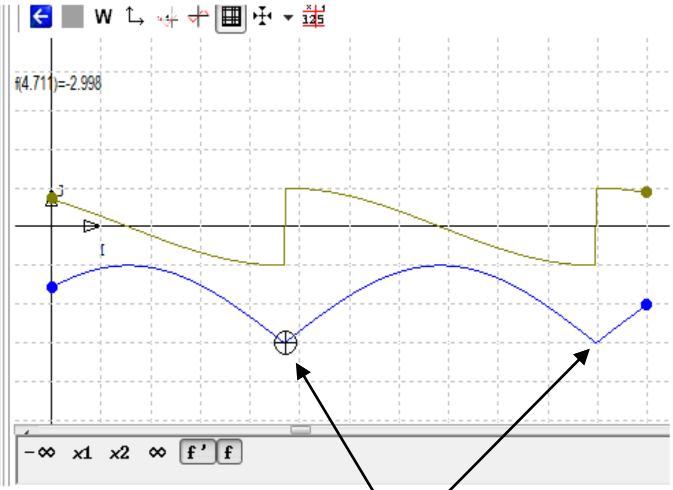
Le second cadre est celui de la géométrie plane et des grandeurs géométriques. Une figure dynamique construite en animation flash ou en géométrie dynamique constitue un premier modèle du montage. Les dépendances mécaniques se traduisent par des relations géométriques. Le point M doit se déplacer sur un cercle de façon que la distance qu'il parcourt soit égale à la longueur sur laquelle le point A a été tiré ; le point N doit être construit de façon que la somme des distances MP et PN soit constante. Cette modélisation, en réduisant l'objet étudié à ses aspects essentiels, et en mettant en évidence ces aspects, donne une nouvelle compréhension de la relation de dépendance. Elle permet aussi de préciser les éléments en dépendance : l'ordonnée du point N apparaît comme l'altitude de la nacelle qu'il s'agit d'étudier. La modélisation ne faisant plus intervenir le temps, mais des relations entre grandeurs géométriques, la variable dont elle dépend doit être une distance rendant compte de la position du point A. Ainsi ce cadre met en jeu plusieurs registres. Les registres de la géométrie (figures, langage géométrique) permettent l'expression des dépendances par le biais d'un programme de construction et la géométrie dynamique permet de prolonger l'expérience sensible de la dépendance. Un autre registre intervient, celui des grandeurs géométriques. Il sert dans la construction à satisfaire la contrainte sur les distances MP et PN : si le choix est par exemple de construire le point N à l'aide d'un cercle centré en P, le rayon devra être exprimé comme différence de la longueur de la corde et la longueur MP[2]. L'expression quantifiée de la dépendance met en jeu aussi des distances. La nécessité de recourir à des calculs sur ces distances donne un caractère pré-algébrique au registre des grandeurs géométriques. Les élèves sont formés depuis le collège à articuler les registres géométriques. En revanche, le registre pré-algébrique des grandeurs a pu intervenir dans certains travaux, mais n'a pas fait l'objet d'une étude systématique. Par exemple, l'usage de ce registre pour une construction comme celle du point N s'est révélée difficile pour beaucoup d'élèves en Terminale.

---

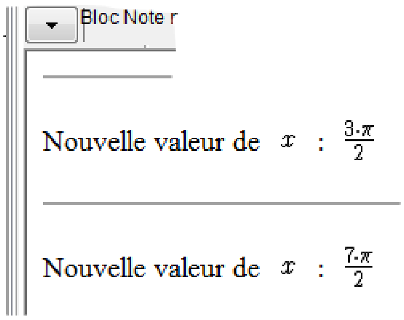
[1]Nous avons expérimenté cette étude dans une classe de Terminale dans le cadre normal des activités de la classe. Cependant, nous avons conscience de ce qu'une situation de ce type ne peut être le quotidien d'une classe de lycée. Nous la donnons comme exemple d'une situation couvrant la totalité des cadres en jeu, de façon à bien montrer comment ceux-ci interviennent dans la compréhension des fonctions comme modèles de dépendances.

[2]Une construction strictement géométrique est possible, mais laborieuse. Elle est de toute façon sous-tendue par une représentation en termes de distance.



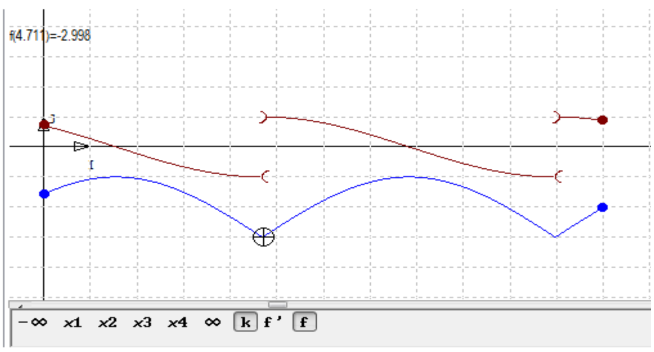


Valeurs où la fonction f n'est pas dérivable



Création de valeurs de x où la fonction f n'est pas dérivable,

puis création d'une nouvelle fonction k.



Nouvelle fonction de domaine $[0\ ;\ \frac{3 \cdot \pi}{2}[\ \bigcup\ ]\frac{3 \cdot \pi}{2}\ ;\ \frac{7 \cdot \pi}{2}[\ \bigcup\ ]\frac{7 \cdot \pi}{2}\ ;\ 12]$

$k(x) = f'(x)$

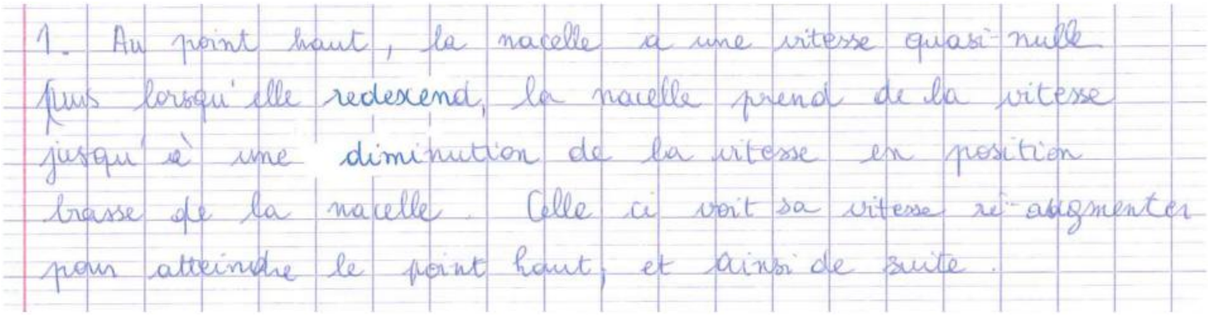
Le troisième cadre est celui des fonctions comme entités algébriques. Il articule les trois registres, tables, graphes et formules. C'est le cadre des fonctions rationnelles, trigonométriques, logarithmiques et exponentielles du secondaire, et plus généralement des fonctions analytiques. Dans l'exemple considéré nous cherchons à ce que les élèves se représentent les propriétés de la fonction modélisant la dépendance dans les différents cadres, notamment le phénomène problématique au point bas, de façon à ce que ces représentations leur offrent un ensemble de significations suffisamment riche : la particularité du passage au point bas est d'abord ressentie dans ses effets « sensibles », puis la modélisation géométrique donne accès à une expression de la dépendance pré-algébrique, puis algébrique. La simple mise en correspondance de valeurs dans une table ne rend pas compte du phénomène. La formule de la fonction n'est pas non plus directement informative pour les élèves. Le graphe de la fonction fait apparaître un point anguleux, situation inhabituelle pour les élèves. Lors d'observations d'élèves confrontés à ce type de fonctions, en dehors d'une problématique de modélisation, beaucoup d'élèves avaient pensé à une aberration du graphisme et qu'une tangente horizontale allait apparaître en « zoomant ». C'est la formule de la dérivée et son graphe qui se révèlent apporter l'information nécessaire. Dans la pratique, en classe, les élèves ont d'abord défini la dérivée sans se soucier des valeurs où elle n'est pas définie. Le professeur leur a fait remarquer les segments verticaux. Les élèves identifient les réels correspondant aux points bas. Ils déterminent les valeurs correspondantes, c'est-à-dire $\frac{3}{2}\pi$, $\frac{7}{2}\pi$, en se référant non à la fonction mais au dispositif lui-même.

Les médiations par le professeur

Lors de la séance en salle informatique le professeur doit tenir compte des « premières impressions » des élèves pour intervenir de façon circonstanciée lorsqu'ils effectuent l'étude avec le logiciel. Des comptes rendus montrent que les notions de mouvement, vitesse, et accélération ne sont pas stabilisées:

A l'altitude du point haut la nacelle ralentit jusqu'à s'arrêter pour redescendre puis accélère progressivement en descendent et remonte après avoir descendu sans ralentir à la même vitesse (mouvement continu qui change brusquement de direction)

1 – lorsque la nacelle passe au "point haut" elle ralentit fortement avant de redescendre, lorsque la nacelle passe au "point bas" la vitesse reste rapide et on a l'impression qu'elle rebondis arrivée en bas.


1. Au point haut, la nacelle a une vitesse quasi nulle puis lorsqu'elle redescend, la nacelle prend de la vitesse jusqu'à une diminution de la vitesse en position basse de la nacelle. Celle ci voit sa vitesse ré-augmenter pour atteindre le point haut, et ainsi de suite.

Le mouvement est considéré par les élèves comme continu avec un arrêt au point haut et un changement brusque de direction en bas. Même s'ils ont étudié, dans le cas d'un mouvement rectiligne, dont l'équation horaire est connue, le lien entre la vitesse instantanée et le nombre dérivé, ils ne prêtent pas attention à l'allure de la courbe de la fonction f ' correspondant aux points bas (segments verticaux). Le rôle du professeur est alors de les questionner sur ces « aberrations graphiques » et à partir de leurs interprétations les aider à la compréhension mathématique de ces points singuliers (la fonction n'est pas dérivable en ces points). Lors de la synthèse en classe entière le professeur revient sur l'interprétation des segments verticaux, affiche la courbe de la fonction dérivée en excluant les points où elle n'est pas définie et peut évoquer la notion de dérivé à droite, respectivement à gauche, à partir d'une lecture graphique.

Lors des expérimentations nous avons constaté que les élèves ont ignoré l'avertissement affiché par Maxima (noyau du calcul formel du logiciel) sur la non existence possible de la dérivée en certaines valeurs et n'ont pas été surpris par les segments verticaux apparus sur la représentation graphique de la fonction dérivée (sur les calculatrices de tels segments peuvent aussi exister). Dans un premier temps le professeur propose de calculer ces valeurs singulières, les élèves les déterminent soit en tournant la roue (dispositif physique mis à leur disposition) soit en analysant le mouvement dans la fenêtre de géométrie dynamique. Ils ne cherchent pas des valeurs approchées mais des valeurs exactes exprimées en fonction de π ou de fraction de tour. Dans un deuxième temps le professeur propose de définir une fonction de même expression algébrique que la dérivée mais dont le domaine de définition ne contient plus les valeurs « interdites » déterminées par les élèves. Le logiciel n'affiche plus d'avertissement et les segments verticaux n'apparaissent plus. Dans un troisième temps le professeur attire l'attention des élèves sur l'expression algébrique. Ces derniers réinvestissent leurs connaissances et font le lien entre l'expression algébrique de la dérivée et les conditions concernant la dérivabilité de « $\sqrt{u}$ » étudiée en cours. Un des points forts du logiciel est donc de permettre à l'élève de faire le lien entre la lecture d'une expression algébrique et ses connaissances mathématiques à condition que le professeur ait mis en évidence l'existence de valeurs singulières qui demandent une étude approfondie.

L'interprétation physique du changement brutal de direction est une question riche mais difficile qui peut être abordée en collaboration avec les professeurs de sciences physiques.
Il faut aussi ajouter les conditions de l'expérience: existence de frottement, impossibilité de réaliser physiquement ce qui apparaît dans la modélisation (il existe un décalage pour pouvoir faire passer la corde dans le guide) ; une modélisation est une interprétation qui ne traduit pas toujours de façon complète la réalité physique.

1.2. Le jeu entre cadre géométrique et algébrique: un exemple en classe de Seconde

L'exemple précédent illustre pour les fonctions comment des passages dans différents cadres (ou jeu de cadres) peuvent aider à créer des significations riches des fonctions. Nous allons présenter plus loin les jeux de cadres. Disons seulement ici que pour Douady (1986) :

« … le mot « cadre » est à prendre au sens usuel qu'il a quand on parle de cadre algébrique, cadre arithmétique, cadre géométrique... Les jeux de cadres sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves. »

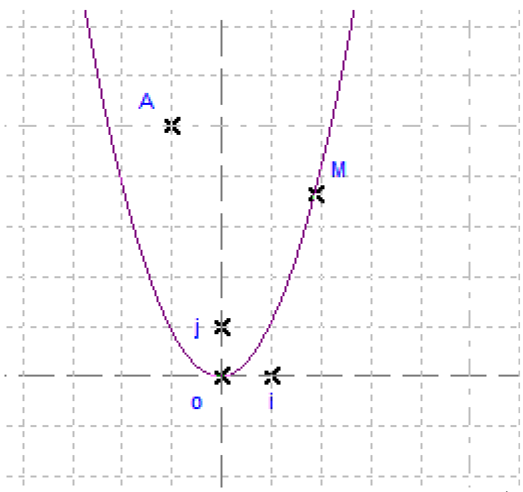
Pour Douady (1986), ils sont source de déséquilibres et la rééquilibration participe à l'apprentissage. Nous voulons illustrer ici par un exemple de situation expérimentée en classe de Seconde le jeu entre cadre géométrique et algébrique dans le cadre des fonctions. Il s'agit d'étudier la distance minimale d'un point fixe à une parabole.

Texte élève

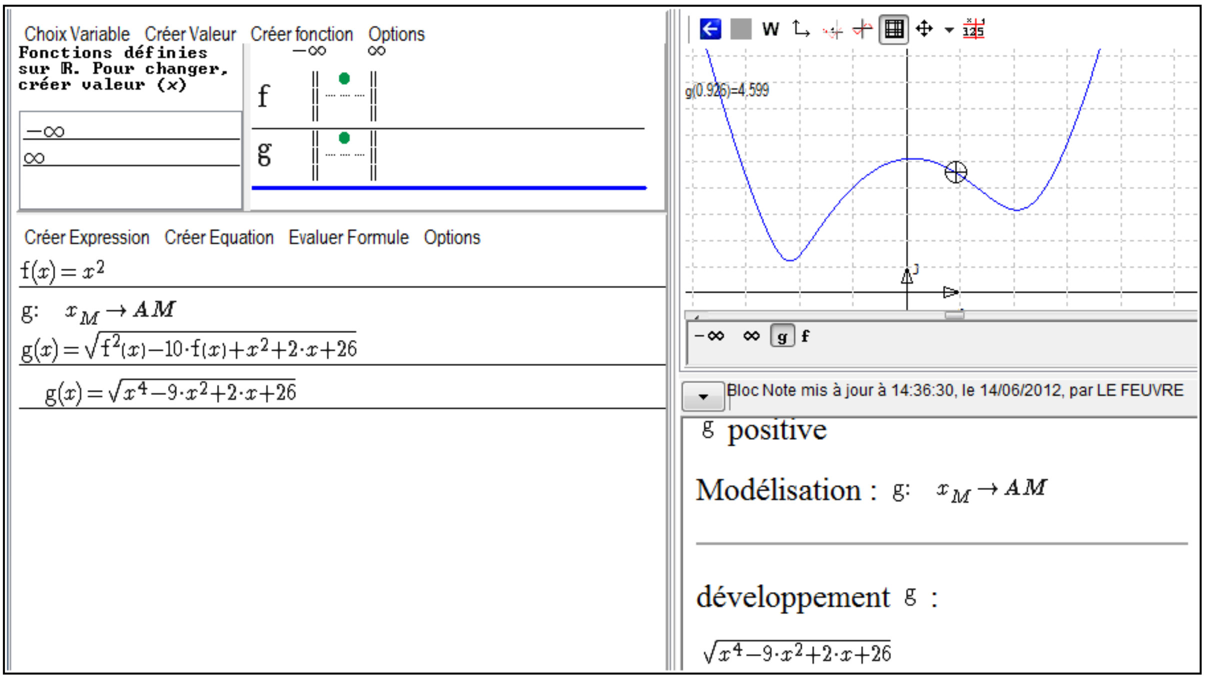
Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On considère la courbe (C_f) de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et le point A (-1;5). M est un point de la courbe (C_f) .

Le but est de déterminer une position de M la plus proche du point A.

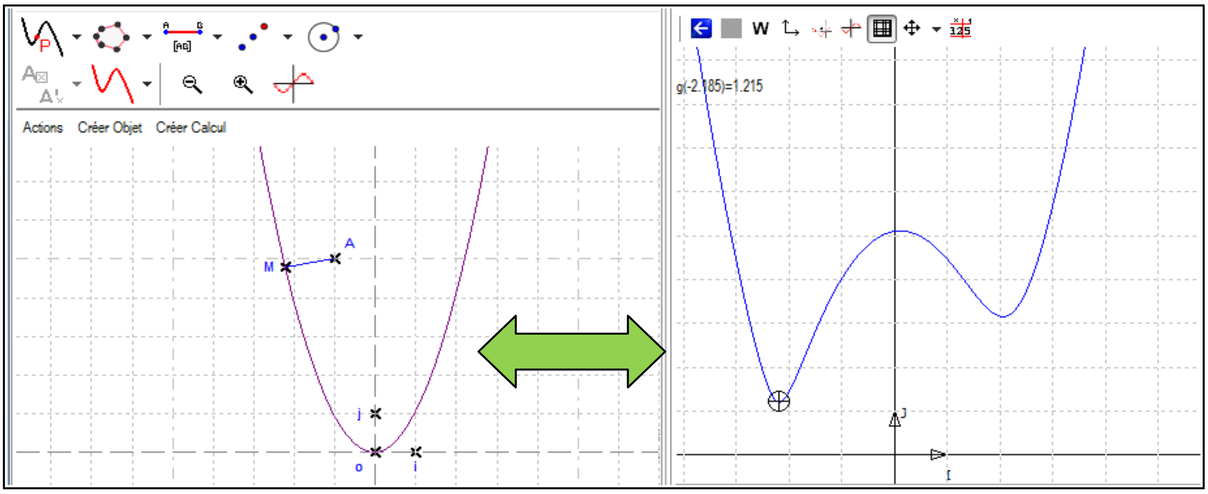
Construction dans la fenêtre de géométrie dynamique



Fenêtre Algèbre



Interaction entre la fenêtre de géométrie dynamique et la fenêtre graphique



Se plaçant au premier trimestre de Seconde, la situation n'a pas comme ambition d'amener les élèves jusqu'à une étude algébrique complète. Elle vise simplement à faire prendre conscience des variations de la grandeur distance d'un point à une courbe, de la possibilité de modéliser ces variations par une fonction dans le cadre algébrique, et de l'apport de cette modélisation vers la résolution du problème. Nous nous appuyons sur une expérimentation de cette situation en classe dont nous développerons plus loin le contexte. Dans le cadre géométrique, une construction en géométrie dynamique amène les notions de courbe comme objet géométrique et de point variable ou « libre » sur cet objet. Une exploration uniquement perceptive se révèle vite limitée : les élèves pensent le plus souvent que l'horizontale, et dans certains cas la verticale, est la direction dans laquelle le minimum va être atteint. L'observation des valeurs de la distance AM quand le point M est tiré, va permettre de quantifier l'observation et de mettre en doute cette évidence perceptive.

Le professeur propose alors d'exprimer cette distance variable sous forme d'une fonction. Les élèves sont effet déjà initiés à la lecture graphique de propriétés sur le graphe de fonctions définies par des formules. La question est alors d'identifier une mesure jouant le rôle de variable dans la fonction, en étant représentatif de la position du point M sur la courbe. Cette question est difficile pour les élèves. Certains disent que ce n'est pas possible car un point dépend de deux coordonnées. Ces élèves ne voient pas que la contrainte d'appartenance d'un point à la courbe limite à un ses degrés de liberté. Devant choisir une des coordonnées, la majorité des élèves choisit l'ordonnée. En effet, la partie de la courbe où se situe le point réalisant la distance minimum est presque verticale, et une variation de l'ordonnée déplace le point M de façon beaucoup plus visible qu'une variation de l'abscisse. Certains élèves objectent à juste titre qu'à une valeur de l'ordonnée correspondent deux positions du point M, ce qui emporte la décision pour l'abscisse.

La formule obtenue pour la fonction à l'aide du logiciel est la racine carrée d'un polynôme du quatrième degré, que les élèves trouvent « monstrueuse ». La représentation graphique n'est pas non plus familière, mais pour les élèves la lecture graphique des variations y est plus aisée que dans le cadre géométrique. « Ça nous aide » déclarent-ils.

Nous pensons avoir montré les déséquilibres et rééquilibrations dans ce passage entre cadre géométrique et algébrique. Les élèves perçoivent qu'une distance varie en fonction de la position d'un point, mais le passage au cadre algébrique impose une contrainte nouvelle, source de déséquilibre, l'identification d'une mesure représentative de cette position. Le graphe de la fonction obtenue permet une rééquilibration en réconciliant pour les élèves, la lecture de variations dans le cadre géométrique, nouvelle pour eux, avec la lecture sur le graphe, plus familière.

D'autres situations, expérimentées en Première S, ont confirmé ce déséquilibre, Voici dans quelle circonstance ceci a été observé : il s'agissait de créer une fonction permettant d'étudier les variations d'une somme de distances MH+MA+MB, H, A et B étant des points fixes et M un point libre sur un segment.

La procédure avec Casyopée consiste :

- à créer un calcul géométrique de valeur MH+MA+MB ;
- à créer un calcul susceptible de servir de variable de fonction, donc dépendant de façon univoque de la position de M sur le segment (par exemple ici la distance MH ou l'angle ($\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MH}$)).
- (Les étapes 1 et 2 peuvent être interverties)
- à demander à Casyopée l'expression d'une fonction dont la valeur est le calcul créé en 1 et la variable, le calcul créé en 2.

Nous avons observé que de nombreux élèves entrent à l'étape 1 une écriture « *f(x)* = MH+MA+MB » qui n'a pas de sens pour Casyopée et ne comprennent pas ce qu'il faut faire à l'étape 2. Ceci révèle que pour ces élèves la notation « f(x)= formule» indique seulement la valeur prise par la fonction sans qu'ils aient conscience de la signification de la notation fonctionnelle f(x). Quelque chose varie mais les élèves ne voient pas en fonction de quoi.

Ceci a déjà été observé par Thompson (1994) : des élèves devant exprimer la somme des n premiers carrés persistent à écrire $f(x) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. La procédure avec Casyopée met l'accent sur la désignation explicite d'une grandeur tenant le rôle d'une variable.

1.3. Les fonctions en classe de Troisième et au lycée : approche épistémologique et choix didactiques

Nous présenterons par la suite le programme officiel sur les fonctions. Les fonctions sont considérées au collège comme au lycée. Cependant notre expérience nous fait penser qu'il y a une véritable rupture pour les élèves entre la notion de fonction d'une part telle qu'elle est abordée dans les premières années de collège et d'autre part à partir de la Troisième. Nous situons deux aspects des fonctions qui caractérisent selon nous cette rupture, en les référant à une étude épistémologique et historique. Ensuite, nous mettons en relation ces deux aspects avec les apprentissages au collège et au lycée.

1.3.1 Correspondance et dépendance : approche épistémologique et historique

Nous distinguons deux aspects des fonctions :

1. L’aspect « correspondance ». Deux quantités variables sont associées dans une correspondance univoque : une valeur de la première est associée à une valeur unique de la seconde, mais l’association ne présuppose pas l’expression de ce lien. Même dans le cas où cette expression existe, l’aspect « correspondance » renvoie à une relation isolée entre une valeur de la première quantité et une valeur de la seconde comme le montre l’exemple suivant.

Soit f la fonction définie sur l’ensemble des numéros INSEE, qui à un numéro associe le revenu imposable du ménage auquel appartient l’individu titulaire de ce numéro.

f est définie par un lien verbal, mais ce lien verbal est très peu informatif quant aux valeurs prises par la fonction pour différentes valeurs du numéro. Pour connaître l’image d’un numéro donné, il est nécessaire de se référer à des tables existantes pour d’abord retrouver l’individu titulaire, puis le ménage dans lequel il fait sa déclaration, puis le revenu imposable de ce ménage. Nous considérons que c’est l’aspect « correspondance » qui domine ici.

2. L’aspect « dépendance ». Il est lié à l’expérience sensorielle : quand on agit sur une première quantité, une seconde est modifiée. L’aspect « dépendance » suppose que les deux quantités variables soient liées dans un système observable, par exemple les quantités peuvent être des grandeurs qui interviennent dans un système physique. Un lien exprimé dans un langage peut aussi servir à « sentir » la dépendance, mais cela dépend de l’expérience et des connaissances du sujet. Par exemple une expression algébrique comme celle qui définit la fonction $n \to 2^n$ peut être comprise comme un cas de croissance exponentielle (dépendance) pour certains ou comme une simple correspondance entre nombres pour d’autres (1 ->1, 2->4, etc.)

Les liens exprimés dans un langage, naturel ou formalisé sont des *représentations* des fonctions, une notion que nous préciserons en 1.3.2. D’autres représentations plus figuratives existent. Une table mettant en regard les valeurs associées des deux quantités matérialise une « correspondance ». Si les valeurs de la première quantité sont présentées d’une façon qui en permet une lecture dynamique (par exemple des entiers successifs) une table peut aussi servir à voir la fonction comme une « dépendance ».

Les représentations graphiques de fonctions réelles peuvent aussi être vues sous les deux aspects. En première approche elles sont une autre façon de présenter une table de la fonction, ce qui rejoint l’aspect « correspondance ». Cette autre représentation est par ailleurs plus informative qu’une table quant à la mise en relation des quantités, particulièrement dans le cas d’une fonction continue (sauf peut-être en un nombre limité de points). Elle peut par exemple s’interpréter de façon cinétique, un « mouvement » de l’abscisse provoquant un mouvement de l’ordonnée. Ces nouvelles propriétés donnent un aspect « dépendance » à la fonction représentée.

La genèse historique des fonctions montre une tension entre ces deux aspects. Les mathématiciens Babyloniens ont largement utilisé pour leurs calculs des tables sexagésimales de nombres inverses, de carrés et de racines carrés. Les tables étaient aussi utilisées pour faciliter des calculs dans la vie pratique. Ainsi, même quand il s’agit de dépendances qui pourraient faire l’objet d’une expression et d’un traitement dans un langage, les tables de correspondance restent utiles pour des raisons pratiques. Ceci perdure jusqu’à l’époque moderne, avec l’utilisation de tables ou d’abaques dans les professions. La généralisation d’automates de calcul dans la vie courante peut être vue dans cette perspective, comme par exemple les calculatrices dédiées à la conversion franc-euro lors du changement de monnaie.

Dans l’Antiquité et au Moyen Age, les liens de dépendance entre quantités variables et les fonctions étaient exprimées dans des formes géométriques ou mécaniques, chaque cas concret étant défini par une description verbale. Ceci permettait d'étudier par exemple des mouvements soit de façon qualitative, en donnant une description verbale des variations, soit en considérant certaines valeurs isolées du phénomène (sans arriver à une relation numérique précise), ce qui avait tendance à voiler l'aspect de variation continue

Les graphes apparaissent progressivement à partir du Xème siècle. Le développement du symbolisme algébrique conduit à remplacer les descriptions verbales par des formules. Au dix-septième siècle, ce sont particulièrement dans les travaux de Descartes. Aux dix-huitièmes et dix-neuvièmes siècles, les fonctions étudiées incluent les limites de séries entières, de façon à donner une définition analytique notamment des fonctions trigonométriques. Les mathématiciens éprouvent alors des difficultés à définir avec précision la notion de fonction. L'idée qu'une fonction modélise une dépendance dans un système physique induit plus ou moins intuitivement qu'elle doit être continue et dérivable, sauf peut-être en un nombre « limité » de valeurs. Comme ces notions se formalisent dans la seconde partie du XIXème siècle, il devient clair qu'une définition générale de la notion de fonction doit rompre avec l'idée de dépendance, que celle-ci soit s'exprime par un « procédé » ou de façon analytique. La notion de fonction est alors définie dans le cadre de la « remise à plat » des notions de base avec le langage ensembliste : une fonction d'un ensemble E vers un ensemble F se définit par son graphe c'est à dire une partie du produit cartésien ExF ayant des propriétés particulières. Cette définition exclue toute expression d'un lien ou référence à un système physique et donc relève de l'aspect « correspondance ».

Notons que les fonctions partout continues et partout non dérivables, et les courbes d'aire non nulle qui sont construites comme des contre-exemples pour montrer les limites de la définition analytique sont d'abord considérées comme des « monstres » éloignés de la modélisation de la nature. Aujourd'hui, avec les travaux sur les fractales, elles apparaissent comme des modèles efficaces de données « naturelles » comme par exemple la côte de la Bretagne (Mandelbrot).

Ainsi, l'aspect « dépendance » se construit au cours des siècles et culmine avec la généralisation des représentations graphiques et des expressions analytiques. Le lien verbal décrivant une dépendance physique est déjà plus opérationnel qu'une table pour une appréciation quantitative des propriétés de cette dépendance. L'expression analytique d'un lien verbal lui donne sa pleine puissance grâce aux possibilités offertes par le calcul algébrique puis le calcul différentiel. Les mathématiciens reviennent au début du XXème siècle à l'aspect « correspondance » pour donner une définition ensembliste de la notion de fonction. Ce serait un grave contresens que d'en déduire quelque « supériorité » de cet aspect parce qu'il s'est imposé dans la définition mathématique. Comme beaucoup de constructions de la théorie des ensembles, la définition ensembliste d'une fonction est simplement pour les mathématiciens une façon de ne pas être perpétuellement confrontés à la définition des objets qu'ils manipulent. Réduire les fonctions à cette définition serait vider la notion de son sens.

1.3.2 L'enseignement des fonctions du collège au lycée

Globalement les premières années du collège mettent en valeur les correspondances sous-jacentes aux fonctions, même si le vocabulaire et le formalisme ne sont pas employés. Les élèves savent travailler avec des courbes et des tables, et résoudre des problèmes liés à des correspondances, notamment quand ils mettent en jeu la proportionnalité. Ils sont par ailleurs introduits aux écritures algébriques et à leur traitement, mais dans cette initiation à l'algèbre, le fil directeur est la résolution d'équations plutôt que l'expression de dépendances fonctionnelles.

Par référence à ce qui précède, nous considérons que l'objectif d'un enseignement sur les fonctions en troisième et au lycée est d'introduire les élèves à la puissance du traitement fonctionnel des problèmes dans la tradition des mathématiques du $18^{ème}$ et du $19^{ème}$ siècle. Une notion de fonction plus proche de la définition ensembliste apparaîtra nécessaire seulement plus tard, notamment en algèbre linéaire. L'enjeu en troisième et au lycée est donc double :

- comprendre l'aspect « dépendance »
- s'approprier le formalisme fonctionnel et le faire fonctionner dans la résolution de problèmes.

L'aspect « correspondance » peut être un obstacle à la compréhension de l'aspect « dépendance ». Nous avons observé cette difficulté pour des élèves en début de Seconde lors de la résolution du problème suivant.

Deux véhicules A et B se déplacent sur le même itinéraire dans le même sens à des vitesses uniformes respectivement de 45 et 40 km.h^{-1}. Ils partent à la même heure, mais B a 30 kilomètres d'avance sur A. Au bout de combien de temps A rattrapera-t-il B ?

Nous avions pensé à une résolution « fonctionnelle » qui conduirait à considérer deux fonctions affines f et g modélisant en fonction du temps les distances respectives de A et B par rapport au point de départ de A, puis à résoudre l'équation en t, $f(t)=g(t)$. Cette équation et sa représentation comme intersection de deux demi-droites met en jeu les distances comme des dépendances au temps : f et g représentent l'évolution des véhicules et la solution de l'équation représente le moment de cette évolution où les véhicules se croisent.

Pour nos élèves, à l'issue de la 3ème, cette résolution « fonctionnelle » n'était pas naturelle. Ils connaissaient la relation de proportionnalité et la concevaient comme une correspondance. Ils ont donc résolu ce problème en considérant la différence de vitesse (5km/h) qui permet de parcourir les 30 km de distance relative en 6h. Une table faisant correspondre les distances des véhicules au point de départ de A, pris à des intervalles de temps réguliers, mettait pour eux bien en évidence la distance relative et sa proportionnalité au temps, relation qui n'est pas comprise comme une dépendance.

Ainsi, en Troisième ou en début de Seconde, face à des problèmes qui relèvent généralement de la proportionnalité lorsqu'il y a un lien explicite, ou de la lecture de tables ou de points isolés sur un graphique dans d'autres cas (observation de valeurs dans un phénomène, etc.) les élèves n'éprouvent pas la nécessité d'interpréter la relation sous-jacente comme une dépendance. L'idée de dépendance fonctionnelle reste à construire. L'exemple de la section 0 ci-dessus le montre bien. En particulier les élèves « sentent » la dépendance entre le point sur la courbe et la distance, mais l'expression de cette dépendance comme relation entre grandeurs n'est en rien spontanée.

S'approprier le formalisme fonctionnel et le faire fonctionner dans la résolution de problèmes suppose de construire les fonctions comme entités algébriques. C'est un objectif important, tant pour la compréhension des fonctions que pour poursuivre l'initiation à l'algèbre ; les transformations algébriques conservant l'équivalence prennent en effet sens dans l'étude des propriétés des fonctions ; la résolution de problèmes à l'aide du calcul différentiel et intégral a aussi un double aspect de modélisation de phénomènes physique et de mise en œuvre de techniques algébriques. Néanmoins, manipuler des fonctions comme entités algébriques de façon trop systématique et trop précoce risque d' « écraser » la compréhension de la relation de dépendance. L'enjeu est de comprendre les relations entre ces entités algébriques et des relations de dépendance « sensibles », c'est-à-dire existant dans un domaine où une expérience peut avoir lieu, par exemple un système physique, ou la géométrie. L'exemple de la section 0 ci-dessus montre la richesse de ces relations.

Plus précisément, il s'agit donc pour les élèves de troisième et de lycée, à la fois de comprendre ce qu'est une dépendance fonctionnelle, comment elle existe dans différents « cadres » (Douady 1986) ou « mondes » (Tall 2004), comment elle se modélise dans différents registres (Duval 1996), et les traitements que ces registres permettent. Pour Douady, les jeux de cadres sont des changements de cadres provoqués à l'initiative de l'enseignant, à l'occasion de problèmes convenablement choisis, pour faire avancer les phases de recherche et évoluer les conceptions des élèves. A l'intérieur des cadres, dans l'esprit de travaux de Duval, une notion prend sa dimension mathématique par les différents *registres de représentation* dans lesquels elle s'exprime. La prise de conscience d'une notion s'opère à travers les activités de *conversion* entre les registres dans lesquels elle est représentée. La spécificité de chaque registre apparaît dans les *traitements* qui lui sont propres. Ces traitements eux-mêmes prennent sens parce qu'ils permettent de répondre à des questions qui dépassent le registre propre au traitement et même le cadre dans lequel ce registre s'insère.

2. Notre cadre de travail

2.1. Les programmes : objectifs notionnels, compétences visées, utilisation des logiciels

Le programme énonce les objectifs notionnels relatifs aux fonctions de façon classique : enrichissement progressif du champ des fonctions de référence, travail sur leur propriétés, puis introduction des outils de l'analyse (dérivée, intégrale). Le programme rejoint néanmoins la problématique de modélisation à laquelle nous faisons référence plus haut : « *Un des objectifs de ce programme est de doter les élèves d'outils mathématiques permettant de traiter des problèmes relevant de la modélisation de phénomènes continus ou discrets*» (B.O. 2010), sans toutefois la particulariser aux fonctions.

Les compétences relatives à la démarche scientifique sont bien détaillées et sont une source d'inspiration pour la mise en œuvre de situations de classe sur les fonctions. Elles s'énoncent ainsi (B.O. 2009)

L'objectif de ce programme est de former les élèves à la démarche scientifique sous toutes ses formes pour les rendre capables de :

- *modéliser et s'engager dans une activité de recherche ;*
- *conduire un raisonnement, une démonstration ;*
- *pratiquer une activité expérimentale ou algorithmique ;*
- *faire une analyse critique d'un résultat, d'une démarche ;*
- *pratiquer une lecture active de l'information (critique, traitement), en privilégiant les changements de registre (graphique, numérique, algébrique, géométrique) ;*
- *utiliser les outils logiciels (ordinateur ou calculatrice) adaptés à la résolution d'un problème ;*
- *communiquer à l'écrit et à l'oral.*

Le programme incite par ailleurs à l'utilisation de logiciels (B.O. 2011) :

Utilisation d'outils logiciels

L'utilisation de logiciels, d'outils de visualisation et de simulation, de calcul (formel ou scientifique) et de programmation change profondément la nature de l'enseignement en favorisant une démarche d'investigation.

En particulier, lors de la résolution de problèmes, l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements.

L'utilisation de ces outils intervient selon trois modalités :

par le professeur, en classe, avec un dispositif de visualisation collective ;

par les élèves, sous forme de travaux pratiques de mathématiques ;

dans le cadre du travail personnel des élèves hors de la classe.

Nous développerons ci-dessous notre choix relativement à l'environnement logiciel à utiliser et aux modalités de son utilisation. Des indications du programme, nous retenons les possibilités offertes par les logiciels pour la visualisation et la simulation, un concept proche de la modélisation à laquelle nous faisons référence plus haut. Nous retenons aussi les possibilités offertes par le calcul formel pour que les élèves puissent se concentrer sur le raisonnement, ainsi que les trois modalités d'usage que nous comprenons comme devant s'articuler : un travail à la maison bien cadré par le professeur sur un logiciel librement accessible aux élèves et auquel ils auront été initiés peut venir soit en préparation d'une situation à travailler en classe, soit en « devoir maison » prolongeant une telle situation. La visualisation collective avec un video-projecteur ou, mieux, un tableau numérique interactif (TNI), doit être conçue comme un travail de toute la classe et non comme un outil de démonstration pour le professeur. L'idéal est de travailler en classe ordinaire, un TNI étant utilisé pour les phases collectives, et les élèves disposant de logiciels sur tablettes ou netbooks.

2.2. Le groupe Casyopée

Le groupe Casyopée existe sous des formes diverses à l'IREM de Rennes depuis le début des années 2000. Il a fait suite à un groupe de recherche sur les usages du calcul formel. Ce groupe avait fait plusieurs constats : importance de la notion de fonction, intérêt du calcul formel pour l'apprentissage de cette notion mais absence de logiciel adéquat (Le Feuvre, Meyrier, Vincent, Lagrange 2004). Le groupe s'est donné pour objectif de mener en parallèle réflexion didactique, développement d'un logiciel mieux adapté et expérimentations en classes.

A partir de 2005 le groupe a pris conscience de l'intérêt de considérer les fonctions comme modèle de dépendance et du cadre géométrique pour étudier les dépendances. Une extension du logiciel avec un module de géométrie dynamique a été développée pour cela dans le cadre du projet ReMath[3] (2006-2009) :

Après le projet ReMath, un groupe de diffusion soutenu par l'IFÉ[4] (ex INRP) s'est constitué pour étudier l'extension des usages au sein de la communauté enseignante.

Plusieurs situations exploitant le logiciel Casyopée ont ainsi été mises au point par le groupe, expérimentées et publiées sous forme de mini sites sur le site académique de l'académie de Rennes et accessibles via le site dédié http://casyopee.eu. Puis ces situations ont été à nouveau expérimentées avec différents dispositifs (classe entière avec usage d'un Tableau Numérique Interactif ou en demi-classe en salle informatique) et filmées. A partir des enregistrements effectués, des séquences-vidéos ont été réalisées pour mettre en évidence l'apport du logiciel dans le cadre des nouveaux programmes du lycée dans le domaine des fonctions et du calcul formel. Le public visé par ces vidéos est constitué d'étudiants en master 1 ou 2, d'enseignants en formation continue TICE. Elles peuvent aussi, avec les mini-sites, servir à des enseignants en autoformation. Les vidéos se différencient selon le contenu. Les premières présentent le scénario pédagogique des situations, d'autres présentent la tâche proposée aux élèves, d'autres encore montrent des élèves au travail, enfin certaines vidéos précisent les fonctionnalités du logiciel.

Le travail présenté dans cette brochure a été mené conjointement par les concepteurs initiaux du projet et d'autres professeurs utilisateurs confirmés de TICE variés (TNI , tableurs, Géométrie Dynamique, Calculatrices simples et formelles…) ce qui a permis d'élargir la réflexion et faire évoluer le logiciel tant dans ses fonctionnalités que dans son ergonomie. Il associe aussi un jeune docteur ayant fait sa thèse sur les fonctions avec Casyopée (Minh 2011, 2012a, 2012b).

2.3. Logiciel : objectifs et évolution

2.3.1. Conception

Quatre objectifs principaux ont guidé la conception du logiciel :

1. « Eviter que les élèves se perdent dans des tâches calculatoires ».

En effet, des situations problèmes amènent souvent les élèves à étudier les propriétés de fonctions et leur interprétation graphique. Même s'il reste nécessaire que les élèves acquièrent des compétences en calcul algébrique, dans de nombreux problèmes, des calculs longs et techniques peuvent les empêcher de progresser efficacement dans leurs recherches et la construction de leurs preuves.
Le menu « calcul » (**Figure 4**) est un des outils principaux de calcul formel.

---

[3] ***remath***.*cti.gr/* "The ReMath Project: Representing Mathematics with Digital Media".

[4] IFÉ: Institut Français de l'éducation *www.inrp.fr/*

2. « Elargir le champ des problèmes ».

Le calcul formel permet d'envisager des activités potentiellement plus riches avec des techniques différentes et d'accéder aussi à des résultats plus généraux. Il faut pour cela que l'élève dispose d'un environnement où il puisse facilement agir dans les cadres numérique, graphique et algébrique (**Figure 1**).

3. « Aider les élèves à démontrer ».

Il nous est apparu nécessaire d'introduire dans Casyopée une démarche de preuve exploitant les possibilités offertes par le calcul symbolique. Un des menus du logiciel s'intitule « *Justifier* » : l'élève choisit dans une liste, des propriétés ou théorèmes, des boites de dialogue le guident dans sa démarche, le logiciel pouvant lui suggérer des outils pour sa justification. Il peut aussi émettre des conjectures et les utiliser dans sa démarche de preuve (**Figure 2**).

Toutes les actions sont inscrites dans le « *Bloc Note* ». L'élève peut le modifier, le compléter et l'enregistrer. C'est alors un véritable support de rédaction et d'évaluation par le professeur (**Figure 7**).

4. « Un logiciel "ciblé fonctions" et paramétrable pour une prise en main aisée ».

Nous avons constaté que les logiciels de calcul formel sont utilisables par des professeurs ou des chercheurs plus que par des élèves de lycée. Nous avons conçu le logiciel Casyopée pour des élèves de lycée en tenant compte de leurs connaissances. C'est pourquoi, plutôt que développer un logiciel "généraliste" nécessairement complexe, nous avons préféré nous limiter à l'étude des fonctions. La prise en main est aisée : Casyopée se pilote entièrement par menus ; nous avons jugé en effet qu'un langage de commande demanderait aux élèves un apprentissage syntaxique et interférerait avec le langage mathématique. De plus, les conventions d'écriture sont conformes aux règles et usages dans le secondaire.

Un paramétrage permet d'adapter le logiciel à différents profils d'élève. Le professeur peut tenir compte des connaissances et niveaux dans sa classe ainsi que de ses objectifs : il détermine alors les outils de calcul formel disponibles, les propriétés et les aides utilisables pour établir une preuve (**Figure 3**).

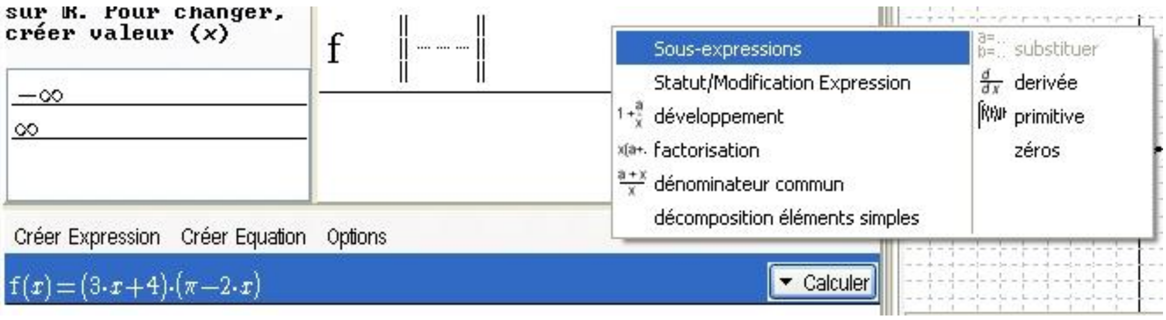


Figure 4 : Menu Calculer

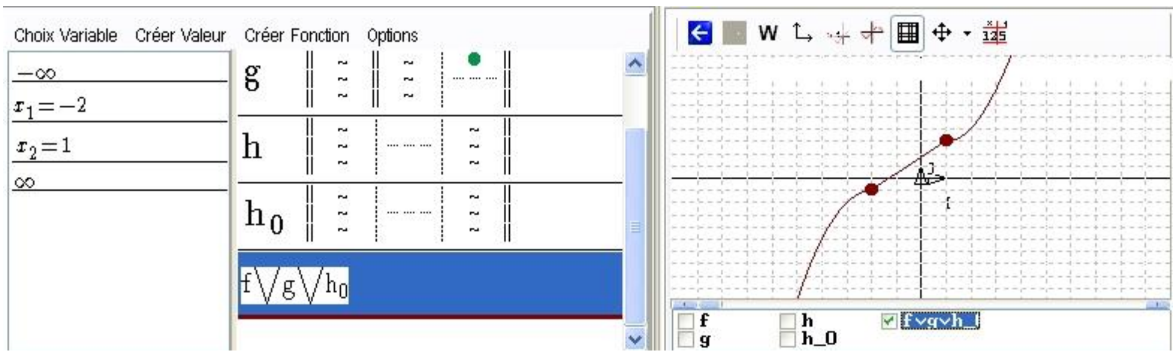


Figure 5 : visualisation d'une fonction définie par morceaux

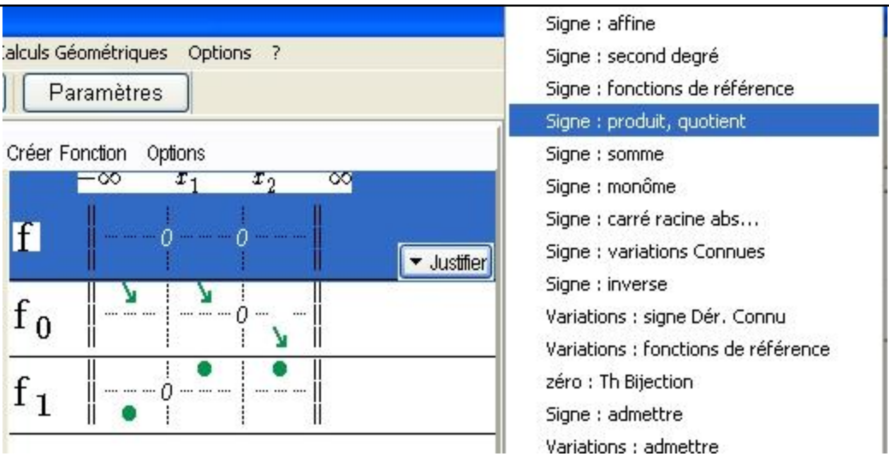


Figure 6 : Menu Justifier / Signe : Produit, quotient

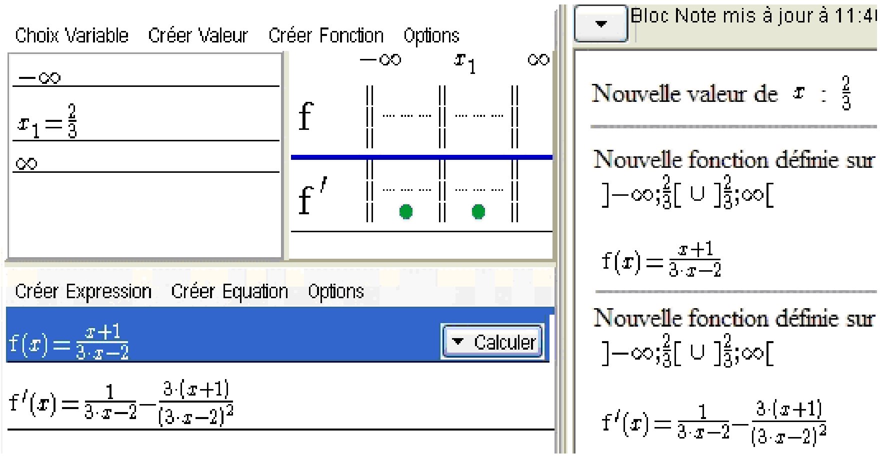


Figure 7 Affichage dans le Bloc-Note

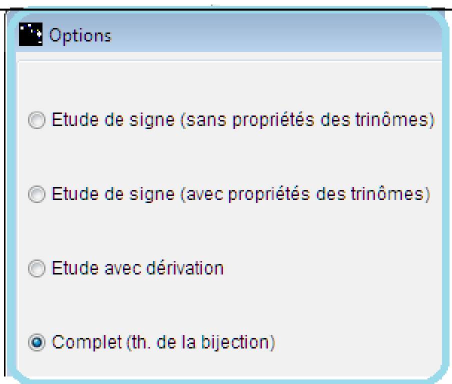
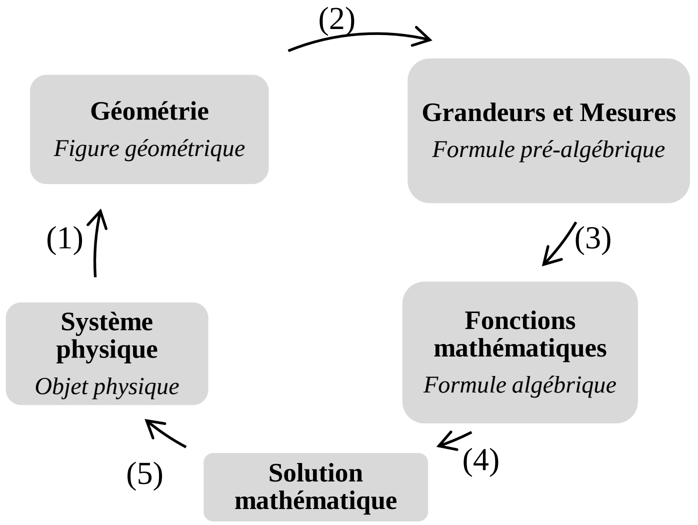


Figure 8 Menu Options

2.3.2. Evolution vers un outil de modélisation fonctionnelle

Le bilan de la période précédant le projet ReMath était que le logiciel était purement algébrique et ne répondait pas vraiment à l'introduction de la notion de fonction. L'idée de considérer **les fonctions comme modèle de dépendance géométrique** est née de ce constat. En fait, dans cette réflexion, les fonctions peuvent être des modèles de dépendances plus générales comme le montre l'exemple de la nacelle développé plus haut (§1.1).). Nous traduisons ceci en disant que le travail sur les fonctions s'inscrit dans un « cycle de modélisation fonctionnelle ».



1. Modéliser le système par une figure géométrique dynamique
2. Créer des calculs géométriques, choisir une variable et créer une formule pré-algébrique exprimant la relation de dépendance
3. Représenter algébriquement la formule pré-algébrique
4. Preuve algébrique
5. Interprétation

Ce cycle permet de considérer des étapes dans un processus de construction d’un modèle mathématique pour étudier un système physique. Nous ajoutons la « Géométrie » pour prendre en compte ce domaine comme première étape de modélisation. Le *Système physique* est le contexte réel étudié. Le passage du *Système physique* à la *Géométrie* est caractérisé par la construction d’une figure dynamique. La *Géométrie* est le domaine où s’effectuent les explorations « enactives » où l’information passe par l’action sur des objets et « iconiques » où l’action est soutenue par des images mentales[5] : les élèves peuvent déplacer des objets, observer la transformation du système à l’aide des TICE, et concevoir dans un domaine mathématique les relations de dépendance entre objets du système physique. Le domaine des *Grandeurs et mesures* est celui où les élèves peuvent utiliser les TICE pour quantifier des explorations et des observations et préciser des conjectures. La construction d’une formule exprimant la relation de dépendance entre grandeurs est une première étape vers une fonction algébrique. Le domaine des *Fonctions mathématiques* est celui où s’opèrent les transformations algébriques et preuves. Finalement, le retour dans le *Système physique* a pour objectif d’interpréter et de vérifier l’adéquation du modèle mathématique.

A titre d’illustration, la **Figure 9** et la **Figure 7** ci-dessous donnent le cycle de modélisation dans les deux situations exposées ci-dessus.

[5] Le grand psychologue Etats-Unien Bruner distingue trois « modes de représentation du savoir » : enactives, iconiques et symboliques (Barth 1985).

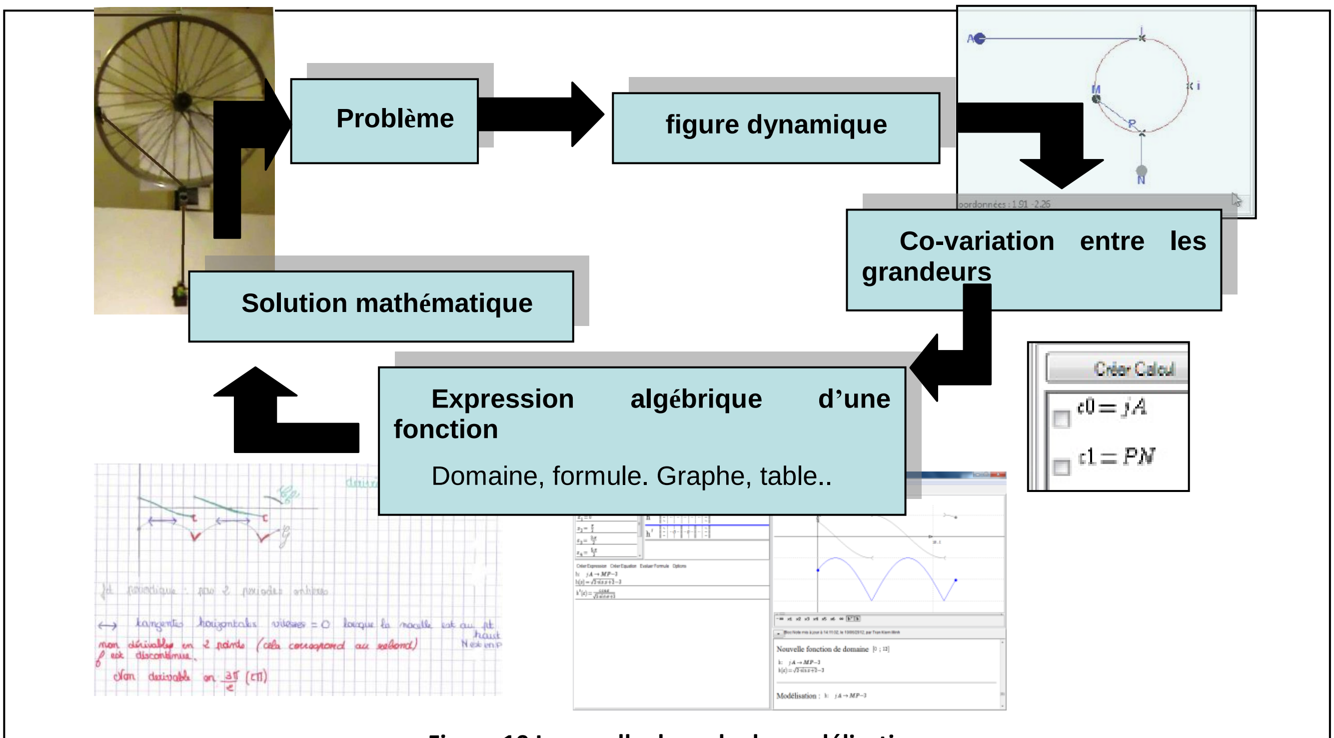


Figure 10 La nacelle: le cycle de modélisation

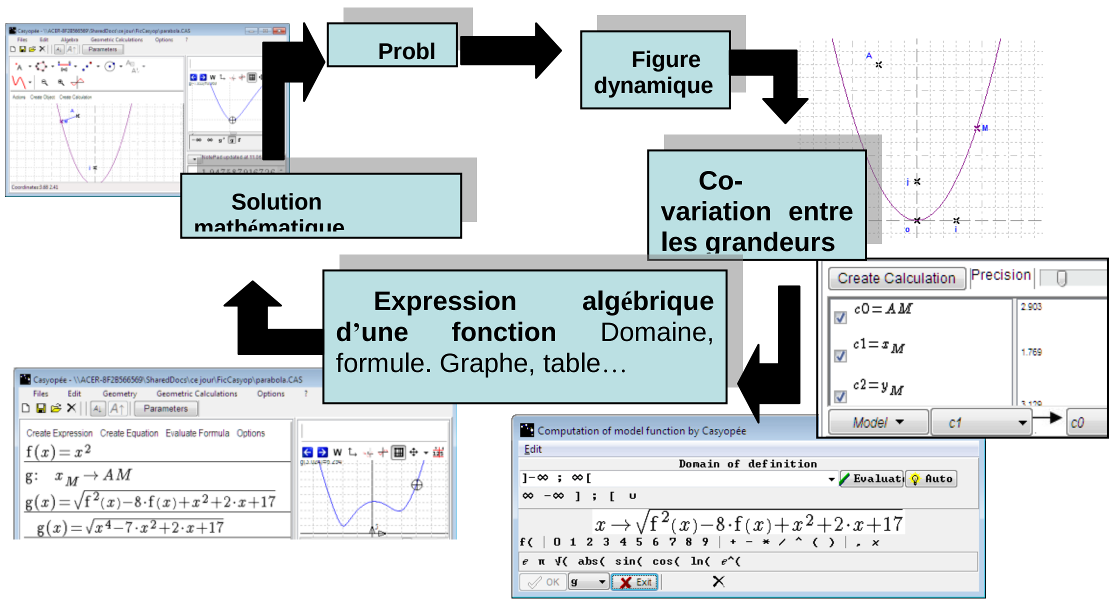


Figure 11 La plus courte distance à une parabole : le cycle de modélisation

2.3.3. Un choix de développement important : l'aide à la modélisation fonctionnelle

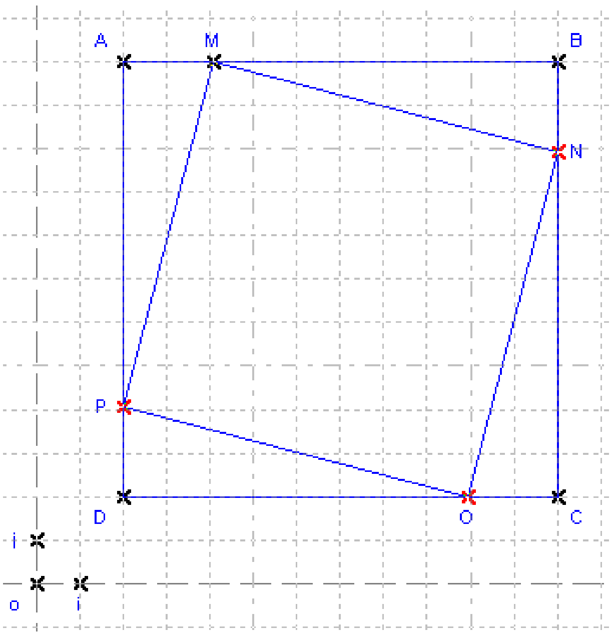
Ce choix se situe après l'expression d'une dépendance entre grandeurs géométriques lors du passage à la fonction algébrique qui modélise cette dépendance, ce que plus haut nous avons caractérisé comme un changement de cadre.

Pour l'expression de la dépendance, les élèves ont la possibilité d'entrer toute formule contenant des distances et des coordonnées (formule « pré-algébrique ») de façon à représenter une grandeur (par exemple une aire) et à explorer une dépendance éventuelle avec des points libres de la figure. Dans les deux exemples ci-dessus, les grandeurs en jeu sont de simples distances. Dans d'autres cas les formules pourront être plus complexes, comme dans l'exemple du triangle développé plus loin, ou de la quadrature de la parabole donné en mini-site. Pour les aires des polygones, des disques et les aires « sous la courbe », les valeurs numériques des formules entrées peuvent être confrontées aux valeurs numériques évaluées directement par le logiciel, ce qui permet aux élèves une validation empirique. Nous parlons de « formules pré-algébriques » car elles mettent en jeu des éléments géométriques plutôt que des littéraux.

Pour « changer de cadre » les élèves ont à choisir la grandeur qui sera la variable et celle qui sera la valeur de la fonction. Dans la plupart des situations, plusieurs choix sont possibles : un exemple est donné plus loin. Nous pensons que ceci est le cœur du travail de modélisation et nous choisissons de faire faire le reste du travail -calcul de l'ensemble de définition et de la formule- par le logiciel afin que les élèves puissent opérer la modélisation de façon autonome, et se concentrer sur le processus plus que sur les aspects calculatoires[6].

Voici comment le calcul est opéré par le logiciel : de façon interne, une définition algébrique de tous les objets est conservée, de manière à ce que le logiciel soit capable par calcul formel d'effectuer les deux étapes de modélisation : calcul de l'ensemble de définition, calcul d'une formule ; une fois que l'utilisateur a choisi une variable, le logiciel vérifie sa dépendance univoque à un paramètre interne représentatif de la position d'un point libre puis tente le calcul de la dépendance inverse ; le logiciel vérifie ensuite que la grandeur choisie pour la valeur de la fonction dépend du même paramètre et seulement de celui-ci puis il calcule la fonction recherchée comme composée des deux dépendances.

Exemple :



L'exemple est celui cas de la situation du carré MNOP inscrit et tournant dans un carré ABCD de côté *a* que l'on peut trouver dans de nombreux manuels de lycée. On considère l'aire du carré tournant en fonction de la position du point M sur le segment [AB]. Lors de la construction dans Casyopée, cette position est repérée par le paramètre interne[7] t_M appartenant à [0 ; 1],

[6] Il est néanmoins possible à l'utilisateur de proposer une formule qui sera alors testée par le logiciel. Ceci permet d'opérer dans certains cas où Casyopée est incapable de trouver une formule.

[7] Ce paramètre est à distinguer des paramètres créés par l'utilisateur (qui peuvent considérés comme analogues aux « curseurs » de GeoGebra, avec des propriétés formelles non présentes dans GeoGebra).

$$\begin{tikzcd}
\text{Paramètre interne } t_M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & \text{Variable } AM \arrow[d, "\psi \circ \varphi^{-1}"] \\
& \text{Valeur } MN^2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\text{Domaine du paramètre} \arrow[r, "\varphi"] & \text{Domaine de la fonction}
\end{tikzcd}$$

on a alors : $\varphi(t_M) = AM = t_M .AB = a.t_M$ et,

$\psi(t_M) = MN^2 = (x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 = (1 - t_M)^2 AB^2 + t_M^2.AB^2 = (1 - 2\, t_M + 2\, t_M^2)a^2$.

Casyopée est capable de mener ces calculs car il connaît les coordonnées de tous les points en fonction des paramètres internes ; l'identificateur de variable x étant choisi, il propose donc la formule $f(x)=\psi \circ \varphi^{-1}(x)$ c'est-à-dire $f(x) = a^2 - 2ax + 2x^2$, le domaine est déduit de $t_M \in [0 ; 1]$, et donne $[0 ; a]$. Si Casyopée ne peut trouver la réciproque de φ, il donne l'information selon laquelle la grandeur considérée ne peut être choisie comme variable de fonction.

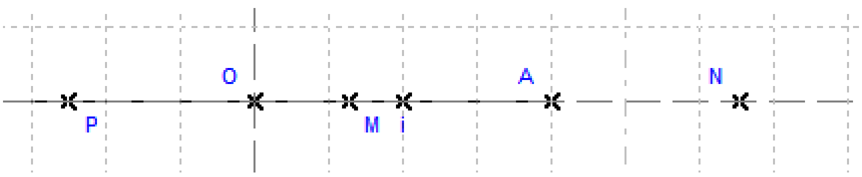
Il peut être utile à l'enseignant d'avoir présent à l'esprit ce fonctionnement de façon à comprendre les spécificités des situations de modélisation pour lesquelles le logiciel peut être une aide : si une grandeur dépend de plusieurs paramètres internes alors le logiciel ne peut créer de fonctions modèles. Par ailleurs, selon la façon de définir le point mobile (sur un segment ou sur une droite) le domaine de définition et l'expression de la fonction modèle peuvent être différents. Nous donnons deux exemples. Le premier est un exemple très simple qui a seulement une valeur illustrative. Le second est inspiré d'une situation proposée pour l'épreuve pratique au baccalauréat expérimentée à partir de 2007.

Exemple 1

Pour expliquer le rôle des fonctions ϕ et ψ, on considère les points fixes O (0 ; 0) et A(2 ; 0).

Le point M est un point libre du segment [OA] ; le point N est un point libre de la demi droite [OA) et le point P est un point libre de la droite (OA).

Dans les trois cas il s'agit de calculer la fonction qui à la distance au point O d'un point libre associe sa distance au point A. Observons dans chaque cas la fonction ϕ et le résultat donné par Casyopée.



Nouvelle fonction de domaine [0 ; 2] f: $OM \to AM$ $f(x)=2-x$	: .t_M -> $\|t_M\| = t_M$ est inversible sur le domaine [0, 2] , car $t_M \geq 0$: t_M -> $\|2-t_M\| = 2-t_M$, car $t_M \leq 2$ f $(x) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = 2-x$

Nouvelle fonction de domaine [0 ;∞[g: $ON \to AN$ $g(x)=\|x-2\|$	ϕ: t_N -> $\|t_N\| = t_N$ est inversible sur le domaine [0, + ∞[, car $t_N \geq 0$: t_N -> $\|2-t_N\|$ g $(x) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = \|2-x\|$

Si on choisit OP comme variable il n'est pas possible d'exprimer AP en fonction de OP, la dépendance ne peut être univoque.

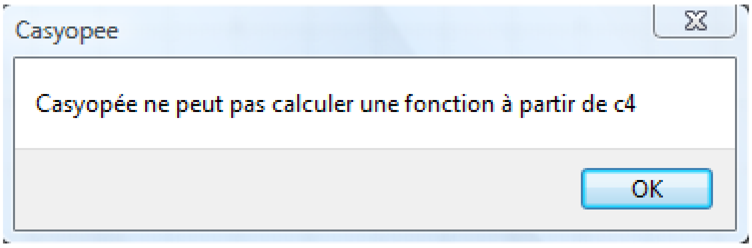


Figure 12 Message de Casyopée

ϕ: t_P -> $|t_P|$ n'est pas inversible sur le domaine R : une même valeur de OP correspond (excepté pour O) à 2 valeurs de t_P donc à 2 positions de P.

Si on choisit l'abscisse du point P comme variable alors la dépendance est univoque :

Nouvelle fonction de domaine]−∞;∞[

h: $x_P \to AP$

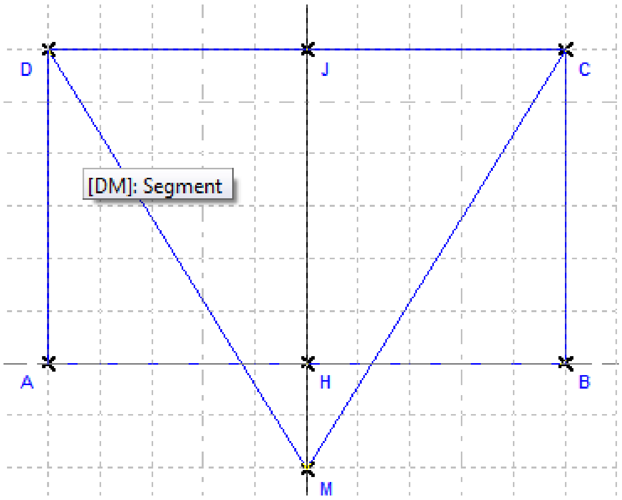
$h(x)=|x-2|$

: t_P -> t_P est inversible sur ℝ

: t_P -> $|2-t_P|$

h $(x) = \psi \circ \phi^{-1}(x) = |2-x|$

Exemple 2

On considère un rectangle fixe ABCD tel que AB=10 et CD= 6. Les points J et H sont respectivement les milieux des segments [DC] et [AB]. Le point M est un point libre aligné avec J et H. L'étude porte sur la somme des distances DM + HM + HC et la détermination du minimum de cette expression.	 **Figure 13 La gouttière**

L'exemple montre comment les expressions obtenues dépendent de la définition du point libre et du choix de la variable.

La variable est l'ordonnée du point M et le point M est défini sur la droite (JH):

Nouvelle fonction de domaine $]-\infty;\infty[$

$$f: \quad y_M \rightarrow DM+MH+CM$$
$$f(x)=|x|+2\cdot\sqrt{x^2-12\cdot x+61}$$

La variable est la distance MH et le point M est défini sur la droite (JH)

Dans ce cas, la dépendance entre la position de M et la distance MH n'est pas univoque et Casyopée ne peut pas calculer une fonction.

La variable est la distance MH et le point M est défini sur le segment [JH]

Dans ce cas, la dépendance entre la position de M et la distance MH est univoque. Casyopée calcule la fonction comme dans le premier, tout en adaptant l'ensemble de définition et recalculant la formule pour tenir compte de la positivité de la variable.

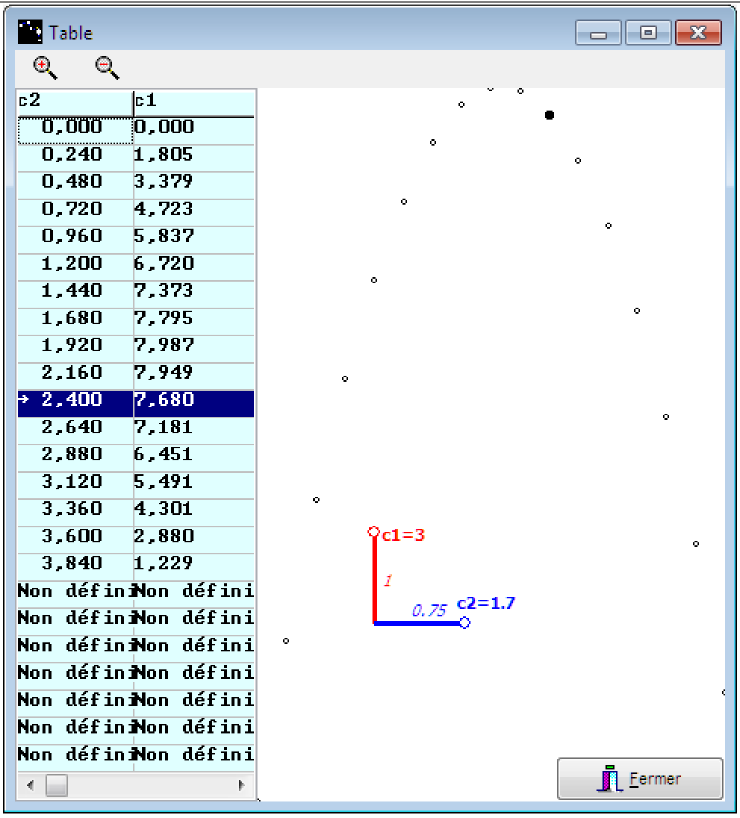
Nouvelle fonction de domaine **[0 ; 6]**

$$g: \quad MH \rightarrow DM+MH+CM$$
$$g(x)=2\cdot\sqrt{x^2-12\cdot x+61}+x$$

Quelle médiation par le professeur ?

Dans les cas où le logiciel ne peut pas prendre une grandeur comme variable, il envoie un message que l'élève ne peut pas interpréter seul (**Figure 12**). Le professeur peut expliquer la non univocité, en soulignant le rapport entre la position du point libre et la grandeur candidate à être variable : par exemple dans l'exemple de la gouttière ci-dessus, à une valeur de la distance MH correspondent deux positions de M sur la droite (JH), et une position ou zéro sur le segment [JH].

On notera que dans le même menu « modélisation », les élèves peuvent accéder à une table des valeurs des deux grandeurs et à une visualisation graphique, y compris dans le cas où la dépendance n'est pas univoque (**Figure 14**). C'est le rôle du professeur que d'attirer l'attention sur cette possibilité et de déclencher une réflexion sur la table et la caractérisation d'une éventuelle dépendance fonctionnelle.



c2	c1
0,000	0,000
0,240	1,805
0,480	3,379
0,720	4,723
0,960	5,837
1,200	6,720
1,440	7,373
1,680	7,795
1,920	7,987
2,160	7,949
2,400	7,680
2,640	7,181
2,880	6,451
3,120	5,491
3,360	4,301
3,600	2,880
3,840	1,229
Non défini	Non défini
Non défini	Non défini
Non défini	Non défini
Non défini	Non défini
Non défini	Non défini
Non défini	Non défini
Non défini	Non défini

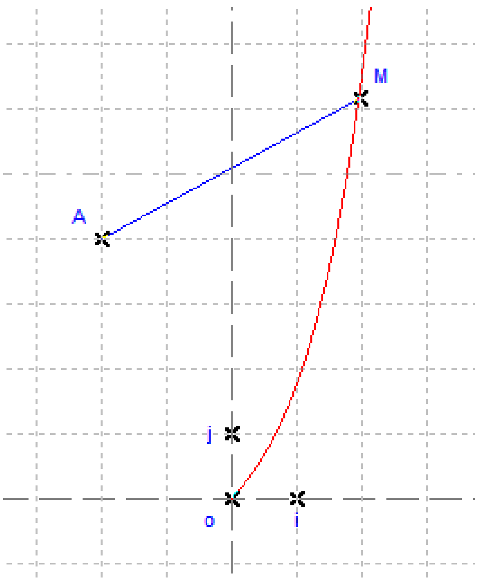
Figure 150 : table du menu Modéliser (un exemple avec une dépendance univoque)

2.3.4 Evolution de l'interface au service de la modélisation

Nous avons fait évoluer Casyopée en recherchant les gestes à l'interface qui permettent à l'utilisateur d'accomplir cette modélisation et qui donnent sens au résultat trouvé. Ces gestes nous ont semblé cruciaux dans la modélisation et la compréhension de la notion de fonction qui en résulte chez l'élève. Nous sommes ainsi passé d'une première version où la modélisation s'effectuait en deux temps, calcul de la valeur puis choix guidé de la variable parmi une liste restrictive de possibilités, à une seconde version où la modélisation implique deux grandeurs calculées sans faire de choix a priori sur la dépendance. La première version supposait que le sens de la dépendance soit posé a priori ; la deuxième version permet à l'élève de faire l'essai de toute grandeur comme variable.

Version 1

Version 2

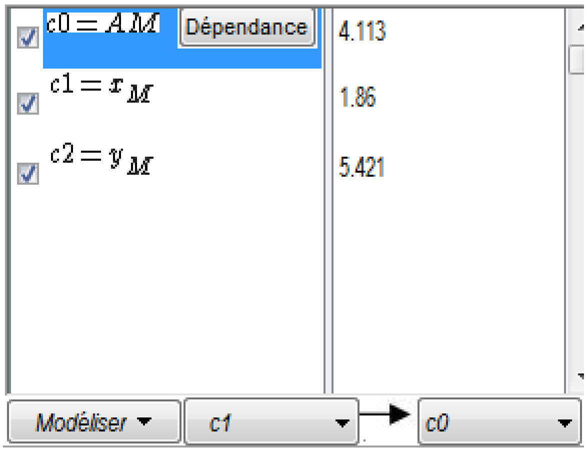


Exemple : dans le cas représenté ci-dessous M est un point libre sur une courbe ; la variable choisie peut aussi bien être son abscisse que son ordonnée.

La fonction considérée est définie sur [0 ; + ∞[par $f(x) = e^x - 1$.

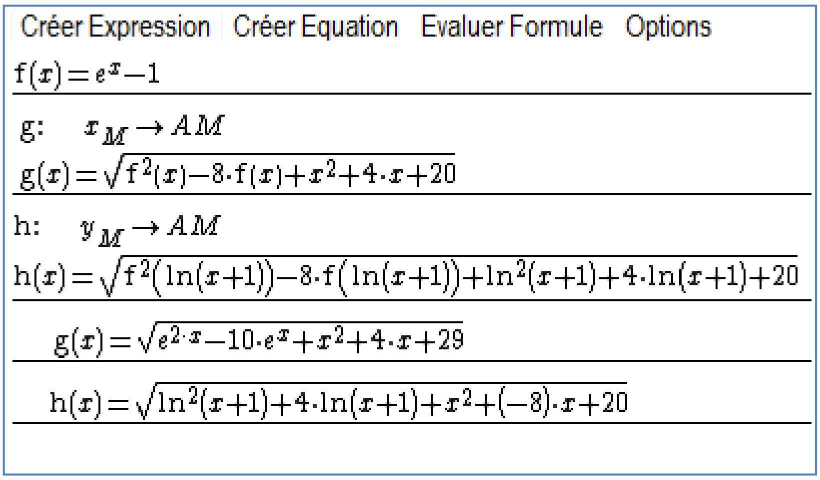
Expressions affichées par le logiciel avec deux choix de variables différents.

Un premier choix où la variable choisie est x_M :



Un autre choix de variable, y_M :

Il est possible d'afficher les deux fonctions modélisées par le logiciel à partir de choix différents de variables :



2.3.5 Les évolutions en cours

Il nous est souvent demandé de situer Casyopée par rapport à d'autres logiciels, par exemple Geogebra qui tend à devenir un « standard ». La particularité de Casyopée vient de choix épistémologiques comme la distinction entre une fonction et sa courbe et la notion d'intervalle de définition, la distinction entre un paramètre et sa représentation sous forme de curseur et la possibilité que ce paramètre puisse être instancié ou non (formel). Dans Geogebra, les fonctions sont confondues avec leur formule et leur graphe, et les paramètres avec leur représentation sous forme de « curseur », ce qui ne clarifie pas ces notions chez les élèves.

Par ailleurs, une caractéristique de Casyopée est d'offrir une palette étendue en matière de calcul formel et ceci sans langage de commande. Il est par exemple possible d'entrer et de résoudre une équation sans commande du type « solve …». Les objets symboliques (fonctions, valeurs, paramètres, équations) sont organisés de façon dynamique dans des fenêtres qui leur donnent un statut mathématique précis, plutôt que dans une interface style « cahier de brouillon » ou « feuille de calcul » caractéristique des logiciels de calcul formel.

L’aide au changement de cadre présenté plus haut est un exemple d’assistance apportée par le calcul formel dans l’esprit du programme officiel. Il en existe bien d’autres comme le diagnostic porté à l’ensemble de définition d’une fonction ou la détermination de la nature géométrique des lieux de points.

Dans la version 2, l’ensemble de fenêtres et de menus a été jugée parfois complexe dans la partie algèbre. En géométrie dynamique, Casyopée a pour seule ambition de fournir des constructions de base comme support à des activités de modélisation fonctionnelle, mais il se distingue d’autres logiciels par le choix d’interface différent inspiré de Géoplan. Les évolutions projetées pour la version 3 découlent de ce constat : il s’agira d'une part, de réduire le nombre de fenêtres affichées par défaut et les actions proposées par défaut dans la partie algèbre et d’autre part, dans la partie géométrie dynamique de se rapprocher de l'ergonomie des logiciels comme GeoGebra couramment utilisés au sein des classes.

2.4. Faire partager notre démarche

Dans la partie 3 qui suit nous exposons une situation déclinée de la Troisième à la Terminale. Nous reprenons ici quelques idées principales de notre démarche que la partie 3 illustrera en partie.

2.4.1 Du monde physique vers le cadre géométrique

La situation de la nacelle exposée plus haut illustre bien l’intérêt de faire intervenir un cadre extra-mathématique. Nous l’avons donnée comme exemple d’une situation couvrant la totalité des cadres en jeu, de façon à bien montrer comment ceux-ci interviennent dans la compréhension des fonctions comme modèles de dépendances. Nous avons indiqué en note 1 avoir conscience de ce qu’une situation de ce type ne peut être le quotidien d’une classe de lycée. C’est pourquoi, en partie 3, la situation fera plutôt référence à la géométrie. Néanmoins, nous pensons intéressant de traiter avec les élèves des situations faisant réellement intervenir le monde physique, par exemple lors d’un travail pluridisciplinaire sans toutefois les systématiser.

2.4.2 Du cadre géométrique vers le cadre algébrique

Le passage du cadre géométrique vers le cadre algébrique nous semble très important dans le cas d’un enseignement des mathématiques au lycée et c’est l’objet des exemples de la partie 3. Les problèmes qui historiquement ont amené au calcul différentiel sont en effet des problèmes relatifs propriétés géométriques des courbes (sous-normale de longueur fixe par exemple). Par ailleurs, dans les problèmes que les ingénieurs ont à résoudre les dépendances sont souvent modélisées géométriquement avant de l’être algébriquement. Il est possible aussi de faire le lien aussi avec les maths dans les instruments contemporains (GPS, réseau téléphones mobiles…) où des algorithmes codent des traitements portant sur des modélisations fonctionnelles de relations entre grandeurs géométriques généralement pour résoudre des problèmes d’optimisation.

2.4.3 Paramètres ou pas ?

Les paramètres dans les problèmes ont à un moment été considérés comme des moyens de complexifier de façon gratuite les procédures de résolution algébriques et ont disparu. Pour nous il s’agit d’un malentendu, les paramètres offrant la possibilité d’une plus grande généralité, d’une discussion de différents cas de résolution donnant une dimension plus « structurelle » à l’algèbre. L’exemple de la partie 3 traité en Terminale montre comment nous concevons cet emploi des paramètres.

3. Une situation déclinée de la classe de troisième à la classe terminale : le triangle de Minh

Nous présentons ci-dessous un problème de variation d'aire d'un triangle construit à partir d'un point dépendant d'un paramètre. Ce problème nous semble intéressant car la modélisation qui conduit à l'aire du triangle n'est pas immédiate. Elle conduit cependant à une fonction polynôme du 3ème degré qui fait partie du répertoire au lycée. La restriction de la fonction à un intervalle conforme au problème et les différentes valeurs pouvant être données aux paramètres conduisent à des comportements variés de la fonction (monotone ou non, avec des extrémums dans l'intervalle strict ou aux bornes…) ; le problème est donc susceptible de nombreuses adaptations.

Nous donnons ci-dessous une étude complète du problème (à partir de la thèse de Tran Kiem Minh), afin de mieux comprendre les différentes adaptations à chaque niveau que nous avons expérimentées de la 3ème à la Terminale.

3.1. Présentation du problème

Le problème

Soit [OA] un segment de longueur donnée. Soit I un point tel que (IO) est perpendiculaire à (OA) et Δ la droite perpendiculaire à (OA) passant A. Soit un point M du segment [OA] distinct de A ; on construit le point N sur Δ tel que le triangle MIN soit rectangle en M.

On s'intéresse à l'aire du triangle MIN.

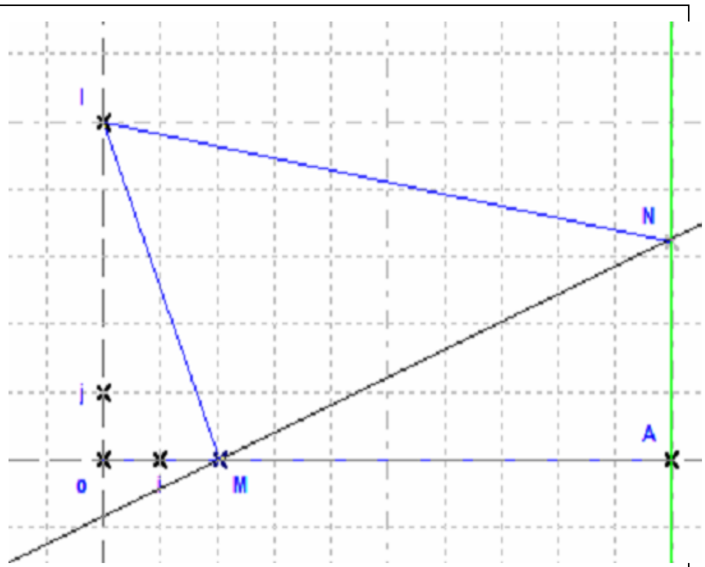
Résolution dans l'environnement Casyopée

Nous présentons tout d'abord une résolution sans cibler un niveau de classe particulier. La distance OA étant donnée nous la choisissons égale à 10, la distance OI étant arbitraire, elle est choisie égale à un paramètre positif a. Se plaçant dans un repère, parmi les choix possibles, on choisit le point O comme origine, le point A de coordonnées (10 ; 0) et le point I (0 ; *a*). L'énoncé du problème pourrait être alors le suivant :

Soit *a* un paramètre positif.

Dans un repère orthonormé de centre *O*, on construit les points *A(10;0)*, *I(0 ;a)* et la parallèle à l'axe *Oy* passant par *A*. *M* est un point libre sur le segment *[OA]*. On construit le triangle *IMN* rectangle en *M*, avec *N* appartenant à la parallèle.

Existe-il une position du point *M* sur *[OA]* telle que l'aire du triangle *IMN* soit maximale?



Nous étudions la fonction obtenue après un choix d'une variable.

Par exemple, si on choisit la variable $x = OM$, $x \in [0;10]$; une expression de la fonction modélisant la dépendance entre cette distance OM et l'aire du triangle IMN est alors :

$$f : OM \to \frac{IM.MN}{2}$$

$$f(x) = -\frac{5\left(\frac{x}{10}-1\right)\left(x^2+a^2\right)}{a}$$

Cette expression a été obtenue directement avec Casyopée ; en papier /crayon l'une des difficultés est le calcul de la distance AN. En analytique on peut chercher une équation de la droite perpendiculaire à (IM) passant par M. On peut aussi utiliser la trigonométrie ou des triangles semblables …

La fonction modélisant la dépendance a des propriétés différentes selon les valeurs d'un paramètre.

Quatre cas se présentent :

1) Cas n° 1 $0 < a < 5$

La fonction f admet deux extrémums dans l'intervalle ouvert $]0;10[$ (un minimum local $x_1 = \frac{10-\sqrt{100-3a^2}}{3}$ et un maximum local $x_2 = \frac{10+\sqrt{100-3a^2}}{3}$).

Dans ce cas, la fonction f atteint sa valeur maximale lorsque $x = x_2 = \frac{10+\sqrt{100-3a^2}}{3}$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque M a pour coordonnées $M(\frac{10+\sqrt{100-3a^2}}{3};0)$.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la **Figure 16**.

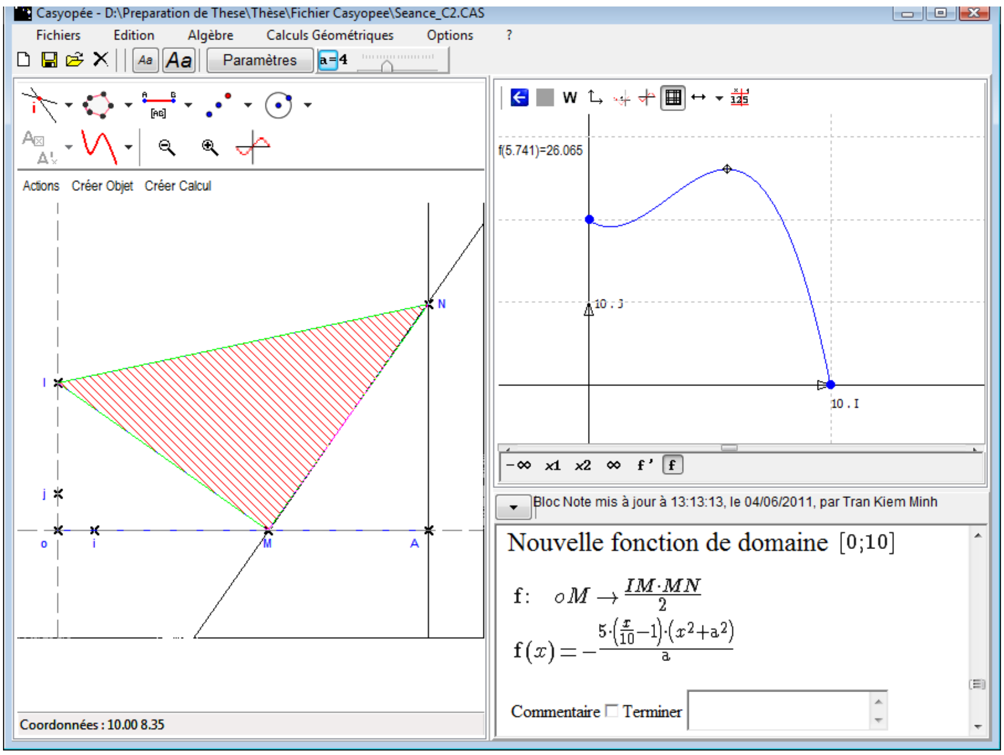


Figure 17. La figure du problème et le graphe de la fonction pour un cas $0 < a < 5$

2) Cas n° 2 $a = 5$

La fonction f admet deux extrémums dans l'intervalle ouvert $]0;10[$ (un minimum local $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{100-3a^2}}{3} = \dfrac{5}{3}$ et un maximum local $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{100-3a^2}}{3} = 5$).

Dans ce cas, la fonction f atteint sa valeur maximale *25* lorsque $x = x_o = 0$ ou $x = x_2 = \dfrac{10+\sqrt{100-3a^2}}{3} = 5$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque M est en O (O est l'origine) ou lorsque M est au milieu du segment [OA].

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la **Figure** 18 **12**.

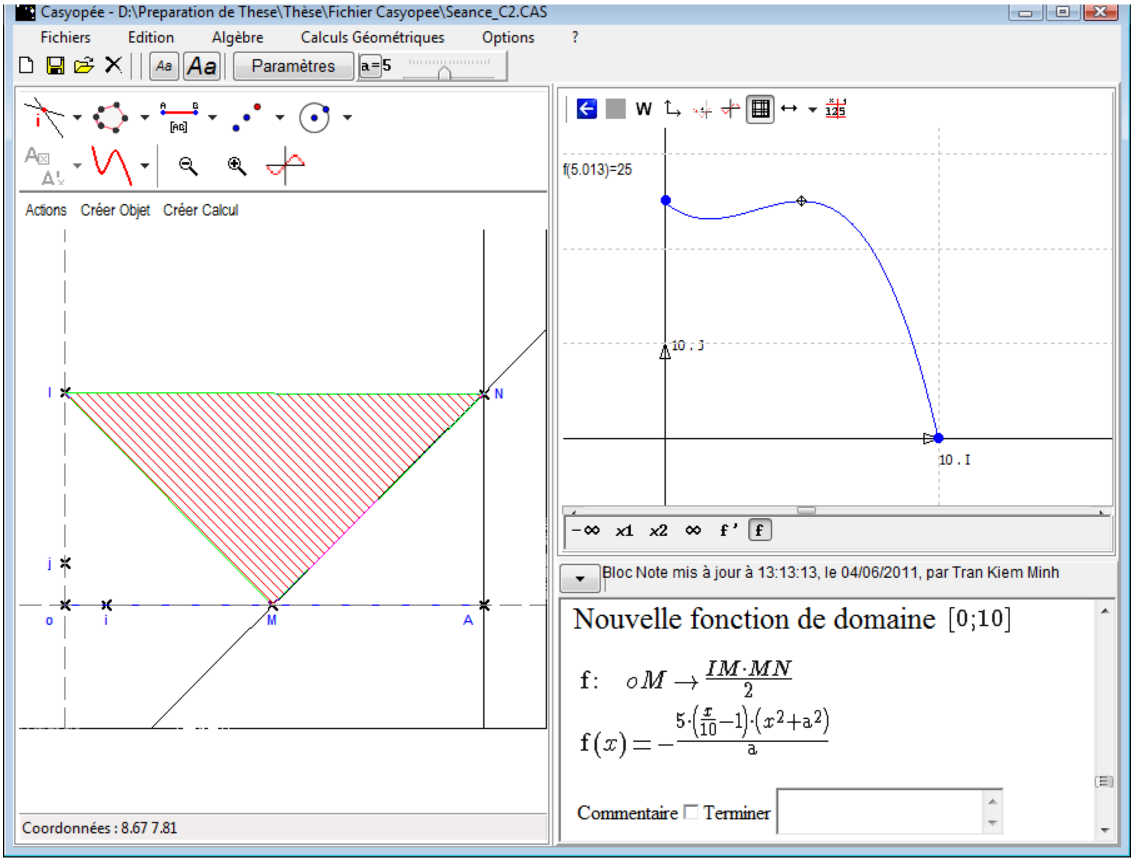


Figure 182. La figure du problème et le graphe de la fonction pour le cas $a = 5$

3) Cas n° 3 $5 < a < \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

La fonction f admet deux extrémums dans l'intervalle ouvert $]0;10[$ (un minimum local $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{100-3a^2}}{3}$ et un maximum local $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{100-3a^2}}{3}$). Dans ce cas, la fonction f atteint sa valeur maximale *5a* lorsque $x = 0$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque M est en O.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la **Figure 193**.

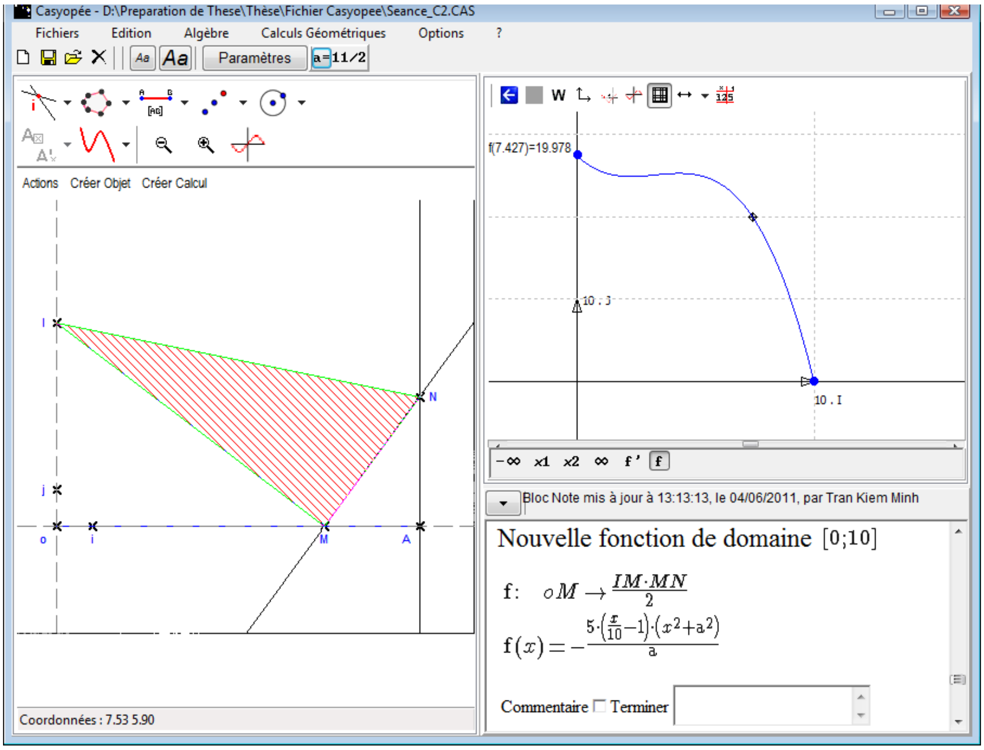


Figure 203. La figure du problème et le graphe de la fonction pour un cas $5 < a < \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

4) Cas n° 4 $a \geq \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

La fonction f est décroissante sur l'intervalle ouvert $]0;10[$ et n'admet aucun extrémum dans cet intervalle. Dans ce cas, la fonction f atteint sa valeur maximale $5a$ lorsque $x = 0$, c'est-à-dire que l'aire du triangle IMN est maximale lorsque M est en O.

La figure du problème et le graphe de la fonction pour ce cas sont trouvées dans la **Figure 21**.

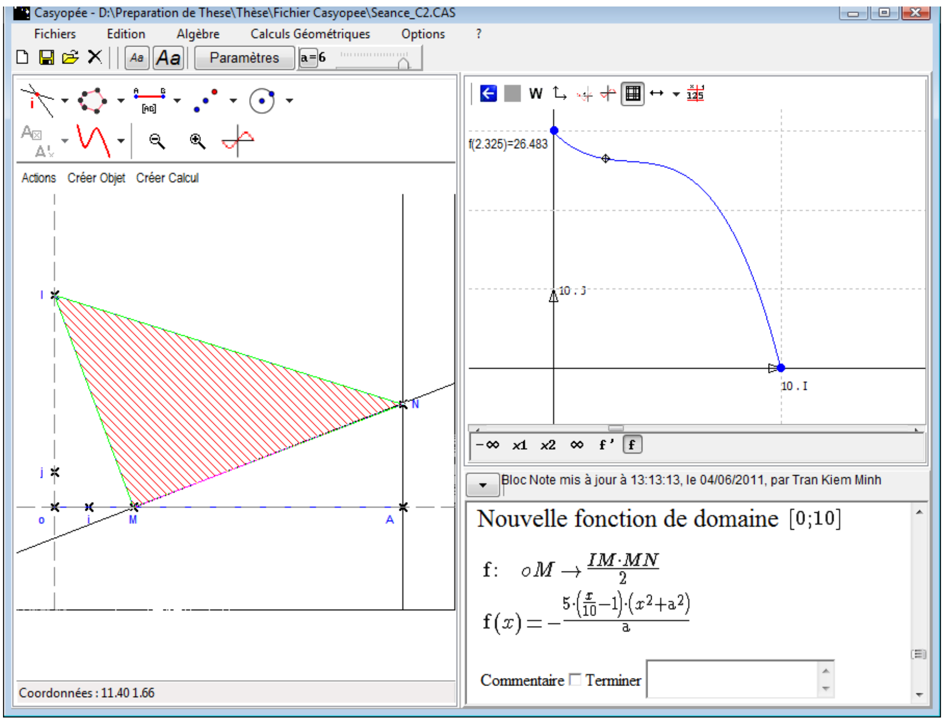


Figure 214. La figure du problème et le graphe de la fonction pour un cas $a \geq \dfrac{10}{\sqrt{3}}$

3.2. Expérimentation en classe de troisième : équation et courbe représentative

Objectif

Travailler sur la résolution graphique d'une équation résultant d'une situation géométrique : l'inconnue prend un sens différent de celui que les élèves rencontrent dans la résolution algébrique d'équations ; le choix de l'inconnue (AM, IM …) fait partie du travail.

En pratique, il s'agit de :

- Construire une figure avec contraintes en géométrie dynamique
- Mettre en évidence un lien fonctionnel entre deux grandeurs
- Exploiter la représentation graphique d'une fonction pour résoudre une équation
- Manipuler le vocabulaire sur le thème des fonctions.

Choix

Se placer dans la résolution d'équations et non dans l'étude de sens de variation.

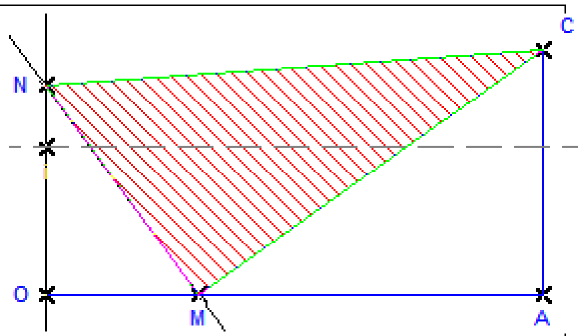
La distance du point fixe au segment [OA] est égale à 5 soit la moitié de la distance OA, ce qui correspond au cas n°2.Ainsi, le choix de la valeur de l'aire permet d'aborder en classe une résolution graphique d'équations ayant plusieurs solutions. De plus, quel que soit le choix de la variable, l'allure de la courbe obtenue oblige une lecture « fine » (zoom, cadrage, usage de la trace, tableau de valeurs …).

Texte élève[8] **:** Sur la figure ci-contre,

OA = 10 cm et AC =5 cm.

A partir d'un point M appartenant au segment [OA], on construit sur la demi-droite d le point N tel que le triangle CMN soit un triangle rectangle en M.

Existe-t-il une ou des positions du point M telle(s) que l'aire du triangle CMN soit égale à 24 cm² ?



Déroulement de l'expérimentation

La séance a eu lieu classe entière durant une heure avec un ordinateur couplé à un vidéo projecteur et un Tableau Blanc Interactif. Les élèves ont déjà exploité le logiciel Casyopée mais uniquement en classe entière.

Au début de l'activité, le professeur propose de chercher le positionnement d'un point solution du problème en faisant des essais. L'objectif est de faire une première construction de la figure au papier crayon en tenant compte des contraintes puis d'effectuer le calcul de l'aire du triangle par mesure à la règle graduée. Quelques élèves ont des réticences à faire des essais et cherchent des procédés pour obtenir les points solutions.

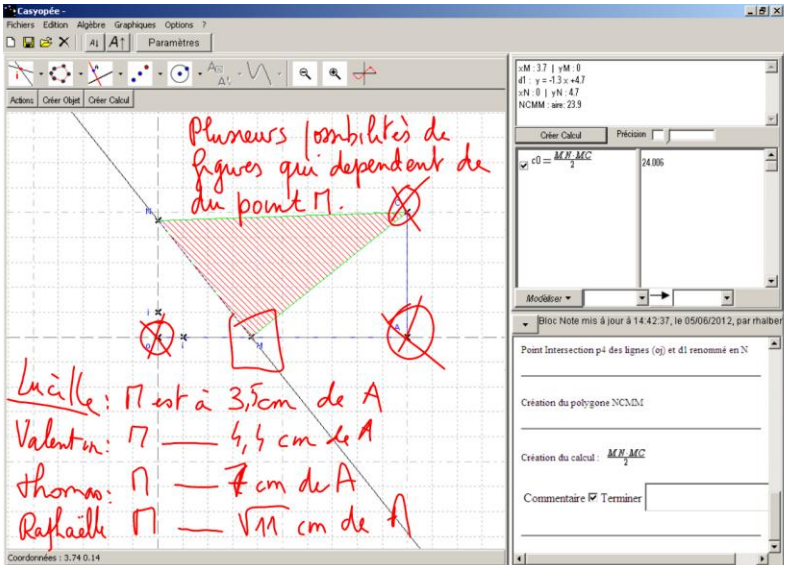
Des premiers résultats sont obtenus et listés au tableau. La position du point M correspondante n'est pas donnée par les élèves.

Deux élèves viennent au tableau expliquer les méthodes mises en œuvre pour calculer l'aire du triangle.

[8] Les énoncés sont donnés ici sous la forme présentée aux élèves et sur les mini-sites. Les noms donnés aux points ne sont pas systématiquement les mêmes que dans la situation exposée pour la résolution mathématique.

Pour obtenir d'autres valeurs, le professeur propose d'utiliser le logiciel Casyopée et sa première fenêtre de géométrie dynamique. Plusieurs élèves se succèdent au TBI pour la construction puis la mise en place du calcul de l'aire du triangle CMN.

Le point M mobile sur [OA] est déplacé de façon à rendre compte de son impact sur la figure. Le professeur demande aux élèves de préciser les points de la figure sur lesquels il est possible d'agir. Après discussion, Seul le point M est retenu. Il demande ensuite aux élèves de revenir sur leurs premiers résultats et de préciser la position du point M qu'ils avaient choisi. Des élèves proposent de donner la longueur des côtés [NM] et [CM], puis la distance de M au point A.



La mise en place avec le logiciel du calcul de AM est effectuée. Après discussion, la classe propose : "l'aire varie en fonction de la longueur AM".

La modélisation en termes de fonction du problème étant amorcée, le logiciel est exploité pour obtenir des informations sur la fonction qui à la longueur AM associe l'aire du triangle CMN :

- dans le cadre algébrique
  le logiciel permet une exportation d'une expression de la fonction
- dans le cadre numérique
  un tableau de valeurs
- dans le cadre graphique
  la courbe représentative.

La recherche s'oriente alors vers une autre formulation du problème, la résolution de l'équation $\boldsymbol{f(x) = 24}$, puis se termine par la lecture collective des solutions en exploitant la courbe représentative de la fonction.

A la fin de la séance, le professeur distribue la courbe représentative de la fonction mise en évidence collectivement pour que chacun puisse à la maison effectuer les tracés nécessaires à la lecture graphique des solutions.

La synthèse de l'activité est effectuée la séance suivante en exploitant l'exportation de la séance sous forme d'un fichier image du Tableau Blanc Interactif et la conclusion fait apparaitre trois positions solutions au problème posé.

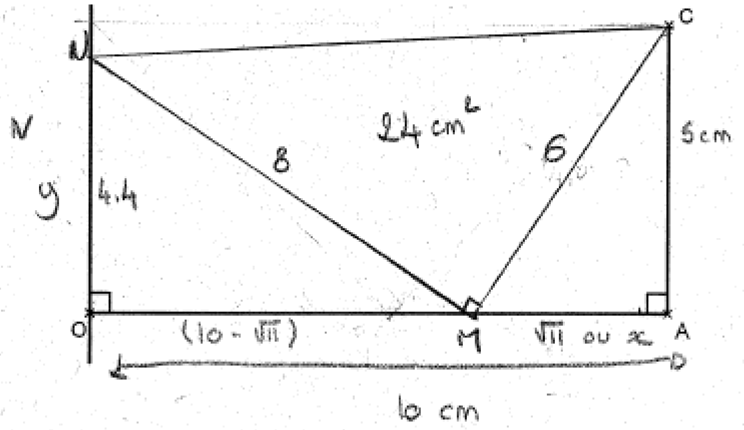
Bilan

Tout au long du collège, les élèves sont confrontés avec "la mise en équation" de problèmes.

Ceci explique la première formulation du problème par plusieurs élèves en début de séance sous la forme d'une équation à 2 inconnues : les longueurs NM et MC.

$$24\text{ cm}^2 = \frac{NM \times MC}{2}$$

Suite à cette équation, une élève aboutit à " le point M est à une distance égale à racine carrée de 11 du point A". Voici sa trace écrite :



On cherche AM :

$5^2 + x^2 = 6^2$

$25 + x^2 = 36$

$x^2 = 11$

$x = \sqrt{11} \simeq 3,3166$

$\simeq 3,3$

$\frac{c \times c}{2} = 24\text{ cm}^2$

$c \times c = 48$

or $6 \times 8 = 48$

On peut également faire l'inverse avec CM = 8 et NM = 6

On cherche ON :

$(10-\sqrt{11})^2 + y^2 = 8^2$

$44,66750419 + y^2 = 64$

$y^2 = 19,33249581$

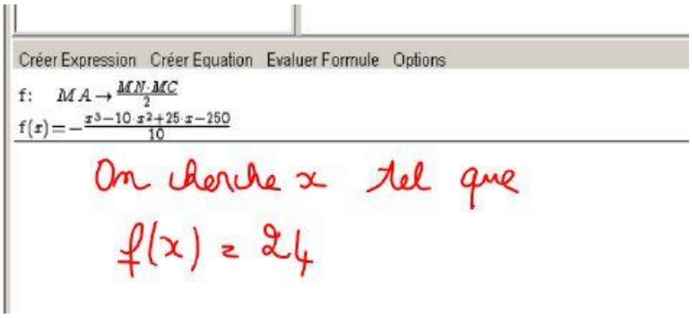
$4,39687372 = y \simeq 4,397$

$y \simeq 4,4$

L'élève passe bien du domaine géométrique au domaine algébrique en proposant de repérer M par la longueur AM. Elle pose comme inconnue *x*=AM. Le triangle MNC étant rectangle en M et d'aire 24, elle cherche un couple d'entiers tels que MN × MC = 48. Elle prend en compte la variabilité de ces deux longueurs mais ne la relie pas à la longueur AM.

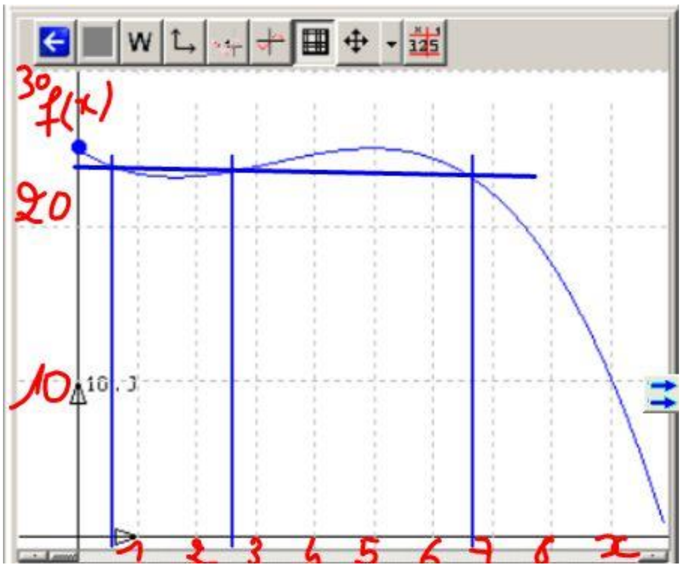
A ce stade, l'apport de la géométrie dynamique est incontestable : la construction et la manipulation de l'imagiciel construit permettent de dégager ce qui varie « en fonction de « quoi ».

Au cours de la séance, il s'agit d'amener les élèves à passer dans un cadre fonctionnel en mettant d'abord en évidence une variable dont l'aire est fonction et non une inconnue, puis à revenir à une formulation sous forme d'une équation exploitant cette fonction :



Cette activité s'inscrit bien dans les nouveaux enjeux de la classe de Troisième. De plus, elle conduit à une courbe représentative de fonction et un nombre de solutions du problème qui ne sont pas familiers pour un élève de troisième.

La situation est une ouverture vers les programmes de lycée.



3.3. Expérimentation en classe de seconde : optimisation et courbe représentative d'une fonction

Objectif

Comprendre une fonction comme modèle de dépendance entre des grandeurs géométriques

Travailler sur la pertinence des désignations pré-algébriques (formules impliquant des grandeurs) puis algébriques (expressions de fonctions)

En pratique, il s’agit de :

- Construire une figure avec contraintes en géométrie dynamique
- Travailler sur la dépendance entre des objets géométriques, puis étudier la co-variation entre des grandeurs choisies, pour mieux comprendre le choix de la variable
- Déterminer graphiquement le maximum de la fonction ainsi que les valeurs pour lesquelles il est obtenu
- A l’aide du calcul formel approcher une méthode pour prouver l'existence du maximum par factorisation et étude du signe d'une expression algébrique
- Revenir au problème initial en associant les interprétations graphiques et les résultats obtenus par les calculs.

Choix

Une situation motivant un problème d’optimisation.

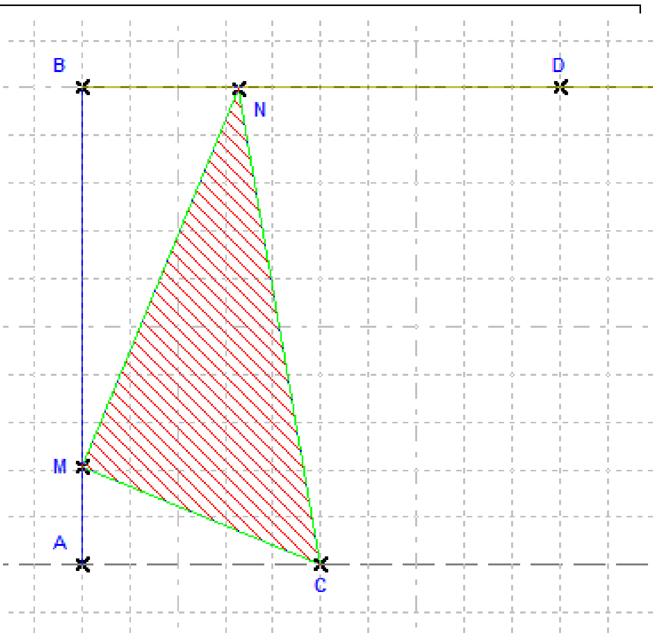
La figure n'est pas donnée dans un repère (on peut enlever le quadrillage). Le segment [AB] apparaît vertical sur la figure et la variable ne correspond pas à l'abscisse d'un point dans un repère orthonormé ce qui peut paraître inhabituel. Par contre, dans l'écriture de la fonction cette variable nommée *x*, correspondant à AM ou BM, et représente un réel appartenant à [0 ; 10].

Texte élève

Un navigateur veut fabriquer une voile en forme de triangle rectangle. Il utilise un cadre fixe CABD dont les dimensions sont AC = 5m, AB = 10m et BD = 10m.

Il fixe une des extrémités de la voile en C. La deuxième extrémité M peut se déplacer sur le segment [AB], enfin, le triangle CMN doit être rectangle en M avec N appartenant au segment [BD].

Il désire que la voile soit la plus grande possible, comment aider le navigateur ?



Déroulement de l'expérimentation

En salle informatique il est laissé du temps aux élèves pour construire la figure et déterminer les grandeurs nécessaires à la création de la fonction.

Première partie (une heure) : en salle informatique (un ou deux élève(s) par poste)

Construction de la figure : aucune consigne n'est donnée pour la construction de la figure et le professeur vérifie que celle-ci est correcte en déplaçant le point M ou N. Dans le cas d'une figure "molle", (les points M et N étant créés indépendamment l'un de l'autre, les élèves les placent pour avoir CMN rectangle en M), le déplacement d'un point leur montre que la figure ne respecte pas les contraintes. Une discussion avec le professeur ou entre les élèves permet à ces derniers de mieux comprendre la dépendance géométrique entre des points et de faire la différence entre points fixes, points libres et points dépendants.

Conjecture : Après avoir écrit la formule donnant l'aire du triangle et afficher sa valeur, les élèves conjecturent à partir d'une exploration numérique la valeur du maximum.

Modélisation : les élèves ont à déterminer une variable pour exprimer une dépendance entre deux grandeurs et construire ainsi une fonction. Le professeur intervient auprès plusieurs élèves pour les aider à choisir une variable.

Lecture graphique : ils conjecturent le maximum et les valeurs pour lesquelles il est atteint ; la valeur $x = 0$ n'est pas forcément remarquée (en cette valeur particulière, le triangle existe-t-il ?).

Deuxième partie (une heure) : synthèse en classe entière

Elle porte sur

- la mise en place d'une méthode amenant à justifier l'existence d'un maximum égal à 25 par l'étude du signe de l'expression $g(x) = 25 - f(x)$
- l'utilisation du calcul forme, la discussion portant sur le choix entre les commandes "factoriser" et "développer" pour étudier le signe de $g(x)$.
- la conclusion sur le maximum, l'affichage simultanée de la fenêtre algèbre et de la fenêtre géométrie dynamique permettant de faire le lien entre la lecture sur une courbe et la situation géométrique.

3.4. Expérimentation en classe de Première : Optimisation et expression d'une fonction

Objectif

Résoudre un problème d'optimisation d'aire par une étude de fonction

En pratique, il s'agit de :

- Construire une figure avec contraintes
- Exploiter la figure de géométrie dynamique pour émettre des conjectures sur l'aire maximale
- Modéliser la situation à l'aide d'une fonction
- Mobiliser ses connaissances mathématiques (variations de fonction et signe de la fonction dérivée, signe d'un trinôme) pour justifier les conjectures et s'aider du calcul formel si besoin est.

Choix

Comme en classe de Troisième ou de Seconde, on se place dans le cas où la distance du point fixe au segment [OA] est égale à 5 soit la moitié de la distance OA (cas n°2). L'aire maximale est alors égale à 25 et atteinte en deux positions du point M. Ainsi, quelque soit le choix de la variable, la fonction à étudier parait très intéressante en classe de Première.

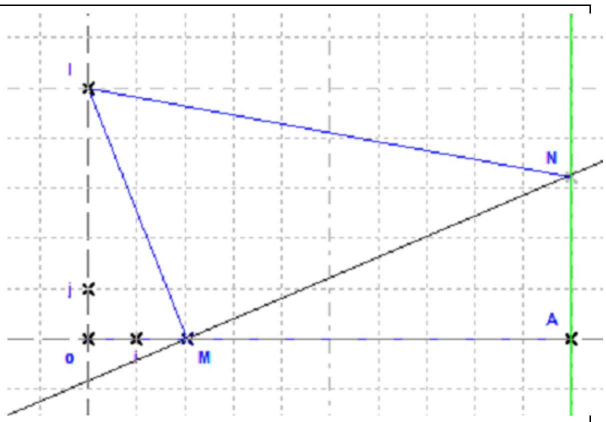
Texte élève

Dans un repère orthonormal de centre O, on considère les points A(10;0) et I(0;5) , ainsi que la demi droite [Ax) parallèle à l'axe des abscisses.

M est un point variable du segment [OA].

On construit le triangle IMN rectangle en M, avec N appartenant à [Ax).

Le but de l'activité de déterminer s'il existe des positions du point M telle que cette aire soit maximale.



Déroulement de l'expérimentation

La séance a lieu en demi-classe durant une heure dans la salle multimédia. Les élèves ont déjà utilisé le logiciel Casyopée durant des séances de TP ; certains d'entre le connaissent depuis la Seconde.

Ils travaillent en autonomie, individuellement ou par deux. Pratiquant régulièrement ce type de séances de TP, ils connaissent les règles implicites :

- prendre le temps de comprendre le problème avant d'utiliser l'ordinateur (schémas à main levée, questionnement...)
- utiliser l'ordinateur pour modéliser la situation, observer, conjecturer, calculer
- justifier et rédiger un compte rendu.

Le professeur valide le travail individuel au fur et à mesure de la séance ; en fonction de son état d'avancement, il peut différencier ses aides, ses conseils et ses exigences.

La construction géométrique est réalisée sans trop de difficultés. Si les statuts des points I et A (points fixes définis par leurs cordonnées) et M (point libre sur un segment) sont facilement identifiés, la construction du point N pose encore problème chez certains élèves, qui commencent par le définir comme un point libre sur une demi-droite. Les rétroactions de la géométrie dynamique les aident à reconnaître leur erreur (différence entre point libre et point dépendant), et ils finissent par prendre en compte les contraintes sur N pour le construire.

Ayant créé le calcul géométrique de l'aire du triangle IMN, les élèves explorent numériquement les variations de l'aire en déplaçant le point M. Ils peuvent émettre des conjectures et observer que l'aire semble maximale lorsque M est en O ou au milieu de [OA].

Ils utilisent Casyopée pour déterminer l'expression algébrique de l'aire du triangle en fonction de la variable choisie. Celle-ci peut être la distance OM, AM, ou encore l'abscisse de M.

Ils ont à disposition tous les outils de calcul formel de Casyopée : développement, factorisation, mise au même dénominateur, dérivée, résolution d'équation ..... qu'ils peuvent utiliser comme bon leur semble ; ils peuvent aussi effectuer des calculs à la main, ou vérifier des calculs générés par Casyopée.

Cette variété permet à l'enseignant de différencier le travail algébrique des élèves en fonction de leurs compétences ou de leurs difficultés. Il peut par exemple demander à un élève mal à l'aise en calcul d'effectuer le calcul de la dérivée à la main et de vérifier ensuite avec Casyopée. Il peut en revanche lui demander d'interpréter la factorisation de la dérivée (qui est un trinôme) générée par Casyopée sans aucune justification de calcul.

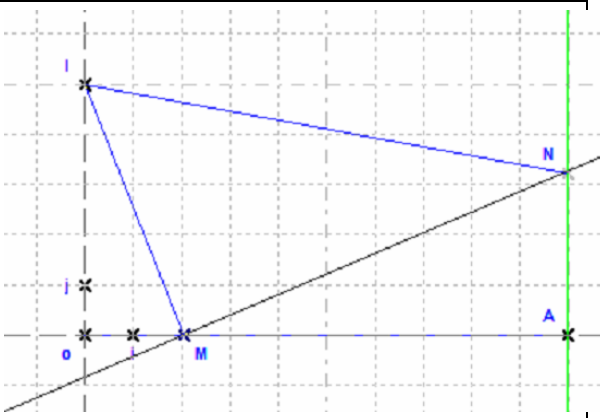
Rappelons ici que l'activité algébrique ne se réduit pas qu'à des techniques de transformation, mais qu'elle met aussi en jeu la compréhension de la multiplicité des formes équivalentes et de leur utilité. C'est pourquoi le choix est fait dans Casyopée d'utiliser des primitives de calcul formel pour que les élèves puissent aisément obtenir les différentes formes des expressions des fonctions, leurs sous-expressions, des valeurs particulières. Soulignons que cette activité transformationnelle ne serait qu'un pur jeu symbolique si elle n'était pas motivée par la preuve.

3.5. Expérimentation en classe de Terminale S : étude avec paramètre

Texte élève

Dans un repère orthonormal de centre O, on considère les points A(10;0) et I(0;a) où a est un paramètre positif, ainsi que la demi droite [Ax) parallèle à l'axe des ordonnées.

M est un point variable du segment [OA]. On construit le triangle IMN rectangle en M, avec N appartenant à [Ax).



Le but de l'activité de déterminer s'il existe des positions du point M telle que cette aire soit maximale.

Première partie

Construire la figure dans la fenêtre géométrie dynamique de casyopée.

Deuxième partie : Étude du cas particulier où a=5

Déplacer le point M sur [OA] et observer les variations de l'aire du triangle IMN. Conjecturer.

Existe-il une position du point M sur [OA] telle que cette aire soit maximale? Justifier.

Troisième partie : Vers une généralisation

Pour différentes valeurs du paramètre *a*, observer les variations de l'aire du triangle IMN. Donner une conjecture sur ces variations.

Justifier les variations de l'aire pour une valeur quelconque de *a*.

Objectif

Généraliser le problème d'aire à un triangle dont l'ordonnée d'un des sommets est définie par un paramètre positif, ce qui revient à étudier une famille de fonctions dépendant d'un paramètre.

En pratique, il s’agit de :

- Construire une figure avec contraintes
- Exploiter la figure de géométrie dynamique pour émettre des conjectures sur l'aire maximale
- Modéliser la situation à l'aide de fonctions
- Mobiliser ses connaissances mathématiques (fonctions dérivées, trinôme) pour justifier les conjectures
- Utiliser de façon réfléchie le calcul formel
- Rédiger un compte rendu.

Choix

Le problème est posé dans un contexte de géométrie analytique, et utilise un paramètre positif. Dans un premier temps, la valeur du paramètre est fixée et l’on étudie les variations de l’aire. On fait varier ensuite ce paramètre ce qui amène à distinguer des cas.

Déroulement de l’expérimentation

L’activité est testée en début d'année. Une majorité des élèves connait l'environnement Casyopée, l'ayant utilisé en 1ère.

La séance a lieu en demi-classe durant une heure en salle multimédia. Les élèves travaillent en autonomie, individuellement ou en binômes.

Le professeur intervient auprès de chacun des élèves en validant le travail, conseillant, suggérant des pistes de recherche.

A l'issue de la séance, les élèves ont à rédiger un compte rendu de leur travail.

<u>Construction géométrique dans l’environnement Casyopée :</u> cette étape ne pose pas de problèmes aux élèves. Ils savent différencier le statut des points de la figure (M point libre sur segment, N intersection de deux droites....) et réaliser le programme de construction dans le bon ordre sans intervention de l'enseignant.

<u>Etude du cas particulier où $a = 5$</u> : cette étape correspond au travail demandé aux élèves dans l'expérimentation de Première. En Terminale, les élèves ont acquis une certaine autonomie dans la méthode et dans l'utilisation de l'environnement.

Ayant créé le calcul géométrique de l'aire du triangle IMN, ils explorent numériquement les variations de l'aire en déplaçant le point M. Ils observent que l'aire semble maximale lorsque M est en O ou au milieu de [OA].

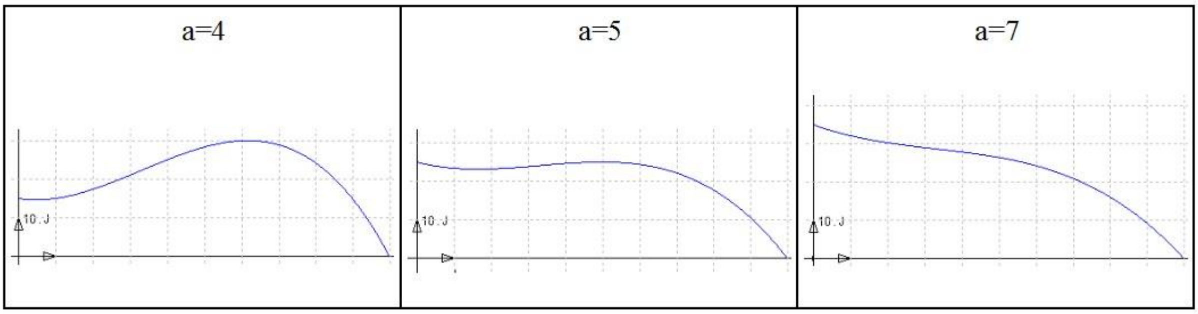
Ils utilisent Casyopée pour déterminer l'expression algébrique de l'aire du triangle en fonction de la variable choisie. Celle-ci peut être la distance OM, AM, ou encore l'abscisse de M. Cette fonctionnalité du logiciel est dans l'ensemble bien maîtrisée par les élèves qui l'ont souvent utilisée en classe de première ; elle est perçue comme une aide évitant de faire des calculs pour établir une expression algébrique.

La fonction géométrique établie par l'environnement est ensuite exportée dans la fenêtre algébrique. Les élèves ont à disposition tous les outils de calcul formel de Casyopée : développement, factorisation, mise au même dénominateur, dérivée, résolution d'équation ..... qu'ils peuvent utiliser comme bon leur semble. Ils font bien le lien entre les pratiques usuelles en classe pour étudier une fonction et les outils mis à disposition, ils savent utiliser les calculs obtenus pour justifier.

Pour l'enseignant cette partie permet de faire le point sur les connaissances des élèves relatives à l’étude de variations de fonction et mesurer leur degré d’autonomie pour la mener à bien.

Vers une généralisation en prenant en compte le paramètre *a* : il s'agit de tendre à la généralisation en étudiant les variations de l'aire pour différentes valeurs de *a*.

En pilotant le paramètre *a*, les élèves peuvent observer plusieurs allures de courbes, par exemple :



En se situant ensuite dans un cadre purement algébrique, ils étudient la fonction pour une valeur quelconque de *a*. L'utilisation du calcul formel peut les aider à étudier le signe de la dérivée.

f: $x_M \to \frac{IM\cdot MN}{2}$ $f(x)=-\frac{5\cdot\left(\frac{x}{10}-1\right)\cdot(x^2+a^2)}{a}$ $f'(x)=-\frac{x^2+a^2}{2\cdot a}+\frac{(-10)\cdot\left(\frac{x}{10}-1\right)\cdot x}{a}$ $f'(x)=-\frac{3\cdot x^2-20\cdot x+a^2}{2\cdot a}$	Résolution $f'(x)=0$ en x Sans vérification $\left\{-\frac{\sqrt{100-3\cdot a^2}-10}{3}\ ,\ \frac{\sqrt{100-3\cdot a^2}+10}{3}\right\}$

Leur travail est alors centré sur l'interprétation des réponses (ou des non réponses) apportées par le calcul formel : Ils doivent lier l'étude de cas à l'existence des racines de *f'(x)*, comprendre l'impossibilité du calcul formel à calculer l'expression factorisée et justifier ainsi les différents cas.

Dans cette partie, les élèves manquent d'autonomie. Le professeur est obligé d'intervenir dans les groupes pour les aider à distinguer et formuler les différents cas, comprendre et interpréter les calculs obtenus dans Casyopée et expliquer les cas observés. Le compte rendu écrit s'avère utile pour mesurer la compréhension du problème et de l'usage d'un paramètre.

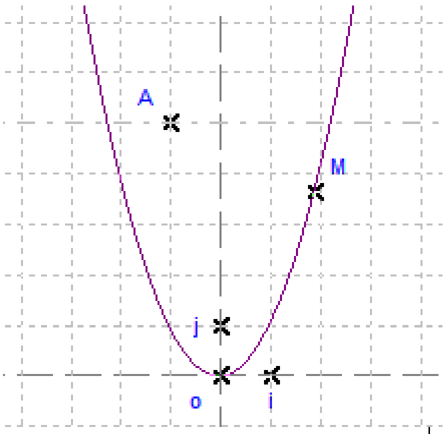
4. Un exemple de production : distance d’un point à une parabole

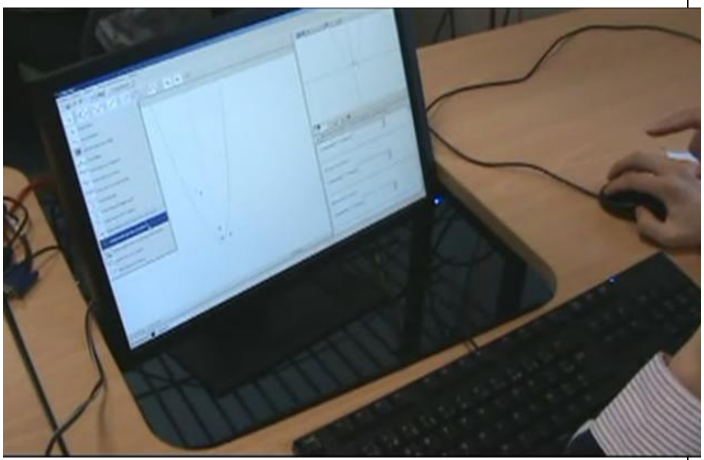
Nous présentons ci-dessous un problème de variation de distance d’un point fixé à une parabole.

Ce type de problème peut être exploité à plusieurs niveaux de classe. Nous exposons ici un exemple qui a été testé en classe de seconde.

En début d’année de seconde, les prérequis sont les généralités sur le thème des fonctions : la notion de fonction, la notion de minimum d'une fonction, la lecture graphique d'une courbe représentative de fonction.

Après la présentation de l’activité, nous donnons un compte-rendu d’une expérimentation en termes d’interactions professeur/élèves.





4.1. Présentation de l’activité (niveau seconde)

Le sujet de l’activité

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J). On considère la courbe (Cf) de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et le point A (–1;5). M est un point libre de la courbe (C_f).

Le but de l'activité est de déterminer, si elle(s) existe(nt), la (ou les) position(s) de M telle(s) que la distance AM soit la plus petite possible.

La tâche de l’élève

Nous pouvons distinguer dans cette activité trois niveaux sur la notion de dépendance fonctionnelle :

- Réalisation d’une figure dynamique correspondant à la situation, exploration de cette figure pour émettre les premières conjectures sur la dépendance entre la distance et la position du point M.
- Définir une fonction modélisant cette dépendance et exploiter les possibilités du logiciel qui permet d’en obtenir une expression
- Utiliser cette fonction dans différents cadres (algébrique, fonctionnel, graphique) pour approcher la solution.

La fiche élève reprend ces trois niveaux en adjoignant une étape préalable qui consiste à faire le dessin à main levée d’un schéma de la situation pour que l’élève s’imprègne de celle-ci avant d’utiliser l’ordinateur.

La fiche élève

Le plan est muni d'un repère orthonormal (O, I, J).On considère la courbe (C_f) de la fonction définie sur par définie sur ℝ par $f(x)=x^2$ et le point A (–1;5). M est un point libre de la courbe (C_f).

Le but de l'activité est de déterminer, si elle(s) existe(nt), la (ou les) position(s) de M telle(s) que la distance AM soit la plus petite possible.

1. Faire un dessin à main levée schématisant la situation.

2. A l'aide du logiciel Casyopée, réaliser une figure en géométrie dynamique qui correspond à la situation.

Appeler un professeur pour contrôler le travail effectué.

3. Écrire une conjecture sur la (ou les) position(s) de M telle(s) que la distance AM soit la plus petite possible.

Préciser la démarche suivie.

Conjecture :

Démarche :

4. a) A l'aide du logiciel, proposez une fonction qui permet de modéliser le problème.

b) Exploiter cette fonction à l'aide du logiciel pour résoudre le problème.

Démarche et conclusion :

4.2. Expérimentation

Dispositif

L'activité a été testée en salle informatique en demi-classe. La synthèse a été effectuée en classe entière avec un tableau blanc interactif.

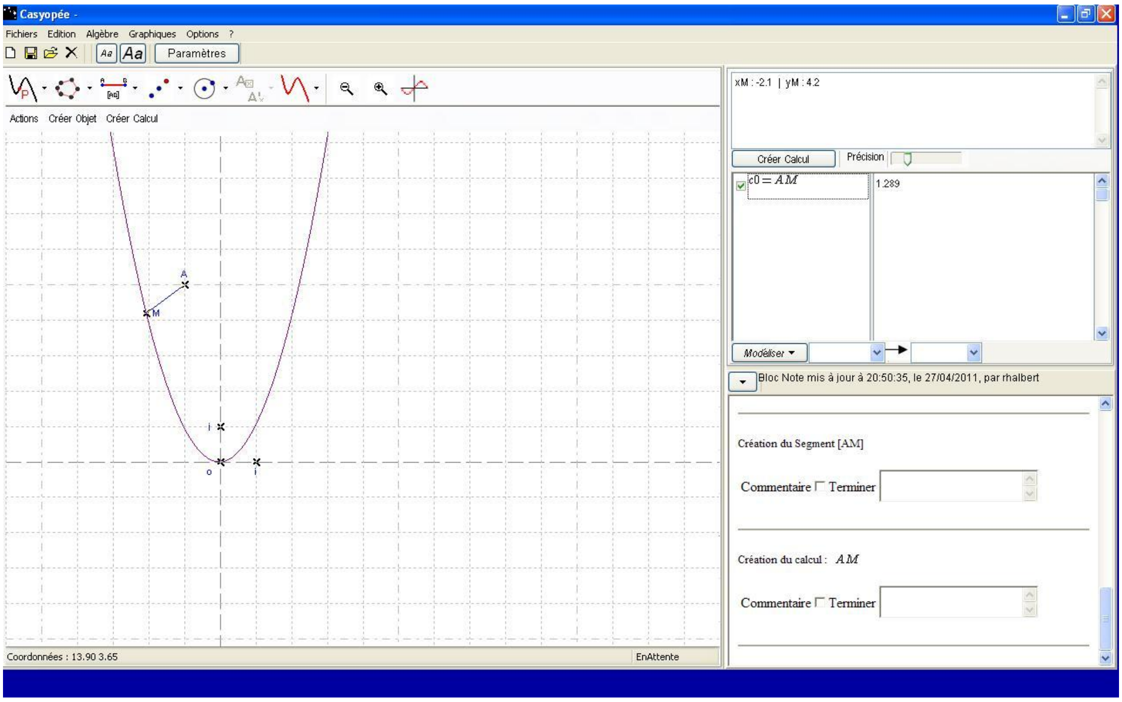
Chaque élève dispose durant la séance de la fiche élève et du logiciel Casyopée. A la fin de l'heure, il dépose son fichier réalisé avec le logiciel sur la plate forme de l'établissement.

Interaction professeur/élèves

Nous donnons ici trace d'échanges entre le professeur et des élèves au cours des trois grands niveaux sur la notion de dépendance fonctionnelle précisée précédemment :

Niveau 1 : réalisation d'une figure dynamique correspondant à la situation, exploration de cette figure pour émettre les premières conjectures sur la dépendance entre la distance et la position du point M.

Interaction entre le professeur (P) et l'élève (E) à l'ordinateur.	**Analyse**
P. Quel est le problème ? **E.** Il faut que la distance AM soit la plus petite possible. On doit trouver un endroit où M qui est sur la courbe soit le plus proche possible de A. **P.** En quoi le logiciel pourrait nous aider ? **P.** Qu'est-ce que l'on pourrait lui demander de calculer ? **E.** Hum…la distance AM. **P.** Et bien tu peux créer un calcul. **E.** On peut bouger M. C'est là… Là. Je vois 1,206. **P.** Tu peux donc déjà écrire quelques éléments sur ta démarche et ta conjecture puis continuer.	Passer de "M proche de A" à "une position de M tel que AM soit minimal" est une transition du domaine géométrique au domaine numérique au moyen d'une mesure.



Niveau 2 : définir une fonction modélisant cette dépendance et exploiter les possibilités du logiciel qui permet d’en obtenir une expression.

<table>
<tr><th>Interaction entre le professeur (P) et les élèves (E) après que certains élèves ont cherché à définir une fonction avec le logiciel.</th><th>Analyse</th></tr>
<tr><td>

P. Pour obtenir une meilleure approximation, vous voudriez avoir une fonction qui donne la distance AM. Mais quelle est la variable ? La distance AM en fonction de quoi ?

E. de M.

P. M, c’est un point. En fonction de quoi par rapport à M ? On ne va pas pouvoir définir une fonction qui à un point associe la distance AM.

P. Quand vous bougez M, comment on définit la position de M ? La position dépend de quoi ?

E. Les coordonnées

P. C'est-à-dire ?

E. l’abscisse et l’ordonnée

P. Laquelle choisit-on ?

E. L’ordonnée.

P. L’ordonnée. Si je dois repérer un point sur la une courbe, je suis sûre qu’il est sur la courbe. qu’est-ce que vous devez me donner pour être sûr d’obtenir la bonne position ?

E. L’ordonnée.

P. Vous me dites, repérer sur la courbe le point d’ordonnée 4.

E. Il y a deux points …. On a besoin de l’abscisse.

P. Avec l’abscisse, est-ce que l’on a un bon rendement ?

E. Oui.

P. J’ai un point sur la courbe et je connais son abscisse. Donc la position du point sur la courbe peut être caractérisée avec l’abscisse de M.

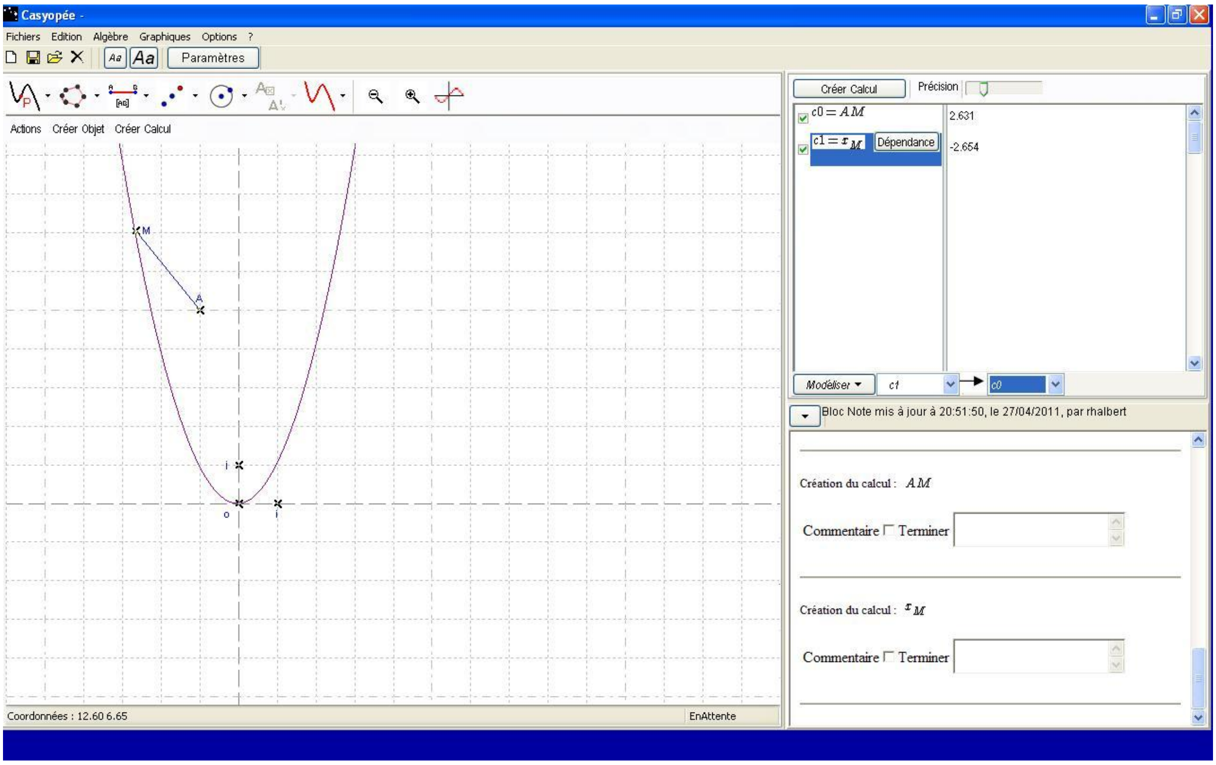
E. Oui, nous avons essayé avec le logiciel, yM ne marche pas mais xM oui.

</td><td>

Les élèves cherchent à proposer une fonction qui calcule la distance AM. Le challenge est ici d’identifier une variable qui peut être en covariation avec la distance AM. Ce n’est pas évident car les élèves perçoivent que la distance varie avec M mais ne comprennent pas comment l’on peut numériquement rendre compte de la position de M sur la courbe. Une des difficultés vient du fait que le point M est sur une courbe et qu’ainsi l’abscisse est suffisante pour caractériser sa position.

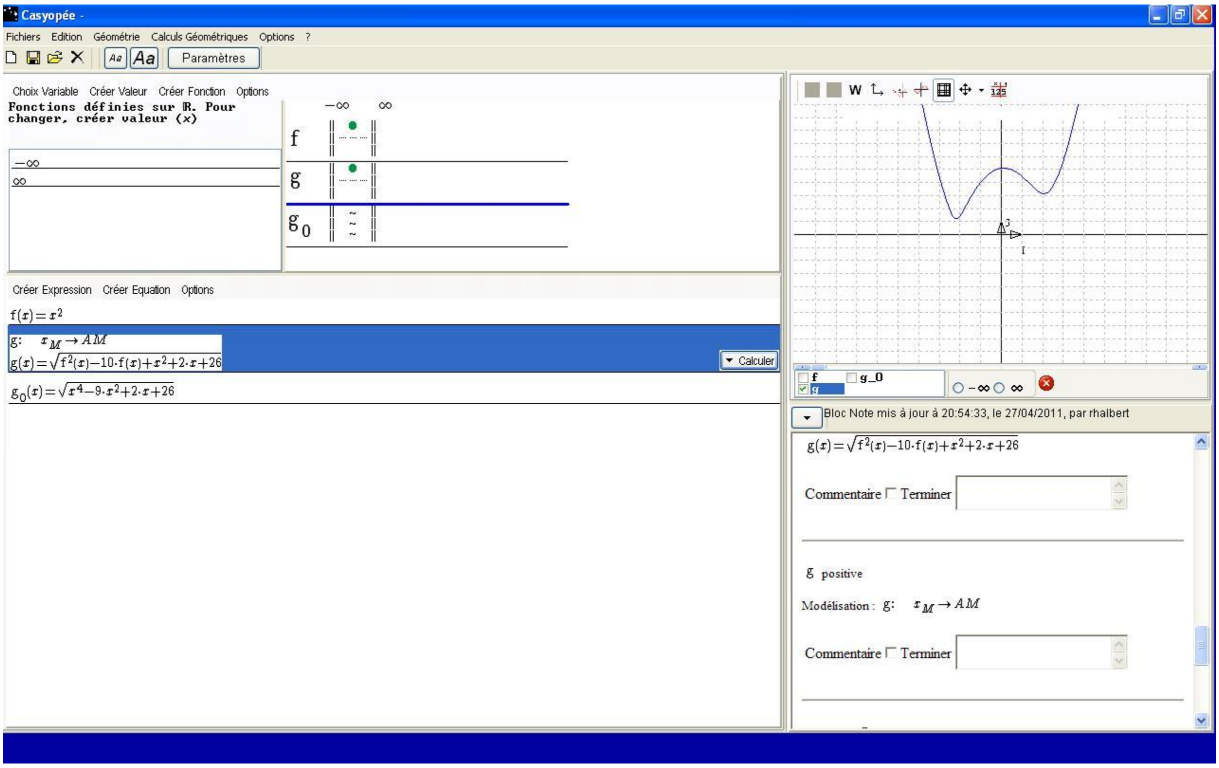
Le premier choix erroné par les élèves de l’ordonnée du point pour caractériser la position de M sur la courbe peut s’expliquer par l’allure de la parabole dont les branches sont « resserrées » : cette coordonnée leur permet de mieux de discerner les points. Le professeur amène les élèves à mettre en évidence que deux points de la courbe peuvent avoir la même ordonnée. Des élèves ont essayé avec le logiciel chacune des deux coordonnées pour le rôle de la variable et précise comme la discussion le prouve que le logiciel a refusé de créer une fonction lorsque le choix de la variable était l’ordonnée.

</td></tr>
</table>



Niveau 3 : utiliser cette fonction dans différents cadres (algébrique, fonctionnel, graphique) pour approcher la solution.

Interaction entre le professeur (P) et un élève (E) après qu'il ait obtenu une expression algébrique de la fonction.	**Analyse**
P. … Voilà la fonction, elle est jolie ? Est-ce qu'elle t'étonne cette fonction ? Que comporte-t-elle ? **E.** C'est un monstre… Il y a une racine carrée. **P.** Savez-vous pourquoi ? **E.** Parce qu'il y a une distance. **P.** Comment cela vous aide ? Regarder les valeurs sur le graphique… **E.** Oui, c'est plus facile d'identifier le minimum. **P.** Vous pouvez maintenant faire un petit rapport sur cette fonction et son utilisation de cette fonction.	L'élève est surprise par l'expression de la fonction fournie par le logiciel (la racine carrée d'une expression du second degré), mais il fait le lien avec la formule donnant la distance entre deux points connaissant leurs coordonnées. Mais l'objectif dans cette activité n'est pas de justifier l'expression obtenue. Il s'agit d'exploiter la courbe représentative de la fonction et d'établir le lien entre cette lecture graphique avec le problème posé.



4.3. Apport du logiciel

Lors de cette activité, le logiciel multi fenêtres a favorisé des phases exploratoires et des changements de cadre.

Dans le premier niveau, le calcul par le logiciel de la distance AM est assimilé à un affichage d'une mesure que le logiciel aurait effectuée. « Je bouge le point M en observant les valeurs qui s'affichent et je le bloque sur la position qui produit l'affichage de AM le plus petit ».

Le logiciel permet à l'élève de passer les niveaux deux et trois :

Au-dessous de l'affichage des « calculs » il trouve la possibilité de déclarer la dépendance entre AM et l'abscisse de M. Il peut expérimenter plusieurs variables (la dépendance entre l'ordonnée de M et AM sera refusée).

Enfin, l'observation, sur le même écran, de l'expression de la fonction obtenue et de sa représentation graphique fournies par le logiciel permet à l'élève une résolution du problème posé.

Le logiciel a permis de centrer la recherche sur la mise en place d'un lien fonctionnel en fournissant, après l'établissement de ce lien, une expression de la fonction.

Dans les différentes étapes, les élèves utilisent le calcul formel.

5. La Gouttière : Utilisation des possibilités du calcul formel

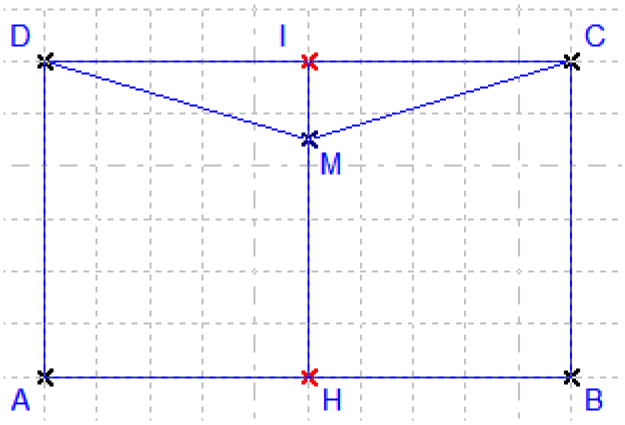
Nous présentons ci-dessous un problème issu de la banque de sujets de l'épreuve pratique de mathématiques en Terminale S (2007). IL a été testé en classe de Première L option math et en Première S avec le logiciel Casyopée. Ce problème nous semble intéressant car la modélisation conduit à une fonction avec radical dont l'étude sera facilitée par l'utilisation d'outils de calcul formel. Cependant le noyau de calcul formel (Maxima) ne fournit pas systématiquement les réponses souhaitées par les élèves, ils devront donc élaborer une stratégie pour obtenir une réponse au problème tout en continuant à utiliser des outils de calcul formel du logiciel.

5.1. Le problème

On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir.

On donne ci-dessous le plan de cette façade. Sur ce plan, (MH) est la médiatrice de [DC].

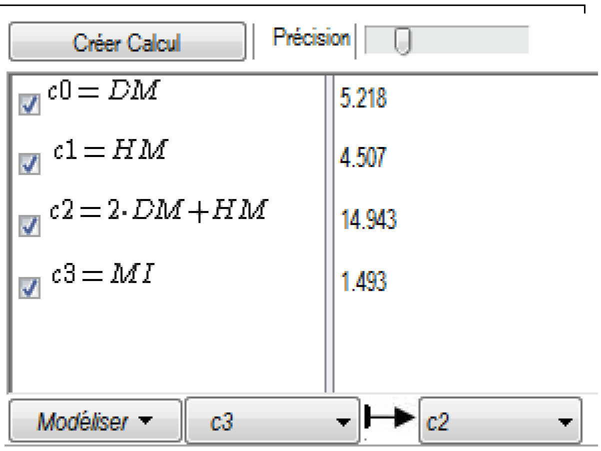
Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.



5.2. Résolution dans l'environnement Casyopée

Dans la fenêtre de géométrie dynamique, création de la figure puis, création des calculs DM, HM, 2 DM + HM et MI avec le menu « Créer Calcul ».

Choix de la variable : MI (l'utilisateur choisit parmi les variables c_0, c_1, c_2 et c_3 celle qui lui apparaît la plus adaptée). La dépendance entre les variables n'est pas forcément univoque. En demandant de « *Modéliser* », le logiciel indique si celle-ci permet la définition d'une fonction.

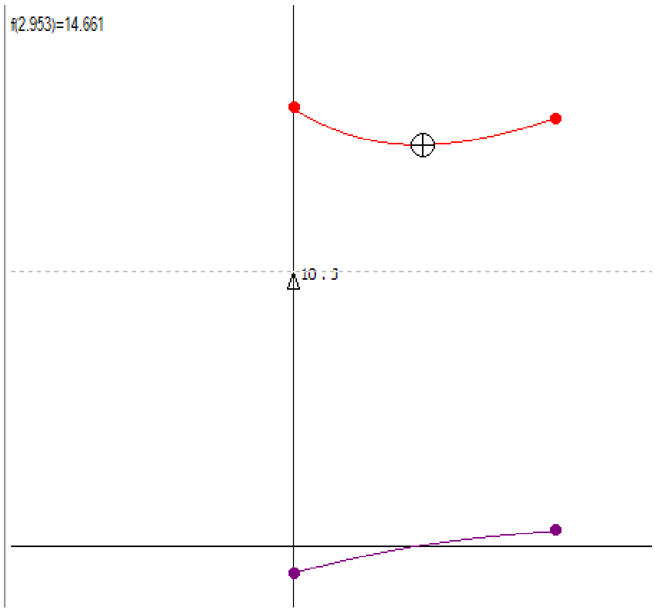


Affichage dans la fenêtre algèbre du résultat de la modélisation et utilisation de la commande « dérivée » du menu « Calculer »

f: $MI \rightarrow 2\cdot DM + HM$

$f(x) = 2\cdot\sqrt{x^2+25} - x + 6$

$f'(x) = \frac{2\cdot x}{\sqrt{x^2+25}} - 1$

Représentation graphique des fonctions f (en rouge) et de sa fonction dérivée. Mise en évidence graphiquement de l'existence d'un minimum.	
Utilisation de la commande « Zéros » du menu « Calculer » pour obtenir le zéro ou la racine d'une expression. Pas de réponse du logiciel.	zéros f' : Pas trouvé de solutions
Dans le menu « Créer Equation », le logiciel ne peut donner de solutions à l'équation f '(x) = 0.	Créer Equation $f'(x)=1$ Résolution $f'(x)=1$ en x Pas trouvé de solutions
Création de la sous expression notée f_0'(x) par la commande « Sous-expressions » du menu « Calculer ».	$f_0'(x)=\frac{2\cdot x}{\sqrt{x^2+25}}$ Calculer
Création d'une nouvelle fonction définie sur le même ensemble que celui de la fonction f.	$g(x)=f_0'^2(x)$

Résolution par le logiciel de l’équation g(x) =1 et vérification de l’appartenance des solutions à l’ensemble de définition de la fonction.	Résolution $g(x)=1$ en x Sans vérification $\left\{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$ Certainement réel $\left\{-\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}, \frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$ Certainement dans l'ensemble de définition : $\left\{\frac{5\cdot\sqrt{3}}{3}\right\}$

5.3. L’activité en classe

Objectif

- Modéliser géométriquement la situation.
- Réinvestir des connaissances sur les applications de la dérivée pour résoudre un problème d'optimisation issue d'une situation concrète.

Pré-requis

- Fonction dérivée.
- Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction.
- Connaissance des deux fenêtres de Casyopée.

Travail attendu des élèves

- Construire une figure dynamique avec le logiciel Casyopée.
- Demander des calculs de longueurs au logiciel.
- Conjecturer la position du point M qui rend minimale la longueur des tuyaux.
- Utiliser les fonctionnalités de modélisation et de calcul formel de Casyopée pour obtenir l'expression de la fonction qui donne la longueur des tuyaux, l'expression de sa dérivée puis son signe.

Apports du logiciel Casyopée

- Il permet la modélisation géométrique du problème dans la géométrie dynamique.
- Il aide l'élève à modéliser la situation et favorise sa prise d'initiative en le laissant choisir la variable car le logiciel lui permet de déterminer et de relier les mesures pouvant être utilisées pour définir la fonction.
- Il aide à la compréhension du problème dans ses différents cadres de résolution et favorise ainsi le travail réflexif par la communication possible entre les fenêtres de calcul symbolique et de géométrie dynamique.
- Il soulage les élèves de calculs laborieux en ayant recours aux possibilités du calcul formel, notamment lors des calculs de dérivées qui peuvent s'avérer trop complexes en classe de 1ère (fonction composée avec une racine carrée).

5.4. Déroulement de l'expérimentation en $1^{ère}$ S et en $1^{ère}$ L

L'activité se déroule sur deux séances :

Une séance de TP d'une heure en salle ordinateur, un élève par poste. L'activité leur est proposée sous forme de situation-problème, sans questionnement intermédiaire.
Le professeur intervient pour répondre aux questions techniques spécifiques au logiciel et pour valider la construction.

Une synthèse en classe entière dans une salle équipée d'un système de vidéoprojection ou d'un Tableau Numérique Interactif.

Travail effectif des élèves

Pendant l'heure de recherche, les élèves réalisent la figure, calculent la longueur de gouttière, et explorent la position du minimum.
Ils apparaissent très impliqués dans ces tâches qui correspondent à une activité mathématique à part entière :

La construction les oblige à analyser la figure, à réfléchir sur les liens de dépendances entre les objets géométriques et sur leur ordre de construction :

"Comment construire la médiatrice de [CD] ?

Comment créer le point M dont dépend le problème ? ...."

La figure construite, la manipulation du point M les aide à mieux comprendre le problème posé, d'en cerner qualitativement les enjeux et d'observer quelques positions particulières de M :

"Les longueurs DM et MC sont égales, pourquoi ?
Lorsque l'on déplace M, DM et MC qui sont égales évoluent dans le sens contraire de MH.
Qui l'emporte ?
La longueur minimale correspond-elle à des positions particulières de M : lorsque M est sur [DC] ?
Lorsque M est sur [AB] ? Lorsque M est au milieu ? ...."

Pour certains élèves, ce travail nécessite l'heure entière. Il s'avère indispensable pour la compréhension du problème posé, très riche pour l'activité mathématique des élèves et fondamental pour la construction de leurs connaissances (ici les fonctions comme étude de dépendances entre des grandeurs).

Après avoir créé les calculs géométriques déterminant la longueur de la gouttière, les élèves peuvent approcher la solution par exploration numérique et confronter cette exploration à leurs questionnements.

En choisissant une variable (y_M ou IM ou encore IH), ils peuvent exporter la fonction dans la fenêtre algébrique, puis chercher le minimum par lecture graphique et par utilisation de la table de valeurs, comme ils le feraient sur leur calculatrice graphique. Ils peuvent surtout visualiser simultanément la représentation graphique de la fonction et la construction géométrique de la gouttière.

Pour les élèves qui ont eu le temps de l'aborder, ce travail apparaît riche en questionnements mathématiques:

"Quelles variables numériques caractérisent la position du point M ? Laquelle choisir ? Comment interpréter sur la figure géométrique le minimum observé sur la représentation graphique de le fonction ?..."

Prolongement

Quelques élèves ont le temps d'approfondir et d'utiliser le calcul formel pour justifier leur conjecture numérique, en calculant la fonction dérivée et en cherchant ses différentes écritures algébriques possibles.

$$f'(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+25}} - 1 \text{ ou } f'(x) = \frac{2x - \sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+25}}.$$

Les expressions obtenues faisant intervenir des fonctions composées de la racine carrée, elles sont difficilement exploitables par les élèves. Il s'avère que le module de calcul formel n'est pas en mesure de trouver les zéros.

Ces points restés sans réponse seront exploités en classe entière avec Casyopée lors de la synthèse collective.

Synthèse en classe entière

La synthèse a pour objectif d'approfondir le travail réalisé durant l'heure de TP en exploitant les fonctionnalités de calcul formel de Casyopée.

Elle se déroule en classe entière dans une salle équipée d'un TNI. Des élèves viennent au tableau manipuler le logiciel à partir d'une figure déjà réalisée.

La détermination par exploration numérique de la position du point M minimisant la longueur de la gouttière ayant été réussie par tous durant la séance de TP, la synthèse collective est consacrée à la modélisation fonctionnelle du problème posé, puis à l'exploitation de cette fonction dans une démarche de justification algébrique.

La présence de la racine rendant l'étude du signe de la dérivée compliqué, le travail se limite à la recherche de la valeur exacte du zéro de la dérivée. Une indication est cependant donnée pour permettre l'étude de son signe.

Modélisation fonctionnelle

Le logiciel générant directement l'expression algébrique de la longueur en fonction d'une variable choisie, plusieurs essais sont effectués en choisissant successivement comme variable IM, yM, DM, HM...

La variable retenue est finalement IM, l'expression algébrique semblant la plus simple. La fonction exportée dans la fenêtre d'algèbre de Casyopée est alors :

$$\mathrm{f}: \quad MI \to 2 \cdot DM + HM$$
$$\mathrm{f}(x) = 2 \cdot \sqrt{x^2+25} - x + 6$$

On peut la grapher facilement, et visualiser ainsi le minimum.

Le calcul de la fonction de la dérivée paraît très difficile pour des élèves de 1ère L qui ne connaissent pas les règles de dérivation des fonctions composées.

Recherche du zéro de la dérivée

La discussion porte alors sur le choix de la forme algébrique la mieux adaptée à la résolution de l'équation *f'(x)*=0.

Les élèves proposent de choisir $f'(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x^2+25}}{\sqrt{x^2+25}}$ et de résoudre *f '(x)*=0.

Le logiciel ne donnant pas de solution l'enseignant suggère d'exploiter l'expression $f'(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{x^2+25}} - 1$ et d'en extraire la sous-expression $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+25}}$ puis de résoudre l'équation $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+25}} = 1$

Le logiciel ne donnant toujours pas de solution, l'enseignant demande aux élèves de résoudre cette équation au papier/crayon. Cette résolution aboutit à la recherche d'un trinôme du second degré qui se traite en 1ère L sous forme canonique : $\frac{4x^2}{x^2+25}=1$

$$4x^2 = x^2 + 25$$

Une fois les calculs effectués à la main, ils sont vérifiés à l'aide de Casyopée.

La valeur trouvée est alors reportée dans la géométrie dynamique pour vérifier qu'elle répond au problème posé.

Remarques sur le scénario en classe de 1ère.

L'activité se déroule sur deux séances :

Une séance de TP d'une heure en salle ordinateur, un élève par poste. L'activité leur est proposée sous forme de situation-problème, sans questionnement intermédiaire.
Le professeur intervient pour répondre aux questions techniques spécifiques au logiciel et pour valider la construction.

Une synthèse en classe entière , dans une salle équipée d'un système de vidéoprojection ou d'un Tableau Blanc Interactif.

L'effectif réduit de cette classe a permis au professeur d'être fréquemment avec chaque élève lors de la séance sur ordinateur.

Testée avant l'expérimentation en 1ère S, l'énoncé ne spécifiait pas la présence de M sur la médiatrice du segment [AB] et a donné lieu à un questionnement spécifique de la part des élèves.

L'étude des variations de la fonction paraissant en dehors des capacités des élèves de 1ère L, le travail se limite à la recherche d'une valeur approchée du zéro de la dérivée, le calcul de la valeur exacte faisant l'objet de la synthèse collective.

6. Productions disponibles sur le web

Les situations élaborées, expérimentées puis analysées par le groupe ont fait l'objet de publications disponibles sur le web. Le tableau ci-dessous en propose un classement. Pour chacune des situations, une fiche détaillée est reproduite.

En général le scénario a été le suivant :

- Une séance de TP en salle informatique (1h ou 2h), en demi-groupe
- Une synthèse en classe entière, dans une salle équipée d'un système de vidéoprojection ou d'un Tableau Blanc Interactif.

Les fiches élèves sont ramassées à la fin de la séance en salle informatique. Ce travail avec le logiciel peut être complété par un travail de recherche par exemple, un devoir à la maison.
Pour certaines situations le scénario a été complété.

Introduire une notion		
Etude de signes avec Casyopée	2nde	Activité d'apprentissage sur le signe d'un produit en seconde
Résolution d'équations du type $y = ax + b$	2nde	Activité dans le cadre de l'accompagnement personnalisé en classe de seconde
Second degré en classe de seconde	2nde	Une activité en classe de seconde sur les fonctions du second degré en utilisant le logiciel Casyopée
Optimiser		
Distance minimale d'un point fixe à une parabole	2nde	Optimisation d'une distance
Aire minimale d'un carré dans un carré	2nde	Optimisation d'aire
Modéliser une situation physique		
L'âne et le puits	2nde	Une activité en classe de seconde traitant d'une situation physique et utilisant le logiciel Casyopée.
La Nacelle	TS	modélisation d'un système physique et non dérivabilité en Terminale S

Le triangle de Minh	3e, 2nde, 1S, TS	Expérimentation d'une même situation à différents niveaux d'enseignement, de la Troisième à la Terminale

Etudier une situation géométrique		
Modélisation avec le logiciel Casyopée (le jardin)	2nde	Modélisation d'une situation géométrique en étudiant les dépendances entre des grandeurs.
La gouttière	1L, 1S	modélisation d'une situation concrète à l'aide du logiciel Casyopée
Courbes à sous tangentes de longueur constante	TS	Une situation géométrique qui conduit à résoudre une équation différentielle
Vers la quadrature de la parabole	TS	Un problème historique de calcul d’aire

6.1. Introduire une notion

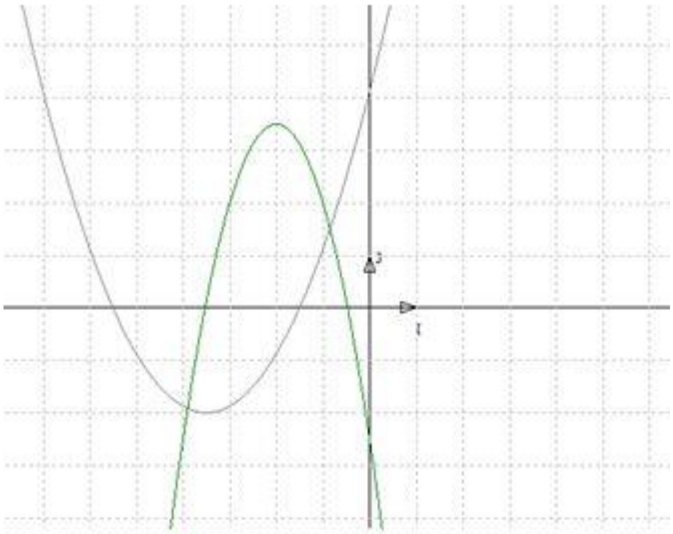
Etude de signes avec Casyopée (classe de Seconde)

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/etude-du-signe-d
Objectifs	• Réinvestir les connaissances (vues en la classe de troisième) des élèves sur les fonctions affines • Elaborer un tableau de signes d'un produit du type (ax+b)(cx+d) à partir de lectures graphiques • Comprendre le passage d'un tableau de deux à trois colonnes • Faire le lien entre le calcul algébrique et l'étude de fonctions
Pré-requis	• Lecture graphique du signe d'une fonction • Mise en forme dans un tableau • Sens de variation d'une fonction affine
Apports du logiciel	• Favoriser des phases exploratoires • Illustrer graphiquement la situation produit • Permettre les représentations simultanées de cadres (graphique, algébrique) • Décharger les élèves d'une partie du travail algébrique technique • Initier les élèves aux fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel • Apprendre aux élèves à justifier et à rédiger
Scénario	Le scénario est composé de 3 séances : • Séance 1 : introduction du signe de ax + b, en classe entière, avec un TBI • Séance 2 : découverte et mise en place de la méthode de détermination du signe d'un produit de fonctions affines, en salle informatique, en demi groupe • Séance 3 : mise en forme de la méthode, en classe entière, sans l'utilisation de Casyopée

Résolution d'équations du type *y = ax + b* (accompagnement personnalisé en classe de Seconde)

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/equations-seconde
Objectifs	• aborder la résolution d'équation du premier degré et des "équations produits" avec de nouvelles approches en utilisant les connaissances acquises sur les fonctions en classe de seconde et les possibilités offertes par des outils de calcul formel • donner des méthodes pour vérifier les solutions (approchées ou exactes) d'une équation • savoir interpréter les solutions d'une équation
Scenario	• Deux séances en salle informatique sur le temps de l'accompagnement personnalisé • Réinvestissement du travail en classe entière • Travail à la maison
Le constat	Lors de séances en salle informatique où les élèves de seconde travaillaient sur le signe d'expressions (voir le mini site http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/etude-du-signe-d), nous avons pu observer des difficultés à résoudre en "papier/crayon" des équations du premier degré (de la forme ax+b=0). Dans le processus de résolution, nous avons repéré quelques erreurs fréquentes : ○ ax = b devient x = b - a ○ ax = b devient x = b*a ou a/b. Les élèves apprennent des algorithmes de résolution mais en tant qu'enseignant avons-nous la certitude qu'ils ont compris ces algorithmes, les ont-ils mémorisés et ont-ils les moyens de les vérifier ?

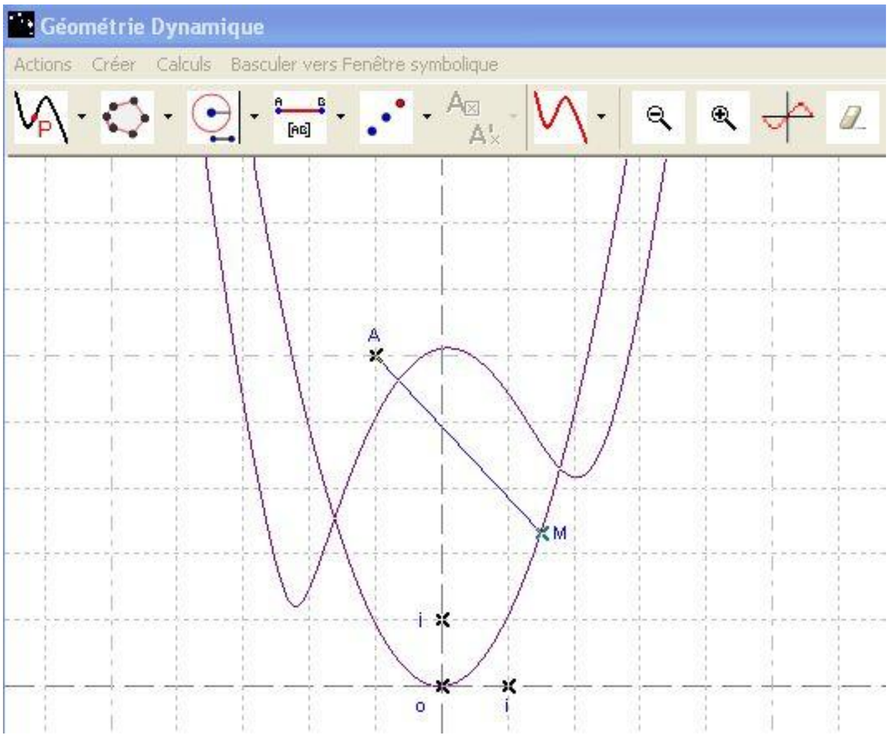
Second degré (classe de Seconde)

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/second-degre
Objectifs	• Découvrir les différentes expressions algébriques d'une fonction du second degré • Lier ces expressions à des considérations graphiques • Renforcer la notion d'expressions algébriques équivalentes en association à des courbes superposables • Préparer l'étude des fonctions polynômes de degré 2
La situation	Il s'agit d'explorer la fonction dont l'expression algébrique est $a(x - b)^2 + c$ Quelle courbe obtient-on ? Quels sont les effets sur la courbe si l'un des paramètres est modifié ? Cette exploration est faite à travers deux types de jeu de cibles: ○ la courbe est donnée et il faut déterminer les valeurs des réels a, b et c ○ l'expression polynomiale est donnée et il faut déterminer a, b et c. 
Apports du logiciel	• Créer des expressions algébriques • Manipuler dynamiquement des expressions algébriques par pilotage de paramètres • Générer les graphes correspondant • Mettre à disposition les commandes de calcul symbolique (développement, factorisation....).
Scenario	L’activité se déroule sur deux séances. ○ Une séance de TP en salle informatique, en demi-groupe ○ Une synthèse en classe entière, dans une salle équipée d’un système de vidéoprojection ou d’un Tableau Blanc Interactif

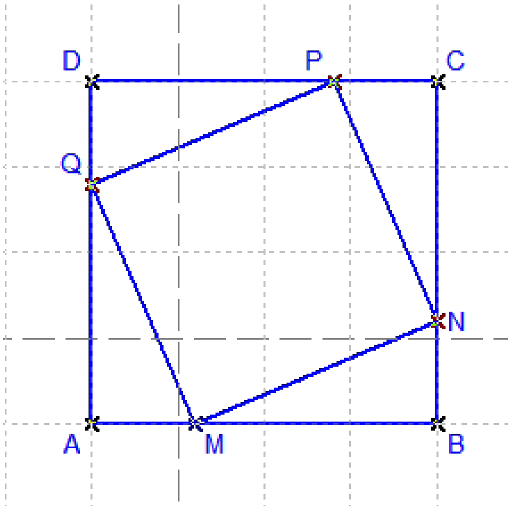
6.2. Optimiser

Distance minimale d'un point fixe à une parabole (classe de Seconde).

Cette situation est étudiée au paragraphe 4 de la brochure.

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/optimisation-seconde
Objectifs	• Réaliser un imagiciel adapté à la situation et l'exploiter • Analyser des résultats pour émettre une conjecture • Exploiter différents cadres : algébrique, fonctionnel et graphique
Pré-requis	• Notion de minimum d'une fonction • Lecture graphique d'une courbe représentative de fonction
La situation	Le plan est muni d'un repère orthonormal (I,I,J). On considère la courbe (C_f) de la fonction définie sur ℝ par $f(x)=x^2$ et le point A (–1;5). M est un point libre de la courbe (C_f). **.Le but de l'activité est de déterminer, si elle(s) existe(nt), la (ou les) position(s) de M telle(s) que la distance AM soit la plus petite possible.** 
Apports du logiciel	• Favoriser des phases exploratoires en exploitant les différentes fenêtres • Permettre et favoriser les changements de cadres : graphique, algébrique • Favoriser la recherche d'un lien fonctionnel entre deux grandeurs sans obligation de donner une expression de cette fonction • Initier les élèves aux fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel
Scenario	L'activité se déroule sur deux séances : ○ Une séance de TP (1h) en salle informatique, en demi-groupe ○ Une synthèse (1h) en classe entière, dans une salle équipée d'un système de vidéoprojection ou d'un Tableau Blanc Interactif

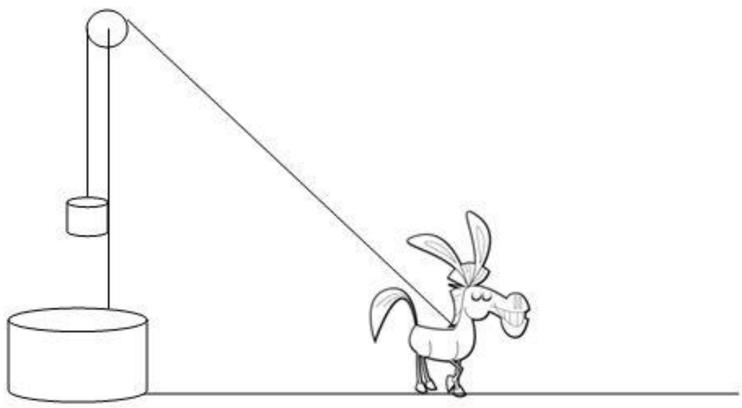
Aire minimale d'un carré dans un carré (classe de Seconde)

<table>
<tr><td>Lien</td><td>http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/carre-dans-carre</td></tr>
<tr><td>Objectifs</td><td>Appréhender les contraintes dans la réalisation d'une figure en géométrie dynamique
Réaliser un imagiciel adapté à la situation et l'exploiter
Analyser des résultats pour émettre une conjecture
Travailler la notion de minimum d'une fonction sur un intervalle [a,b]
Démontrer une conjecture en exploitant le travail expérimental et le calcul formel
Favoriser la prise en main d'un nouveau logiciel en classe entière</td></tr>
<tr><td>Pré-requis</td><td>Notion de minimum d'une fonction sur un intervalle [a,b]
Lecture graphique d'une courbe représentative de fonction</td></tr>
<tr><td>La situation</td><td>ABCD est un carré de côté 4. M appartient à [AB], N appartient à [BC], O appartient à [CD],
P appartient à [AD] avec AM = BN = CO = DP.


Pour quelle(s) position(s) du point M, l'aire de MNOP est-elle minimale ?</td></tr>
<tr><td>Apports du logiciel</td><td>Favoriser des phases exploratoires en exploitant les différentes fenêtres
Favoriser la recherche d'un lien fonctionnel entre deux grandeurs sans obligation de donner une expression de cette fonction
Initier les élèves aux fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel</td></tr>
</table>

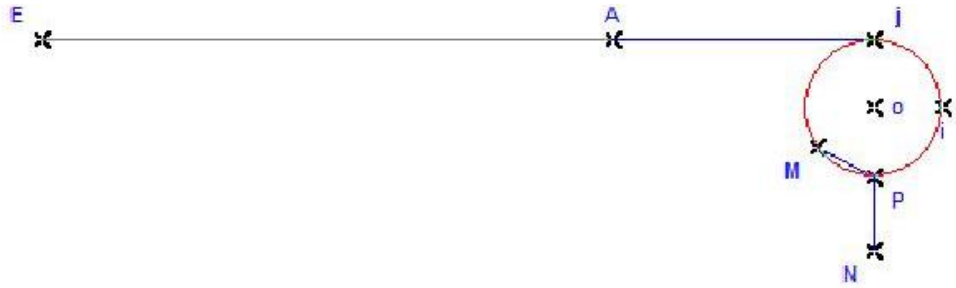
6.3. Modéliser une situation physique

L'âne et le puits (classe de Seconde)

<table>
<tr><td>lien</td><td>http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/l-ane-et-le-puits/</td></tr>
<tr><td>Objectifs</td><td>Traiter un exercice où apparaissent des mouvements rectilignes
Modéliser une situation physique à l'aide de la géométrie dynamique
Etudier le lien entre des grandeurs
Utiliser les représentations graphiques pour conjecturer des solutions d'équations
Utiliser le calcul formel pour résoudre des équations</td></tr>
<tr><td>La situation</td><td>Un âne tire une corde de 13m au bout de laquelle se trouve un seau. Le puits est peu profond et sa margelle est à 1 m du sol. La poulie est à 6 m du sol et la corde est accrochée au cou de l'âne à 1 m du sol.

Le but de l'activité est d'étudier le lien entre la position de l'âne et la hauteur du seau, en répondant à un certain nombre de questions :
Jusqu'à quelle distance de la verticale de la poulie l'âne peut-il se déplacer ?
Pour quelle position de l'âne le seau est-il au niveau du sol ?
Pour quelle position de l'âne le seau sort-il de la margelle du puits ?
Pour quelle position de l'âne la distance « poulie-seau » égale-t-elle celle « poulie-âne » ?</td></tr>
<tr><td>Pré-requis</td><td>Avoir déjà construit une figure dynamique dans Casyopée
Connaître la fenêtre de géométrie dynamique et son menu calcul et exportation
Résoudre graphiquement puis algébriquement une équation</td></tr>
<tr><td>Apports du logiciel</td><td>Créer une figure dynamique modélisant la situation
Faciliter l'exploration numérique
Traiter des expressions algébriques "compliquées"
Générer les graphes correspondant
Résoudre des équations graphiquement
Obtenir à l'aide du calcul formel la solution exacte d'équations
«Situer » ces solutions exactes dans la fenêtre de géométrie dynamique</td></tr>
<tr><td>Scenario</td><td>L'activité a été testée en classe de seconde. Elle s'est déroulée en trois temps :
Une séance de TP d'une heure en salle informatique, en demi-groupe
Un devoir de recherche à la maison
Une synthèse en classe entière, dans une salle équipée d'un sytème de vidéoprojection ou d'un Tableau Blanc Interactif</td></tr>
</table>

La Nacelle

Cette situation est étudiée au paragraphe 1.1 de la brochure.

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/la-nacelle
Objectifs	• Mettre en relation un phénomène physique avec les propriétés d'une fonction modélisant une dépendance • Effectuer une modélisation en deux temps • Du système physique à une figure en géométrie dynamique • De la figure à une fonction algébrique • Repérer des zéros et des discontinuités de la dérivée • Interpréter ces propriétés en termes cinématiques
La situation	On considère une roue circulaire, de 1m de rayon, mobile autour de son axe horizontal. Une corde de 12m de long est enroulée autour de la roue, de telle façon que si l'on tire la corde par son extrémité libre A, la roue se met à tourner. Le point E est la position la plus éloignée du point A par rapport au point j. Une autre corde de 2m de long est fixée en un point M de la circonférence, elle passe par un guide fixé en P, proche de la roue, à 1m de l'axe et sur la verticale (jo). La nacelle est accrochée à l'extrémité N de cette corde de 2m. Lors du lancement, le point A est en j et le point M est en i. On s'intéresse au mouvement du point N.  Le mouvement a été choisi pour qu'une personne placée dans la nacelle ressente différemment le passage au point haut et au point bas quand la roue est animée d'un mouvement uniforme. Il est attendu des élèves qu'ils identifient cette différence et qu'ils l'associent avec des propriétés différentes de la fonction (dérivabilité et non-dérivabilité) modélisant ce mouvement.
Pré-requis	• Savoir exprimer les coordonnées d'un point du cercle trigonométrique • Savoir exprimer la longueur d'un arc de cercle • Savoir calculer les coordonnées de points mobiles • Savoir utiliser la dérivée pour l'étude d'une fonction • Connaître les fonctionnalités de modélisation et de calcul formel dans Casyopée
Apports du logiciel	• Permettre et favoriser les changements de cadres au cours de la modélisation : du système physique à la figure en géométrie dynamique puis à une fonction algébrique • Permettre des allers et retours entre ces différents cadres • Faciliter le passage au cadre algébrique en déchargeant les élèves du travail technique de recherche d'une formule et de sa dérivée • Favoriser l'interprétation des représentations graphiques en lien avec la formule, les transformations étant prises en charge par le logiciel
Scenario	L'activité se déroule sur deux séances. ○ Une séance de TP en salle informatique (2h), en demi-groupe ○ Une synthèse en classe entière (1h), dans une salle équipée d'un système de vidéoprojection ou d'un Tableau Blanc Interactif

Le triangle de Minh

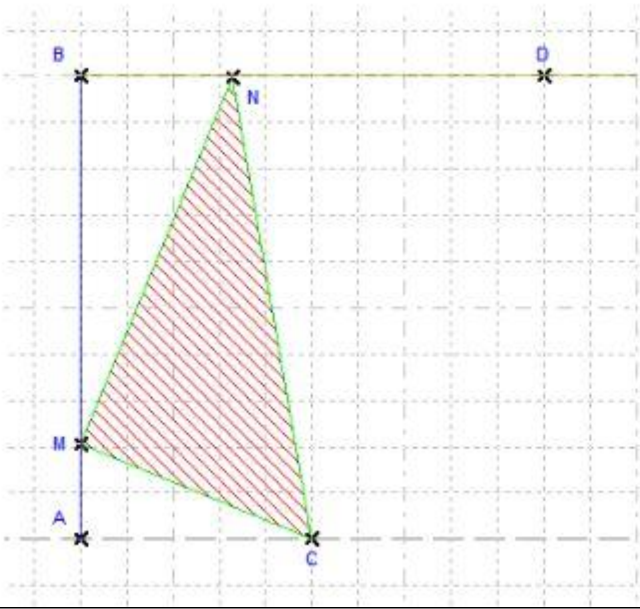
Cette situation est étudiée au paragraphe 3 de la brochure.

Lien : http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/le-triangle-minh

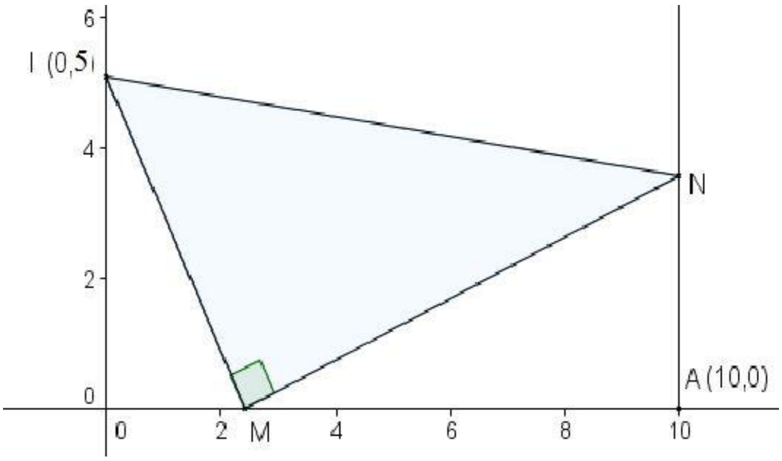
En classe de Troisième

Objectifs	• Construire une figure avec contraintes • Mettre en évidence un lien fonctionnel entre deux grandeurs • Exploiter la représentation graphique d'une fonction pour résoudre une équation • Manipuler le vocabulaire sur le thème des fonctions
La situation	Sur la figure ci-dessous, OA = 10 cm et AC = 5 cm. A partir d'un point M appartenant au segment [OA], on construit sur la droite (d) le point N tel que le triangle CMN soit un triangle rectangle en M.  **Existe-t-il une ou des positions du point M telle(s) que l'aire du triangle CMN soit égale à 24 cm² ?**
Pré-requis	Les généralités sur la notion de fonction : notation, image, antécédent(s), tableau de valeurs, courbe représentative, expression

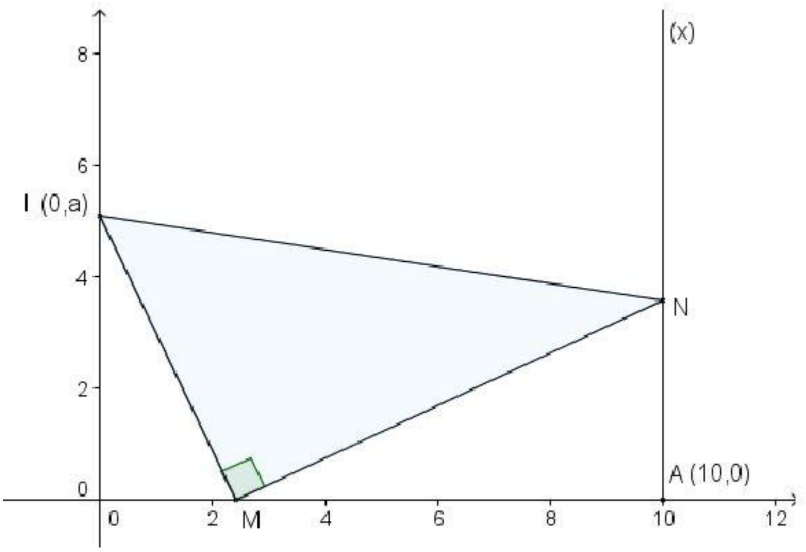
En classe de Seconde

Objectifs	• Reconnaître une dépendance entre des objets géométriques • Etudier la co-variation entre grandeurs et créer une fonction • Déterminer graphiquement le maximum d'une fonction • Justifier l'existence d'un maximum • Revenir au problème initial en associant les interprétations graphiques et les résultats obtenus par les calculs
La situation	Un navigateur veut fabriquer une voile en forme de triangle rectangle. Il utilise un cadre fixe CABD dont les dimensions sont AC = 5m, AB = 10m et BD = 10m. Il fixe une des extrémités de la voile en C. La deuxième extrémité M peut se déplacer sur le segment [AB], enfin, le triangle CMN doit être rectangle en M avec N appartenant au segment [BD]. **Il désire que la voile soit la plus grande possible.** 
Pré-requis	• Savoir construire un triangle rectangle et savoir calculer son aire • Savoir définir une fonction (à un réel x on associe l'expression notée f(x)) • Savoir lire graphiquement un extremum • Reconnaître une forme factorisée d'une forme développée et savoir choisir la forme adaptée pour en étudier le signe

En classe de Première

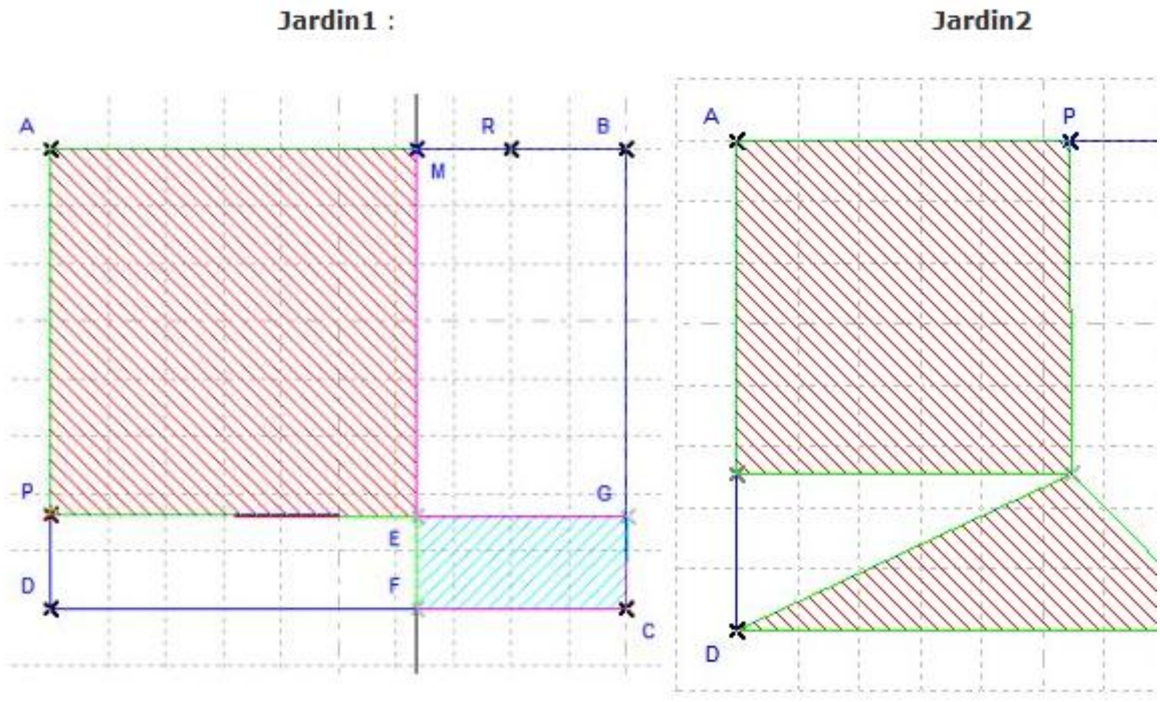
Objectifs	• Construire une figure avec contraintes • Exploiter la figure de géométrie dynamique pour émettre des conjectures sur l'aire maximale • Modéliser la situation à l'aide de fonctions • Mobiliser ses connaissances mathématiques(fonctions dérivées, trinôme) pour justifier les conjectures
La situation	Dans un repère orthonormal de centre O, on considère les points A(10;0) et I(0;5) , ainsi que la demi droite [Ax) parallèle à l'axe des abscisses. M est un point variable du segment [OA]. On construit le triangle IMN rectangle en M, avec N appartenant à [Ax).  **Le but de l'activité de déterminer s'il existe des positions du point M telle que cette aire soit maximale.**
Pré-requis	• Utilisation de Casyopée pour étudier le lien fonctionnel entre deux grandeurs issues d'une situation géométrique • Variations de fonction et signe de la fonction dérivée

En Terminale

Objectifs	• Construire une figure avec contraintes • Exploiter la figure de géométrie dynamique pour émettre des conjectures sur l'aire maximale • Modéliser la situation à l'aide de fonctions • Mobiliser ses connaissances mathématiques (fonctions dérivées, trinôme) pour justifier les conjectures • **Généraliser l'étude et étudier une famille de fonctions suivant les valeurs d'un paramètre** • Rédiger un compte rendu
La situation	Dans un repère orthonormal de centre O, on considère les points A(10;0) et I(0;a) où a est un paramètre positif, ainsi que la demi droite [Ax) parallèle à l'axe des ordonnées. M est un point variable du segment [OA]. On construit le triangle IMN rectangle en M, avec N appartenant à [Ax).  **Le but de l'activité de déterminer s'il existe des positions du point M telle que cette aire soit maximale.**
Pré-requis	• Utilisation de Casyopée pour étudier le lien fonctionnel entre deux grandeurs issues d'une situation géométrique • Variations de fonction et signe de la fonction dérivée (programme de Première) • Distinguer les différents statuts des lettres en algèbre : inconnues, variables, paramètres ....

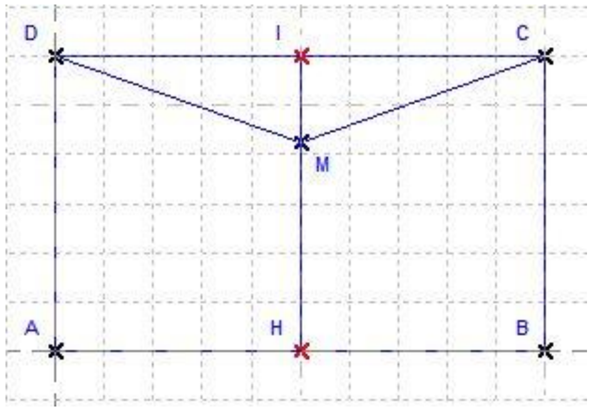
6.4. Etudier une situation géométrique

Modélisation avec le logiciel Casyopée : le jardin (classe de Seconde)

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/modelisation
Objectifs	• Modéliser une situation en étudiant les dépendances (ou covariance) entre des grandeurs • Créer des fonctions permettant l'étude de ces dépendances en répondant à des questions de nature algébrique (résolution d'équations, recherche d'extremums) • Donner du sens et de la motivation pour le calcul algébrique qui apparaît au cours de la modélisation lors des synthèses en classe entière
La situation	 Le but de chacune des activités est de trouver le(s) position(s) de M pour que les deux aires hachurées soient égales.
Apports du logiciel	• Il est une aide pour modéliser, créer des fonctions, résoudre des équations, rechercher des extrémums • Grâce aux outils de calcul formel, il libère les élèves de tâches calculatoires qui souvent les bloquent dans leurs recherches ; de plus, il participe à la compréhension des différentes écritures algébriques • Par l'utilisation de différents registres (numériques, graphiques, symbolique), l'élève progresse dans sa compréhension des situations • Il aide à la structuration d'une démarche de résolution
Scenario	Séance 1 : Recherche en salle informatique du problème "Jardin1" avec Casyopée à partir d'une figure déjà construite Correction de la recherche en classe entière Séance 2 : Recherche du problème de réinvestissement "Jardin2" incluant une construction de figure dans le module de géométrie dynamique.

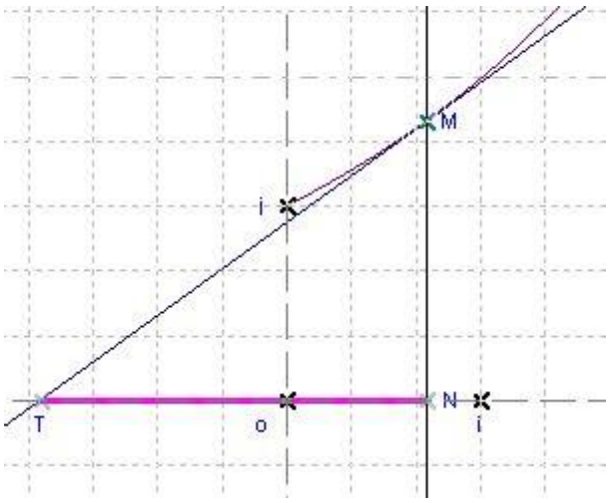
La gouttière (classe de 1S, 1L option math, TS),

Cette situation est étudiée au paragraphe 5 de la brochure. Elle est issue de la banque de sujets de l'épreuve pratique de mathématiques en Terminale S (2007).

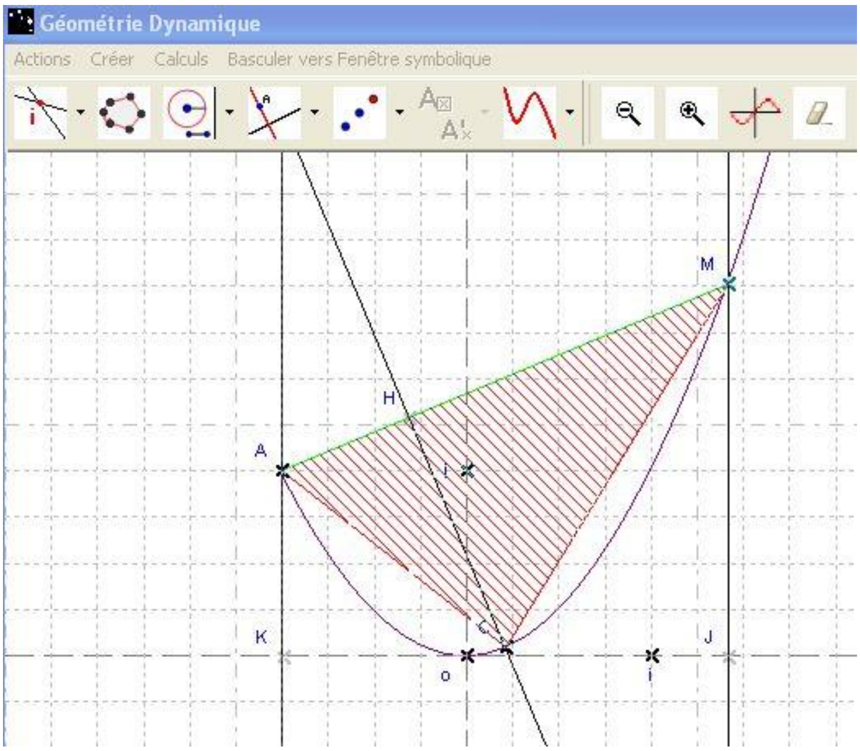
<table>
<tr><td>Lien</td><td>http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/la-gouttiere</td></tr>
<tr><td>Objectifs</td><td>Modéliser géométriquement la situation
Réinvestir des connaissances sur les applications de la dérivée pour résoudre un problème d'optimisation issue d'une situation concrète.</td></tr>
<tr><td>Pré-requis</td><td>Fonction dérivée
Lien entre le signe de la dérivée et les variations de la fonction
Connaissance de casyopée.</td></tr>
<tr><td>La situation</td><td>On décide de mettre en place un système de collecte des eaux de pluie sur la façade d'une maison. Sur cette façade, de forme rectangulaire, deux tuyaux obliques doivent récupérer les eaux de pluies pour les déverser dans un tuyau vertical aboutissant à un réservoir. On donne ci-dessous le plan de cette façade. Sur ce plan, (MH) est la médiatrice de [DC].


Il s'agit de trouver, sur la façade de cette maison, la position du point M qui minimise la longueur totale des tuyaux.</td></tr>
<tr><td>Apports du logiciel</td><td>Il permet la modélisation géométrique du problème dans la géométrie dynamique.
En permettant de déterminer et relier les mesures pouvant être utilisées pour définir la fonction géométrique, il aide l'élève à modéliser la situation et favorise sa prise d'initiative en le laissant choisir la variable.
La communication entre les fenêtres de calcul symbolique et de géométrie dynamique aide à la compréhension du problème dans ses différents cadres de résolution et favorise ainsi le travail réflexif.
Le recours au calcul formel soulage les élèves de calculs laborieux, notamment des calculs de dérivées s'avérant trop complexes en 1ère non scientifique.</td></tr>
<tr><td>Scenario</td><td>L'activité se déroule sur deux séances
Une séance de TP d'une heure en salle ordinateur, un élève par poste.
L'activité leur est proposée sous forme de situation-problème, sans questionnement intermédiaire.
Le professeur intervient pour répondre aux questions techniques spécifiques au logiciel et pour valider la construction.
Une synthèse en classe entière , dans une salle équipée d'un sytème de vidéoprojection ou d'un Tableau Blanc Interactif. Une synthèse (1h) en classe entière, dans une salle équipée d’un système de vidéoprojection ou d’un Tableau Blanc Interactif</td></tr>
</table>

Courbes à sous tangentes de longueur constante (classe de TS)

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/sous-tangente/
Objectifs	• Réaliser un imagiciel adapté à la situation et l'exploiter • Analyser des résultats pour émettre une conjecture • Manipuler les notions de tangentes en un point à une courbe • Mettre en évidence que les fonctions solutions du problème sont solutions d'une équation différentielle • Exploiter différents cadres : algébrique, fonctionnel et graphique
Pré-requis	• Connaître le lien entre fonction dérivée et tangente • Connaître les solutions de l'équation différentielle y'=ay • Avoir testé toutes les fenêtres du logiciel casyopée : fenêtre d'algèbre (pour l'introduction des fonctions et le calcul formel) , fenêtre de géométrie dynamique et son menu calcul et exportation.
La situation	On s'intéresse à des fonctions f dérivables sur un intervalle I de ℝ dont les dérivées ne s'annulent pas sur I. On note (C) leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal . Pour tout point M de (C), on considère la tangente en M à (C). La droite coupe l'axe des abscisses en un point T. On désigne par N le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Le segment [TN] est appelé **sous-tangente** en M à (C). **Existe-t-il des fonctions admettant des sous-tangentes de longueur constante ?** 
Apports du logiciel	• Il permet de concevoir un imagiciel paramétrable au niveau fonctionnel et géométrique • Il favorise les changements de cadres : graphique, algébrique • Il permet à l'élève d'obtenir une expression de fonction à partir uniquement de la mise en relation entre deux grandeurs • Il favorise l'usage du calcul formel • Il aide au passage de l'expérimentation à la démonstration

Vers la quadrature de la parabole (classe de TS)

Lien	http://www1.toutatice.fr/nuxeo/site/sites/quadrature/
Objectifs	• Réaliser un imagiciel adapté à la situation • Conjecturer • Manipuler les notions d'aires et d'intégrales • Exploiter différents cadres : algébrique, fonctionnel et graphique
Pré-requis	• Savoir définir une intégrale à partir d'une aire algébrique • Savoir calculer une intégrale avec la détermination d'une primitive • Avoir testé toutes les fenêtres du logiciel casyopée : fenêtre d'algèbre (pour l'introduction des fonctions et le calcul formel) , fenêtre de géométrie dynamique et son menu calcul et exportation
La situation	On désigne par f la fonction définie pour x>-1 par $f(x) = x^2$ et on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Soit A le point de (C_f) d'abscisse -1 et M un point de (C_f) distinct de A. On note C, le point de (C_f) dont l'abscisse est la demi-somme des abscisses de A et M. Les aires étant exprimées en unités d'aire, il s'agit de chercher un lien entre l'aire du triangle ACM et l'aire du domaine du plan délimité par le segment [AM] et la courbe (C_f). 
Apports du logiciel	• Favoriser des phases exploratoires • Permettre de réaliser la figure dynamique • Permettre et favoriser les changements de cadres : graphique, algébrique • Décharger les élèves d'une partie du travail algébrique technique • Initier les élèves aux fonctionnalités d'un logiciel de calcul formel

Conclusion

Cette brochure est le résultat du travail du groupe Casyopée de l'IREM de Rennes soutenu par l'Institut Français de l'Education. Dans l'introduction, nous avons précisé que nous nous intéressions à l'apport du calcul formel aux apprentissages des élèves et plus généralement à la contribution des Technologies Numériques à un domaine d'enseignement particulier, mais crucial, celui des fonctions. Nous avons aussi indiqué que ce travail s'est déroulé sur plusieurs années et cette brochure nous permet de mesurer le parcours effectué. Ce parcours accompagne et, nous le pensons de façon peut-être immodeste, précède souvent l'évolution des programmes officiels et des pratiques des enseignants.

L'évolution des programmes et des pratiques des enseignants se mesure à la place prise dans les documents officiels et les manuels par le calcul formel, ainsi qu'à une approche des fonctions se fondant de plus en plus sur une problématique de modélisation. Cette évolution reste cependant limitée et le lecteur aura noté que certains objectifs poursuivis par notre groupe sont encore très peu pris en compte par les documents officiels et les manuels. Le programme précise certes que « l'utilisation de logiciels de calcul formel peut limiter le temps consacré à des calculs très techniques afin de se concentrer sur la mise en place de raisonnements », mais la mise en œuvre qui est proposée par exemple dans le document ressource sur les fonctions se base sur des manipulations inutilement compliquées, donnant lieu à des expressions très lourdes auxquelles les élèves ne peuvent donner une signification. La situation type proposée par les manuels est l'interprétation de résultats issus de logiciels de calcul formel. De plus dans les pratiques courantes la modélisation est souvent limitée à une première approche de la notion de fonction ou sert de « faire valoir » à une étude de variation « classique ».

La démarche de modélisation que nous avons présentée dans cette brochure favorise la prise d'initiative par l'élève. Le choix des grandeurs et particulièrement de la variable sont, comme nous l'avons montré, cruciaux et difficiles pour les élèves. Dans les situations que nous avons exposées nous avons favorisé les essais, les discussions et la pluralité des approches. Les situations font parcourir à l'élève l'ensemble du cycle de modélisation jusqu'à l'étape de retour à la situation géométrique ou physique pour l'interprétation du résultat obtenu. Nous pensons avoir montré que les fonctions comme « modèles de covariations » peuvent accompagner les apprentissages des élèves jusqu'en Terminale et peut-être au-delà, et que le calcul formel peut être mobilisé de multiples façons pour accompagner l'élève dans ses démarches d'exploration et de preuve.

Nous avons aussi travaillé au développement, à l'expérimentation et à la diffusion du logiciel Casyopée. Notre démarche ne s'inscrit cependant pas dans une forme de prosélytisme. Le logiciel, nous a permis de faire évoluer notre réflexion en développant les fonctionnalités nécessaires, puis en tentant de les organiser en un produit « open source » cohérent et suffisamment robuste pour permettre des usages réalistes en classe. Cette brochure ainsi que les ressources web publiées sous forme de mini-sites pour la classe et la formation ont été pensées de façon suffisamment détachée du logiciel lui-même pour qu'elles puissent alimenter la réflexion de collègues qui ont une préférence pour d'autres logiciels, voire qui préfèrent ne pas en utiliser du tout. Néanmoins, même si Casyopée, comme tout logiciel, suppose un temps d'appropriation, son usage n'est en aucune manière compliqué et la simplicité des choix opérés en fait un outil parfaitement adapté par exemple au Tableau Numérique Interactif et aux tablettes-PC[9]. Nous espérons donc que la lecture de cette brochure donnera à certains l'envie de « franchir le pas ».

Mesurant le chemin parcouru, nous en mesurons aussi les limites ; notre approche des fonctions reste très « algébrique », y compris lorsque des notions comme la dérivée ou le théorème de la bijection sont abordés. Cette « consolidation » de l'algèbre nous paraît nécessaire et utile, mais les fonctions devraient être aussi

[9] La priorité donnée à la réflexion fait que nous n'avons jamais pris le temps de développer sur une autre plate-forme que Windows. Toutefois, Casyopée fonctionne sur MacIntosh avec l'émulateur Windows et sous Linux avec l'émulateur Wine, au prix d'une petite adaptation, indiquée sur le site et destinée à contourner une faiblesse de Wine qui, nous l'espérons, sera un jour corrigée.

une voie d'accès à l'analyse. Or, les spécificités de l'analyse, notamment un point de vue « local » (ou infinitésimal) sur les propriétés des fonctions, ont tendance à être masquées par l'enseignement au niveau secondaire. Au début de l'université, en revanche, un passage s'opère à un travail donnant beaucoup plus d'importance au point de vue local comme fondement de l'analyse, avec un abandon des autres points de vue et des registres de représentation autres que symboliques.

En dépit des limites qui viennent d'être signalées, le travail mené jusqu'à présent laisse présager des prolongements prometteurs en analyse. Par exemple, dans la situation de la « nacelle » présentée dans la première partie de la brochure, l'observation de représentations graphiques conduit l'élève à identifier les propriétés de dérivabilité en jeu (dérivée nulle en certains points, fonction non dérivable en d'autres points) et à calculer les valeurs de ces points en se référant au mouvement modélisé. Une étude plus précise de la formule, médiée par le professeur, conduirait à adopter un point de vue local en ces valeurs : en un point x_0 de non dérivabilité, la fonction est équivalente à la valeur absolue de la fonction $f(x)=|x-x_0|$ dont les élèves connaissent déjà les propriétés. Ceci peut être observé graphiquement en superposant les courbes des deux fonctions, et sur l'expression symbolique en remarquant que les deux fonctions ont mêmes nombres dérivés à droite et à gauche en x_0. Ainsi les élèves peuvent conclure que le mouvement est « presque uniforme » et de sens contraire avant et après le point bas.

Par ailleurs, si le calcul algébrique occupe une place si importante au secondaire c'est, au moins en partie, dans la mesure où il permet la détermination de solutions exactes. Cela permet d'introduire les élèves à la puissance du calcul algébrique, mais cela induit aussi une distance entre mathématiques scolaires et mathématiques savantes où, en général, on ne sait pas déterminer les solutions exactes. Cette distance est problématique dans les débuts de l'analyse où les procédures d'approximation et d'estimation sont essentielles et impliquent une dialectique subtile entre calcul exact et approché. Il est à souligner que beaucoup de logiciels ont de fortes potentialités pour le calcul approché et la visualisation graphique, par exemple de la pente d'une tangente pour approcher la notion de nombre dérivé ou d'une aire pour l'intégrale, tout comme pour le calcul exact, d'une dérivée ou d'une primitive. En revanche, ce qui est explicitement à explorer et à construire c'est le lien entre ces deux types de potentialité. C'est un but explicite du projet Casyopée que d'offrir un environnement offrant ces potentialités dans une interface unifiée facilitant la prise de conscience de ces deux modes de fonctionnement et leur interaction.

Ainsi nous pouvons envisager comme suite à notre travail de travailler plus à fond la notion de nombre dérivé en lien avec des problématiques issues de la géométrie ou de la cinématique, la notion d'intégrale en lien avec des problématiques relatives à la dérivation, au calcul de grandeurs (aires, volumes) et de moyennes, ainsi qu'avec les lois de probabilité définies par une densité et la notion de limite en lien avec la question des termes prépondérants et négligeables.

Postface : Le potentiel sémiotique de Casyopée

Par Maria Alexandra Mariotti

Università degli Studi di Siena

Au cours du projet européen ReMath, j’ai eu le plaisir de collaborer avec l’équipe Casyopée. Casyopée était un des logiciels conçus au cours du projet, dans un processus où la conception de logiciels pour la classe de mathématiques était associée à leur expérimentation dans les classes, et ce processus était un objet d’investigation tout autant que les usages dans les classes.

Le projet ReMath avait une hypothèse de départ concernant la conception des logiciels : certains aspects qui restent cachés dans la description fournie par le concepteur sont très importants. Je voudrais mettre l'accent sur un choix qui concerne un élément spécifique de Casyopée. Il s’agit de l’environnement Calculs géométriques.

L'analyse qui suit va utiliser des outils spécifiques du cadre théorique de la Théorie de la Médiation Sémiotique et certains résultats de l’expérimentation effectuée dans le projet ReMath. Elle a pour but de mettre en évidence quelques choix critiques opérés par les concepteurs lors du développement de Casyopée. Je ne sais pas à quel point les concepteurs étaient conscients de leurs choix

Les détails comptent

Je pars d’une analyse faite par un développeur très connu (Jackiw[10] 2010). Il résume cette analyse par la phrase “les détails comptent” et il la développe de la façon suivante:

Généralement ce qui est retenu de la technologie, c’est moins les détails et particularités des logiciels qu’une perspective généralisée sur le potentiel qu’offre un milieu technologique conçu de façon global pour ouvrir de nouvelles formes d’activité scientifiques particulièrement significatives(...)

Je suis confronté quotidiennement, comme je pense d’autres concepteurs, à d’innombrables choix de conception pratiques et localisés (..).

D’un point de vue mathématique, différentes trajectoires technologiques peuvent conduire à la même construction d’un triangle, ou à la même factorisation d’un polynôme du second degré. Cependant, d’un point de vue didactique, ce qui compte est la façon dont l’élève construit le triangle et comment il factorise le polynôme.

Je ne suis pas d’accord avec Jackiw sur le mot détail, mais cette idée qu’il introduit de s’intéresser à des choix très locaux dans l’analyse d’un processus de conception me semble importante. Le système de connaissances mis en œuvre par un concepteur est complexe et en grande partie tacite et implicite.

C’est à partir de cette idée que je vais vous proposer une analyse de Casyopée.

Si on regarde la conception de Casyopée dans sa structure générale, il est constitué de deux environnements qui peuvent «communiquer» et «interagir» entre eux: un environnement algébrique basé sur un système de calcul formel et un environnement de géométrie dynamique

[10] N. Jackiw est le concepteur du “geometer sketchpad”, un des premiers environnements de géométrie dynamique, très largement répandu dans le monde.

Les interactions possibles entre les deux environnements sont prises en charge par un troisième environnement : l'onglet **Calculs géométriques.**

Il faut une analyse plus fine pour comprendre la complexité et la richesse de la conception de cet environnement d'interaction. Je vais utiliser un élément de mon cadre théorique, la théorie de la médiation sémiotique (Mariotti, 2012), pour mener à bien cette analyse: la notion de *potentiel sémiotique*. Je vais décrire le Potentiel sémiotique de l'environnement Calculs Géométriques par rapport au réseau des signifiés qui concourent à construire le signifié mathématique de modélisation.

La Théorie de la Médiation Sémiotique et le potentiel sémiotique d'un artefact

L'utilisation d'un artefact pour accomplir une tâche amène l'individu à générer des **significations[11] personnelles** qui sont liées à l'utilisation de l'artefact, mais qui peuvent être une base pour des **significations mathématiques**

Le potentiel sémiotique d'un environnement informatique, ou plus généralement d'un artefact s'apprécie en relation avec le réseau des signifiés qu'il offre et qui contribuent à construire des signifiés mathématiques. Pour prendre un exemple simple, la manipulation de l'artefact « équerre » implique un réseau de signifiés « physiques » (bords de l'équerre, glissement le long d'une droite…) qui contribuent à construire la notion mathématique de perpendicularité.

En contexte de classe, sous la direction de l'enseignant les significations personnelles peuvent émerger et évoluer vers des significations mathématiques. En exploitant ces potentialités, un artefact peut être utilisé comme un outil de médiation sémiotique.

Dans le cas de Casyopée, les signifiés « physiques » résultent de significations attribuées aux objets et actions dans le logiciel lui-même (par exemple l'action de déplacer un point mobile est associée à l'idée de point libre). Les signifiés mathématiques sont liés à l'idée de « modélisation fonctionnelle », ou de fonction comme modèle.

L'environnement « Calculs géométriques » de Casyopée

Une situation donnée est représentée dans la fenêtre de géométrie dynamique. Dans un tel environnement, le changement est représenté par des points, des segments ou des figures en mouvement en général, le mouvement représente la variation et un point mobile représente une variable, en particulier une variable indépendante si ce point peut être déplacé librement.

Une analyse épistémologique de l'idée de modélisation met en évidence que le point essentiel réside dans la transition de la variable géométrique à la variable algébrique, comprise comme une variation à l'intérieur d'un ensemble de valeurs numériques possibles.

Cette étape est accomplie dans Casyopée à travers l'articulation de commandes, dont chacune peut être mise en relation avec un aspect clé du passage de la géométrie à l'algèbre à travers le processus de modélisation: en particulier, le passage de la géométrie à l'algèbre est basé sur construction de certains objets dans l'environnement de calcul Géométrique.

Prenons l'exemple d'un problème d'optimisation dans un cadre géométrique, comme celui du triangle variable (chapitre 3) Les étapes principales du processus de résolution sont les suivantes :

1. Construire une figure dynamique, déplacer le point libre et observer.
2. Construire des calculs géométriques, lire des valeurs, construire une fonction.
3. Se déplacer dans le cadre algébrique, définir une fonction et étudier la fonction.
4. Retourner dans la géométrie pour interpréter le résultat trouvé.

Nous allons nous centrer sur la deuxième étape. Elle consiste à :

---

[11] La signification est le processus par lequel on donne un sens à un signe. Un signe est « le total résultant de l'association d'un signifiant à un signifié » (de Saussure Cours de linguistique générale, Ed. Payot, 1964, pp. 98-101)

- créer des expressions pour exprimer une relation entre des variables géométriques,
- associer des variables numériques à des variables géométriques,
- et définir des fonctions entre ces variables.

L'onglet « Calculs géométriques » est un environnement dans lequel la construction 'libre' de variables et de liens entre les variables est possible. On peut construire des calculs (somme, produit…) se référant à certains objets géométrique en jeu dans des fonctions reliant des variables géométriques.

En réalité les calculs géométriques sont des objets hybrides parce qu'ils peuvent se référer aussi bien aux objets géométriques (par exemple un segment) qu'à à leurs mesures sans qu'il soit nécessaire d'expliciter. Ces objets hybrides, variables géométriques et fonctions géométriques reliant ces variables, ont un sens mathématique mais n'ont pas de statut institutionnel. Ce sont des concepts destinés à l'obsolescence, c'est-à-dire que leur construction constitue une étape du processus de modélisation, mais cette étape est destinée à se condenser dans le processus de choix de la variable numérique (= mesure numérique d'une variable géométrique) et des opérations qui vont constituer l'expression algébrique de la fonction.

Malgré l'obsolescence, la conception de variables et de fonctions géométriques joue un rôle important sur le plan cognitif, car elle correspond à une étape critique dans le processus de construction du signifié de modélisation. Dans la création d'un calcul géométrique la nature géométrique des objets n'est pas complètement perdue et cela permet de garder un sens à la formule algébrique qui va ensuite prendre le relais.

Cet environnement soutient ainsi la construction d'un modèle algébrique d'une «situation géométrique » produite dans l'environnement de Géométrie Dynamique, c'est à dire soutient la création et la définition d'une fonction dans le cadre Algébrique.

Tout cela va s'accomplir avec l'utilisation d'outils spécifiques. C'est l'utilisation systématique de ces outils qui va construire un réseau de signifiés cohérent avec la signification mathématique du processus de modélisation :

Créer Calcul. Cet outil permet de créer des calculs avec des grandeurs associées à des objets géométriques crées dans la fenêtre Géométrie Dynamique.

Cocher le calcul et observer une valeur numérique en déplaçant un point libre. Une fois que les expressions des calculs sont créés, ils peuvent être sélectionnés: la valeur correspondante est affichée et mise à jour automatiquement lorsque on déplace des objets dans la géométrie dynamique.

L'utilisation de ces deux outils fait émerger des significations qui sont cohérentes avec les notions mathématiques de grandeur géométrique variable et de variable numérique, et mettent ces deux notions en relation. Ces notions se dégagent des objets géométriques variables (points mobiles, polygones qui se déforment…) directement observables sur la figure de géométrie dynamique.

Observer deux calculs en même temps. Dans la fenêtre de géométrie dynamique, les significations liées à la co-variation des objets géométriques relient des variables géométriques (par exemple un point mobile et un triangle qui se déforme) qui ne sont pas mesurables. L'environnement « calculs géométriques » permet de développer des significations liées à la co-variation de grandeurs et de variables numériques.

Choisir un calcul comme variable et un autre comme valeur de la fonction.

L'idée de relation de dépendance émerge de l'observation précédente. Elle se concrétise par le choix d'un calcul « indépendant » à sélectionner dans la boîte à gauche de la flèche et d'un calcul « dépendant » à sélectionner dans la boîte à droite de la flèche.

Tous les choix de variable ne sont pas possibles mais souvent plusieurs sont possibles. Casyopée contrôle la cohérence et donne un diagnostic.

Les significations chez les élèves

Elles sont liées à la résolution d'un problème spécifique et à l'utilisation du logiciel. Elles ne sont pas spontanément cohérentes avec des significations mathématiques. Par exemple dans l'entretien suivant, Valeria conçoit bien la fonction comme dépendance entre variables, elle conçoit la valeur de la fonction (variable dépendante) comme une variable numérique, mais la variable de la fonction (variable indépendante) reste pour elle une entité géométrique.

Entretien avec Valeria (élève de Terminale)

Question : Qu'entendez-vous par les termes «fonction», «variable indépendante» et «variable dépendante»?

Réponse : La variable indépendante est celle qui est modifiée en première, en conséquence de cela, l'autre est modifiée.

Question : Quels éléments du logiciel peut être mis en relation avec ces termes? Pourquoi?

Réponse : La variable indépendante correspond au point mobile, car il est l'élément qui peut être modifié arbitrairement, alors que tous les chiffres [...] sont des variables dépendantes, l'aire et le périmètre sont modifiées selon la façon dont le point mobile se déplace.

Le rôle du professeur

Il est essentiel que le professeur oriente la réflexion des élèves sur les signifiés émergents de l'usage du logiciel, de façon que des significations cohérentes avec les significations mathématiques se développent. Dans l'extrait suivant d'une discussion collective qui suit la résolution d'un problème d'optimisation de l'aire d'un rectangle, le professeur attire l'attention des élèves sur la commande qui permet de créer un calcul géométrique[12]. On constate que les élèves (sauf celui qui est le dernier à intervenir) ne distinguent pas clairement le passage du monde géométrique au monde des grandeurs que cette création de calcul implique.

Extrait d'une phase de discussion collective dans une classe de Terminale:

Professeur : « oui, disons dans la seconde phase, quelle commande particulière du logiciel utilisez-vous … ? Silvia essaie de te souvenir ou regarde sur ta narration de recherche. J'ai construis la somme des aires. Dans l'autre problème, vous avez l'aire du… »

Élèves : « rectangle »

Professeur : « bien, quelle commande utilisiez-vous alors ?

Un élève : « Un truc, …un truc avec le bouton,… je ne me souviens plus »

Professeur : « oui un bouton très particulier, comment s'appelait-il ? »

Élèves : « OM au carré…, racine de OM…»

Professeur : « Pouvons nous nous rappeler ce bouton, ce moyen qu'il y avait de conduire cette partie de la résolution »

Élèves : « Geometric calculation » (en anglais dans le texte)

Autres élèves : « Dynamic geometry » (en anglais dans le texte).

Un élève : « non, geometric calculation, car dynamic geometry c'est le terme pour signifier que la figure bouge »

[12] Avec la version de Casyopée utilisée par les élèves, cette commande pouvait être opérée par un bouton avec un graphisme particulier auquel un élève fait référence (« OM au carré…, racine de OM… »). Dans la version actuelle, ce bouton porte simplement la mention « Créer Calcul ».

Conclusion

Peut-être à l'insu des concepteurs, Casyopée propose un système d'outils sophistiqué dont l'usage va développer un réseau complexe de significations sur lequel construire la signification mathématique de la notion de fonction comme modèle.

La conception de Casyopée fait suite à un travail de recherche mené sur l'utilisation de différents systèmes de calcul formel. La sensibilité didactique du groupe a conduit à utiliser le calcul formel dans un but éducatif : la prise en charge du processus de modélisation pour aider l'élève à construire une fonction (algébrique) comme un modèle d'une situation et en particulier d'une situation géométrique.

Il ne suffisait pas pour cela de faire coexister deux mondes géométrique et algébrique. Il fallait aussi créer un espace pour élaborer la relation entre ces deux mondes. Pour cela, la décision a été prise par les concepteurs de créer des outils qui puissent permettre l'émergence de significations mathématiques au cours du processus de modélisation.

Dans l'environnement Calculs Géométriques ainsi créé, le calcul d'une formule et d'un domaine pour la fonction modèle est fait par Casyopée, mais cela ne veut pas dire que le processus de modélisation est « automatique ». Les actions significatives comme la création de calculs adaptés, l'observation de leurs valeurs pour repérer une relation de dépendance et le choix de calculs pour la variable et la valeur de la fonction sont toutes à l'initiative de l'élève. Grâce au calcul formel, le contrôle fourni par Casyopée est cohérent avec le signifié mathématique de fonction. Il permet de réfléchir sur l'usage des différents outils et donc contribue au *potentiel sémiotique* de l'environnement Calculs Géométriques. Dans le contexte de la classe, avec un professeur attentif à son rôle de « médiateur sémiotique », ce potentiel favorise l'émergence de significations cohérentes avec la signification mathématique de la notion de fonction comme modèle de dépendance.

Jackiw, N. (2010) Attention to detail; broadening our design language. In Chapter 21, C. Hoyles &J. B. Lagrange (eds.) *Mathematics Education and Technology: Rethinking the Terrain*, pp. 431-433. Springer

Mariotti, M. A. (2012) ICT as opportunities for teaching-learning in a mathematics classroom: The semiotic potential of artefacts. In Tai-Yih Tso (ed.) *Proceedings of the 36th International Conference of the Psychology of Mathematics Education Group*, Taipei Tawain. Vol.1 pp.25-39.

Annexe : Présentation de la version 3 du logiciel Casyopée

Les quatre volets et le Bloc Note

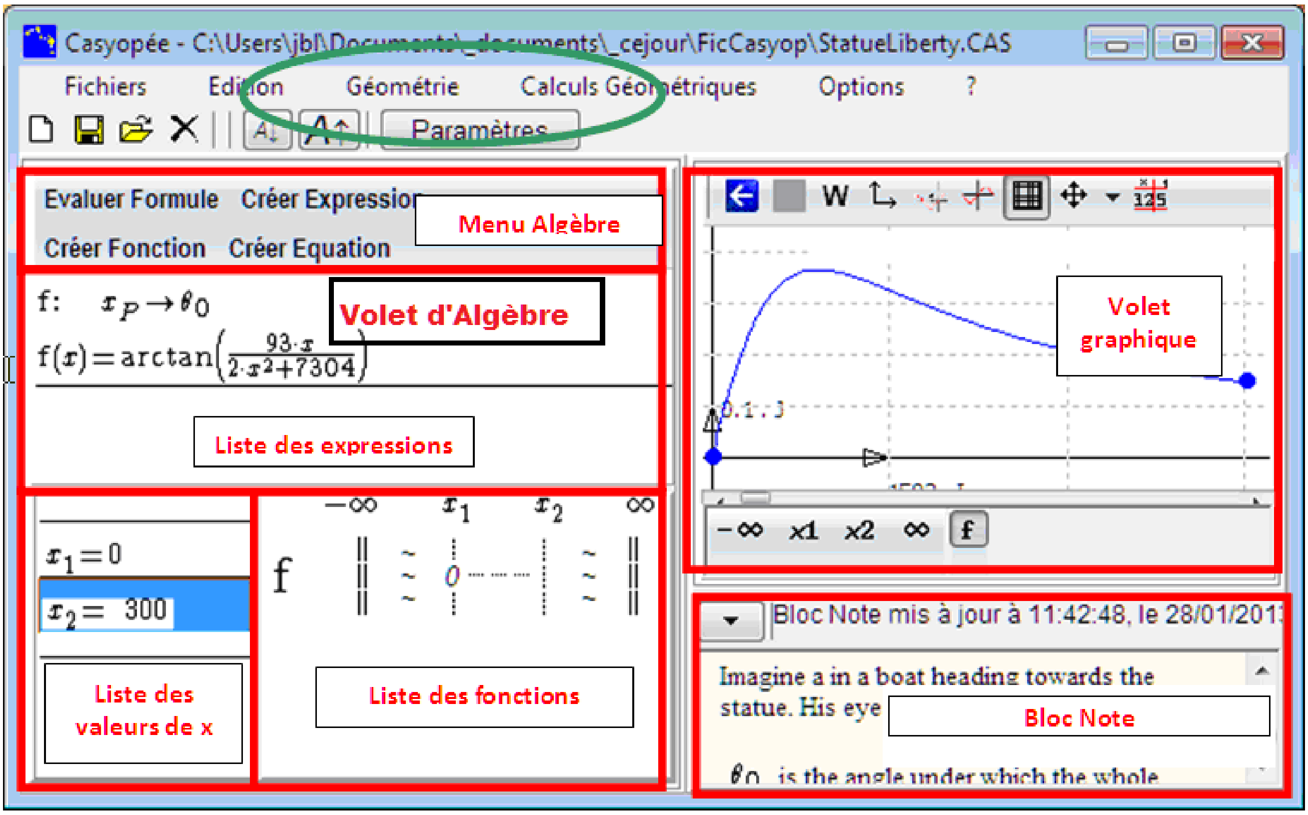


Figure 15 : Présentation des volets d'algèbre et graphique de Casyopée

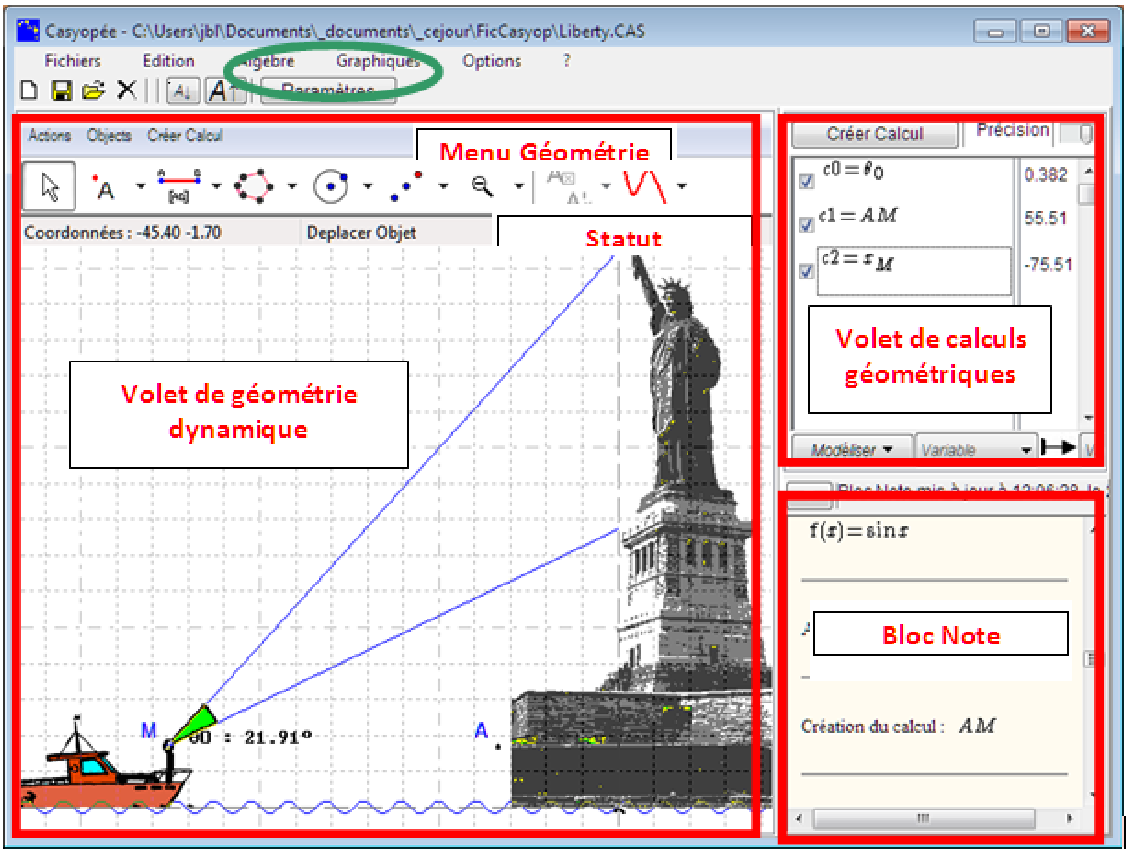


Figure 16: Présentation des volets de géométrie de Casyopée

Grâce au bouton Géométrie , on échange le *volet d'algèbre* pouvant contenir des *listes des valeurs de x*, *des fonctions* et *des expressions* par le *volet de géométrie dynamique*. Le bouton Algèbre permet l'action inverse. On passe du *volet de graphiques* au *volet de calculs géométriques* en utilisant le bouton Calculs Géométriques . L'action inverse se fait par le bouton Graphiques .

Remarques En bas à droite, s'affiche le Bloc Note. Les résultats de Casyopée y sont mémorisés et il est éditable.

La manipulation d'expressions

Casyopée est un environnement orienté fonction mais il est possible de manipuler des expressions.

Créer une expression

Dans le menu du volet Algèbre cliquez sur **Créer Expression**. Une *boite* s'ouvre, entrez l'expression $\sin\left(\frac{3\cdot\pi}{4}\right)+1$.

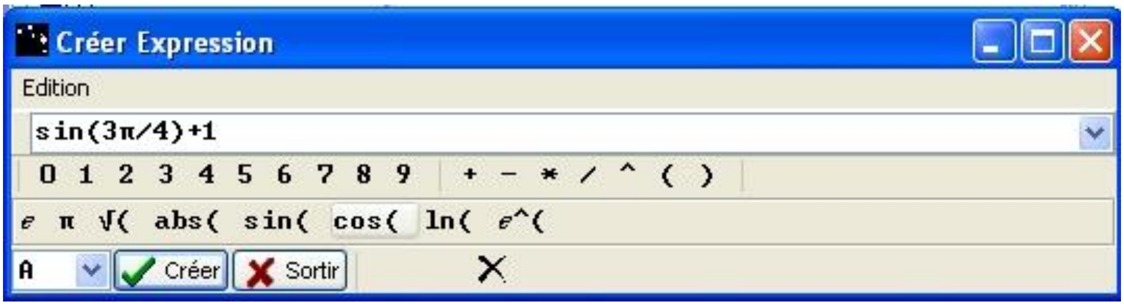
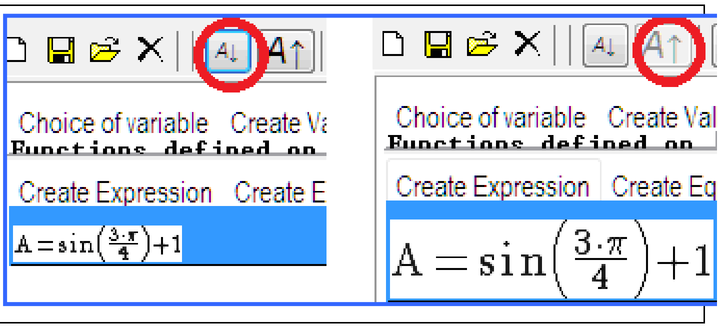


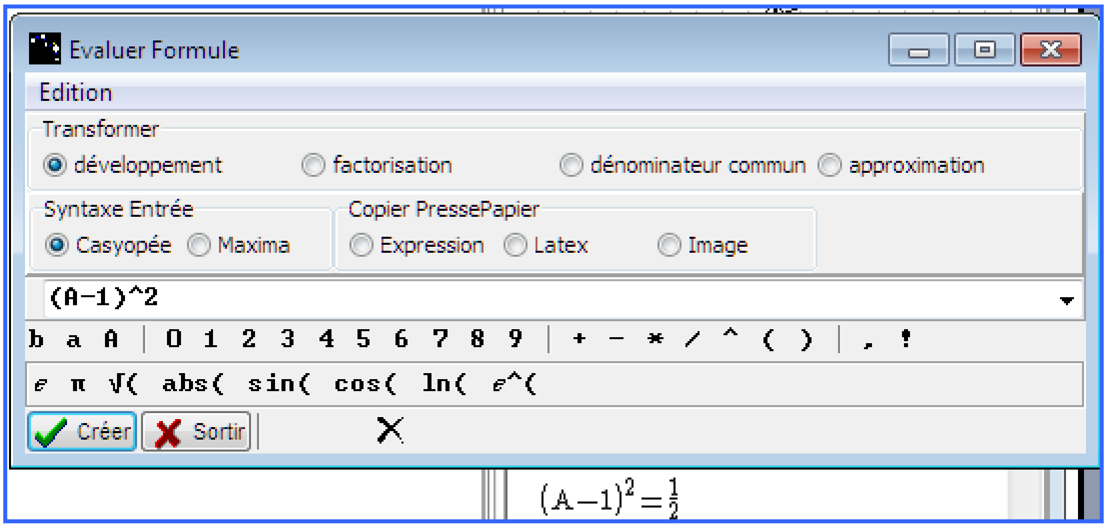
Figure 22 : Boite de création des expressions

Dans Casyopée, tous les objets ont un nom, qui est composé d'un caractère alphabétique. Notez que le menu contextuel permet de supprimer l'expression (comme le bouton de même icône de la barre principale), de copier selon trois formats, ainsi que comme valeur approchée. La copie comme expression est au format Casyopée. La copie image est adaptée pour l'exportation vers un traitement de texte.

Changer l'affichage Deux boutons de la barre d'outils permettent de régler la taille de l'affichage (raccourcis Ctrl-F, Ctrl-Maj-F ou Ctrl-Roll).	

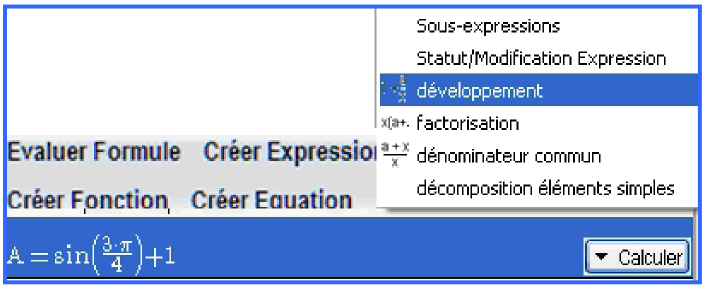
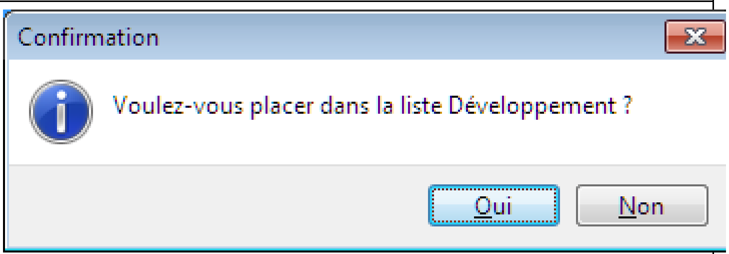
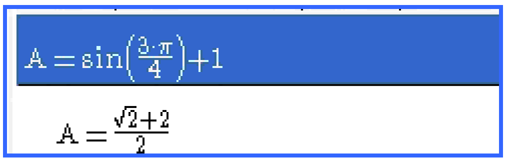
Evaluer une formule

On a souvent besoin d'évaluer une formule, soit par calcul formel, soit par approximation numérique, sans conserver le résultat. Cela correspond au fonctionnement « standard » des logiciels de calcul formel. La syntaxe Casyopée (multiplication implicite…) est utilisée et il est possible d'utiliser des identificateurs d'objets déjà créés (ici A). Il y a une entrée dans le menu Algèbre. Diverses transformations sont proposées. Le résultat est affiché dans le bloc note et peut être copié via le presse-papier aux différents formats.



Pour les experts, il est possible d'entrer toute commande avec la syntaxe Maxima (bouton radio dans Syntaxe Entrée).

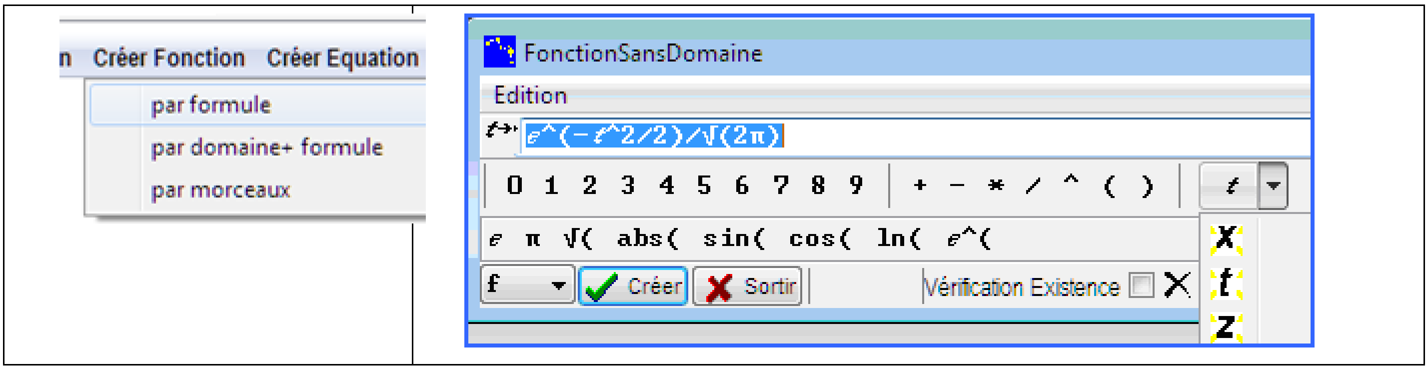
Transformer une expression

On peut appliquer différents calculs à une expression. Nous allons développer l'expression A. En cliquant sur l'expression, elle est mise en surbrillance, le menu **Calculer** apparaît aussi. Cliquez dessus et choisissez **développement**.	
Une boîte de confirmation apparait.	
La nouvelle expression est placée dans la *liste des expressions*.	

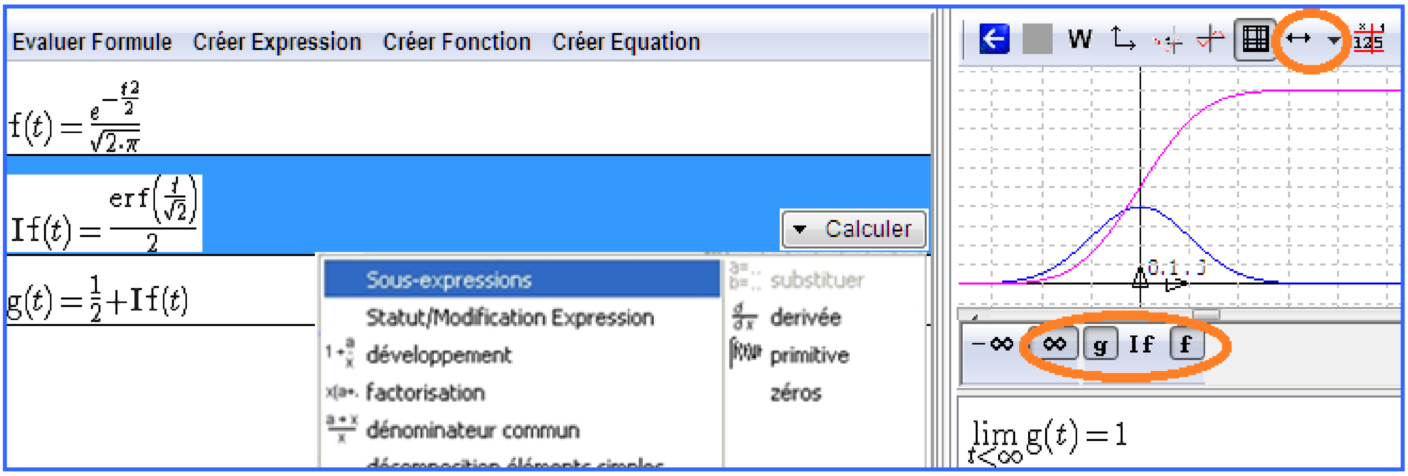
Fonctions

Premier exemple : Créer fonction par formule

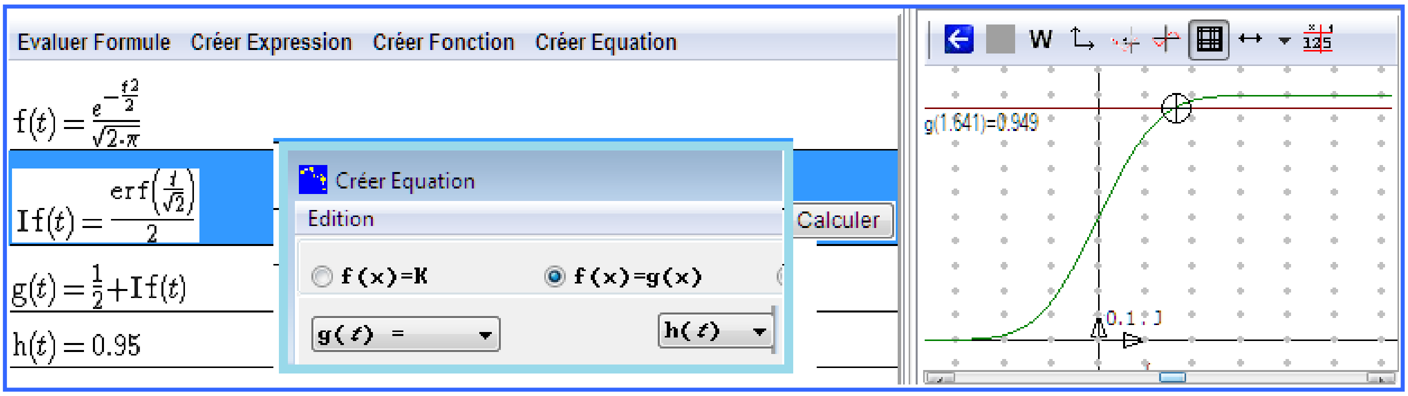
Nous allons utiliser le premier item **par formule** de l'entrée **Créer fonction** du menu de l'onglet d'Algèbre. A la différence de la **Figure 23** (expressions), la boîte de dialogue comporte un bouton permettant d'entrer un identificateur de variable. Notez que plusieurs identificateurs sont possibles, *x* étant proposé par défaut. Notez aussi qu'optionnellement, il est possible de demander à Casyopée de vérifier si la fonction ainsi créée est bien définie pour tous les réels (case à cocher Vérification Existence).



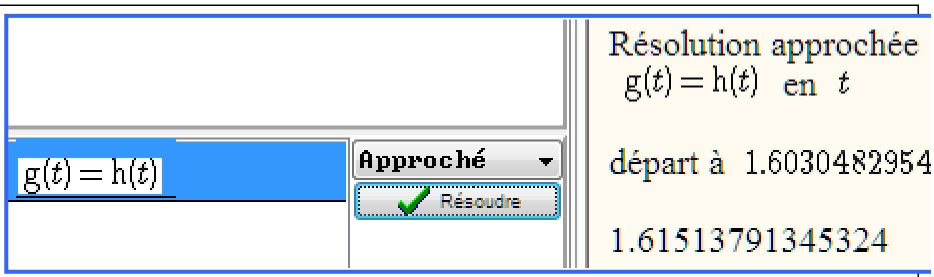
La fonction étant définie, le bouton Calculer donne accès à trois calculs supplémentaires, spécifiques des fonctions. Nous essayons ici le calcul « primitive » qui donne à une constante près la fonction de répartition de la loi normale gaussienne centrée. Comme la primitive obtenue s'annule en zéro, nous définissons une fonction g en ajoutant ½. Notez les boutons en bas de la fenêtre graphique qui permettent de grapher les fonctions et d'obtenir les limites aux bornes. Dans la barre d'outils en haut, plusieurs types de zoom sont accessibles par un seul bouton. Ici pour cadrer correctement la fonction il a été nécessaire d'opérer plusieurs zoom in en y et un zoom in en x. On a aussi déplacé les axes en tirant simplement le graphique à la souris. Il aurait été aussi possible aussi de cadrer en entrant des données numériques par le bouton W. On tabule les fonctions à l'aide du bouton .



Supposons que l'on veuille connaître ou approcher la valeur critique de la loi normale gaussienne centrée pour le seuil de 0,95. Pour une étude graphique, on peut entrer une fonction constante h et pointer sur l'intersection des graphes pour faire apparaître un curseur et des valeurs approchées.



Casyopée offre aussi la possibilité d'entrer l'équation en t, g(t)=h(t) et de résoudre en mode exact ou approché. Le mode approché s'impose ici. Casyopée applique la méthode de Newton avec comme point de départ la position du curseur.



Second exemple : Créer fonction par domaine + formule

Dans le menu **Créer fonction**, choisissez **par domaine + formule** ; notez qu'ici, la vérification de l'existence est proposée par défaut. Entrez la formule (x+1)/(3x-2).

Si vous gardez]-∞ ; ∞[comme ensemble de définition Maxima va vous indiquer qu'en validant la fonction « *Cela peut conduire à des erreurs dans les tracés ou les calculs* ».

Editez l'ensemble de définition en]-∞ ;2/3[u]2/3; ∞[puis cliquez Evaluer. Casyopée crée une « valeur de x » x_1 qui vaut ici 2/3 et réécrit l'ensemble de définition. Si une telle valeur a déjà été créée, en cliquant **Auto**, le logiciel affiche un ensemble de définition en tenant compte.

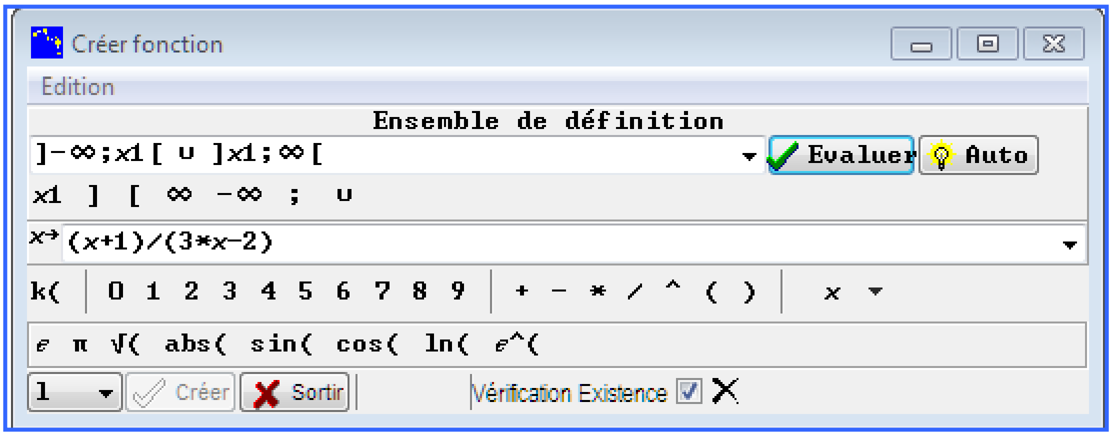
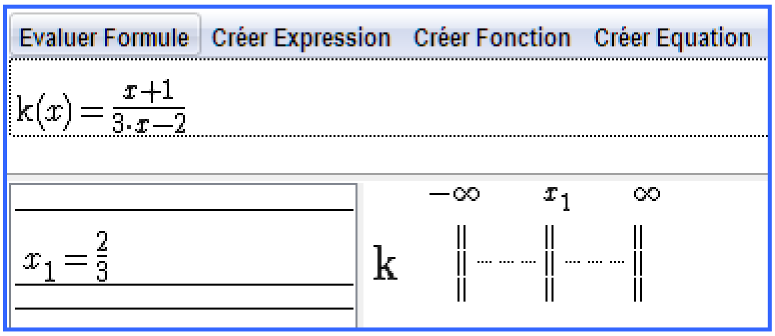


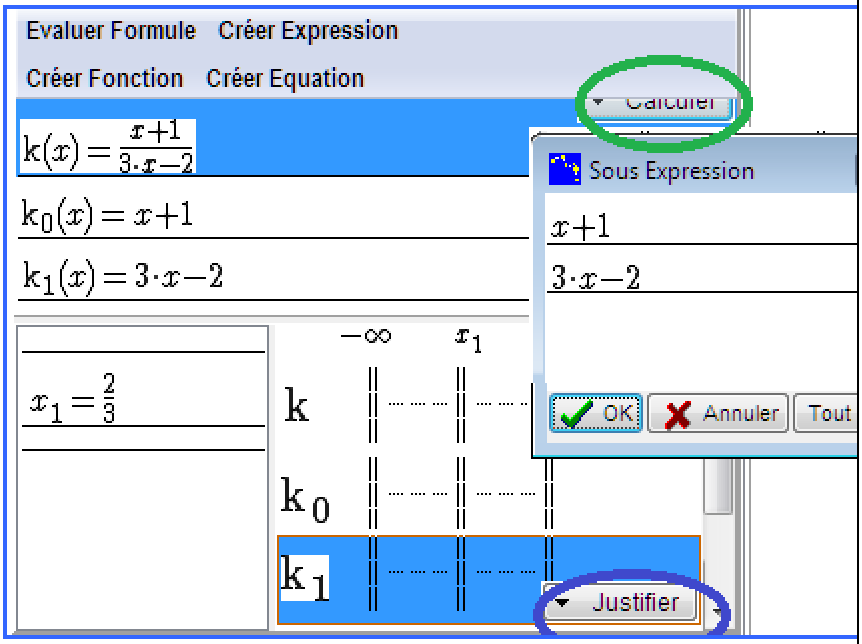
Figure 24 : Boîte de création de fonction

L'onglet Algèbre comprend maintenant une liste des valeurs de x et un mini-tableau pour les fonctions dont le domaine a été vérifié.

Nous allons montrer comment remplir ce tableau avec l'aide de Casyopée.

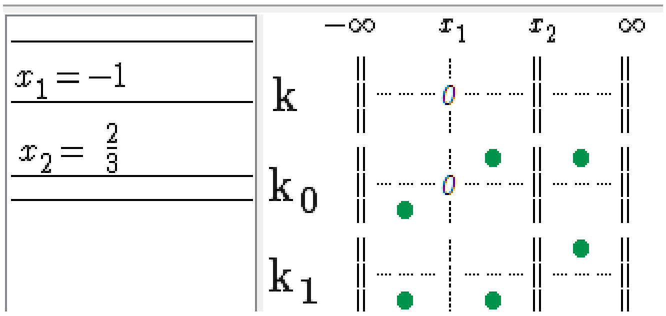


Nous isolons les sous-expressions à l’aide de l’entrée sous-expressions du menu du bouton **calculer**. Chaque mini-tableau dispose d’un bouton **justifier** qui permet d’attribuer un signe sur chaque intervalle.



En utilisant la justification « affine » ou « fonctions de référence », Casyopée aide à faire le tableau de signes pour k_0 et k_1.

Pour la fonction k, elle-même, il suffit ensuite de choisir « produit/quotient ». Notez qu’une nouvelle valeur de *x* a été créée.

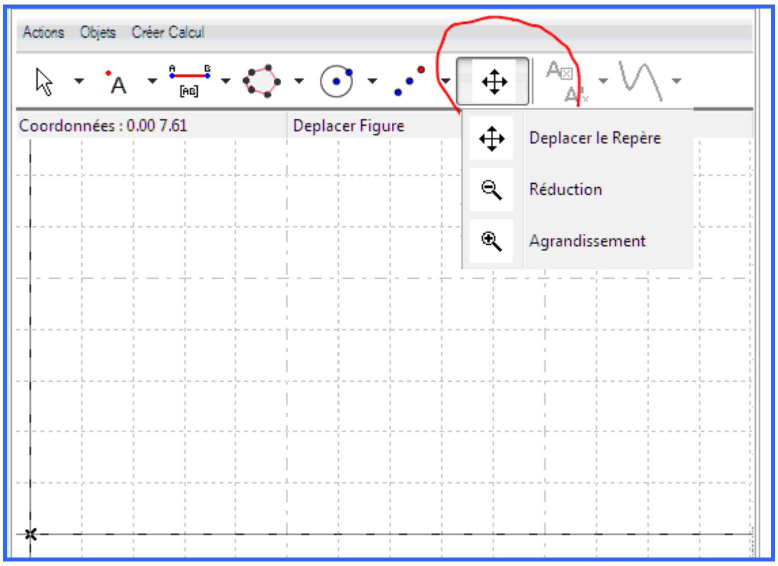


Géométrie Dynamique et Calcul Symbolique : le triangle de Minh

Nous nous plaçons dans le cas OI=5

Le fonctionnement des boutons de construction est similaire à celui de GeoGebra. Chaque bouton donne accès à un ensemble de fonctions.

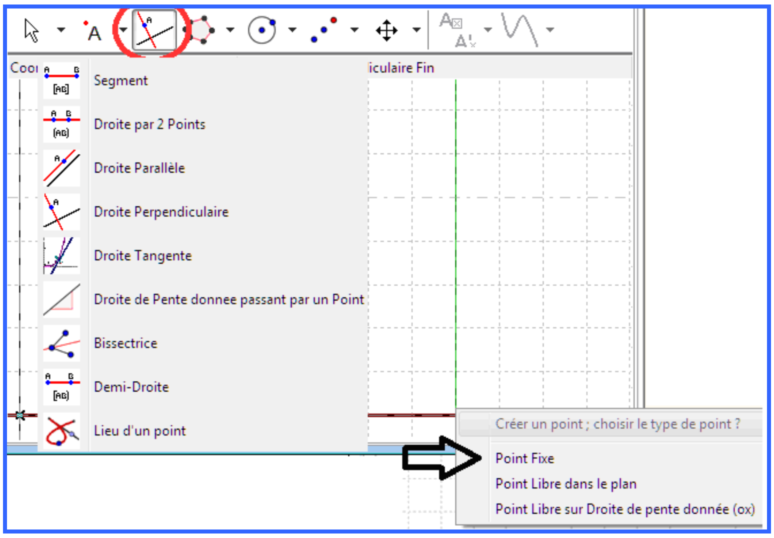
On commencera par adapter l'écran de géométrie avec le bouton servant à déplacer et à zoomer.



Ensuite, on créera une droite perpendiculaire à l'axe des x jusqu'au point de coordonnées (0, 10), puis le segment de l'origine à ce point.

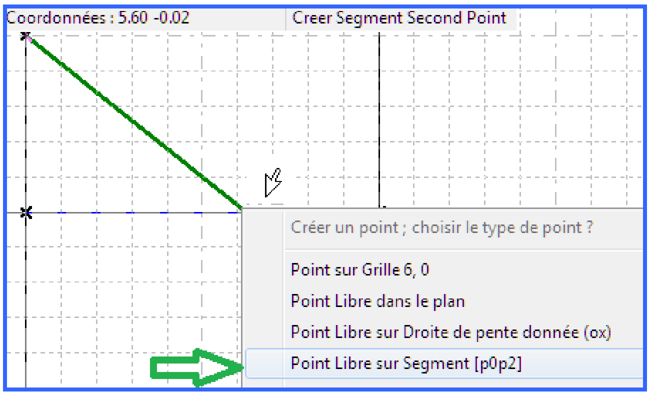
Création de segment et de perpendiculaire sont sous le même bouton. Le points sont créés en cliquant à l'endroit voulu.

Souvent, plusieurs types de points sont possibles.



On crée de même un segment du point de coordonnées (5,0) vers un point libre sur le segment qui vient d'être créé.

Attention, il faut bien choisir le point dans le menu.

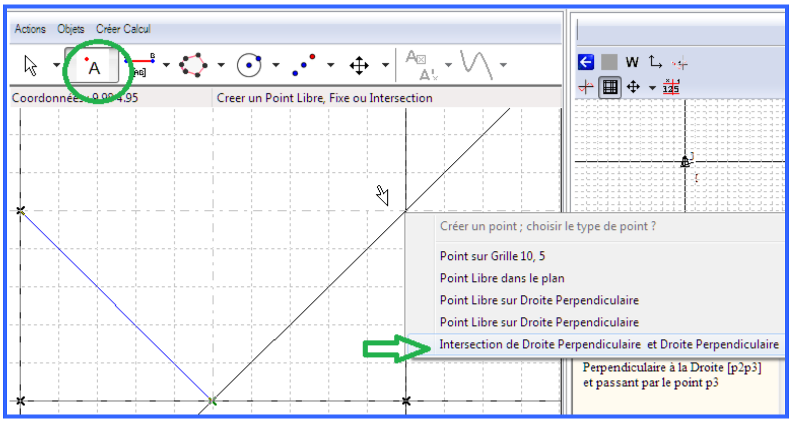


<table>
<tr>
<td>

On créée ensuite la perpendiculaire au segment passant par le point libre.

Le bouton point permet de choisir le point d'intersection voulu par un menu quand la souris est proche de cette intersection.

</td>
<td>



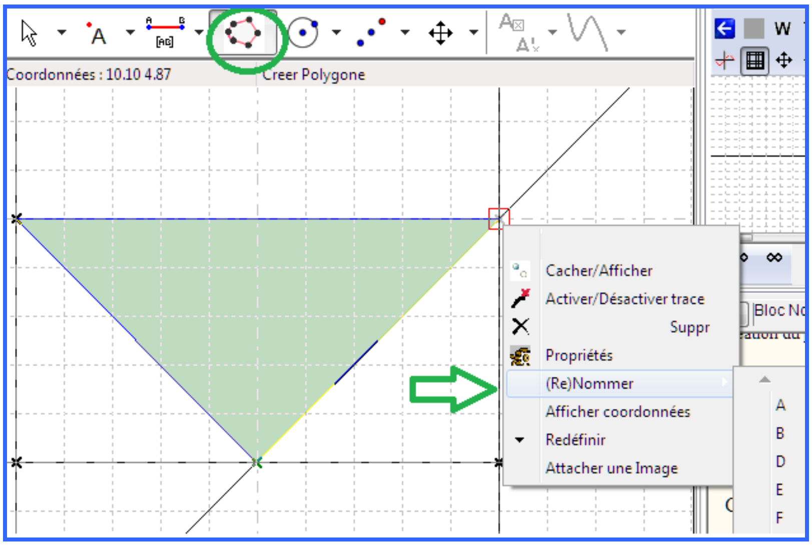
</td>
</tr>
<tr>
<td>

Le bouton polygone permet de créer un triangle en cliquant successivement sur chaque point.

Il est temps de donner un nom aux points

Ceci se fait en utilisant le menu contextuel (clic droit) de chaque objet.

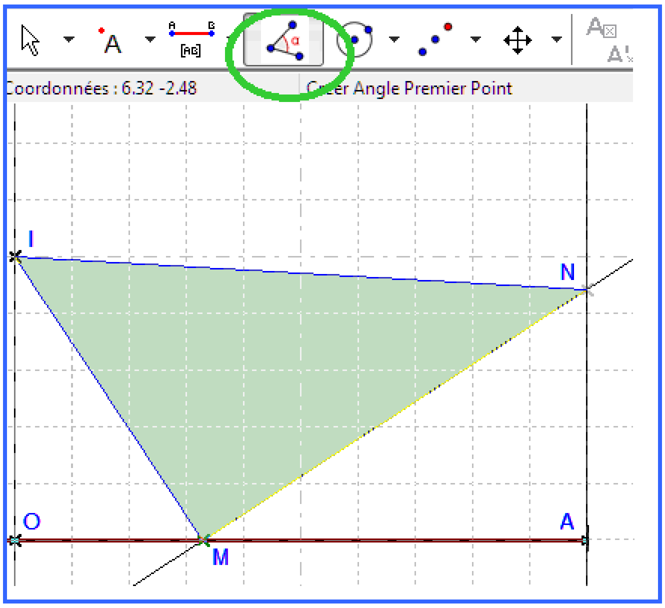
</td>
<td>



</td>
</tr>
<tr>
<td>

On peut aussi créer des angles avec le même bouton que les polygones : on clique successivement trois points.

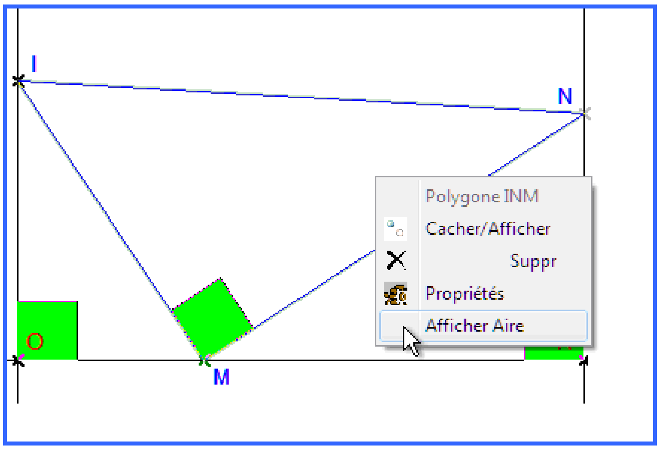
</td>
<td>



</td>
</tr>
</table>

Ici, les angles choisis sont codés comme des angles droits.

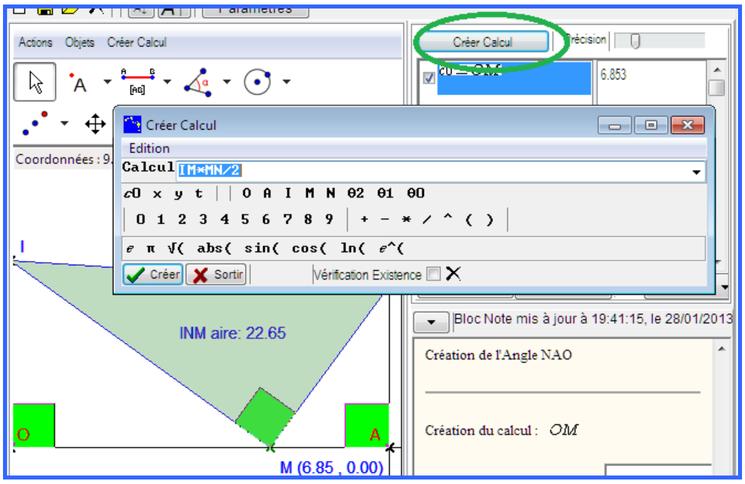
On peut faire afficher certains éléments (aire, coordonnées) toujours en utilisant le menu contextuel.



Nous allons passer à la modélisation.

Nous devons créer des « calculs géométriques » pour la variable et la valeur de la fonction.

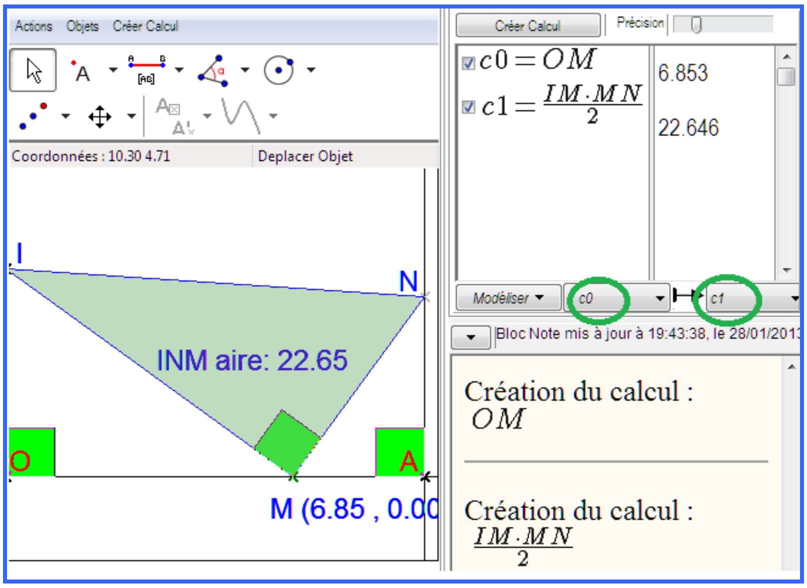
Nous choisissons respectivement la distance OM et une formule donnant l'aire du triangle.



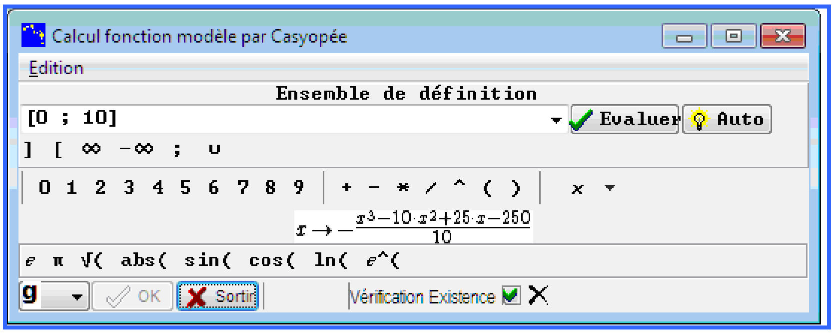
Casyopée leur donne les étiquettes c0 et c1, ce qui permet de les choisir dans les listes à droite du bouton « modéliser ».

Les valeurs numériques des calculs permettent de détecter d'éventuelles erreurs dans la modélisation.

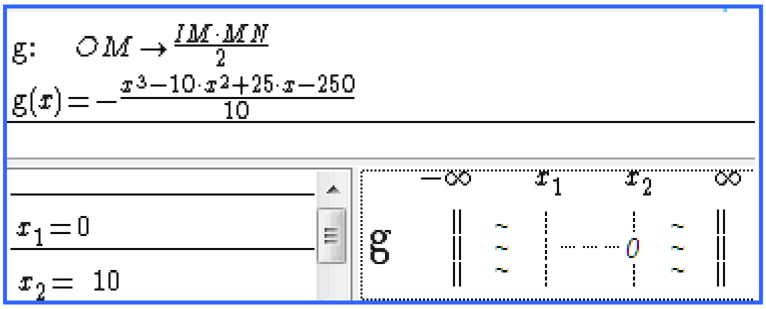
Le bouton « modéliser » donne accès à un menu où nous choisissons l'entrée : calcul fonction modèle par Casyopée.



L'ensemble de définition et une formule pour la fonction sont calculés par Casyopée.

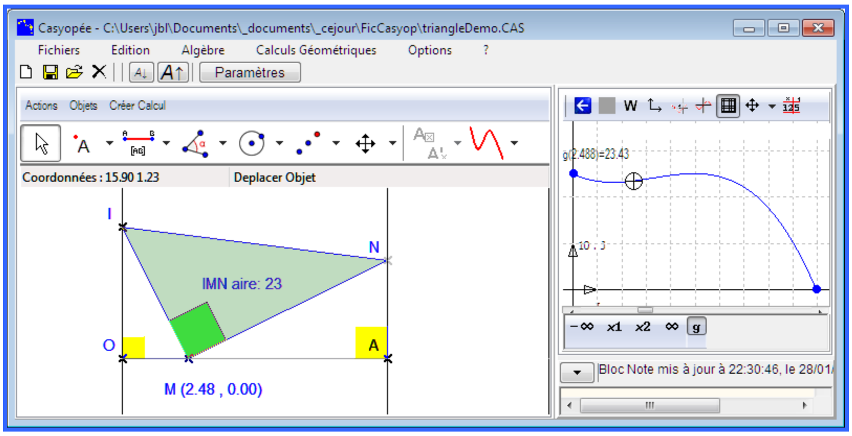


Après acceptation des données, la fonction est créée dans le volet Algèbre. Le mini tableau s'affiche car le domaine a été vérifié à l'étape précédente. Il est alors très simple de prouver par une étude de variation classique aidée par Casyopée, des conjectures émises par observation sur la figure.



En basculant vers les volets de Géométrie dynamique et graphique, on peut coordonner le déplacement du point libre M sur le segment [OA] et celui du curseur sur le graphe de la fonction.

Pour créer une animation, on peut donner une vitesse au point M (menu contextuel, propriétés) et enregistrer l'écran en GIF animé (menu Fichiers).



La représentation des fonctions dans le programme Vietnamien Docteur **Nguyen Chi Thanh**, Didacticien, Faculté de l’Education, Université Nationale du Vietnam, Hano thanhnc70@yahoo.comi.	Photo

Nguyen Chi Thanh a travaillé avec les membres du groupe Casyopée et utilise le logiciel Casyopée dans le cadre de la formation d’enseignants au Vietnam. A partir d’une analyse des manuels il propose de montrer comment les fonctions sont enseignées au Vietnam.

I. Analyse des manuels

Trois critères pour analyser les manuels

1. Comment la notion de fonction est-elle introduite ?
2. Est ce qu’il existe une représentation multiple des fonctions dans le manuel ?
3. Des avantages et des difficultés d’apprentissage de l’élève face à cette présentation.

Pour chaque niveau, le tableau donne les tâches que l’élève peut rencontrer.

a) Manuel de 5ème

Tâches	Manuel		Livre d’exercices	Total	Moyen de représentation des fonctions
	Exemple	Exercice			
Reconnaître(1) Déterminer si y est une fonction de x ?		4	7	11	- Table de valeurs (10) - Expression (1)
Calculer Calculer une variable sachant l’autre	3	15	18	36	- Expression (21), avec une demande de dresser la table de valeurs (6) - Graphique (15)
Représenter Représenter une fonction	2	10	10	22	- Table de valeurs (1) : le graphique est l’ensemble des points continus. - Expression (19) : la fonction est de la forme y = ax - Description par des mots (2)
Appartenir		2	3	5	- Expression

Déterminer si un point appartient à la courbe d'une fonction					
Déterminer expression Déterminer expression d'une fonction		3	3	6	- Graphique (4) - Description par des mots (2)
Lire Lire des valeurs extrémums d'une fonction ?		4	3	7	- Graphique
Déterminer signe de x – signe de y Déterminer x pour que y soit négative ou positive		1	3	4	- Expression (2) - Graphique (2)
Total	5	39	47	9 1	- Table de valeurs (11) - Expression (48) - Graphique (28)

On peut remarquer que les tâches **Calculer** et R**eprésenter** sont les plus nombreuses.

b) Manuel de 3e

Tâches	Manuel		Livre d' exercices	Total	Moyen de représentation des fonctions
	Exemple	Exercice			
Reconnaître(1) Reconnaître si y est une fonction de x.	1		3	4	- A partir d'une description par des mots il faut en donner une expression (2) - Table des valeurs (2)
Reconnaître(2) Déterminer une fonction du 1er degré, des positions relatives, les variations connaissant l'expression de la fonction	1	3	3	7	- Expression (7)
Calculer Calculer des valeurs d'une fonction	10	17	16	43	- Expression (37) dont (13) avec une demande de dresser une table de valeurs - Graphique (6)
Représenter Représenter une fonction	5	18	15	38	- Expression (36) : fonctions de la forme $y = ax + b$; $y = ax^2$

					- Graphique (2)
Appartenir Déterminer si un point appartient à une représentation graphique		1	3	4	- Expression
Déterminer une expression Déterminer une expression de fonction		28	44	72	- Description par des mots (2) - Expression (70)
Lire - Déterminer des valeurs d'extrémum ; - Démontrer une propriété géométrique ; - Examiner la propriété symétrique d'un point sur la courbe	4	10	5	19	- Graphique (18) - Expression (1)
Déterminer x suivant le signe de y - Déterminer x telle que y soit négative ou positive ; - Déterminer le signe de x quand y est positive ou négative .	4				- Graphique (2) - Expression (2)
Variation Etudier les variations de fonction.	3	3	2	8	- Table de valeurs (2) - Expression (3) - Graphique (3)
Intersection		12	8	20	- Expression (17) - Graphique (3)
Ensemble de points			5	5	- Graphique (5)
Point fixe			1	1	- Expression
Total	28	92	105	221	- Description par des mots (2) - Table de valeurs (4) - Expression (179) - Graphique (39)

Voici un exemple, pour la tâche **Variation,** où différentes façons de représenter une fonction ont été utilisées.

Exercice 2/45 (Manuel 9e volume 2)

Etant donnée une fonction y = $\frac{-1}{2}x+3$

a/ Calculer les valeurs correspondantes de y en fonction de x et puis compléter le tableau suivant:

x	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5

y											

b/ Cette fonction est-elle croissante ou décroissante ? Explique.

<u>Exercice 3/45 (Manuel 9e volume 1)</u>
Soient deux fonctions y = 2x et y = - 2x
a/ Représenter ces deux fonctions dans un même repère.
b/ Parmi ces deux fonctions laquelle est croissante, décroissante? Expliquer.

<u>Exercice 7/46 (Manuel 9 Volume 1)</u>
Soit la fonction y = f(x) = 3x. x_1, x_2 sont deux valeurs quelconques telles que $x_1 < x_2$
Démontrer que $f(x_1) < f(x_2)$, puis, conclure que la fonction est croissante sur $\mathbb{R}$.

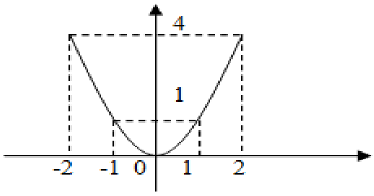
c) Manuel de Seconde

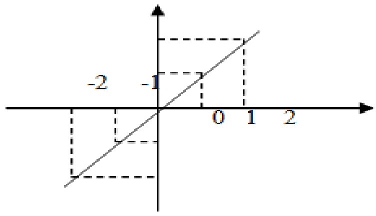
Tâches	Manuel		Livre d'exercices	Total	Moyen de représentation des fonctions
	Exemple	Exercice			
Calculer Calculer la valeur inconnue d'une fonction en fonction de l'autre	4	7	7	18	- Table de valeurs (1) - Schéma (1) - Expression (13) - Graphique (2) - L'exercice 19/41 représente la fonction par expression et graphique
Ensemble de définition Déterminer l'ensemble de définition de fonction	4	7	9	20	- Schéma (2) - Expression (16) - Table de valeurs (2)
Variation		12	15	27	- Expression (27)
Parité	1	4	12	17	- Expression (12) - Graphique (5)
Appartenance		3	4	7	- Expression (7)
Représenter	3	12	21	36	- Expression (36)
Déterminer expression Déterminer une expression d'une fonction		13	23	46	- Expression (27) - Graphique (9)
Intersection Déterminer l'intersection d'une courbe de fonction avec des axes du repère		4	10	14	- Expression (11) - Graphique (3)
Total	12	62	101	185	- Expression (149)

					- Schéma (3) - Table de valeurs (3) - Graphique (19)

La tâche **Parité** retient notre attention car elle apparaît pour la première fois et le manuel propose la solution graphique (Manuel 2^{nd} p.37):

Considérons deux courbes de fonction y = f(x) = x^2 et y = g(x) = x





La parabole de fonction y = x^2 possède l'axe de symétrie (Oy). En deux valeurs opposées de la variable x, la fonction prend une même valeur: f(- 1) = f(1) = 1, f(- 2) = f(2) = 4 ...

L'origine O est le centre de symétrique de la droite y = x. En deux valeurs opposées de la variable x, la fonction prend deux valeurs opposées: g(- 1) = - g(1) , g(- 2) = - g(2) ...

La fonction y = x^2 est un exemple d'une fonction paire et la fonction y = x est un exemple d'une fonction impaire.

II. Analyse des manuels du lycée concernant des tâches sur les paramètres.

Dans le programme actuel des Mathématiques secondaire au Vietnam, les tâches concernant les paramètres sont introduites à partir de la classe de Seconde.

Nous présentons ci-dessous des tâches repérées.

T_1:"Résoudre et discuter":

"Résoudre et discuter une équation paramétrique".

"Discuter le nombre de solution d'une équation paramétrique".

"Discuter le nombre de point d'intersection de deux courbes suivant le paramètre".

T_2: "Déterminer des valeurs de paramètre satisfaisant des conditions données":

"Déterminer des paramètres tels qu'une équation ait des solutions satisfaisant des conditions données".

"Déterminer des valeurs du paramètre *m* tels qu'un graphique (*C*) d'équation *y* = *f*(*x*) coupe la droite (*d*): *y* = *g(x,m)* en des points satisfaisant de conditions données".

"Déterminer des valeurs du paramètre *m* tels que la fonction *y* = *f*(*x*,*m*) soit monotone sur un ensemble donnée".

"Déterminer des valeurs du paramètre *m* tels que la fonction *y* = *f*(*x*,*m*) atteint ses extrémums en x_0".

"Déterminer des valeurs du paramètre *m* tels que la fonction *y* = *f*(*x*,*m*) admette des extrémums".

"Déterminer des paramètres tels que deux courbes de fonction soient tangentes".

De façon analogue on peut avoir la tâche T3 "démontrer"

T_3:"Démontrer"

"Démontrer qu'une équation paramétrique admet des solutions satisfaisant des conditions données".

"Démontrer qu'un graphique d'équation (C): $y = f(x)$ coupe la droite (d) d'équation $y = g(x,m)$ en des points satisfaisant de conditions données".

"Démontrer que la fonction $y = f(x,m)$ soit monotone sur un ensemble donnée".

"Démontrer que la fonction $y = f(x,m)$ atteinte les extrémums en x_0".

"Démontrer que la fonction $y = f(x,m)$ aient des extrémums".

"Démontrer que deux courbes de fonction soient tangentes".

T_4: "Déterminer des éléments fixes d'une courbe"

T_5: "Déterminer un ensemble de point"

Conclusion

6.5. L'émergence de la notion de fonction dans les manuels

+ *En classe 5e*: à travers des exemples (une fonction est donnée par une table de valeurs), l'élève peut comprendre qu'une quantité est en fonction d'une autre quantité. Si l'on impose une autre condition, "l'unique valeur" à la quantité dépendante, alors cette quantité est appelée fonction de l'autre.

+ *En classe 3e*: Les notions de fonction croissante, décroissante sont définies à travers des exemples: calculer des valeurs correspondantes (la fonction est définie par une expression), puis compléter dans une table; donner des remarques sur la variation des valeurs de x et y; introduire la notion de fonction croissante et décroissante.

+ *En classe 2nde*: La notion est introduite à partir des remarques intituives sur la courbes de fonction $y = x^2$ sur l'intervalle $(-\infty; 0)$ et $(0; +\infty)$. La notion de fonction paire et impaire est aussi introduite à partir de remarques intuitives sur les courbes des fonctions $y = x^2$ et $y = x$.

Pour toutes les classes mentionnées (5e, 3e et 2nd) la représentation d'une fonction par graphique n'est pas introduite d'une manière explicite.

6.6. L'importance de la tâche Calculer

+ *En 5e*: calcul à l'aide d'une expression, d'un graphique

+ *En 3e*: estimation en utilisant un graphique ou calcul à l'aide d'un graphique.

+ *En 2nde*: calcul à l'aide d'une table de valeurs, d'un schéma, d'une expression.

On insiste sur le savoir faire "calculer à partir d'une expression". L'élève a donc un rapport particulier sur la réprésentation d'une fonction à l'aide d'une expression.

Bibliographie

Le Feuvre,B., Meyrier X., Vincent, P., Lagrange, J.B. (2006) Un logiciel utilisant le calcul formel pour le lycée. *Bulletin de l'APMEP*. N° 466, p. 714-760, 736.

Tall D. 2004a Introducing Three Worlds of Mathematics. For the Learning of Mathematics

Minh, T. K. (2011) *Apprentissage des fonctions au lycée avec un environnement logiciel : situations d'apprentisage et genèse instrumental des élève.* Thèses de didactique des mathématiques, Université Paris-Diderot.

Minh, T. K. (2012a). Fonctions dans un environnement numérique d'apprentissage: étude des apprentissages des élèves sur deux ans. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *12*(3), 233-258.

Minh, T. K. (2012b)**.** Une approche expérimentale des fonctions avec le logiciel Casyopée. *Petit x*, 88, 49-74.

Barth Britt-Mari. Jérôme Bruner et l'innovation pédagogique. In: *Communication et langages*. N°66, 4ème trimestre 1985. pp. 46-58.

Douady Régine. 1986. Jeux de cadres et dialectique outil-objet,
Recherches en didactique des mathématiques, vol. 7, no. 2.

Duval R. (1996), Quel cognitif retenir en didactique ?, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 16(3), 349-382. La Pensée Sauvage éditions, Grenoble.

Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, 21–44). Providence, RI: American Mathematical Society.

B.O. (2009) Mathématiques Classe de seconde. Bulletin Officiel n° 30 du 23/07/2009

B.O. (2010) Programme de 1ère Scientifique. Bulletin officiel spécial n° 9 du 30 septembre 2010.

B.O. (2011) Programme de l'enseignement spécifique et de spécialité de mathématiques Classe terminale de la série scientifique. Bulletin officiel spécial n° 8 du 13 octobre 2011.

Les fonctions : Comprendre la notion et résoudre des problèmes de la 3ème à la Terminale. L'apport d'un logiciel dédié.

Auteurs : HALBERT Roselyne, LAGRANGE Jean Baptiste, LE BIHAN Christine, LE FEUVRE Bernard, MANENS Marie Catherine, MEYRIER Xavier.

Remerciements à : LEBAUD Marie Pierre, MARIOTTI Maria Alessandra, NGUYEN Chi Tanh, TRAN KIEM Minh pour leur collaboration.

Editeur : IREM de Rennes.

Dépôt légal : SEPTEMBRE 2013

Niveau : Collège (3ème) - Lycée

Mots clés : Calcul formel, environnement algébrique, fonction numérique, géométrie dynamique, modélisation fonctionnelle, logiciel de calcul formel et de géométrie dynamique, logiciel libre, productions sur le WEB (mini sites).

Résumé :

Cette brochure présente les travaux du groupe de recherche-formation Casyopée sur l'enseignement des fonctions du collège (3ième) au lycée et l'intégration d'outils de calcul formel dans cet enseignement.

Dans une première partie nous exposons le cadre théorique de notre recherche, une approche épistémologique de l'enseignement des fonctions et nos choix didactiques.

Dans une deuxième partie nous présentons notre cadre de travail, la création du logiciel Casyopée, l'évolution de ce logiciel suite aux expérimentations auprès d'élèves et à la réflexion des membres du groupe.

Dans une troisième partie nous déclinons une même situation de la classe de troisième à la classe de terminale en précisant nos objectifs et les apports du logiciel. Deux autres situations sont traitées par la suite.

Les productions disponibles sur le WEB sont présentées et regroupées par thèmes sous forme de mini sites.

Enfin, dans une post-face Maria Alessandra Mariotti porte un regard extérieur sur le logiciel et les travaux du groupe au travers de la théorie de la médiation sémiotique. Les travaux du groupe et le téléchargement du logiciel sont disponibles sur le site : http://www.casyopee.eu

Format	Nombre de pages	Prix	Tirage
21 x 29,7	**101**	? €	**? ex**

ISBN 2-85728-076-9

I.R.E.M de RENNES – Université de RENNES 1

Campus de Beaulieu

35042 RENNES CEDEX

mél : secirem@iniv-rennes1.fr

Site WEB : http://www.irem.univ-rennes1.fr