Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX

ANALYSE DES ERREURS ET DIFFICULTES CONSTATEES DANS LES CLASSES DE 2NDE EN CALCUL ALGEBRIQUE

I.R.E.M. de RENNES

Janvier 1990

Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - Avenue du Général Leclerc
35042 RENNES CEDEX

ANALYSE DES ERREURS ET DIFFICULTES CONSTATEES DANS LES CLASSES DE 2NDE EN CALCUL ALGEBRIQUE

I.R.E.M. de RENNES

Janvier 1990

ISBN 2-85728-041-6

SOMMAIRE

SOMMAIRE DES FICHES

Ce document a été dactylographié par Danièle QUENTIN.

Le tirage et la reliure ont été effectués à l'I.R.E.M. par Madame LE BESCOND et Madame BOURON.

Ce document a été élaborée par les membres du groupe de Recherche I.R.E.M. **"Analyse des erreurs et difficultés constatées dans les classes de 2nde en calcul algébrique".** Ce groupe a fonctionné sur 1987 et 1988 et se compose de :

BOISSEAU Yvette	Lycée Joliot Curie - RENNES
BOYER Jocelyne	Lycée Emile Zola - RENNES
GREGGIA Suzanne	Lycée Ernest Renan - ST BRIEUC
HAMON Gérard	Lycée Ile de France - RENNES
PAROUX Christiane	Collège - CHARTRES DE BRETAGNE
RENOUARD Françoise	Lycée Jacques Cartier - ST MALO
ROUXEL Gérard	Collège Pierre Brossolette - BRUZ
RUAMPS Françoise	U.E.R. Mathématiques - RENNES
TERRIER Suzanne	Collège Louis Guilloux - MONTFORT/MEU
VINCENT Louis	Collège Chateaubriand - ST MALO
WILLAIME Germaine	Lycée La Poterie - RENNES

Ce texte analyse sous différentes formes quelques erreurs typiques en calcul algébrique dans les classes de 3ème et 2nde, et présente quelques essais de réponses et remédiations à ces erreurs.

Y figurent en jaune les fiches qui nous paraissent utilisables avec une certaine efficacité pour prévenir l'apparition d'idées fausses et d'erreurs, en rose les fiches tests.

Enfin, on y trouvera plusieurs références historiques qui susciteront certainement une réflexion sur les erreurs rencontrées : des hommes reconnus pour leurs capacités scientifiques ont eu des difficultés à théoriser ces notions il y a quelques siècles ; nos élèves rencontrent des difficultés analogues à assimiler ces notions pour lesquelles s'appuyer sur des problèmes concrets est insuffisant, sinon nuisible ("zéro, c'est rien !"). Les interrogations et les explications d'hier peuvent nous aider à mieux comprendre les blocages des élèves aujourd'hui.

Wallis (1616-1703)

Il est impossible de retrancher 8 de 5 parce que le premier est plus grand que le dernier (impossibile est ut ex 5 subsducantar 8, cum numérus bis sit illo major) "quoiqu'impossible, les mathématiciens et spécialement les algébristes se comportent comme si ce n'est pas impossible. C'est pour cela qu'ils considèrent au delà des quantités réelles, certaines quantités imaginaires qui sont moins que rien, et c'est alors qu'il y a besoin de distinction, ils indiquent les quantités positives par le signe + et négatives ou imaginaires ou ablatives par le signe -. C'est pourquoi de 5 peut être retiré 8, ils disent -3 reste, ce qui signifie, cette quantité est le 3ème nombre moins que zéro. Alors cette suposition est-elle absurde ? Quand alors il disent 5 - 8 = -3 c'est comme s'ils disaient "celui qui suppose 8 d'être retiré de 5 suppose un certain 3ème nombre moins que zéro (supporit ille aliquio ternario numéro minus quam nihial).

Matesis Universalis 1657

INTRODUCTION

Analyse des erreurs en calcul algébrique, niveau 3ème-2nde, il s'agit là d'un vaste programme !

Notre groupe de recherche était composé de huit enseignants en 1986-1987, puis de dix en 1987-1988 dont certains de collège, d'autres de lycée et un de l'université. Depuis plusieurs années arrivent en seconde des élèves maitrisant peu ou mal les calculs algébriques et ces erreurs se rencontrent encore, malheureusement, pour certains dans les classes supérieures, nuisant parfois à l'utilisation de nouvelles connaissances. Nous avons commencé par examiner les programmes en général, et plus particulièrement ceux de 3ème et de 2nde pour constater très rapidement que :

- D'une part, les enseignants de 2nde considèrent comme définitivement acquises certaines connaissances alors que le rôle de la classe de 2nde est, entre autres : "consolider, compléter et mobiliser les capacités acquises au collège". Par exemple : utilisation du tableau de signes, fonctions fraction rationnelle et leur ensemble de définition ne figurent pas au programme de 3ème.

- D'autre part, ceux du premier cycle ne connaissent pas toujours les principales utilisations futures des notions qu'ils introduisent. Un des exemples les plus significatifs n'est-il pas le développement abusif et trop systématique des polynômes qui conduit les élèves, par réflexe, à développer plutôt qu'à factoriser, alors que la factorisation s'avère le plus souvent opérationnelle : résolution d'équations et d'inéquations, étude de signes comme celui d'une dérivée... ?

Nous avons recensé les erreurs classiques, connues de tous et que nous ne rappellerons pas ici et recherché des articles déjà parus sur tous ces problèmes. Souvent, ce sont seulement des constats et le plus difficile est certainement de découvrir des remèdes.

Après ces deux années de travail nous sommes conscients de ne pas avoir tout abordé, mais nous avons progressé sur quelques points. En particulier nous avons découvert quelques mécanismes d'erreurs et les avons cernés avec précision afin d'y apporter explications et remédiations.

Nous avons pu, grâce à la sécurité qu'apporte un travail en groupe, tester des méthodes de remédiation collective ou individuelle. Nous avons procédé à des observations d'élèves qu'il est peu aisé, si ce n'est impossible de mettre seul en place au cours de l'année scolaire, les nécessités du programme et le temps ne le permettent pas : observation à plusieurs professeurs de groupes d'élèves sans ou avec intervention, discussions avec certains d'entre eux, explications individuelles sur des points précis...

Enfin nos analyses se sont effectuées sur des effectifs dépassant largement celui d'une seule classe, ce qui permet d'obtenir des conclusions plus sûres et moins subjectives.

I

PRESENTATION ET PREMIERES ANALYSES

A) PRESENTATION

1 - OBJECTIFS

2 - METHODES

3 - PROGRAMMES

4 - TESTS

B) PREMIERES ANALYSES

C) PREMIERES CONCLUSIONS

A) PRESENTATION

1 - OBJECTIFS :

- Evaluer l'importance des difficultés rencontrées par les élèves .
- Préciser la nature des erreurs et leur genèse.
- Proposer des activités aux élèves afin qu'ils puissent dominer leurs difficultés.

2 - METHODES :

- Des tests qui nous fournissent des résultats écrits classiques.
- Des situations (tests ou activités de rémédiation) où nous observons en silence les élèves en action.
- Des discussions individuelles avec les élèves.

3 - LES PROGRAMMES (Extraits) :

4ème (programme appliqué jusqu'en juin 1988) :

2 - *Travaux numériques.*

3 - Comparaison des nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre.

4 - Résolution de problèmes aboutissant à des inéquations du 1er degré à une inconnue (commentaires : le travail effectué doit permettre à l'élève d'acquérir définitivement les techniques opératoires mentales ou écrites).

4ème (programme appliqué depuis septembre 1988) :

Nombres et calcul : effet de l'addition et de la multiplication par un nombre positif sur l'ordre ; inéquations à une inconnue : problèmes qui y conduisent.

3ème (programme appliqué jusqu'en juin 1989) :

2 - *Travaux numériques.*

3 - Inéquations du premier degré : méthodes graphiques de résolution d'inéquations du 1er degré à coefficients numériques. Méthode de résolution d'un système de deux inéquations du 1er degré à deux inconnues à coefficients numériques.
(Commentaires : identiques à ceux de la classe de 4ème).

3ème (programme appliqué depuis septembre 1989) :

Capacités exigibles : savoir et utiliser le fait que des nombres relatifs de la forme ab et ac sont dans le même ordre que b et c si a est strictement positif, dans l'ordre inverse si a est strictement négatif.

2nde (programme actuel) * :

Commentaires : acquisition de méthodes en géométrie : développer une vision directe des choses, les activités graphiques doivent avoir une place importante... Faire intervenir simultanément, diverses parties du programme.

Activités numériques : il s'agit de consolider, compléter et mobiliser les capacités acquises au collège. Pratique des opérations et des inégalités portant sur les nombres réels, en particulier décimaux et rationnels.

Exemples d'approximation d'un nombre réel au moyen d'encadrements (dans les calculs sur les nombres décimaux, il s'agit, à propos de la résolution de problèmes numériques, d'effectuer des encadrements... Cette pratique ne doit pas consister en une manipulation purement formelle). En ce qui concerne les opérations, elles peuvent se limiter à l'encadrement de sommes, de différences et du produit de deux termes. D'autres cas (inverses, racines carrées) peuvent être abordés au cours d'activités mais leur maîtrise n'est pas exigible à l'issue de la 2nde.

Dans le calcul littéral : les principales difficultés concernent les inégalités. Pour que les inégalités prennent un sens et ne se réduisent pas à un formalisme purement algébrique il est utile de relier leur étude à celles des fonctions tant du point de vue numérique que graphique (comparaison de x et x^2 pour $x \geq 0$, opérations simples sur les inégalités, passage au carré, à l'inverse, à la racine carrée, "si $0 < a \leq b$ alors $0 < \frac{1}{b} \leq \frac{1}{a}$" à rapprocher de la décroissance de la fonction $x \rightarrow \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ et de l'allure de la représentation graphique). C'est la maîtrise de tels mécanismes élémentaires qui est importante.

De nombreuses situations conduisent à des inéquations. Leur résolution doit être abordée très progressivement en prenant appui sur des interprétations graphiques. L'étude d'exemples tels que $2 \leq x^2 \leq 4$; $x^2 \leq 2x$; $|2x + 1| \leq 1$ constitue un objectif raisonnable (il convient d'éviter *les exemples artificiels ou trop techniques).*

Fonctions : *- fonction croissante, fonction décroissante.*
- maximun, minimum d'une fonction

$$(x \rightarrow ax + b \ ; \ x \rightarrow |x| \ ; \ x \rightarrow x^2 \ ; \ x \rightarrow x^3 \ ; \ x \rightarrow \sqrt{x} \ ; x \rightarrow \frac{1}{x})$$

Systèmes d'équations linéaires : exemples d'étude par interprétation graphique de systèmes d'inéquations linéaires à deux inconnues.

Voici donc dans les programmes, ce qui nous parait être en relation directe avec les notions d'inégalité , d'inéquation et de calcul algébrique.

* Nous avons eu connaissance des pré-projets du programme qui s'appliquera en 2nde à la rentrée 1990 ; plusieurs notions glissent de la classe de 3ème à la classe de 2nde.

Il en ressort que ces notions doivent être complètement traitées en 4ème-3ème, les activités de 2nde permettant de "*consolider, compléter et mobiliser les capacités acquises au collège*" ; toutefois, le programme de 2nde signale que "*dans le calcul littéral, les principales difficultés concernent les inégalités*". L'apport principal du programme de seconde dans ce domaine nous parait être l'utilisation d'un nouvel outil : les fonctions et leur représentation graphique, et, plus particulièrement, les notions de croissance et de décroissance ainsi que leur lien avec l'allure de la représentation graphique. A ce sujet, nous avons remarqué en examinant une douzaine de livres de 2nde, récents ou anciens, que le lien entre croissance et conservation de l'ordre (respectivement, décroissance et inversion de l'ordre) n'apparait clairement que dans **un seul** ouvrage ! Dans tous les autres nous n'avons trouvé que les formules habituelles qui nous paraissent plus compliquées et moins significatives que les phrases :

"f croissante sur I, f conserve l'ordre".
"f décroissante sur I, f inverse l'ordre"..

4 - TESTS :

Une étude préliminaire a été faite à la fin de l'année scolaire 1985-1986 (mai-juin) sur 256 élèves de 2nde et 30 élèves de 3ème.

A la question : "Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $-3x + 2 > -\frac{1}{5}$", 53 % des élèves ont donné une réponse correcte, et 48 % ont su la rédiger correctement.

A la question : "x étant un réel, à quelle condition sur x l'expression $\sqrt{x-3}$ désigne-t-elle un nombre réel ?", 54 % ont remarqué que cette expression ne désigne pas toujours un réel, et 44 % ont pu déterminer qu'il fallait $x \geq 3$.

Ces chiffres, tout partiels qu'ils soient, donnent une idée de l'importance des difficultés qu'éprouvent beaucoup d'élèves sur ces problèmes.

Lors des tests effectués par la suite, nous retrouverons toujours, dans chaque classe y compris en seconde, un minimum de cinq ou six élèves qui échouent sur la résolution d'une inéquation du premier degré.

Le contenu des tests a évolué notablement car chaque expérience nous a permis de mieux cerner les choses et nous a amenés à détailler les difficultés ; par exemple, dans nos premiers tests, nous avons posé des questions du type :

- Ensemble de définition de f : $x \rightarrow \sqrt{x+3}$
- Etude du signe de l'expression $(2x+5)(x+3)$
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ $\dfrac{x-2}{2x+1} > 0$

De telles questions ont l'inconvénient de mélanger les difficultés : pour y répondre, il est nécessaire de résoudre des inéquations du premier degré mais il faut aussi utiliser d'autres connaissances.

Pour analyser précisément les erreurs des élèves nous avons posé des questions plus ponctuelles, du genre :

– x étant un nombre négatif, quel est le signe de $(-x)$?
- Résoudre $2x > 3$
- Que signifie ce tableau de signes ?

B) PREMIERES ANALYSES

Sont apparus les points suivants :

a) beaucoup d'élèves considèrent $-x$ comme un nombre négatif car cette expression débute par le signe – .

b) $2x > 3$ donne $x > 3 - 2$: confusion sur le sens de $2x$.

c) $2x > 3$ donne $x > \frac{3}{-2}$: confusion entre inverse et opposé, ou utilisation erronée d'une règle de changement de membre.

d) $-3x < 0$ présente une difficulté particulière à cause de la présence de zéro ; ce n'était pas encore très clair à ce stade de l'analyse mais c'est devenu évident lorsque nous l'avons affinée.

e) tel élève, qui résout correctement une inéquation, en traite mal une autre sans que cela paraisse dû à l'inattention ou à la fatigue.

D'ALEMBERT (1717-1783) l'Encyclopédie

NEGATIF, adg. (Algeb.) quantités négatives, en Algèbre, sont celles qui sont affectées du signe -, & qui sont regardées par plusieurs mathématiciens, comme plus petites que zéro. Cette dernière idée n'est cependant pas juste... (Dire que la quantité négative est au dessous du rien, c'est avancer une chose qui ne se peut pas concevoir).

CARNOT (1753-1823) "Géométrie de Position

"Pour obtenir réellement une quantité négative isolée, il faudrait retrancher une quantité effective de zéro, ôter quelque chose de rien : opération impossible. Comment donc concevoir une quantité négative isolée ?

C) PREMIERES CONCLUSIONS

Les élèves qui font des erreurs de type a) oublient que les lettres a, b, x peuvent être des nombres positifs ou négatifs ; le statut de la lettre présente une grosse difficulté pour les élèves. Il faut aussi remarquer que le signe "–" n'a pas toujours la même signification : voir chapitre V "**TABLEAUX DE SIGNES**", particulièrement le paragraphe C : vocabulaire.

Les erreurs du type b) ou c) se retrouvent dans les résolutions d'équations ; elles semblent liées à une mauvaise compréhension des opérations et non des inéquations ; nous chercherons donc à les analyser à part ; c'est le sujet du chapitre III "**EQUATIONS - SENS DES OPÉRATIONS**".

A propos de d), nous retrouverons des difficultés liées au zéro dans les résolutions d'équations ; là encore nous les analyserons à part, dans le chapitre VI "**PROBLEME DU ZÉRO**"

Enfin à propos de e) : chaque fois que nous avons pu observer très précisément et interroger l'élève nous avons constaté qu'il utilisait très systématiquement une règle d'action erronée ; règle qu'il s'était forgée à partir de ce qu'il avait cru comprendre pendant les résolutions d'inéquations traitées en classe. Dans la plupart des cas, l'élève est capable de se rappeler les règles correctes (parfois il a besoin d'un petit rappel : "c'est un peu loin !"), il les citera parfaitement mais, utilisera ses règles personnelles pour la résolution d'inéquation demandée immédiatement après.

Nous donnons quelques exemples de ces règles personnelles dans le chapitre IV "**INEQUATIONS**" ; on remarquera que la plupart d'entre elles permettent de donner une solution juste pour certaines familles d'inéquations ; il est probable que l'élève a rencontré de telles inéquations très fréquemment pendant sa phase d'apprentissage et qu'il n'a pas rencontré suffisamment de "contre-exemples" qui auraient empêché la règle erronée de s'installer ; c'est d'autant plus probable qu'il est très difficile de présenter un échantillonnage complet d'inéquations tant qu'on n'a aucune idée des règles très variées que peuvent imaginer les élèves ; nous avons amélioré peu à peu nos énoncés au fur et à mesure que nous rencontrions de nouvelles "règles" ; mais cela nous a conduit à des listes qui apparaissent a priori inutilement longues.

Cela nous a conduit aussi à un retour aux sources : nous avons voulu *OBSERVER DES ÉLEVES DE 5EME* découvrant les nombres relatifs et leur addition (chapitre II).

II

ERREURS DANS LES CALCULS D'EXPRESSION

A) OBSERVATION EN 5EME

1 - PRESENTATION DES CLASSES

2 - DEROULEMENT DE L'OBSERVATION

3 - DEUX DIALOGUES

Laurent
Nicolas

B) PARENTHESES

A) OBSERVATION EN 5EME

Nous avons donc observé deux classes de 5ème du collège de MONTFORT/MEU le 10 Octobre 1986.

1 - PRESENTATION DES CLASSES :

5ème A : 28 élèves dont 8 redoublants.
5ème J : 28 élèves dont 5 redoublants.

Au cours de la séance précédant l'observation, le professeur a distribué la fiche 1 et demandé de la compléter. Puis il est passé aider les élèves qui ne démarraient pas ou ne comprenaient pas la démarche à suivre. Enfin la fiche a été corrigée collectivement et rien n'a été ajouté après cette correction.

2 - DEROULEMENT DE L'OBSERVATION :

Cette observation étant la première de notre groupe fut un peu laborieuse.

Les élèves avaient une première fiche à compléter (fiche 2) : ADDITIONS D'ENTIERS RELATIFS. Lorsqu'elle était terminée, ils prenaient la deuxième (fiche 3).

La consigne pour nous était d'observer et de ne pas répondre aux questions.

Le caractère exceptionnel de cette expérience a entraîné une adhésion complète des élèves ; ils pouvaient travailler par groupe de deux, mais beaucoup se sont lancés dans les calculs individuellement jusqu'au blocage. A ce moment là ils commençaient à dialoguer avec leurs voisins. Dans chaque classe l'expérience a duré une heure.

Certains élèves achevaient très rapidement les deux fiches et avaient complètement dépassé le stade "recettes-dépenses".

D'autres, à la fin de l'heure, raisonnaient encore avec les recettes-dépenses et n'avaient pas terminé les fiches. Ils avaient résolu jusqu'au n°20 ou 22 de la fiche 2 et avaient fait l'exercice 1 de la fiche 3. Des élèves nous ont appelés pour des vérifications ou explications. Pour ne pas fausser l'observation nous avons évité de répondre (mais la tentation a été parfois trop forte...) et nous avons demandé à des élèves qui avaient terminé d'expliquer à ceux qui étaient "en panne".

3 - DEUX DIALOGUES :

L'un deux, SAMUEL, a vainement essayé d'expliquer à son voisin LAURENT, l'exercice n°16 de la fiche 2, à l'aide des "recettes-dépenses" :

SAMUEL :

Tu fais comme avec la fiche de cours. Tu as 15F, tu dépenses 7F, il reste 8F ; puis tu dépenses 11F donc il faudra que tu donnes encore 3F. Ton résultat est -3".

Un redoublant FREDERIC est venu s'ajouter au groupe, mais LAURENT ne comprenait toujours pas :

FREDERIC :

"Tu fais une soustraction et tu regardes le signe du plus grand nombre".

Et, en regardant le professeur de la classe venu se joindre à eux il ajoute :

"En fait, ce n'est pas le plus grand puisqu'il y a un signe moins".

A son tour le professeur intervient et reprend les explications avec des ascenseurs :

"Tu montes 15 étages puis tu en redescends 7 ; tu es au 8ème. Puis ,tu en redescends 11 ; tu es alors au niveau -3".

Aucun succès, même avec dessin à l'appui.

Girard (1595-1634) "Invention Nouvelle en l'Algebre, tant pour la solution des équations que pour recognoistre le Nombre des Solutions qu'elles reçoivent ; avec plusieurs choses qui sont nécessaires à la Perfection de ceste divine Science (Amsterdam 1629)

$$2 \quad equ.\, 6 \; 1 - 25 \qquad\qquad (x^2 = x \; - 25)$$

"La solution par moins s'explique en géométrie en retrogradant et le moins recule où le plus avance".

Une des premières tentatives d'explication des nombres négatifs.

Un professeur observateur se joint au groupe et abandonne les explications concrètes.

- "*Que t'arrive t'il ?*"
- "*Je ne comprends pas*" dit LAURENT.
- "*Savais tu faire les premiers exercices ?*" demande le professeur.
- "*Oh oui bien sûr !*"
- "*Alors tu peux t'y ramener. Tu ajoutes les nombres positifs, puis tu ajoutes les nombres négatifs ; avec les deux nombres obtenus tu te retrouves dans la première situation*".
- "*Je ne comprenais rien avec vos recettes-dépenses ; il suffisait de me l'expliquer comme cela !*" dit LAURENT.

Il savait ajouter deux nombres mais pas plusieurs, et après lui avoir énoncé la règle cela semblait compris. Le professeur a constaté plus tard dans l'année, en détaillant particulièrement ses copies, que LAURENT a d'autres difficultés en algèbre : il confond les règles des signes entre la multiplication et l'addition.

Un non-redoublant, NICOLAS, est venu donner une explication à une élève qui ne savait pas effectuer les calculs. Oh surprise, il lui énonce la règle suivante :

- "*Tu fais une différence et tu regardes le signe de celui qui a la plus grande valeur absolue*".
- "*Comment sais-tu cela ?*" questionne le professeur.
- "*C'est vous qui l'avez dit, hier.*" réponds NICOLAS.
- " *Je n'ai jamais énoncé cela !*"
- "*Non, mais cela revenait exactement au même.*" affirme NICOLAS.

Or, volontairement, le professeur n'avait pas énoncé les règles d'addition des relatifs en classe : on peut constater à quelles vitesse les élèves élaborent leurs propres règles d'action, pertinentes ou non !

B) PARENTHESES

Un autre problème crucial concerne les calculs où interviennent les parenthèses, explicitement ou implicitement.

Voici des difficultés et erreurs qui apparaissent dès la 5ème :

- Parmi les redoublants on entend souvent :"*On change tous les signes à l'intérieur de la parenthèse*". Ils le disent mais ne le font pas :

$$-(x+8) = -x+8$$

- On peut voir encore :

$$-(x+8) = x-8$$

Nous avons voulu cerner le problème en donnant un test progressif en 3ème et 2nde :

Calculer : $A = \dfrac{4x}{5} - \dfrac{x-3}{5}$

$B = \dfrac{3x}{2} - \dfrac{4x-1}{3}$

$C = \dfrac{2x}{5} - \dfrac{3x+11}{2}$

$D = \dfrac{11x+3}{3} - \dfrac{1-2x}{3}$

Nous avons ramassé les copies aussitôt les calculs faits. Le dépouillement des résultats a été instructif : dans une classe de 2nde, 44 % des élèves font systématiquement des erreurs dans les calculs de A, B, C, D, et dans une classe de 3ème, 33 % des élèves font les mêmes erreurs ; l'écart s'explique sans doute ainsi ; les élèves de 3ème sont davantage entraînés que les élèves de 2nde à ce genre de calculs.

Dans un deuxième temps, nous avons donné deux exercices ;

Calculer : $E = \dfrac{2x}{3} - \dfrac{(2x+2)}{3}$

$F = \dfrac{2x}{7} - \left[\dfrac{4x-5}{3}\right]$

Une première constatation : les parenthèses dans l'expression F gênent, et les résultats obtenus ne nous ont pas paru significatifs ; car, après réflexion, nous avons pensé que finalement on ne rencontre pas beaucoup cette situation. Dans l'exercice E le pourcentage d'erreurs "tombe" à 17 % en 2nde et à 10 % en 3ème.

Pour finir, nous avons donné le calcul de :

$G = \frac{2x-5}{6} - \frac{3x-4}{5}$, et apparemment, la leçon a été profitable puisque le pourcentage d'erreur "tombe" là aussi à 17 % en 2nde et à 10 % en 3 ème.

Quinze jours plus tard, quatre exercices du même type donnés à la classe de 2nde montrent que les élèves qui faisaient des erreurs n'en font plus.

Est-ce une acquisition définitive ? ou faudra-t-il encore périodiquement des rappels ?

FICHE N° 1

RECETTES ET DEPENSES

Conventions : Une recette est exprimée par un nombre positif.
Une dépense est exprimée par un nombre négatif.

Cas N° 1	Une recette de 23 F	suivie d'	Une recette de 8 F	=	Une...... de ....
Traduction	(+23)	+	(+8)	=	
Cas N° 2	Une recette de 30 F	suivie d'	Une dépense de 20 F	=	Une...... de ....
Traduction				=	....
Cas N° 3	Une dépense de 20 F	suivie d'	Une dépense de 8 F	=	Une ...... de ....
Traduction	(-20)	+		=	....
Cas N° 4	Une recette de 30 F	suivie d'	Une dépense de 50 F	=	Une...... de ....
Traduction				=	
Cas N° 5	Une dépense de 40 F	suivie d'	Une recette de 10 F	=	Une.......... de ....
Traduction				=	
Cas N° 6	Une dépense de 10 F	suivie de	Une recette de 40 F	=	Une...... de ....
Traduction				=	

FICHE N° 2
ADDITION DES RELATIFS

1 - (+11) + (11) =

2 - (+16) - (-11) =

3 - (-53) + (-18) =

4 - (+8) + (+4) =

5 - (+9) + (0) =

6 - (-15) + (+42) =

7 - (-10) + (-22) =

8 - (-14) + (+12) =

9 - (-31) + (+13) =

10 - (+16) + (-24) =

11 - (-31) + (+31) =

12 - (0) + (-8) =

13 - (-7) + (-7) + (-7) =

14 - (-7) + (+7) + (-7) =

15 - (+7) + (-7) + (+7) =

16 - (+15) + (-7) + (-11) =

17 - (+18) + (-5) + (-12) =

18 - (-7) + (-9) + (-1) =

19 - (+15) (+7) + (-15) =

20 - (-8) + (-53) + (+8) + (+53) =

21 - (-6) + (-27) + (+25) + (+8) =

22 - (-7) + (-9) + (-1) + (-3) =

23 - 5 + (-3) + 2 + (-4) +2 =

24 - -8 + 3 + 5 + 1 + (-3) + 2 =

25 - -1 + 2 + (-3) + 2 + (-5) + 4 =

FICHE N° 3
ADDITION DES RELATIFS

1 - (+25,8) + (+42,7) =

(-36,5) + (-63,4) =

(+42,1) +(-35,8) =

(+43,5) + (-65,7) =

(-26,4) + (-26,4) =

(+53,7) + (-53,7) =

(-39,4) + 0 =

0 + (-16,5) =

2 - (+18) + (-43) + (-27) =

(-37,5) + (-12,8) + (+32) =

3 - (+8,24) + (-4,8) + (-8,54) + (+8) + (-19) =

(-16,7) + (-12,24) + (-9) + (+15,35) + (+28) =

(-45) + (-36,8) + (+37) + (43,9) + (-108) =

(-36,2) + (+64) + (-48,9) + (+36,2) + (-50) + (-14) =

III

EQUATIONS
SENS DES OPERATIONS

A) CALCUL DE $ax + b$

B) RESOLUTION DE $ax + b = c$

1 - UTILISATION D'UNE SEULE OPERATION : $x + a = b$
ou $ax = b$ ($a \neq 0$) :

2 - UTILISATION DE DEUX OPERATIONS : $ax + b = c$

C) CONCLUSION

De nombreuses erreurs faites dans la résolution des équations et des inéquations sont dues à une confusion des opérations : addition et multiplication.

<u>Exemple</u> : $2x = 3$

$\cancel{2}x = 3 - 2$

C'est en 4ème puis en 3ème qu'il est indispensable de s'assurer que les élèves maîtrisent le sens des opérations.

Il est important :

- de faire comprendre aux élèves que x étant un réel donné, $2x + 3$ est un réel.
- le réel $2x + 3$ étant donné, comment trouver la valeur de x.

Le statut de la lettre présente une grosse difficulté pour les élèves ; ils posent souvent la question : "Pourquoi des lettres ?", "A quoi ça sert ?" Nous pensons qu'il est possible de présenter aux élèves des aspects historiques sur la naissance de l'algèbre. Nous avons aussi utilisé des situations où l'emploi des lettres simplifie les choses ; voir jeu de magicien partie B, deuxième paragraphe.

<u>Brève Histoire des Notations des premières puissances</u>

N. Chuquet +1488	**Stifel** 1486-1567	**Viete** 1540-1603	**Girard** 1595-1634	**Oughtred** 1574-1660	**Harriot** 1560-1621	**Descartes** 1596-1650
1^1		R	1	A	a	z
1^2		2	2	Aq	aa	z^2
1^3		C	3	Ac	aaa	z^3

N. Chuquet (+1488)
(Première géométrie algébrique de la langue française 1484)

"La règle des premiers fondée sur la règle d'égallir" et a pour objet de la recherche de 1^1 qui est "la chose que l'on veult sçavoir".

"On simplifie rayant, adjostant et soustrayant de l'une et de l'autre parties tant de foyz et tellement que en lune des parties n'ayt différence de nombre alcune qui soit semblable à aulcune des différences de l'aultre partie".

<u>Ex : Résolution de $225 - x^2 = 144 - 289 + 34x - x^2$</u> (solution $x = \frac{185}{17}$)

"... 225 $\bar{m}$ 1^2 puis l'autre partie restent 144 $\bar{m}$ 289 $\bar{p}$ 34^1 $\bar{m}$ 1^2 égaulx à 225 $\bar{m}$ 1^2, abrévies tes parties si auras 34^1 pour partiteur et 370 pour nombre à partir et par conséquent $10\frac{15}{17}$ pour quociens et pour la première des deux parties".

A) CALCUL DE $ax + b$

Nous avons demandé aux élèves de 4ème (et à certains élèves de 3ème à titre de remédiation) de calculer $2x + 3$ pour différentes valeurs de x en utilisant cette rédaction

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 2} \boxed{2x} \xrightarrow{+3} \boxed{2x+3}$$

$$\boxed{7} \xrightarrow{\times 2} \boxed{14} \xrightarrow{+3} \boxed{17}$$

$$\boxed{-5} \xrightarrow{\times 2} \boxed{-10} \xrightarrow{+3} \boxed{-7}$$

(Ne pas oublier de donner à x des valeurs comme :

0 ; -1 ; $\sqrt{2}$; $-\frac{37}{4}$; $528{,}12$... et, plus tard, t ; $-v$; $2a$).

Ce calcul direct est en général bien réalisé. Il nous a paru utile de bien montrer que l'on obtient un réel en exigeant la conclusion orale : "Si x a pour valeur 7, alors $2x + 3$ a pour valeur 17". Ce qui nous permet d'introduire naturellement la 2ème étape.

B) RESOLUTION DE $ax + b = c$

Si pour beaucoup d'élèves les résolutions d'équations du type :

$$x + a = b \quad ou \quad ax = b \qquad (a \neq 0)$$

sont assez vite comprises, il n'en est plus de même pour $ax + b = c$. Dans le premier cas l'élève n'utilise qu'une seule opération, alors qu'il faut en enchaîner deux dans le 2ème cas.

1 - UTILISATION D'UNE SEULE OPERATION : $x + a = b$ ou $ax = b$ $(a \neq 0)$:

Nous n'avons pas constaté de difficultés lorsqu'on travaille avec des nombres positifs. Dès la 6ème et la 5ème, les élèves sont habitués à résoudre des problèmes du type :

Compléter : $\square + 3 = 7$

$\square \times 2 = 12$

Les difficultés apparaissent lorsqu'interviennent des nombres négatifs. Il ne faut pas hésiter à utiliser les boîtes avec des nombres négatifs. On introduit l'écriture classique dès la 4ème.

Exemple d'erreurs rencontrées : $-3x = -2$

$3x = 2 \qquad x = -\frac{2}{3}$

L'élève nous a justifié son calcul en disant : *"Je passe 3 de l'autre coté, donc je change de signe"*. Pour éviter ce genre d'erreur nous demandons à nos élèves de justifier leur calcul par une phrase.

Exemple 1 : $x - 3 = 2$

J'ajoute (+3) à chaque membre.
$x - 3 + 3 = 2 + 3$
$x = 5$

Nous avons craint que dire "J'ajoute l'opposé de (-3)" crée une difficulté supplémentaire. En fait cela ne pose pas de problème à la majorité des élèves vu la réussite du test en 3ème (fiche N°4). Cependant, nous avons observé que pour les élèves les plus en difficulté, il est plus facile de dire "J'ajoute 3".

Exemple 2 : $-2x = 5$

Je multiplie par $(-\frac{1}{2})$ ou Je divise par (-2)

$(-\frac{1}{2}) \times (2x) = (-\frac{1}{2}) \times 5$	$-\frac{2x}{-2} = \frac{5}{-2}$
$x = -\frac{5}{2}$	$x = -\frac{5}{2}$

Cette erreur est encore faite par certains élèves de terminale. Nous proposons alors à ces élèves une remédiation individuelle ; par exemple : résoudre les équations suivantes en justifiant vos calculs par des phrases du type "J'ajoute (–3) à chaque membre" ou "Je divise chaque membre par (–2)".

2 - UTILISATION DE DEUX OPERATIONS : $ax + b = c$

a) Un petit jeu :

Nous avons proposé un jeu préparant à la résolution de $2x + 3 = 11$

> Demande à ton voisin
>
> 1) de penser à un nombre
> 2) de multiplier ce nombre par 2
> 3) d'ajouter 3 au résultat obtenu
> 4) de te donner le résultat final
>
> Peux-tu retrouver le nombre auquel il a pensé ?

Voici le schéma correspondant au calcul de ton voisin :

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 2} \boxed{2x} \xrightarrow{+3} \boxed{2x+3}$$

S'il te dit avoir obtenu 11, on a plus précisément :

$$\boxed{x} \xrightarrow{\times 2} \boxed{2x} \xrightarrow{+3} \boxed{2x+3 = 11}$$

Peux-tu donner un schéma correspondant à ton calcul ?

$$\boxed{11} \xrightarrow{-3} \boxed{8} \xrightarrow{:2} \boxed{4}$$

Si on appelle x le nombre inconnu, nous venons de résoudre l'équation :

$$2x + 3 = 11.$$

Résumons les différentes étapes :

Etape n°1
$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 3 = 11 \\ 2x + 3 - 3 = 11 - 3 \\ 2x = 8 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x = 8 \\ \dfrac{2x}{2} = \dfrac{8}{2} \\ x = 4 \end{array}\right\}$$
Etape n°2

b) Rédaction définitive :

A la suite de plusieurs "jeux" de ce type les élèves arrivent en général à résoudre correctement $ax + b = c$. Dans cette résolution, des erreurs apparaissent soit au niveau 1 soit au niveau 2. Une aide individuelle s'impose, le dialogue avec l'élève permet dans de nombreux cas de déceler les différentes erreurs. Pour y remédier nous avons demandé à certains élèves de justifier leurs calculs par écrit comme au II 1). Mais il y a aussi des élèves qui écrivent correctement les phrases en français et se trompent ensuite dans l'écriture mathématique.

Exemple de copie d'élève : $2x = 3$

Je divise les deux membres par 2

$-2 + 2x = 3 - 2$

Pour ceux-là, heureusement peu nombreux, seul le dialogue peut les amener à plus de cohérence.

C) CONCLUSION

- Pour une consolidation des notions d'addition et de multiplication nous préférons, dans un premier temps, mettre nos élèves en situation de problèmes : exemple du jeu...

Nous évitons de donner systématiquement et surtout uniquement des opérations à effectuer.

Exemples de problèmes :

1) Trouve 3 nombres entiers consécutifs dont la somme est 120. Désigne par x le plus petit d'entre eux.

2) Plusieurs personnes sont gagnantes à un concours.
Chacune d'elles, sauf 3, reçoit 5 disques. 45 disques ont été distribués. Quel est le nombre de personnes gagnantes ?

3) Soit un triangle CAB isocèle de base [AB]
avec AB = 5 et CA = x (l'unité choisie étant le centimètre). Calcule le périmètre du triangle en fonction de x. Calcule x sachant que le périmètre est égal à 24 cm.

- Pour l'acquisition des techniques, nous évitons d'utiliser certaines phrases "nuisibles" :

"Je supprime le dénominateur".

"Je passe un terme d'un membre dans l'autre".

En effet, la phrase "Je passe 4 dans l'autre membre" peut s'appliquer aux deux situations suivantes :

1) $x + 4 = 8$
$x = 4$

2) $4x = 8$
$x = 2$

où le sens des opérations disparait complètement. Et nous avons effectivement lu dans des copies :

Je change de membre donc je change de signe

$2x - 4 = 7$

$2x = 7 + 4 \qquad 2x = 11 \qquad x = \frac{11}{-2}$

FICHE N° 4
TEST

Complèter :

. L'opposé de (–2) est : --------

. L'opposé de $(\frac{1}{3})$ est : --------

. L'opposé de l'inverse de 4 est : --------

. 2 – (–5) = --------

. L'inverse de 3 est : --------

. L'inverse de (–7) est : --------

. L'inverse de $(\frac{4}{7})$ est : -------

. $\dfrac{1}{(\frac{2}{3})}$--------

. $\frac{1}{7}$ est -------------------- de 7

. – 5 est -------------------- de 5

. $\frac{3}{11}$ est ------------------- de $-\frac{11}{3}$

. $x \neq 0, \frac{1}{x}$ est ---------------------- de x

. a est -------------------- de $-a$

. Si $3{,}8 + x = 0$ alors $x =$ --------------------

. Si $-12 + x = 0$ alors $x =$ --------------------

. Si $-\frac{5}{7} + x = 0$ alors $x =$ --------------------

. Si $17\,x = 1$ alors $x =$ --------------------

. Si $\frac{5}{14}\,x = 1$ alors $x =$ --------------------

. Si $-\frac{7}{13}\,x = 1$ alors $x =$ --------------------

IV
INEQUATIONS

A) LES METHODES DES ELEVES

1 - TROIS METHODES CORRECTES

2 - UNE METHODE "FAUSSEMENT CORRECTE"

3 - DES METHODES INCORRECTES

B) DIFFERENTES PISTES

POUR AIDER LES ELEVES A SURMONTER LEURS DIFFICULTES

1 - REDIGER AVEC PRECISION

2 - RETROUVER LA REGLE A UTILISER

3 - "MACHINES A MULTIPLIER"

4 - UTILISATION DES GRAPHIQUES

Les erreurs des élèves proviennent, entre autres, de la mauvaise utilisation des symboles $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ et de la connaissance peu sûre et mal appliquée de règles telles que :

"On peut multiplier chaque membre d'une inégalité par un même nombre négatif à condition de changer le sens de l'inégalité"

ou bien :

"Si deux nombres a et b vérifient $0 < a < b$, alors $0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

etc...

Voici ce que nous avons observé lors des tests et discussions avec les élèves :

A) LES METHODES DES ELEVES

1 - TROIS METHODES CORRECTES :

$-3x > 2$ donne directement $x < -\frac{2}{3}$

$-3x > 2$ (en passant éventuellement par : $(-1)(-3x) < (-1)\,2$)
donne $3x < -2$ puis $x < -\frac{2}{3}$

$-3x > 2$ donne $-2 > 3x$ puis $-\frac{2}{3} > x$ et enfin $x < -\frac{2}{3}$

Les deux dernières méthodes semblent montrer que, pour ces élèves, le signe – n'est pas facile à utiliser, et qu'ils essayent surtout d'écarter rapidement le problème que poserait une division par un réel négatif (autre que -1) : ils s'occupent d'abord du changement de signe ; ils savent où est la difficulté, mais la maîtrisent à peine.

Leur méthode sera insuffisante pour les inéquations $ax < b$ où a est un réel dont ils ne verront pas le signe.

2 - UNE METHODE "FAUSSEMENT CORRECTE" :

- Des élèves suivent apparemment la deuxième des méthodes ci-dessus :

$-3x > 2$ donne $(-1)(-3x) \geqq (-1)\,2$ puis $3x < -2$ et enfin $x < -\frac{2}{3}$

Ils distinguent entre écrire la multiplication par -1 et l'effectuer; pour eux le changement de sens de l'inégalité ne se fait qu'au moment où on effectue l'opération !

3 - DES "METHODES" INCORRECTES :

Premier exemple : $-3x > 2$ donne $3x < -2$: tout va bien apparemment ;
mais $-3x > -2$ donne $3x > 2$!!

"Le signe – change de côté, donc il y a changement de sens de l'inéquation" dit l'élève dans le premier cas.

"Le signe – disparait, il ne change donc pas de côté ; l'inéquation ne change pas de sens" dit-il dans le deuxième cas.

Deuxième exemple : $-3x > 2$ donne $3x > -2$
mais $-3x > -2$ donne $3x < 2$

"Le signe – reste présent dans l'inéquation, il n'y a donc pas de changement de signe, donc pas de changement de sens de l'inéquation" pour le premier cas.

"Il n'y a plus de signe –, il y a donc changement de signe et donc changement du sens de l'inéquation" pour le deuxième cas.

Date d'apparition de la notation moderne >, <

Signum majoratis ut $a > b$ significat a majoriem b
Signum minoratis ut $a < b$ sgnificat a minorem b

Harriot : artis analyticae Praxis (1631)

Voici encore d'autres exemples :

Tout va bien apparemment :

$-2x \geq 3$

$-x \geqslant \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad x \leqslant -\frac{3}{2}$

Dans $\mathbb{R}^-$ $\quad S =]-\infty ; -\frac{3}{2}]$

je change le signe car il y a le signe − devant x

C'est maintenant que l'erreur se révèle :

$-2x \leq -9$

$-x \leqslant -\frac{9}{2}$

$x \leqslant \frac{9}{2}$

je ne change pas le signe car il y a un signe négatif devant x et $\frac{9}{2}$

Dans $\mathbb{R}$, $S =]-\infty ; \frac{9}{2}]$

Un autre élève le dit encore plus clairement :

$-2x \leq -9$

$x \leqslant \frac{9}{2}$

$S =]-\infty , \frac{9}{2}]$

On ne change pas l'égalité car −2 et −9 sont tous les deux du même signe

Il est encore possible "d'oublier d'agir" sur le 2ème membre :

$-2x \geq 3$

$2x \leq 3$ le signe de l'inégalité change car x était négatif

$x \leq \frac{3}{2}$ On multiplie par l'inverse de 2 $(\frac{1}{2})$

$S_{\mathbb{R}}$: $]-\infty ; \frac{3}{2}]$

$-2x \leq -9$

$2x \geq -9$ Puisque x est négatif, on change le signe de l'inégalité.

$x \geq -\frac{9}{2}$ On multiplie par $\frac{1}{2}$

$S_{\mathbb{R}} = [-\frac{9}{2} ; +\infty[$

Nous avons été très surpris de rencontrer ces "méthodes" relativement souvent dans les explications des élèves. Il semble que beaucoup d'élèves assimilent ce type de calculs aux règles concernant le produit de deux réels : + par + donne +

– par – donne +

+ par – donne –

ce qui entraine en général la séparation en trois "écoles" :

a) La mobilité du signe – est "compensée" par celle du symbole >

$- <$ donne $> -$

ou

$< -$ donne $- >$

ce qui amène à l'inaction dans le cas de deux signes – :

$- < -$ donne $<$

b) La disparition du signe – "se compense" par la mobilité de ce symbole

$- <$ donne $< -$

le signe – ne disparait pas, il change seulement de membre. Mais :

$- < -$ donne $>$

le signe – disparait totalement, on change le sens du symbole <

c) Enfin + par – donne –

donc incidence sur le signe >

– par + donne – *("avec le signe - il y a changement de sens")*

– par – donne + donc aucun changement

("on sait que le signe + n'a aucune incidence")

B) DIFFERENTES PISTES
POUR AIDER LES ELEVES

1 - REDIGER AVEC PRECISION :

Dans le prolongement de ce que nous avions fait pour les équations, nous avons demandé aux élèves de rédiger les résolutions d'inéquations en mettant en évidence la nature des opérations effectuées : addition, soustraction, multiplication, division. Cela permet aux élèves de ne pas se précipiter sur des mauvais automatismes et de canaliser l'enchainement de leurs calculs.

Exemple :	Résolution de l'équation $x - 3 = 5$
	En additionnant 3 à chaque membre de l'équation $x - 3 + 3 = 5 + 3$, j'obtiens $x = 8$ donc l'ensemble des solutions de cette équation est $S = \{8\}$
	Comme dans l'exemple, en utilisant : "en additionnant", "en multipliant par", ou "en divisant par", résoudre les équations suivantes : $x + 1 = 5$; $2x = -3$; $2x = 5$; $-4 + x = -1$; $-3x = 2$; $-5x = -10$; $\frac{1}{2}x = -3$; $-\frac{3}{4}x = 7$
	En utilisant le même type de rédaction, résoudre les inéquations suivantes : $x - 3 < -2$; $9 + x \leq 5$; $3x > -1$; $-2x > -3$; $-5x < -2$; $\frac{3}{2}x > -1$; $5x + 7 \geq -2$; $8 - \frac{3}{2}x \leq x - 1$

Cela convient à la majorité des élèves qui ont pour défauts majeurs la précipitation et le manque d'attention.

2 - RETROUVER LA REGLE A UTILISER :

Pour ceux qui ont des difficultés plus profondes nous préférons y remédier individuellement.

Nous avons d'abord proposé à ces élèves l'exercice suivant qui les amène à énoncer la règle sur la multiplication de chaque membre d'une inégalité par un même nombre négatif :

> On considère les réels suivants : $-\frac{3}{2}$, 7, −6, 0, 1 ; les classer par ordre croissant :
>
> $< \quad < \quad < \quad <$
>
> Multiplier chacun des réels de la liste précédente par 2 et classer les résultats par ordre croissant.
>
> Multiplier chacun des réels de la liste précédente par −3 et classer les résultats par ordre croissant.
>
> A partir de ces exemples rappeler quelle règle générale on utilise pour le produit de chaque membre d'une inéquation par un nombre réel.

3 - "MACHINES A MULTIPLIER" :

A ceux qui ont des difficultés avec les phrases-type, nous donnons une fiche telle que celle des machines à multiplier (fiche N° 5) ; cette fiche les met devant une activité de type nouveau et non devant des phrases-type qu'ils peuvent répéter sans être capables de les mettre en pratique.

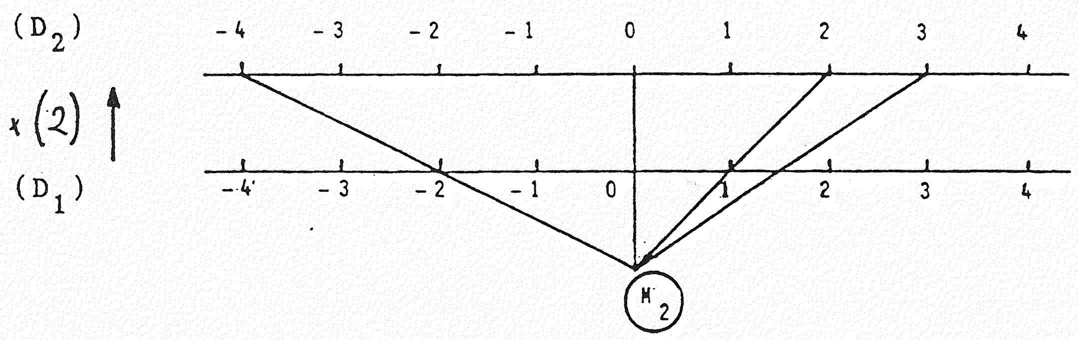
Toutes ces méthodes sont performantes auprès de la majorité des élèves en difficulté.

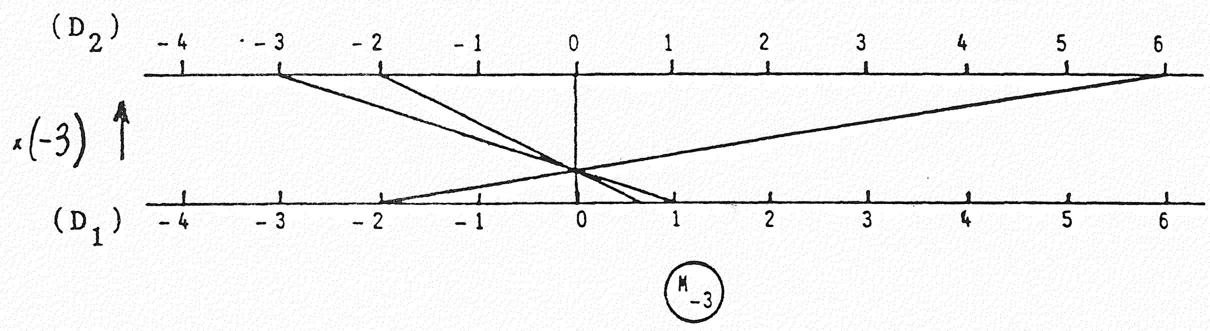
Cependant, il ne faut pas oublier la force de conviction d'une démonstration :

ainsi, lorsqu'un élève de 1ère S est venu dire qu'il n'avait jamais compris pourquoi $-3x < -7$ devient $x > \frac{7}{3}$, cela a été l'occasion, là encore à titre individuel, de lui faire la démonstration de : si $a < b$ *et* $c < 0$ alors $ac > bc$, ce qui a semblé convenir à cet élève, tout heureux de découvrir qu'il n'y avait pas de tour de "passe-passe".

FICHE N° 5
MACHINES A MULTIPLIER

I - Voici deux machines, une à multiplier par 2 : (M_2)
l'autre à multiplier par –3 : (M_{-3})





II - Sur le même modèle construis une machine à multiplier par 5 puis une machine à multiplier par –2.

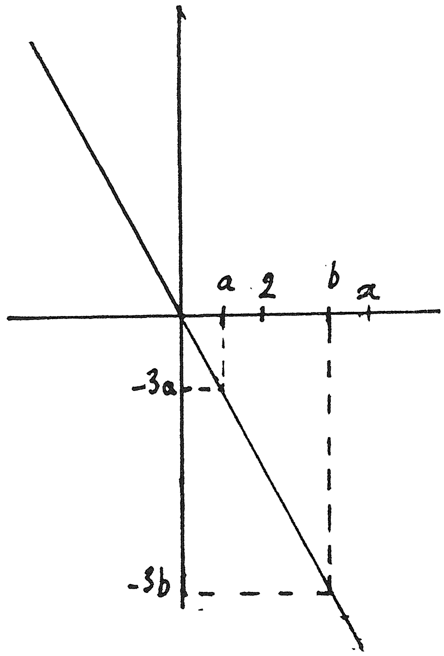
III - Sur chacune des droites (D_1) des quatre machines des deux questions précédentes fais apparaitre en rouge l'ensemble des nombres x tels que $x \leq -1$ puis sur les droites (D_2) visualise d'une autre couleur les produits $2x$, $-3x$, $5x2$ et $-2x$ et écris les inégalités correspondant à chacun de ces produits :

. $x \leq -1$ donc $2x$ ...
. $-3x$ ...
. $5x$ ....
. $-2x$ ..

Dans quels cas l'inégalité change t-elle de sens ?

Utilisation : voir page précédente.

4 - UTILISATION DES GRAPHIQUES :



Très souvent la visualisation peut beaucoup apporter.

Par exemple, si un élève écrit $x \geqslant 2$ alors $-3x \geqslant 6$,
nous lui demandons de construire la représentation graphique de $f : x \to -3x$ et de comparer $-3a$ et $-3b$ sachant que $a < b$; puis $-3x$ et $-3(2)$ sachant que $x \geq 2$.

De même une lecture graphique sur les courbes suivantes permet de comparer les valeurs absolues, les carrés, les racines carrés et les inverses, connaissant l'ordre entre deux nombres donnés de même signe. (fiche N° 6).

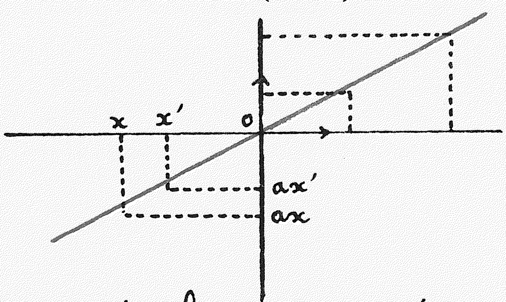
Il nous semble très utile, à tous les niveaux, de demander aux élèves de construire des courbes fondamentales leur permettant de retrouver graphiquement de nombreux résultats. En effet, il n'est plus indispensable d'attendre les classes de seconde et de première pour construire point par point ces courbes à l'aide de la calculatrice.

Cette visualisation permanente permet aussi de mémoriser la notion de sens de variation d'une fonction, dès la 3ème pour les fonctions affines, puis en 2nde ; et enfin elle permet de conserver la définition de croissance ou de décroissance en 1ère, classe dans laquelle le signe de la dérivée prend tant d'importance et cache la vraie définition. (Dès que les notions de dérivées ont été abordées par les élèves la réponse à la question *"qu'est ce qu'une fonction croissante sur I"* devient *"cela signifie que $f'(x) > 0$ sur I"*, l'outil devient le sens).

FICHE N° 6
COURBES ET RELATION D'ORDRE

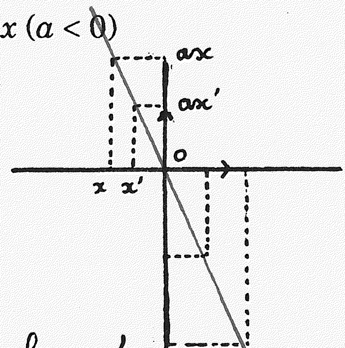
Remarque : les deux nombres à comparer ont le même signe.

$x \to ax \ (a > 0)$



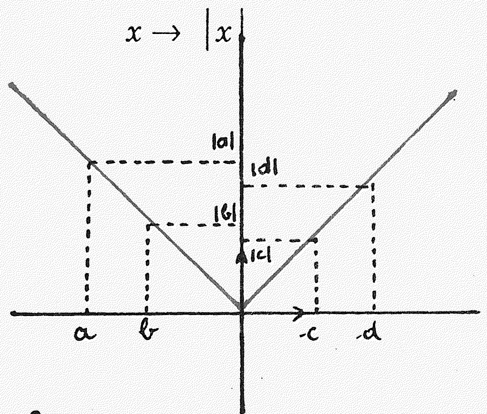
si $x < x'$ alors $ax < ax'$

$x \to ax \ (a < 0)$



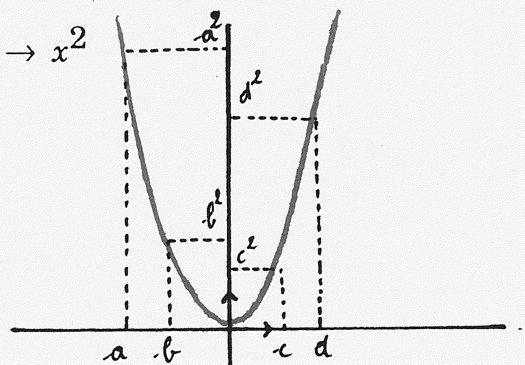
si $x < x'$ alors $ax' < ax$

$x \to |x|$



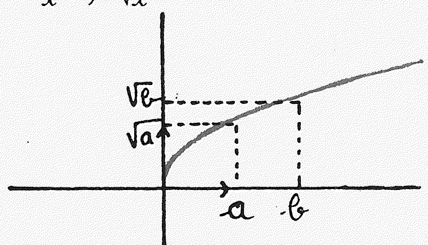
si $a < b < 0$ alors $|b| < |a|$ si $0 < c < d$ alors $|c| < |d|$

$x \to x^2$



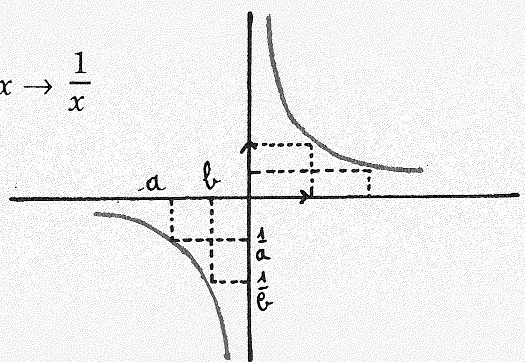
si $a < b < 0$ alors $b^2 < a^2$ si $0 < c < d$ alors $c^2 < d^2$

$x \to \sqrt{x}$



si $a < b$ alors $\sqrt{a} < \sqrt{b}$

$x \to \dfrac{1}{x}$



a et b ayant le même signe si $a < b$ alors $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

Utilisation : voir page précédente.

V
TABLEAUX DE SIGNES

A) CONSTATATIONS SURPRENANTES

B) UNE METHODE POUR INTRODUIRE LE TABLEAU DE SIGNES

C) DE L'IMPORTANCE DU VOCABULAIRE UTILISE

A) CONSTATATIONS SURPRENANTES

On est souvent très surpris en terminale, lorsqu'on voit le nombre d'élèves qui font des erreurs lorsqu'il s'agit d'étudier le signe d'une dérivée.

Nous nous sommes posé deux questions : à partir de quel moment introduit-on le tableau de signes ? Est-ce que nos élèves comprennent bien la signification de ce tableau de signes ?

Les élèves apprennent à résoudre en 4ème et 3ème des inéquations du premier degré mais le tableau de signes proprement dit ne figure nulle part.

Nous avons d'abord voulu connaitre la (les) signification(s) que des élèves de 2nde peuvent donner à un tableau de signes ; nous avons effectué un test (fiche N° 7) dans une classe de 2nde où la quasi totalité des élèves disaient connaitre le tableau de signes ; une copie d'élève, en fin de chapitre, représente bien le genre de réponses données par beaucoup d'élèves.

Voici le compte-rendu de leur professeur :

J'avais donc introduit ce tableau de signes au début du mois d'octobre en résolvant des inéquations du 1er degré. Je n'avais à vrai dire pas beaucoup insisté sur le "tableau" lui même car beaucoup d'élèves affirmaient le connaitre et m'ont fait penser que c'était une notion parfaitement acquise. Huit jours plus tard j'ai posé un test dont voici les résultats :

Question posée : *Voici un tableau de signes*

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe des valeurs de $-3x+5$		+	0	−	

Pensez-vous que ce tableau est bien rempli ?

Que signifie ce tableau ?

Sur 35 élèves, 19 ont donné des réponses surprenantes à la deuxième question ; voici un échantillon des réponses :

- *"Il signifie que si x est négatif, les solutions iront de $\frac{5}{3}$ à $-\infty$, si x est positif les solutions iront de $-\infty$ à $\frac{5}{3}$" (réponse donnée par un "bon" élève).*

- *"C'est pour pouvoir déterminer le signe de x".*

- *"Cela signifie que tous les réels supérieurs à $\frac{5}{3}$ seront négatifs et tous les réels inférieurs à $\frac{5}{3}$ seront positifs".*

- *"Ce tableau signifie que si l'on remplace x par un nombre négatif, le produit est négatif et si l'on remplace x par un nombre positif le produit est positif, alors on peut remarquer que l'ensemble sera supérieur à zéro".*

Une controverse sur les nombres négatifs.

Wallis à Collins (1673) à propos de la "géométrie" de Descartes. *"J'ai trouvé aussi mes racines négatives appropriés par lui sous le nom de racines fausses, lesquelles sont en vérité aussi vraies que les autres".*

Montucla, Histoire des Mathématiques (1799-1802) *"c'est à Descartes nous le répétons ici qu'est due la connaissance de la nature et de l'usage des racines négatives et il est le premier qui les ait introduites dans la géométrie et dans l'analyse".*

"J'étonnerai sans doute plusieurs de mes lecteurs lorsque je remarquerai encore qu'Harriot n'eut qu'une idée peu développée des racines négatives".

Thomson ; History of the Royal Society (1812) *"c'est lui* (Descartes) *qui le premier a attiré l'attention sur l'importance des racines négatives des équations, et il a ajouté un aspect important à la théorie d'Harriot au sujet des équations.*

Cantor (écrit entre **1894-1908**) *"seules les racines positives ont une signification quelconque pour Harriot, qui réellement démontre que les équations ont seulement des racines positives".*

FICHE N° 7
TEST

Voici la résolution d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ $-3x + 5 \leq 0$

$-3x + 5 \leq 0$
$-3x \leq -5$
$x \geq \frac{5}{3}$

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation
$S = [\frac{5}{3} + \infty [$

1) Cette résolution vous semble-t-elle correcte :

2) Que signifie pour vous " l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [\frac{5}{3} + \infty$ [

Voici un "tableau de signe"

x	$-\infty$		$\frac{5}{3}$		$+\infty$
signe de -3x + 5		+	0	−	

1) Pensez vous qu'il est bien rempli ?

2) Que signifie ce tableau ?

Exemple de copie de "bon" élève :

I.R.E.M. de RENNES
"Analyse des erreurs algébriques" **1989**

FICHE N° 7
TEST

Voici la résolution d'une inéquation dans $\mathbb{R}$

Soit à résoudre dans $\mathbb{R}$ $-3x + 5 \leq 0$

$-3x + 5 \leq 0$
$-3x \leq -5$
$x \geq \frac{5}{3}$

Soit S l'ensemble des solutions de cette inéquation
$S = [\frac{5}{3} + \infty[$

1) Cette résolution vous semble-t-elle correcte :

Oui

2) Que signifie pour vous " l'ensemble des solutions de l'inéquation est $S = [\frac{5}{3} + \infty[$

Les solutions sont de $\frac{5}{3}$ compris jusqu'à l'infini positif

Voici un "tableau de signe"

x	$-\infty$ $\frac{5}{3}$ $+\infty$
signe de -3x + 5	+ 0 −

1) Pensez vous qu'il est bien rempli ?

Oui

2) Que signifie ce tableau ?

Il signifie que si x est négatif, les solutions iront de $\frac{5}{3}$ à l'infini positif. si x est positif les solutions iront de l'infini négatif à $\frac{5}{3}$.

B) UNE METHODE POUR INTRODUIRE LE TABLEAU DE SIGNES

Après cette expérience instructive, nous avons réfléchi à la façon dont nous pourrions introduire le tableau de signes. C'est un outil très efficace, à la fois clair et concis, dont nous ne saurions nous passer. Restait à en convaincre les élèves et à leur apprendre à s'en servir correctement.

C'est le but de la fiche N° 8 que nous avons construite et expérimentée dans une autre classe de 2nde, un classe "faible". Nous essayons donc de montrer aux élèves, en étudiant le signe de $P(x) = (3x + 1)(x - 3)$ suivant les valeurs de x, combien la rédaction sans tableau de signes peut être lourde et fastidieuse.

Voici nos observations :

1) L'étude du signe de $P(x) = (3x + 1)(x - 3)$ suivant les valeurs de x ne pose pas trop de problèmes.

- Certains élèves ont d'abord la tentation de développer
- Les élèves, connaissant bien la règle des signes dans un produit, comprennent tout de suite les deux possibilités pour que le produit soit positif :

$$\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3x + 1 \leq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases}$$

- Par contre la représentation graphique de l'ensemble des solutions sur la droite passe mal.
- Quelques difficultés apparaissent aussi pour représenter les intervalles (fermés ou ouverts).

2) L'usage des couleurs par contre a bien aidé les élèves.

- Des élèves mentionnent que *"puisque pour* $x \in \left]-\frac{1}{3}, 3\right[$ *les valeurs de* $P(x)$ *ne sont pas positives, c'est donc qu'elles sont négatives".*

- Certains élèves remarquent que cette présentation est fastidieuse et réclament un tableau.

3) La construction du 1er tableau, puis du tableau conventionnel de signes bien disposé se fait sans trop de mal.

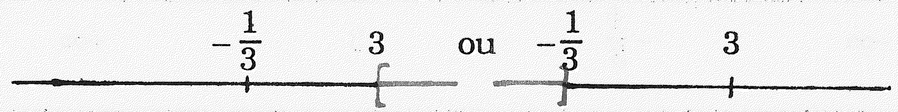
4) Il est préférable de faire résumer, ou d'interroger un ou plusieurs élèves sur la signification du tableau final.

FICHE N° 8
TABLEAU DE SIGNES

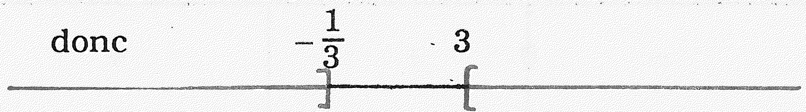
Etudier le signe de $P(x) = (3x + 1)(x + 3)$ suivant les valeurs de x.

$(3x + 1)(x - 3) \geq 0$ si et seulement si $\begin{cases} 3x + 1 \geq 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases}$ ou $\begin{cases} 3x + 1 \leq 0 \\ x - 3 \leq 0 \end{cases}$

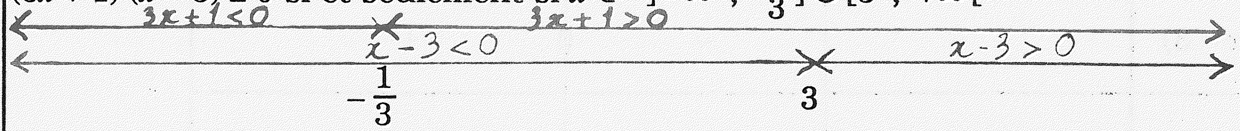
c'est-à-dire $\begin{cases} x \geq -\frac{1}{3} \\ x \geq 3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \leq -\frac{1}{3} \\ x \leq 3 \end{cases}$



donc



$(3x + 1)(x - 3) \geq 0$ si et seulement si $x \in \left]-\infty , -\frac{1}{3}\right] \cup [3 , +\infty[$



Si $x \in \left]-\infty , -\frac{1}{3}\right[$ les valeurs de $P(x)$ sont positives

$P(x) = 0$

Si $x \in \left]-\frac{1}{3} , 3\right[$ les valeurs de $P(x)$ sont négatives

$P(x) = 0$

Si $x \in]3 , +\infty[$ les valeurs de $P(x)$ sont positives

d'où le tableau :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$		3	$+\infty$
$(3x + 1)$	est négatif −	0	est positif +		est positif +
$(x - 3)$	est négatif −		est négatif −	0	est positif +
$P(x)$	est positif +	0	est négatif −	0	est positif +

Utilisation : voir page précédente.

FICHE N° 8
TABLEAU DE SIGNES (suite)

Conclusion : Tableau de signes (convention habituelle)

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$(3x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-3)$		$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

C) DE L'IMPORTANCE DU VOCABULAIRE UTILISE

Il faut être vigilant sur le choix des expressions qu'on utilise ; on trouve par exemple dans certains manuels l'expression "$3x + 1$ a le signe −", expression qui parait très dangereuse quand on écoute les affirmations des élèves :

- *"C'est négatif car j'ai mis le signe moins".*
- *"x positif signifie* $x > 3$ *ou* $x = 3$*".*
- *"a positif signifie* $a = 0$ *ou* $a > 5$*".*

En effet, nous, professeurs, employons indifféremment les mots "supérieur à 0" ou "positif", mais les élèves les perçoivent différemment ; à quel moment de leur scolarité leur a-t-on précisé que ces mots avaient la même signification ?

Nous avons dû rédiger la fiche N° 9 pour contrôler la compréhension des élèves sur ces points, et, en même temps, créer une occasion de les préciser clairement.

Nous l'avons utilisée dans deux classes de 5ème.

Dans la première classe le professeur n'a pas insisté particulièrement sur ce vocabulaire, il y a grave malentendu : 122 erreurs pour 18 élèves !

Dans la deuxième classe, où les élèves faisaient initialement autant d'erreurs, le professeur a donné la fiche après avoir donné des explications et insisté sur ce vocabulaire, la situation s'est partiellement améliorée : 60 erreurs pour 20 élèves.

<u>Traduire par une inégalité comportant 0</u> :

<u>x inférieur à 0</u> : $x < 0$ (aucun problème)
<u>a supérieur à 0</u> : $a > 0$ (aucun problème)
<u>a est un nombre positif</u> : $+a$
<u>x est un nombre négatif</u> : $-x$ c'est négatif car j'ai mis le signe −.

On voit que tout ceci est loin d'être assimilé en fin de 5ème, même en insistant dessus : les lettres a, b, x... peuvent être des nombres positifs ou négatifs ; le statut de la lettre présente une grosse difficulté pour les élèves.

Heureusement, la situation s'améliore régulièrement en 4ème et 3ème ; et en 2nde le test est parfaitement réussi. Il ne faut pas en déduire que les élèves de 2nde dominent ces questions car on retrouve des confusions dans les copies d'élèves de 2nde qui devaient traiter la fiche N° 10 ; pour ces élèves, le signe − désigne une expression négative ; toutes les écritures débutant par un signe ou symbole − sont placées dans l'ensemble des réels négatifs, et toutes les autres dans l'ensemble des réels positifs.

Voila pourquoi nous préférons utiliser longuement les expressions "est négatif", "est positif", et jamais "a le signe −", "a le signe +" ; et nous utilisons l'écriture "−", "+", comme abréviation seulement lorsque la signification du tableau est réellement acquise.

Comme il a déjà été dit page 6, il faut remarquer que le signe – marque d'une part un réel négatif :

$$-3 \quad ; \quad -2{,}7 \quad ; \quad -\sqrt{2}\ldots$$

il ne s'agit pas alors d'expression définie sous forme littérale ;

mais le symbole – signifie "l'opposé de" dans les expressions :

$$-x \quad ; \quad -(x+2)\ldots$$

et – est un symbole opératoire désignant une soustraction dans les exemples :

$$3-2 \quad ; \quad 2x-3 \quad ; \quad 4-x\ldots$$

Il est bon de préciser ce qu'on entend par "supérieur à 0". Pour tous nos collègues est-ce que "supérieur à " veut dire "supérieur ou égal à 0" ?

Il nous semble préférable d'utiliser les expressions explicites "strictement supérieur" ou "supérieur ou égal" pour éviter tout malentendu ou encore : "les valeurs de $3x - 2$ sont positives"

FICHE N° 9
TEST
DES SIGNES - DES INEGALITES

I - x est un nombre négatif

1) Quel est le signe de x ?

2) Quel est le signe de l'opposé de x ?

3) Quel est le signe de $(-x)$?

II - Traduis par une inégalité comportant 0 que :

4) x est un nombre négatif

5) Que a est supérieur à 0

6) Que b est strictement inférieur à 0

7) Quel est le signe de a ?

8) Quel est le signe de b ?

III - Traduis par une inégalité comportant 0 que $a \in \mathbb{Z}^-$

IV - Traduis par une double inégalité que le nombre y est positif et inférieur à 3

FICHE N° 10
TEST
DES SIGNES - DES INEGALITES
durée 5 minutes

I - Traduire par une inégalité comportant 0 :

1) x est inférieur à zéro
2) y est strictement négatif
3) a est positif
4) d est strictement supérieur à zéro
5) $m \in \mathbb{Z}^-$
6) z n'est pas positif

II - 1) Traduire par une double inégalité :

Le nombre a est positif et inférieur à 1

2) Traduire par une phrase chacune des doubles inégalités

$-5 \leq a < 0$

$0 < -a < 7$

et dans chacun des cas donner une valeur possible de a

VI
PROBLEME DU ZERO

A) UN TEST ET SES RESULTATS

B) DES ENTRETIENS REVELATEURS

1 - DES ELEVES QUI SEMBLENT CONFONDRE MULTIPLICATION ET ADDITION (et ne pas avoir d'autres difficultés)

2 - DEUX ELEVES QUI SEMBLENT CONFONDRE ADDITION ET MULTIPLICATION et peut-être Ø et {0}.

3 - DEUX ELEVES AYANT ECRIT S = Ø AU LIEU DE S = {0}

4 - UNE ELEVE QUE LA VUE DU ZERO PANIQUE (et ce n'est hélas par un cas exceptionnel !)

A) UN TEST ET SES RESULTATS

Notre premier test avait pour but de déceler les principales erreurs apparaissant dans la résolution d'équations et inéquations simples. Il a été donné dans une classe de 2nde indifférenciée de 38 élèves le 19/09/87. Nous avons distribué deux textes analogues mais différents aux élèves voisins pour ne pas fausser les résultats du test.

1er test	**durée : 10 mn environ**
Donner l'ensemble des nombres réels vérifiant :	
Texte 1	Texte 2
1) $9x + 2 = 0$	1) $3x + 7 = 0$
2) $-7x + 3 = 3$	2) $-5x + 1 = 1$
3) $-3x < -9$	3) $-2x > -6$
4) $\frac{2}{5}x > 3$	4) $\frac{5}{2}x > 3$
5) $-7x > 2$	5) $-3x < 7$
6) $\frac{1}{x} = \frac{3}{4}$	6) $\frac{1}{x} = \frac{11}{3}$
7) $\frac{3}{x} - 2 = 4$	7) $\frac{3}{x} - 1 = 5$
8) $6x = 0$	8) $-4x = 0$

Le tableau suivant résume les résultats de ce test.

Exercice	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Très bien	34	27	17	22	15	29	22	29
Résultats mal notés	1	3	10	11	8	3	2	4
Confusion 0, Ø		2						2
Faux	3	6	11	5	15	4	11	3
Inachevé ou non traité						2	3	

* Résultats mal notés (qu'ils soient exacts ou faux) :
- Mauvaise notation des intervalles ; par exemple : $x > 3$ noté $S = [3, +\infty]$, $\{\emptyset\}$
- Résolution de l'exercice 2, texte 2 notée ainsi : $-5x = 0 \quad x = \{0\}$

** Confusion 0, Ø : certaines copies nous ont fait penser que des élèves pouvaient écrire Ø en croyant écrire le nombre zéro comme en informatique.

En examinant les copies nous avons retrouvé des erreurs que nous avions déjà observées et qui sont analysées dans d'autres chapitres ; par exemple :

- erreur en multipliant par un nombre négatif les deux membres d'une inéquation :

3) $-2x > -6$

$x > \frac{-6}{-2} \quad x > \frac{6}{2} \quad x > 3 \quad S = [3, +\infty[$

- confusion entre multiplication et addition

5) $-7x > 2$

$-x > 2 - 7 \quad -x > -5 \quad x > 5$

$S = [5; +\infty[$

Mais nous avons surtout remarqué des réactions inattendues et apparemment incohérentes dès qu'un zéro apparait.

1er exemple : l'exercice 2 est mal résolu

2) $-7x + 3 = 3$

$-7x = 0 \quad -x = -7 \quad x = 7$

$S = \{7\}$

alors que le même élève écrit pour l'exercice 8 :

8) $6x = 0$

$x = \frac{0}{6} \quad S = \{0\}$

2ème exemple : c'est la situation inverse.

2) $-5x + 1 = 1$

$-5x = 1 - 1 \quad x = 0$

8) $4x = 0$

$x = -4 \quad S = \{-4\}$

B) DES ENTRETIENS REVELATEURS

Nous avons voulu comprendre ces erreurs visiblement dues à la présence du zéro ; et nous avons décidé d'observer individuellement (entrevue) 9 élèves concernés par ces erreurs ; voici le compte-rendu des entretiens les plus caractéristiques.

Nous pouvons signaler tout d'abord que le sujet n'avait pas été abordé de nouveau en classe entre-temps ; et que tous ces entretiens nous ont appris, au passage, qu'aucun élève ne confond les notations 0 et $\emptyset$; 0 est bien réservé au nombre zéro, et $\emptyset$ à l'ensemble vide, qui est bien pour les élèves l'ensemble n'ayant aucun élément.

La première partie de l'observation a consisté :

- pour l'élève, à résoudre, par écrit, et par oral s'il le désire, les équations suivantes :

1) $8x + 3 = 0$	5) $56\,x = 7$
2) $9x + 2 = 3$	6) $-3x + 1 = 1$
3) $-5x = 5$	7) $8x = 0$
4) $7x - 4 = 0$	8) $7x - 3 = -3$

- pour l'observateur, à noter toutes les manifestations de l'élève qui travaille seul à côté de lui, l'observateur restant silencieux.

La deuxième partie a consisté en un dialogue avec l'élève ; a priori, notre but était, entre autres, de lui faire distinguer les équations de la forme $8x = 15$ ou $8x = 0$ qui peuvent se résoudre avec la même technique : diviser par 8. Et celles de la forme $0x = 3$ (auxquelles on aboutit en résolvant $8x = 8x + 3$). Nous avons préparé une petite liste :

$8x = 15$
$8x = 0$
$8x = 1$
$8x + 3 = 3$

1 - DES ELEVES QUI SEMBLENT CONFONDRE MULTIPLICATION ET ADDITION (et ne pas avoir d'autres difficultés)

Ce qu'elles ont écrit au premier test :

Hélène	**Laurence**	**Catherine**
<u>Ex 2</u> : $-7x + 3 = 3$ $-7x = 0$ $x = -\frac{1}{7}$ $S = \{-\frac{1}{7}\}$ <u>Ex 8</u> : $6x = 0$ $x = 0$ $S = \{0\}$	<u>Ex 2</u> : $-7x + 3 = 3$ $-7x = 0$ $x = -\frac{1}{7}$ $S = \{-\frac{1}{7}\}$ <u>Ex 8</u> : $6x = 0$ $x = \frac{0}{6}$ $x = 0$ $S = \{0\}$	<u>Ex 2</u> : $-7x + 3 = 3$ $-7x = 3-3$ $x = 0$ $S = \emptyset$ <u>Ex 8</u> : $6x = 0$ $x = -6$ $S = \{-6\}$

Entrevue :

- Laurence et Hélène écrivent rapidement et sans hésitation. Tous leurs résultats sont exacts ; n'ont-elles été qu'étourdies au premier test ?

- Catherine résout sans hésitation et sans faute les cinq premières équations ; puis elle lit $-3x + 1 = 1$, écrit rapidement $-3x = 0$ puis hésite et dit *"mais c'est impossible!"*, et ne poursuit pas la résolution. Elle passe à l'exercice suivant n° 7 : $8x = 0$, hésite et dit *"mais... c'est imposs... mais non... $x = 0$..."* et ne conclue pas.

Elle passe alors à l'éxercice n° 8 : $7x - 3 = -3$; elle écrit rapidement $7x = 0$ et dit : *"Ah! Mais oui! $x = 0$ donc $S = \{0\}$"*. C'est alors le retour rapide à l'éxercice n° 7 : elle écrit $S = \{0\}$ puis à l'exercice n° 6 : elle écrit $x = 0$ $S = \{0\}$.

Je lui demande alors : "Que s'est-il passé ? Pourquoi cette hésitation à partir de l'éxercice n° 6 ?". Elle me répond : *"C'est parce que j'ai confondu $\frac{3}{0}$ et $\frac{0}{3}$... Je sais jamais... mais là, j'ai compris"*.

Je lui montre alors ce qu'elle avait écrit au cours du 1er test, exercice n°2, où elle avait écrit : $S = \emptyset$ *"Oui,* dit-elle, *c'est pour ça!"*.

Les erreurs de ces trois élèves semblent être dues à l'étourderie ; et cela se confirmera : Laurence, Catherine et Hélène ne referont plus ce genre d'erreurs par la suite. Ces élèves savent s'auto-corriger ; mais il ne faut pas miser sur l'auto-correction en général comme l'ont confirmé les expériences faites dans les animations sur un grand nombre d'élèves.

2 - DEUX ELEVES QUI SEMBLENT CONFONDRE ADDITION ET MULTIPLICATION et peut-être Ø et {0}.

Pierre	Valérie
Ex 2 : $-7x + 3 = 3$ $-7x = 0$ $x = 7$ $S = \{7\}$ **Ex 8 :** $6x = 0$ $x = \frac{0}{6}$ $x = 0$ $S = \{0\}$	**Ex 2 :** $-7x + 3 = 3$ $-7x = 0 \quad -x = -7$ $x = 7 \quad S = \{7\}$ **Ex 8 :** $6x = 0$ $x = \frac{0}{6}$ $S = \emptyset$

Pendant l'entrevue, Pierre résout :

$-3x + 1 = 1$: $\quad -3x = 1 - 1$

$\quad -3x = 0$

Il hésite, puis écrit sa première idée : $S = \emptyset$

Il résout ensuite $8x = 0$: $\quad x = \frac{0}{8} \qquad S = \{0\}$

Puis il revient sur la résolution précédente, barre $\cancel{S = \emptyset}$, et écrit $S = \{0\}$

Il s'explique : *"Ce que je vais vous dire est une erreur : ma première idée était $S = \emptyset$ car j'ai pensé à $\frac{0}{-3}$ impossible ; c'est une sorte de réflexe ! et, après avoir résolu $8x = 0$, je me suis rendu compte de mon erreur"*. Son professeur a remarqué que Pierre a des premières réactions fausses, mais sait s'auto-corriger quand il a le temps de réfléchir.

Valérie résout bien toutes les équations sans indiquer l'ensemble des solutions. Puis elle répare cet oubli ; elle écrit correctement l'ensemble des solutions pour les cinq premières équations ; mais, à côté de :

$$-3x + 1 = 1$$
$$-3x = 0$$
$$x = 0$$

elle écrit

$$S = \emptyset$$

et de même, à côté de :

$$8x = 0$$
$$x = 0$$

elle écrit encore $S = \emptyset$

Enfin, toujours cohérente avec elle-même, à côté de :

$$7x - 3 = -3$$
$$7x = 0$$

elle écrit $x = 0$

$$S = \emptyset$$

Je lui pose donc :

1) $8x = 15$

elle écrit sans difficulté

$x = \frac{15}{8}$ $\quad$ $S = \left\{\frac{15}{8}\right\}$

2) $8x = 8x + 3$

elle écrit $8x - 8x = 3$

$0 = 3$ $\quad$ $S = \mathbb{R}$

puis elle hésite et me dit : *"Je sais quand mettre Ø mais pas $\mathbb{R}$".*

3) $8x = 0$

Après réflexion elle écrit : $x = \frac{0}{8}$ $S =$ et ne sait pas finir.

Je lui demande : "Qu'est-ce que Ø ?"

- *"L'équation n'a pas de solution"*

Elle revient alors sur sa deuxième équation, barre le symbole $=$, ce qui donne $0 \neq 3$ puis écrit impossible car $x \neq 3$ $\quad$ $S = \emptyset$

- "Combien y a-t-il de solutions à cette équation ?"

- *$\mathbb{R}\{3\}$ car $x \neq 0$*

J'abandonne cette équation !

Nous discutons à propos de la dernière équation : $x = \frac{0}{8}$ $S = \phi$

"Mais , me dit-elle, *∅ ensemble qui ne contient aucune solution ; en fait $8 \times 0 = 0$ est solution !"*

Elle est tiraillée entre la solution zéro, qu'elle vient de trouver directement, et sa technique de résolution qui l'amène à $\frac{0}{8}$ dont elle croit qu'il n'existe pas plus que $\frac{8}{0}$.

Elle se pose aussi la question : *"Quand a-t-on $S = \mathbb{R}$?"*

Je lui donne $5x + 3x = 8x$; elle la résout sans difficulté apparente et nous en resterons là, en espérant que ses idées sont désormais plus claires.

3 - DEUX ELEVES AYANT ECRIT S = Ø AU LIEU DE S = {0}

Ce qu'elles ont écrit au premier test:

Sylvie	Katia
<u>Ex 2 :</u> $-7x + 3 = 3$ $-7x = 0$ $x = \phi \quad S_{IR} = \phi$ <u>Ex 8 :</u> $6x = 0$ $x = \phi \quad S_{IR} = \phi$	<u>Ex 2 :</u> $-7x + 3 = 3$ $-7x = 0$ $S_{R} = \{\phi\}$ <u>Ex 8 :</u> $6x = 0$ $S_{R} = \{\phi\}$

Les deux élèves écrivent rapidement et sans hésiter les ensembles de solutions des équations n° 1, 2, 3, 4, 5.

Voici leurs réactions aux équations n° 6,7, 8.

<u>Sylvie, écrit :</u>

6) $-3x + 1 = 1$

$-3x = 0 \qquad S : \phi$

7) $8x = 0$

$S : \phi$

8) $7x-3 = 3$

$7x = 0 \qquad S : \phi$

DIALOGUE :

- Que signifie Ø ?

- *Ensemble vide. . . Y a aucune solution !*

Réaction vive :

- *Ah! non ! pour* $8x = 0$ $S = \{0\}$ *car* $8 \times 0 = 0$

Et rapidement, elle corrige les deux autres résultats.

- Pourquoi avais-tu écrit Ø ?

Silence...

Je lui propose une nouvelle série d'équations :

1) $8x = 15$

$x = \frac{15}{8}$ $\quad S = \{\frac{15}{8}\}$

2) $8x = 8x + 3$

$0x = 3$ $\quad S$ Ø

3) $8x = 0$

$S : \{0\}$

- *Ah ! oui, j'avais confondu les deux cas : 3 divisé par 0 c'est impossible, mais 0 divisé par 8 égal 0.*

Et son sourire me parait convainquant. Elle s'est très bien auto-corrigée !

<u>Katia écrit</u> :

6) $-3x + 1 = 1$

$-3x = \cancel{\pm 1} + 1$ $\quad -3x = 0$

$\cancel{x}$ $\quad S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

7) $8x = 0$

$S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

8) $7x - 3 = -3$

$7x = 3 - 3$ $\quad 7x = 0$ $\quad S_{\mathbb{R}} = \{0\}$

Dialogue :

Ses réponses sont bonnes, mais le x barré m'intrigue.

- Pourquoi 0 est-il solution de $8x = 0$?

- *Parce que* $8 \times 0 = 0$

- Pourquoi, dans l'exercice $\{\frac{4}{7}\}$ est-il l'ensemble de solution de $7x - 4 = 0$?

- *Parce que* $7 \times \frac{4}{7} - 4 = 0$

- Comment as-tu trouvé $\frac{4}{7}$?

- *En multipliant* 7 *par* $\frac{4}{7}$ *j'obtiens* 4.

Je lui propose une nouvelle série d'équations :

1) $8x = 15$

$x = \frac{15}{8}$ $\qquad S_{IR} = \{\frac{15}{8}\}$

2) $8x = 8x + 3$

$8x - 8x = 3 \qquad 0 = 3 \qquad S = \{\emptyset\}$

3) $8x = 0$

$x = 0 \qquad S = \{0\}$

Cette fois, $x = 0$ est écrit; mais je n'arrive pas à lui faire expliciter la règle d'action pour obtenir la solution d'une équation $ax = b$, "je divise par a si $a \neq 0$".

Puis je reviens à $8x - 8x = 3$; je lui demande d'écrire $0x = 3$ et d'expliquer son résultat.

- *Y a pas de x donc S est vide.*

Je pose : $7x + 3 = 2(4x - 1) + 5 - x$

$0\,x = 0$

Elle répond : " *$S = \{\emptyset\}$ car y a pas de x ; alors que pour $8x = 0$, $x = 0$ donc $S = \{0\}$* "

Pendant toute l'entrevue, Katia n'a aucun problème avec les équations $ax = 0$ où $a \neq 0$; elle donne $S = \{0\}$.

On pourrait penser que, pendant le test initial, elle a cru écrire le nombre zéro, dans les exercices n°2 et 8, bien qu'elle ait noté $S = \{\emptyset\}$. Mais au cours de l'entretien, il n'y a pas d'ambiguïté dans ses notations :

- D'une part, lorsqu'elle résout $8x = 8x + 3$, elle donne $S_{IR} = \{\emptyset\}$; et ses commentaires prouvent qu'elle pense "ensemble vide".

- D'autre part, lorsqu'elle résout $8x = 0$ immédiatement après, elle note $S_{IR} = \{0\}$ et pense que seul le nombre zéro est solution.

Qu'en conclure ?

- Katia ne maitrise-t-elle que par intermittence la résolution $8x = 0$? Et faut-il quelqu'un à côté d'elle pour qu'elle se concentre ? Elle semble deviner le nombre solution plutôt qu'avoir une méthode pour résoudre une équation.

- Ou change-t-elle de notation d'une semaine à l'autre ?

D'après son professeur, la première hypothèse semble, hélas, la plus probable.

D'après leurs copies, Sylvie et Katia semblaient faire les mêmes erreurs ; il a fallu discuter avec elles pour voir que leur comportement devant une équation est très différent.

Et pour conclure cette étude de cas :

4 - UNE ELEVE QUE LA VUE DU ZERO PANIQUE : Et ce n'est hélas pas un cas exceptionnel.

SOIZIC

Elle aussi traite les cinq premières équations rapidement et sans erreurs.

Sixième équation : $-3x + 1= 1$
Elle écrit : $-3x = 1 - 1$ $\quad -3x = 0$

$x = -\frac{1}{3}$ $\quad S_{\mathbb{R}} = \{-\frac{1}{3}\}$

Septième équation : $8x = 0$

Elle commence à écrire x ... en hésitant, le barre, puis écrit $x=0$, le barre, écrit enfin $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Huitième équation : $7x - 3 = 3$

Elle écrit $7x = 0$

dit *"c'est pareil!"*, et enchaîne instantanément $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

A la question :

- Que pensais-tu quand, dans l'équation n°7, tu as d'abord écrit $x=0$, puis tu l'as barré et tu as écrit $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$?

Elle répond :

- *"Je vois que zéro est solution parce que huit fois zéro donne zéro; mais je ne peux pas l'obtenir par résolution, donc* $S_{\mathbb{R}}$ *est vide; il n'y a pas de solution."*

Je lui propose la série d'équations
a) $8x = 15$
b) $8x = 0$
c) $8x = 1$
d) $8x = 8x + 3$

et je lui demande de dire tout haut ce qu'elle pense.

a) Pas de problème : *"Je divise par huit"*
b) *"Je ne peux pas diviser zéro par huit"*
c) Pas de problème : *"Je divise par huit"*.
d) Elle écrit $8x - 8x = 3$

$0 = 3$ $\quad S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

Je reviens sur a) ; elle confirme *"Je divise par huit"*.
- "Alors pourquoi pas dans b) ?"
- *"Mais on ne peut pas diviser zéro par huit ! "* répond-elle très émue.
Croyant l'aider je lui propose une situation concrète :
- "Si tu as seize francs à partager entre huit personnes, combien donneras-tu à chacun ?"
- *"Deux francs."*
- "Pour obtenir ce résultat, tu as divisé seize par huit ?"
- *"Oui."*
- "Maintenant, si tu partages zéro franc entre huit personnes, combien chacun aura-t-il ?"
- *"Rien. J'ai rien, je ne peux rien partager !"*
J'insiste : "Chacun aura zéro franc !"
- *"Oui, mais zéro, c'est rien !"*
(Cf CARNOT, à propos de la soustraction (p 8) *"Oter quelque chose de rien : opération impossible"*)
J'insiste encore : "Pour partager en huit, on divise par huit."
- *"Oui"*
- "Donc là, on divise zéro par huit."
Elle est réticente : *".... oui... si vous voulez...."*

Et j'écris $\frac{0}{8}$; elle semble très choquée et me donne l'impression que je commets un sacrilège ; je la rassure et elle se calme, mais ne veut pas se laisser convaincre.
N'insistons plus ; cet entretien ne permettra pas de remédier aux difficultés de Soizic. Mais, il a pleinement atteint son but ; nous en retiendrons :

1) La confusion entre l'ensemble vide et son cardinal :
"Zéro, c'est rien"

2) Les exemples concrets n'aident pas à donner tout son sens au zéro, en particulier quand il est l'un des termes d'une multiplication ou d'une division.

3) La vue de zéro dans certaines situations peut déclencher des réactions émotives telles qu'une tentative de remédiation devra d'abord éviter de les déclencher.

"J'en sais qui ne peuvent comprendre que, qui de zéro ôte quatre reste zéro"

PASCAL - *Pensées (Misère de l'homme)*

5 - CONCLUSION :

- Nous sommes maintenant sûrs que les élèves ne confondent pas Ø avec la notation de zéro en informatique.

- L'écriture $\frac{0}{8}$ n'est presque jamais utilisée par les enseignants ; certains élèves la trouvent légitime mais d'autres la refusent catégoriquement. Elle n'est pas vraiment utile, sauf pour traiter les équations $ax = b$ (avec $a \neq 0$) sans distinguer si b est nul ou non.

- L'écriture $0x$ est, elle aussi, très peu utilisée; en fait on utilisera l'une ou l'autre écriture selon le problème qu'on se pose; par exemple, on utilise selon les situations, le développement ou au contraire la factorisation d'un polynôme; et, ici, il faut distinguer entre :

RESOLUTION DE L'EQUATION :

Chercher x tel que $2x + 3 = 2x + 5$ qui se rédige :

$$2x - 2x = 5 - 3$$
$$0x = 2$$

où on laisse apparaître x clairement puisqu'on le cherche (l'écriture $0 = 2$ amène à toutes les erreurs; Valérie est loin d'être seule ! donc **"Ne pas perdre x puisqu'on le cherche !"**)

Et :

CALCUL, SIMPLIFICATION DE L'EXPRESSION :

$$\begin{aligned} A &= (2x + 5) - (2x + 3) \\ &= 2x + 5 - 2x - 3 && (1) \\ &= 0x + 2 && (2) \\ &= 2 && (3) \end{aligned}$$

où personne n'écrit la ligne (2)

De même pour calculer

$$\begin{aligned} B &= (x + 2)(x - 3) + x + 1 \\ &= x^2 + 2x - 3x - 6 + x + 1 && (1) \\ &= x^2 + (2 - 3 + 1)x - 6 + 1 && (2) \\ &= x^2 + 0x - 5 && (3) \\ &= x^2 - 5 && (4) \end{aligned}$$

On n'écrit pas la ligne (2), et encore moins la ligne (3). Mais les élèves se trompent souvent dans la résolution des équations du 2° degré lorsque le trinôme n'est pas complet : Résoudre $x^2 - 5 = 0$

- Dans le même ordre d'idée, l'habitude de barrer les termes qui se neutralisent peut se justifier dans le calcul d'une expression (après une longue période d'apprentissage où on détaille les étapes ; sinon ce n'est qu'un tour de "passe-passe", et cela peut donner dans les calculs d'expressions : $\frac{2}{4x} = \frac{rien}{2x} = 0$ puisque *"zéro, c'est rien!"*); mais elle mène les élèves à des situations bizarres dans les résolutions d'équations :

$2x + 3 = 3$ donne $2x = ??$

si un automatisme fait barrer les 3 sans comprendre : *"il n'y a plus de second membre!"*

- Aucune situation concrète ne mène à ce genre d'équations; on en rencontre parfois en cherchant l'intersection de deux droites parallèles, cela dépend de la méthode suivie ; elle semblent surtout issues des équations paramétrées qui ne sont plus au programme.
Peut-on y intéresser les élèves alors qu'ils n'y voient qu'un piège gratuit ?

Une expérience prometteuse est en cours : une collègue de 4ème a abordé les équations directement par celles du type :

$0x = 0$
$0x = 4$
$4x = 0$

Ses élèves en ressentent l'intérêt mathématique ; et cela lui permet de mettre en évidence plus clairement la notion d'équation, question, problème que l'on se pose ; la technique de résolution de $ax = b$ dans le cas $a \neq 0$ passe en second et n'est plus qu'un outil qui ne vient pas cacher la nature du problème. (On trouvera une description détaillée dans la publication de l'IREM de RENNES : "Vers les équations" (p 27))

CONCLUSION

Nous n'avons pas de véritables statistiques qui mesurent l'efficacité de ce que nous avons fait sur les inéquations en particulier car nous n'avons pas le recul du temps et nos expériences portent sur trop peu d'élèves: nous n'avons pu tester à nouveau, en début d'année suivante, qu'un groupe d'une dizaine d'élèves redoublant en 2° ; tous, sauf un, ont été capables d'utiliser correctement ces notions dans de multiples situations.

C'est une expérience partielle ; mais cela nous confirme que si les choses nous paraissent simples ou allant de soi, il n'en va pas toujours de même pour les élèves.

Tout d'abord, il faut les convaincre qu'il est nécessaire de réfléchir, de chercher, de tâtonner en étudiant des exemples particuliers, et de contrôler rigoureusement chaque étape de calcul et de raisonnement. D'un point de vue simplement matériel cela suppose de savoir utiliser un brouillon sans réticence; cela ne devrait pas être difficile et pourtant il faut beaucoup insister, ne serait-ce que pour obtenir des élèves qu'ils aient un brouillon sur leur table!

Il est sans doute nécessaire jusqu'en 3ème de rédiger les calculs intermédiaires, même si cela peut paraître une perte de temps, jusqu'à ce que les élèves aient réellement assimilé la démarche et ne risquent plus d'utiliser les formules comme un palliatif à des choses qu'ils ne comprennent pas bien. Ces rédactions détaillées obligent aussi les élèves et les enseignants à utiliser un vocabulaire précis, ce qui permet d'éviter les confusions (par exemple : opposé, inverse) et d'introduire les synonymes (par exemple : $x \geq 0$, x posititif).

Les élèves ont besoin d'entretenir régulièrement leurs techniques de calcul, mais à partir de la 2° ; il devient impératif de ne pas reprendre systématiquement les règles de calcul des classes antérieures mais au contraire de prévoir pour les élèves en difficulté différentes fiches, de différents niveaux, avec des approches différentes, qui seraient distribuées selon les besoins. Dans tous les cas, le remède sera mieux perçu s'il passe par des activités nouvelles ("le décor doit changer").

Il nous parait souvent un peu tard dans le second cycle de corriger certaines erreurs de base. L'erreur devrait être prise systématiquement en compte dès qu'elle apparait dans l'apprentissage de la notion, ce qui implique une individualisation de l'enseignement avec correction instantanée de l'erreur.

Pour pouvoir repérer aussi tôt que possible les types d'erreurs que fait un élève, nous avons essayé plusieurs systèmes de fiches d'observation individuelle :

- Le premier système a été inspiré par l'article de L. DUVERT (Annexe 1).

Il nous a semblé le plus souple et le plus complet ; on pourrait le résumer ainsi : pour chaque élève, noter sur sa fiche les deux remarques importantes qu'on aurait écrites sur sa copie. Un coup d'oeil sur la fiche permet de repérer les erreurs les plus fréquentes et aide à les analyser.

L'expérience, a priori facile à faire, s'est effectivement révélée très enrichissante mais très gourmande en temps ; cependant, on peut souligner que, même tenue seulement en début d'année, une telle fiche permet de repérer rapidement le type d'erreurs que fait un élève et d'y remédier aussitôt.

ANNEXE 1

LA FICHE D'OBSERVATION : UN INSTRUMENT DE DIAGNOSTIC

1 - Qu'est-ce que la fiche d'observation ?

Il s'agit d'un instrument de travail, élaboré par L. DUVERT. Je lui laisse ici expliquer lui-même ce dont il s'agit :

> C'est pour tenter d'améliorer l'efficacité des corrections que j'ai été amené, aux divers niveaux où j'ai enseigné, à la "fiche d'observations" (F.O.). Le principe en est le suivant :
>
> J'écris, non pas sur la copie, mais sur une fiche que je remplis progressivement tout au long de l'année scolaire, toutes les observations que l'élève a intérêt à garder sous la main :
>
> - Les erreurs (nous sommes, je pense, nombreux à considérer l'erreur non pas comme une "faute" appelant une "punition", mais comme un produit normal de toute activité intellectuelle (celle des enfants et... celle des adultes, professeurs compris), produit qui est une précieuse occasion de réfléchir, de rectifier ou d'approfondir ses connaissances, de mieux se connaître soi-même. "Sbagliando s'impara", dit un proverbe italien : "on s'instruit à coup d'erreurs") : erreurs de fond, de méthode, de rédaction, de vocabulaire,... L'élève doit faire le lien entre l'erreur contenue dans sa copie (par exemple $(3x+2)^2 = 3x^2 + 12x + 4$) et le principe, le théorème,... que cette erreur a enfreint et que je porte sur la F.O. (par exemple ab^2 signifie $a \times (b^2)$ et non pas $(ab)^2$; cet effort de sa part me semble bénéfique.
>
> - les négligences matérielles : "Laisse une marge", "Numérote les pages"...
>
> - dans une colonne isolée à l'extrême droite, des rectifications d'orthographe (sélectionnées dans le grand étalage offert par certaines copies...)
>
> - et enfin, à la suite de ces observations "techniques" relatives à chaque devoir, et s'en distinguant par une autre couleur d'encre, une "appréciation générale" (mais pas de note chiffrée) comportant éventuellement un conseil, une mise en garde, un encouragement, un compliment,... ; cette dernière partie est susceptible de renseigner aussi les parents, même s'il ne sont pas compétents en mathématiques.
>
> (Sur la copie, ne figurent que quelques commentaires trop spécifiques du sujet traité pour avoir une importance durable, et les classiques "exact", "faux", points d'exclamation, points d'interrogation, et autres traces rougeoyantes du défoulement du correcteur !)

Je souligne n fois toute observation déjà faite à propos de n copies précédentes (n dépasse rarement 4...). Ainsi apparaissent nettement, sur la F.O., au bout de quelques semaines et dans toute la suite de l'année, les "manques" les plus marquants de l'élève, alors qu'une erreur due à la seule étourderie ne se reproduit plus ; il me paraît important de rendre l'élève conscient de la différence entre une erreur accidentelle et une erreur ancrée dans son esprit, différence qu'il n'établit pas toujours de lui-même. S'il s'agit d'une demande toute simple et extra-mathématique, du type "laisse une marge", je me réserve le droit d'interrompre la correction à la deuxième ou troisième répétition...

Dans chaque copie que je lui rends, l'élève trouve, encartée, la F.O., qu'il me rend en fin de séance après avoir recopié, sur une fiche qui constitue un double de la mienne et qu'il garde par-devers lui, la "moisson" d'observations propre à ce devoir.

Il dispose ainsi d'un document personnalisé qui lui permet d'être spécialement attentif à ne pas refaire les mêmes erreurs. Lorsque je consulte les élèves par un questionnaire (facultatif !) sur ce qu'ils pensent de mes façons de faire, il sont toujours nombreux à trouver utile la F.O. ; ceux qui reconnaissent la consulter trop peu reconnaissent aussi, spontanément, qu'ils ont tort de la négliger.

Je contrôle, une ou deux fois dans l'année, la bonne tenue du double conservé par l'élève ; car, dans les petites classes, certains étourdis recopient "de travers" telle ou telle observation...

Je conseille aux élèves (à partir de la seconde), de prendre l'initiative de "nourrir" eux-mêmes leur F.O. personnelle d'observations qu'ils se font tout seuls en diverses occasions. Mais ils sont peu nombreux à avoir assez de maturité pour cela.

Les parents, eux aussi, s'ils pensent à jeter un coup d'oeil de temps à autre sur les appréciations générales figurant sur la F.O., ont, du travail, des résultats, des progrès, du "niveau" (!) de leur enfant, une idée bien plus précise que par une suite de notes chiffrées.

De mon côté, je dispose pour chaque élève d'une sorte de "portrait" qui évolue au cours des semaines, et dont je me sers pour rédiger les bulletins trimestriels et lors des entretiens avec les parents.

La correction d'un lot de copies n'est pas rendue plus longue par cette procédure : je n'écris pas plus que je ne le ferais si j'écrivais tout sur la copie. Je m'astreins à parcourir rapidement les observations précédentes pour signaler les "erreurs à répétition" ; mais c'est assez rapide, et j'ai l'impression, ce faisant, de rendre service aux élèves... Quant à la remise en odre des F.O. entre deux lots de copies, elle demande un temps négligeable devant celui de la correction elle même (j'utilise pour ces F.O. du papier cartonné capable de résister toute une année à de fréquentes manipulations).

"Cette F.O. n'est-elle pas traumatisante pour l'élève ?" Si l'objection vient d'un collègue qui "met des notes", je lui demande avec énergie de se poser d'abord à lui-même la même question à leur propos ! Sinon, je voudrais bien savoir en quoi consisterait une pédagogie totalement "non-traumatisante"...

A titre d'illustration, voici un extrait d'un" F.O. d'élève de Seconde C (trait ondulé : appréciation générale ; DM : devoir à la maison ; DS : devoir surveillé) :

DM9 Discussions mal conduites
Tu ne te préoccupes pas assez de l'existence de ce que tu écris ; d'où des incohérences et des erreurs.
{ Moyen. Une même attitude, illogique, tout au long du devoir.

DS9 Ne confonds pas — et ⊢
<u>Equation ≠ Inéquation</u>
Assez bien. Ce qui est traité est bien compris.

DM10 { Très bien

DS10 Que signifie "intervalle dans R" ?
Conjonction d'inéquations dans R : pense à la représentation graphique
<u>Tu confonds f et f(x)</u> : 3ème fois
Une erreur de calcul, due à une simplification trop tardive d'une fraction
{ Assez bien. Réfléchis aux 4 observations ci-dessus.

DM11 <u>Tu confonds "il faut" et "il faut et il suffit"</u> : 4e fois
$\bigwedge \begin{array}{l} a < 0 \\ b^2 - 4ac > 0 \end{array}$ n'entraîne nullement $c > 0$
Erreurs en passant des vecteurs aux longueurs
{ Assez bien. Attention à la logique : si, ssi, etc.

DS11 <u>Simplifie les fractions</u>
Erreur sur la notion de degré d'un polynome
{ Bien

DM12 Tu confonds inconnues et paramètres
{ Assez bien

DS12 Tu confonds "application" et "application affine"
{ Très insuffisant

2 - Variante :

J'ai moi-même expérimenté, avec mes élèves de prépa HEC Technique, une variante de la fiche d'observation.

Chaque fois que je trouvais une erreur dans un devoir, je remplissais une petite fiche. J'avais imaginé 4 types de fiches (matérialisées par des couleurs différentes) suivant le type d'erreur ; erreur d'inattention, erreur de connaissance, erreur de raisonnement, erreur de calcul. La distinction peut paraître arbitraire, et elle l'est effectivement, mais dans la pratique ces difféents types d'erreurs doivent conduire les élèves à différents types de travaux pour ce corriger.

Pour chaque erreur, j'essayais de proposer un diagnostic et de proposer un "remède". Comme dans le cas de la fiche d'observation, il est difficile de juger de l'efficacité d'une telle méthode. Cependant, il est certain que ces fiches d'erreur ont eu un effet psychologique très positif sur mes élèves. D'autre part, elles m'ont obligé à réfléchir sur les causes de leurs erreurs, ce qui m'a semblé une expérience très enrichissante.

ANNEXE 2

Erreurs / Elèves	$(a+b)^2$ $= a^2 + b^2$	$\sqrt{a} + b$ $= \sqrt{a} + \sqrt{b}$	$\lvert x+b \rvert =$ $-x + 3$ si $x \geq 0$ $-x - 3$ si $x \leq 0$	$-\frac{a-b}{c}$ $= \frac{-a-b}{c}$	$-x$ est "toujours" négatif	- - -
Dupont						
Durand						

ANNEXE 3

UNE DES PREMIERES APPROCHES DE THEORISATION DU CALCUL ALGEBRIQUE ET DE LA MISE EN EQUATION

DESCARTES - "La géométrie".

Mais souvent on n'a pas besoin de tracer ainsi ces lignes sur le papier, et il suffit de les désigner par quelques lettres, chacune par une seule. Comme pour ajouter la ligne BD à GH, je nomme l'une a et l'autre b, et écris $a + b$; et $a - b$ pour soustraire b de a ; et ab, pour les multiplier l'une par l'autre ; et $\frac{a}{b}$ pour diviser a par b ; et aa ou a^2 pour multiplier a par soi-même ; et a^3 pour le multiplier encore une fois par a, et ainsi à l'infini ; et $\sqrt{a^2 + b^2}$ pour tirer la racine carrée de $a^2 + b^2$; et $\sqrt{C\, a^3 - b^3 + abb}$, pour tirer la racine cubique de $a^3 - b^3 + abb$, et ainsi des autres.

Où il est à remarquer que par aa, ou b^3, ou semblables, je ne conçois ordinairement que des lignes simples, encore que pour me servir des noms usités en l'algèbre je les nomme des carrés ou des cubes, etc.

Il est aussi à remarquer que toutes les parties d'une même ligne se doivent ordinairement exprimer par autant de dimensions l'une que l'autre, lorsque l'unité n'est point déterminée en la question, comme ici a^3 en contient autant que abb ou b^3 dont se compose la ligne que j'ai nommée.

$$\sqrt{C.\, a^3 - b^3 + abb}\ ;$$

mais que ce n'est pas de même lorsque l'unité est déterminée, à cause qu'elle peut être sous-entendue partout où il y a trop ou trop peu de dimensions ; comme s'il faut tirer la racine cubique de $aabb - b$, il faut penser que la quantité $aabb$ est divisée une fois par l'unité, et que l'autre quantité b est multipliée deux fois par la même.

Au reste, afin de ne pas manquer à se souvenir des noms de ces lignes, il en faut toujours faire un registre séparé à mesure qu'on les pose ou qu'on les change, écrivant par exemple :

$AB \propto 1$, c'est-à-dire AB égal à 1
$GH \propto a$.
$BD \propto b$, etc.

Ainsi, voulant résoudre quelque problème, on doit d'abord le considérer comme déjà fait, et donner des noms à toutes les lignes qui semblent nécessaires pour le construire, aussi bien à celles qui sont inconnues qu'aux autres. Puis, sans considérer aucune différence entre ces lignes connues et inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre le plus naturellement de tous en quelle sorte elles dépendent mutuellement les unes des autres, jusque à ce qu'on ait trouvé moyen d'exprimer une même quantité en deux façons, ce qui se nomme une équation ; car les termes de l'une de ces deux façons sont égaux à ceux de l'autre.

BIBLIOGRAPHIE

CHUQUET N.

"La géométrie"
Vrin (1979)

COLETTE J.P.

"Histoire des Mathématiques"
Vuibert (1973)

DEDION ITARD

"Mathématiques et mathématiciens"
Magnard (1959)

DESCARTES

"La géométrie"
Edition de l'AREFPPI (1984)

ITARD

"Essai d'histoire des mathématiques"
Blanchard (1984)

SCOTT J.F.

"The work of John Wallis"
Chelsea Publishing Company (1981)

DUSSON F.

"Reconnaître les erreurs"
(APMEP Plot 48)

RAMAIN B.

"Les erreurs m'intéressent"
Bulletin de liaison N° 35
(IREM de Clermont Férrand)

DUMONT B.

"La détection des erreurs dans l'apprentissage du calcul"
Actes de l'Université d'été Intelligence artificielle et enseignement des mathématiques - .1.1987
(IREM de Toulouse)

BOUVIER A.

"Le droit à l'erreur"
Revue Pégase N° 13
(IREM de Grenoble)

IREM de Strasbourg

"Le rôle positif des erreurs n'est-il pas surfait ?"
Annales de didactique et de sciences cognitives (Vol. 1)

GUIGNARD N.

"Si l'erreur m'était contée"(N. GUIGNARD)
Revue Math-école N° 134 (Suisse)

MILIS M.

"Un coup d'oeil du côté de ce que les élèves nous disent par leurs erreurs en mathématiques"
Revue Math et pédagogie N° 62 (Belgique)

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : 1er trimestre 1990
N° de Publication : 9001

I.R.E.M. de RENNES - Université de RENNES I
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 99.28.63.42

ISBN 2-85728-041-6

FICHE DUBLIREM

TITRE : ANALYSE DES ERREURS ET DIFFICULTES CONSTATEES DANS LES CLASSES DE SECONDE EN CALCUL ALGEBRIQUE

AUTEUR : Groupe I.R.E.M.

DATE : Janvier 1990

NIVEAU : Troisième - Seconde

PUBLIC CONCERNE : Professeurs de Mathématiques en collège et lycée.

MOTS-CLES :

- Calcul algébrique
- Erreurs
- Equations
- Inéquations

RESUME :

Nous avons pu analyser certaines causes d'erreurs d'élèves en calcul algébrique, et dégager certaines pistes pour les éviter.

Tout d'abord certaines notions ou techniques n'ont jamais été explicitement enseignées :

- soit par méconnaissance des programmes, y compris ceux des classes voisines,
- soit parce que le vocabulaire ou les notations n'ont pas été suffisamment éclaircis pour les élèves.

D'autre part, il ne faut pas sous-estimer les difficultés inhérentes à une notion par exemple les difficultés liées au zéro, difficultés qui ne sont pas propres aux élèves comme le prouvent les quelques textes historiques que nous citons.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	94	20F	500 Ex.