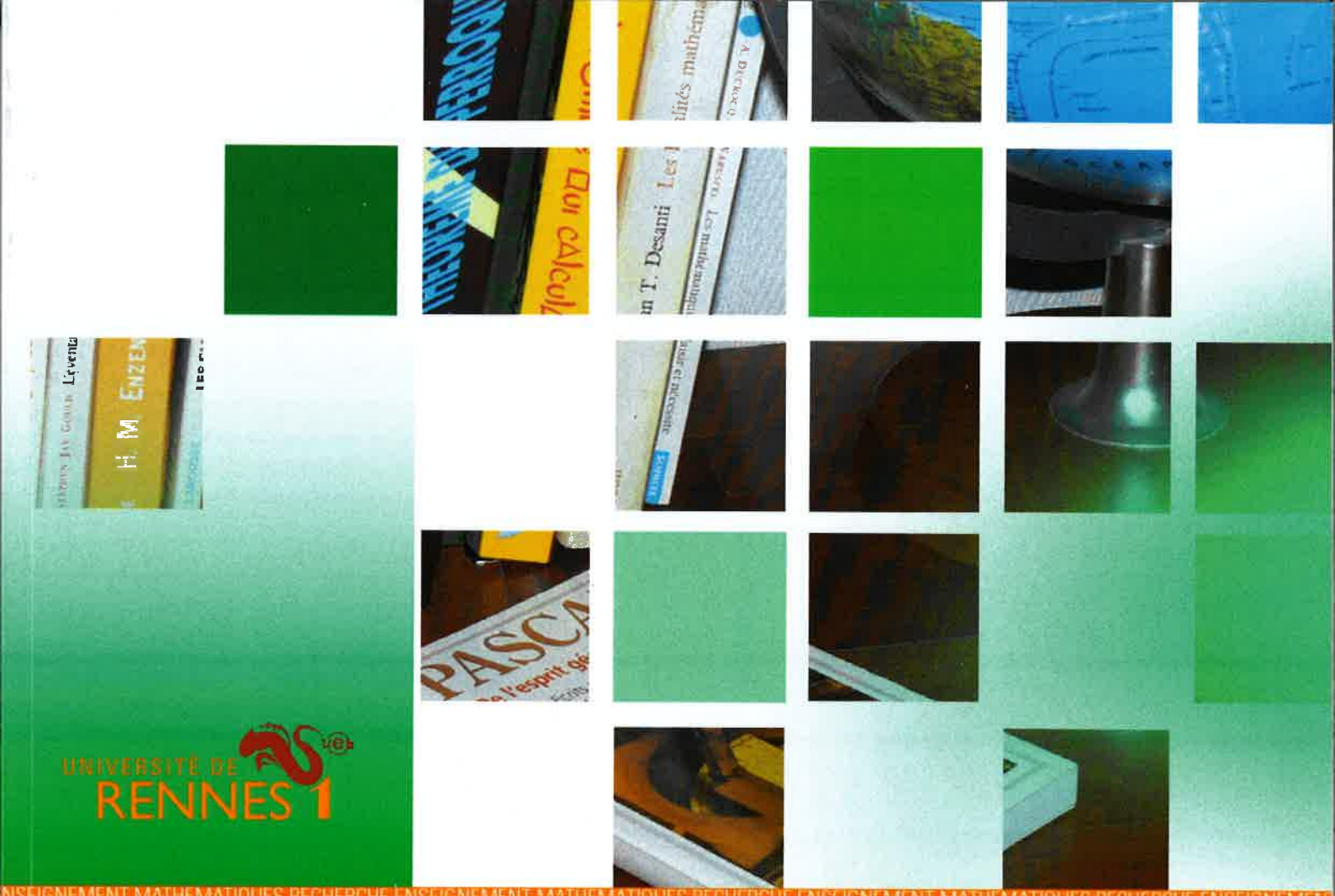


UNIVERSITÉ DE RENNES 1

ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUES RECHERCHE ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUES RECHERCHE ENSEIGNEMENT MATHEMATIQUES RECHERCHE ENSEIGNEMEN

Lectures mathématiques

A.Carrié, M. Dubois, C. Le Bihan,

S. Le Borgne, R. Quarez

IREM RENNES

Lectures mathématiques

Cette brochure a été rédigée par les membres d'un groupe recherche-formation de l'Irem de Rennes des mois de septembre 2008 à octobre 2010.

La composition du groupe

Anne Carrié	Lycée Coëtlogon (Rennes)
Marie-Claude Dubois	Collège Paul Sébillot (Matignon)
Christine Le Bihan	Lycée Bertrand d'Argentré (Vitré)
Stéphane Le Borgne	Université de Rennes 1
Ronan Quarez	Université de Rennes 1

> Finalement, M. Fortune jugea qu'il ferait mieux de carguer la voile. La mathématique pure dépassait à l'évidence l'entendement de Lueli. Peut-être les mathématiques appliquées marcheraient-elles mieux. Il se trouvait que M. Fortune n'en avait jamais appliqué aucune, mais d'autres que lui, il le savait, le faisaient, et bien qu'il considérât que c'était là un domaine quelque peu inférieur, il était tout disposé à l'essayer.
>
> Sylvia Townsend Warner, Une lubie de Monsieur Fortune.

Introduction

Les mathématiques sont l'objet d'une multitude de publications destinées au grand public, oeuvres de vulgarisation, mais aussi de fictions. Le succès d'ouvrages partiellement inspirés par des questions scientifiques semble attester le goût de nombre de personnes pour ces présentations, souvent originales, de problèmes parfois également abordés dans les programmes scolaires.
Il doit être possible de s'appuyer sur l'attrait suscité par des romans tels que « Le théorème du perroquet », « L'homme qui calculait », « Les arpenteurs du monde » ou de recueil de nouvelles tels que « Fictions » etc... dans la classe de mathématiques. Le roman pourrait être une motivation à l'introduction de notions nouvelles du cours de mathématiques, mais il pourrait aussi donner des exemples de situations dans lesquelles le cours de mathématiques déjà vu trouvera à s'appliquer. La brochure que vous êtes en train de lire présente les résultats d'essais de professeurs de mathématiques dans cette direction.

On cherche donc ici à aborder l'apprentissage des mathématiques à partir d'autres domaines, de questions ou de problèmes issus de l'extérieur de la discipline mathématique. Cela n'est pas en soi très original. Les manuels de mathématiques contiennent de nombreux exercices, activités adoptant ce point de vue. Mais nous proposons de travailler sur des références qui soient *a priori* déconnectées du cours de mathématiques. Les contenus, les questions sont peut-être les mêmes mais pas les formes (journaux, littérature,...). Nous y voyons deux avantages. D'une part, les élèves y verront peut-être moins un déguisement artificiel d'exercices de mathématiques classiques. D'autre part, le travail d'analyse mathématique du problème étudié n'est pas fait à l'avance ; les élèves et le professeur doivent faire ce travail en classe.

Nous ne prétendons évidemment pas que l'approche externe des notions mathématiques soit la seule façon d'intéresser les élèves aux mathématiques. L'expérience montre au contraire que parmi les élèves qui aiment les mathématiques nombreux sont ceux qui les trouvent intéressantes, amusantes pour elles mêmes.
On peut aussi remarquer que les élèves qui n'aiment pas particulièrement les mathématiques, voire les fuient, sont parfois fascinés (de loin) par des tours de magie mathématiques parfaitement gratuits (on pourra penser par exemple à la conjecture de Syracuse qu'on trouve généralement très amusante, http://fr.wikipedia.org/wiki/Conjecture_de_Syracuse ; le problème est que la conjecture de Syracuse est une question que personne ne sait attaquer efficacement). La fascination n'encourage pas forcément les élèves à faire les mathématiques qu'on leur demande de faire, en tout cas pas tous les élèves. Les mathématiques des programmes scolaires contiennent aussi des énoncés spectaculaires mais il s'agit de

les dominer par un apprentissage parfois difficile. C'est là que les choses se compliquent.

Il est difficile de savoir ce qui incitera les élèves à travailler. Nous pensons que varier les angles d'attaque ou de présentation des notions mathématiques peut être utile. Par exemple, essayer de montrer comment les mathématiques permettent de répondre à différentes questions externes aux mathématiques peut éventuellement accrocher des élèves peu motivés par les mathématiques sans pour autant effrayer ceux qui d'habitude font leurs exercices abstraits avec plaisir.

Enfin, les mathématiques constituent aussi un très bon outil d'analyse critique. Pourquoi ne pas le montrer en classe et en liaison avec d'autres disciplines ? Étudier sous un angle mathématique des textes issus de l'actualité ou traitant de sujets relevant d'autres sciences (biologie, géographie,...) pourrait à la fois développer la capacité de l'élève à extraire l'information d'un texte et favoriser l'apprentissage d'un vocabulaire nouveau et de notions mathématiques nouvelles. Ceci s'inscrit d'ailleurs bien dans le cadre des socles de compétences.

Le groupe a travaillé dans cet esprit. De septembre 2008 à juin 2010, nous avons conçu des activités pour différentes classes. C'est une contribution modeste mais que nous espérons utile. Une version électronique de cette brochure est disponible sur le site[1] de l'Irem de Rennes ; vous pouvez ainsi disposer des fiches des activités et les modifier comme vous le souhaitez.

Les activités proposées prennent du temps, un temps qui n'est pas consacré directement et entièrement aux notions du programme. Mais en plus d'un gain plus global, interdisciplinaire, difficile à mesurer, on peut en espérer une plus grande activité des élèves et une meilleure mémorisation des notions mathématiques elle-mêmes.

Ce qu'on trouvera dans cette brochure

On y trouvera des activités pour différents niveaux de classes sur un petit nombre de thèmes ou de supports. Nous les avons groupé en trois parties d'inégales longueurs suivant trois thèmes : le partage, l'évolution d'une population, la statistique.

Pour des raisons pratiques (faible effectif du groupe, disparité des niveaux enseignés) le groupe a dû se concentrer sur un petit nombre d'ouvrages. Nous n'avons exploité que la lecture de passages brefs.

Les coupures de presse

Les articles de journaux récoltés entre les réunions montrent que les mathématiques qu'on peut y trouver sont souvent les mêmes : les pourcentages, les courbes d'évolution de diverses quantités au cours du temps, les chiffres (argent, productions,...). Les activités peuvent donc porter sur : les pourcentages, les ordres de grandeur (gains au loto, salaires de joueurs du PSG, …, à comparer au SMIG) ou les indices (prix, espérance de vie, pauvreté,...). Les horaires de lever et coucher du soleil peuvent aussi être l'occasion de faire un peu de trigonométrie.
De nombreux diagrammes statistiques semblent plus servir de décoration que des sources d'informations (notamment dans les journaux gratuits).

Les thèmes que l'on trouve à coup sûr dans n'importe quel journal :

- pourcentages
- ordres de grandeurs (par exemple : savoir relativiser une grosse somme en l'exprimant en équivalent SMIG ou en placement sur un livret ; savoir rapporter un nombre à d'autres du même

1 **http://www.irem.univ-rennes1.fr**

domaine pour comparer : nombre d'avortements en rapport avec le nombre de naissances) ;
- la durée du jour (uniquement dans Ouest France) ;
- scores de football ou d'autre sport utilisable en statistiques ;
- document de démographie (notamment taux de natalité) exploitable en liaison avec les puissances.

Nous avons envisagé deux façons de procéder :
- un découpage préalable par le professeur d'articles dans les journaux et la préparation d'un dossier sur le sujet pour élaborer une activité qui sera ensuite distribuée « toute faite » aux élèves ; par exemple, nous avons travaillé sur le thème de la démographie.
- la recherche dans un journal récent, par les élèves, d'informations dont la compréhension requièrent des outils mathématiques et l'exploitation immédiate, en classe, des résultats de cette recherche. Ceci nécessite la préparation *a priori* d'une activité suffisamment adaptable sur les pourcentages ou les ordres de grandeurs.

Les ouvrages de fiction

Le choix des livres s'est modifié au fur et à mesure de nouvelles lectures et surtout parce qu'il fallait sélectionner des textes accessibles pour plusieurs niveaux.
La lecture de certains livres nous a fait réviser notre sélection. « Les mathématiques du chat »[2] ne semblent pas une source facile à exploiter dans la classe : les questions abordées relèvent, sauf exception, plutôt de logique servent plus d'illustrations que de support d'activité. D'autres livres, comme «J'ai mal aux maths mais je me soigne »[3] relèvent trop de la vulgarisation directe pour faire l'objet d'une activité introductive ou d'approfondissement.

Nous nous sommes concentrés sur deux livres : « Le démon des maths »[4] et « L'homme qui calculait »[5]. Plusieurs activités ou devoirs sur le chapitre 6 du « démon des maths » ou un problème de partage tiré de « l'homme qui calculait » ont été conçus. D'autres livres (« Le Devin »[6] de Goscinny et Uderzo et « L'éventail du vivant »[7] de S.-J. Gould) ont aussi été utilisés mais dans une moindre mesure.

Ce qu'on aurait pu trouver dans cette brochure

Certaines questions comme les suivantes n'ont pas été travaillées : Comment inciter les élèves à la lecture longue ? Comment en organiser la pratique au sein d'un groupe d'élèves ? Faut-il créer des « club » de lectures ? Quelles retombées peut-on en attendre ? Comment intégrer ces lectures aux programmes (quels livres, quels niveaux, quelle exploitation en classe) ? Comment mener de telles lectures ? Que peut-on en attendre ? Peut-on imaginer un travail basé sur l'abonnement d'une classe à une revue scientifique bien choisie ?

D'autres livres ou revues que ceux que nous avons utilisés peuvent servir de références à des activités semblables à celles que nous avons testées. Citons par exemple : « Extraits littéraires et *empreintes mathématiques »*[8] de Marc Laura, « La mathématique du Chat » de Daniel Justens et Philippe Geluck, « La bibliothèque de Babel » extrait de Fictions[9] de Jose Luis Borges, les « 100 000 milliards de

2 La mathématiques du chat, Daniel Justens, Philippe Geluck, Casterman, 2008.
3 J'ai mal aux maths mais je me soigne, Jean-Jacques Greif, La Martinière, 2007.
4 Le démon des maths, Hans Magnus Enzesberger, Seuil, 1998.
5 L'homme qui calculait, Malba Tahan, Hachette, 2001.
6 Le Devin, René Goscinny, Albert Uderzo, Hachette, 2005.
7 L'éventail du vivant, Stephen Jay Gould, Seuil, 2001.
8 Extraits littéraires et empreintes mathématiques, Marc Laura, Hermann, 2002.
9 Fictions, Jorge Luis Borges, Folio, 1991.

poèmes »[10] de Raymond Queneau, « Le théorème du perroquet »[11] de Denis Guedj, « Une lubie de Monsieur Fortune »[12] de Sylvia Townsend Warner.

D'autres ressources peuvent aussi être envisagées, on trouve évidemment beaucoup sur internet :
Mme N. Aymé a construit un devoir maison à partir de la bande dessinée « La fièvre d'Urbicande » ; document visible sur internet à l'adresse http://wwwcabri.imag.fr/abracadabri/EnClasse/Urbicande/Urbicande.html
Mentionnons aussi pour les probabilités et statistiques le site Statistix (http://statistix.fr/).

L'utilisation de textes littéraires peut être étendue notamment aux mathématiques enseignées en DNL ou menée conjointement avec des enseignants de langue.

On peut aussi imaginer un travail sur une année qui, en rendant l'exercice habituel, lui conférerait une plus grande efficacité ; le cadre de la première S avait ainsi été envisagé avec, à partir d'un choix de plusieurs thèmes, la conception d'activités comportant une phase de recherche à la maison sur un support extrait d'un livre, un travail avec outil informatique sur le temps de classe et un prolongement en devoir maison.

Brève description des activités

Les activités sont données et décrites en détail en annexe.

Activités avec support journal

- Le foot en STS et en 1S

  Les articles sur les résultats sportifs se trouvent facilement dans les journaux, notamment en début de semaine.
  - En première S, un article de journal sur les championnats de football européens a été sélectionné pour revoir les notions de statistique de seconde. Les élèves travaillent individuellement et la correction se fait collectivement périodiquement. L'exercice « littéraire » de rédaction proposé en fin d'activité a été décevant : les élèves ont, sauf exception, refusé de sortir de l'exercice purement mathématique. La deuxième année de fonctionnement du groupe, la même activité a été donnée mais avec un support de championnat local. La production « littéraire » a été beaucoup plus intéressante.
  - En STS, quelques modifications ont été faites : les élèves travaillent en groupe et sur des championnats différents.
- Les ordres de grandeur

  En Lycée Professionnel, une activité sur les ordres de grandeur des prix permet d'associer des objets, des biens et des prix , pour préparer les comparaisons des grands nombres.
- Les pourcentages

  En lycée professionnel, le professeur a découpé des articles de Ouest-France consacrés aux nombres. Les élèves sont chargés de trouver 2 questions et leur corrigé.

Les chameaux

Le chapitre 3 de « L'homme qui calculait » de Malba Tahan narre l'histoire d'un héritage : 35 chameaux

10 Cent mille millliards de poèmes, Raymond Queneau, Gallimard, 1961.
11 Le théorème du perroquet, Denis Guedj, 1998.
12 Une lubie de Monsieur Fortune, Sylvia Townsend Warner, Gallimard, 2003.

doivent être partagés entre 3 enfants en proportions différentes (1/2, 1/3, 1/9).

- en cinquième, ce support sert d'introduction à l'addition et la soustraction de fractions de dénominateurs différents ;
- en 1re S, l'activité démarre de la même façon, l'activité donnée en cinquième étant ici à faire à la maison en se terminant par une question ouverte de millions de dinars ; le partage de somme d'argent dans les mêmes proportions ainsi que les restes successifs occasionnés fait l'objet d'une activité tableur ; elle permet de réinvestir le travail sur les suites et d'aborder intuitivement la notion de limite.

Les populations

Le thème des évolutions de populations se retrouve à la fois dans les articles de journaux qui traitent de démographie et dans certains livres comme « Le démon des Maths » et sa population de lapins de Fibonacci. Il est alors envisageable de chercher une modélisation de l'augmentation d'une population et de comparer cette modélisation avec les données du texte utilisé.
Le chapitre 6 du « démon des maths » est donné à lire à la maison avec un tableau à compléter et une question sur la relation de récurrence entre les termes de la suite.
L'activité se fait ensuite au tableur : une première partie, qui auraient pu être faite d'ailleurs à la maison, traite de la suite de Fibonacci ; une deuxième partie propose une modélisation de type Verhulst discrète de la population de la Bretagne de 1801 à nos jours.

Fibonacci

Le support sélectionné est le livre de de Hans Magnus Enzensberger, « le démon des maths ». Ce support a déjà fait l'objet d'activité thématique. Il a aussi été décliné sous d'autres formes.

- Un devoir maison en 2 parties en première S :
  - La partie 1 est distribuée avec une photocopie des chapitres concernant la suite de Fibonacci dans « le démon des maths » (ch 6 et début du ch 10 ; 1 exemplaire pour 2 élèves). Le texte traite de la suite des nombres de Fibonacci ainsi que de la suite des rapports de deux nombres consécutifs.
    L'objectif est d'utiliser les connaissances abordées dans le chapitre en cours sur les suites et de tenir lieu révision pour le devoir surveillé à venir. La bonne implication des élèves dans la rédaction du devoir ne s'est pas traduite par de tangibles progrès lors du devoir surveillé.
  - La partie 2 a été distribuée avant les vacances. Elle traite de l'étude du pentagone régulier, de l'étoile à 5 branches et du nombre d'or (abordés dans le ch 10). L'objectif est un réinvestissement de connaissances vues antérieurement en cours d'année sur différents chapitres : coordonnées cartésiennes et polaires ; calculs de distances ; système d'équations de cercles ; formules de duplication pour les lignes trigonométriques ; construction géométrique. Les élèves se sont de nouveau bien impliqués dans la rédaction de ce devoir même si celui-ci n'était pas en rapport direct avec le chapitre en cours ni avec le devoir surveillé à venir.
- Une activité en Terminale L :

  Le chapitre 6 du « démon des maths » a été donné à lire à la maison. L'activité permet de réinvestir des connaissances sur les suites mais aussi sur les fonctions trinômes du second degré ainsi que de mettre en oeuvre un raisonnement par récurrence. Cette activité a mieux fonctionné la deuxième année avec un groupe plutôt homogène et dynamique que la première année où le groupe était plus disparate et moins actif. Deux élèves du groupe de la deuxième année avait d'ailleurs eu l'occasion de travailler sur un autre extrait de ce livre, en allemand, dans le cadre du cours de DNL.

Le Devin

Deux pages consécutives de la bande dessinée « le Devin » de Goscinny et Uderzo (p 21-22) constituent le support d'une activité faite en classe : elles traitent de la somme que l'on peut espérer ne pas obtenir en lançant 2 dés classiques. Les élèves travaillent en binôme après lecture du texte. La calculatrice leur sert à simuler les dés et à discuter du choix effectué par le devin dans la BD. Cette activité sert d'introduction au cours sur les probabilités : les feuilles étant ramassées en fin d'heure, la concaténation des différentes simulations permet d'obtenir un échantillon suffisamment important pour que les fréquences s'approchent des probabilités.

Statistiques

L'idée est de s'interroger sur « quelle signification donner aux mesures statistiques ? ». Le support est un extrait du livre « l'éventail du vivant », S.-J. Gould qui parle de populations fictives à deux modes. Le texte est donné à lire à la maison avec un travail sur les mesures statistiques à rendre : ce travail force l'élève à extraire des informations du texte et aussi à réinvestir ses connaissances. La suite se passe en salle informatique avec utilisation du tableur en deux temps : dans un premier temps, le tableur doit leur permettre de modéliser des répartitions de 10 € entre 10 enfants (situation issue du texte de Gould) avec un mode différent de 0 et de 1 ; dans un second temps, les élèves étudient, toujours avec le tableur, la répartition des notes du premier devoir commun : calcul de mesures statistiques « classiques » et comparaison des résultats de leur classe avec l'ensemble des autres, leur classe ayant une répartition en 2 modes.

Sommaire des activités proposées

Classe	Thème	Support texte	Page
5e	Fractions	L'homme qui calculait	10
1re S	Suites	L'homme qui calculait	15
T L	Suites et fonctions	Le démon des maths	21
1re S	Suites et fonctions	Le démon des maths	24
1re S	Repérage dans le plan	Le démon des maths	27
STS	Equations différentielles	Article sur la population du Japon	30
1re S	Suites	Le démon des maths et données INSEE sur la population de la Bretagne	40
2e	Statistiques et probabilités	Le Devin	45
2e	Statistiques	L'éventail du vivant	49
LP	Pourcentages	Coupures de presse (Le chiffre du jour)	56
1re S et STS	Statistiques	Extrait de la page des sports d'un journal	62
T S	Trigonométrie	Coupures de presse (La durée du jour)	73
1re S, T ES	Probabilités	Le pari de Pascal	78
1re S	Probabilités	Le problème du Chevalier de Méré	84

Classe de 5ième

Le partage des 35 chameaux

Extrait du roman

« L'HOMME QUI CALCULAIT » (chapitre3) de Malba TAHAN

1. Cadre

Classe de cinquième en classe entière. Durée : une heure et demie.

2. Objectifs

- Introduire la somme de fractions et la méthode de calculs dans le cas des dénominateurs différents.
- Place dans le programme :

CONNAISSANCES	CAPACITÉS	COMMENTAIRES
2.2. Nombres positifs en écriture fractionnaire : sens et calcul Sens de l'écriture fractionnaire.	- Utiliser l'écriture fractionnaire comme expression d'une proportion, d'une fréquence.	La classe de cinquième s'inscrit, pour le travail sur les écritures fractionnaires, dans un processus prévu sur toute la durée du collège. En classe de 6e, l'écriture fractionnaire a deux significations : - le « partage » (3/5, c'est 3 fois 1/5) ; - le quotient 3/5 désigne le cinquième de 3 (*le nombre dont le produit par 5 est égal à 3*). L'utilisation d'une écriture fractionnaire pour exprimer une proportion, une fréquence est à relier à la notion de quotient. Dans le traitement mathématique des problèmes de la vie courante, les fractions interviennent rarement un tant que nombre. L'utilisation des nombres décimaux est souvent suffisante et doit être privilégiée tout particulièrement dans le cadre du socle commun.
	- Utiliser sur des exemples numériques des égalités du type ac/bc = a/b.	L'égalité ac/bc = a/b fait l'objet d'une justification à l'aide d'un exemple générique.
Addition et soustraction.	- Additionner et soustraire deux nombres en écriture fractionnaire dans le cas où les dénominateurs sont les mêmes *et *dans le cas où le dénominateur de l'un est un multiple du dénominateur de l'autre*.	Des oralisations du type « 3 quarts plus 5 quarts » permettent d'effectuer directement des opérations sans mobiliser explicitement le statut de nombre.
* *Multiplication*	- **Effectuer le produit de deux nombres écrits sous forme fractionnaire ou décimale, le cas d'entiers étant inclus*.	*Le travail porte à la fois sur les situations dont le traitement fait intervenir le produit de deux nombres en écriture fractionnaire (en relation avec différentes significations*

		de ces écritures) et sur la justification du procédé de calcul.

- Insertion dans la progression

Un premier chapitre sur les fractions – « les sens des écritures fractionnaires, dont l'expression d'une proportion « a été abordé au 1er trimestre.

- Notions abordées

  Distinguer les différentes expressions d'une quantité : **fractions (proportions)** et **les nombres (effectifs)**
  Savoir prendre une fraction d'un nombre.
  Décomposer une fraction en somme d'un entier et d'une fraction inférieur à 1.
  Introduire la somme et la soustraction des fractions :sens et technique.

3. Prérequis

Sens de fraction - Egalités de fractions et simplification - Prendre une fraction d'une quantité.

4. Déroulement

- Lecture du chapitre à voix haute par des élèves volontaires, avec recherche du vocabulaire inconnu (dictionnaire à disposition)
- Question posée oralement aux élèves : « Qui peut raconter l'histoire ? Quelle est l'énigme ? »
- Question 1) et 2) : expliquons le partage de Bérémiz.
- Distinguer les quantités en fractions du total et en effectifs de chameaux. Pourquoi obtient-on des entiers ? On prouve que 1/2 + 1/3 + 1/9 = 34/36 et 1-34/36 = 2/36 d'où le reste de 2 chameaux parmi les 36 pris au départ !
- Retour au texte : que donnerait le partage de 35 chameaux ? Aucune part, ni le reste ne sont entiers ; ces quantités s'expriment avec des fractions d'un chameau.

5. Observations et commentaires

Les élèves sont attentifs lors de la lecture du texte (effet de surprise : activité, sujet inhabituels en maths) et motivés par l'énigme.

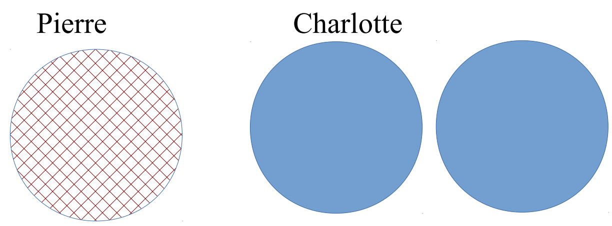
Les questions 3 et 4 sont travaillées collectivement ; semblent difficiles aux élèves, qui prennent peu d'initiatives.

Faire une séance préalable avec des exemples de sommes (et différences) de fractions déjà rencontrés par les élèves :

- Fractions décimales : dixièmes, centièmes …
- Avec des parts de galettes (dessins)

$5^{ème}$ ECRITURES FRATIONNAIRES : Additions et soustractions dans les cas simples

a. des tartes:



Pierre et Charlotte ont fait des tartes qu'ils partagent

en 8 parts égales.

Pierre en distribue 5 parts puis 1 part. Quelle fraction de tarte a-t-il donnée? Quelle fraction lui reste-t-il?

,,,

Charlotte distribue 7 parts puis 3 parts. Quelle fraction de tarte a-t-elle donnée? Quelle fraction lui reste-t-il?

,,,

b. La recette du picon-citron-curaçao par César.

CÉSAR (à Marius) - Eh bien, pour la deuxième fois, je vais te l'expliquer, le Picon-citron-curaçao. Approche-toi ! Tu mets d'abord un tiers de Curaçao. Fais attention : un tout petit tiers. Bon. Maintenant, un tiers de citron. Un peu plus gros. Bon. Ensuite, un BON tiers de Picon. Regarde la couleur. Regarde comme c'est joli. Et à la fin, un GRAND tiers d'eau. Voilà.
MARIUS - Et ça fait quatre tiers.
CÉSAR - Exactement. J'espère que cette fois, tu as compris.
MARIUS - Dans un verre, il n'y a que trois tiers.
CÉSAR - Mais, imbécile, ça dépend de la grosseur des tiers.
MARIUS - Eh non, ça ne dépend pas. Même dans un arrosoir, on ne peut mettre que trois tiers.
CÉSAR - Alors, explique-moi comment j'en ai mis quatre dans ce verre.
MARIUS - Ça, c'est de l'Arithmétique.
Marcel Pagnol, Marius, (1929).

c. des décimaux :

a. $\frac{3}{10}+\frac{5}{10}$ = ... + ... = ... = $\frac{.....}{.....}$

b. $\frac{84}{10}-\frac{65}{10}$ = ... − .... = ... = $\frac{.....}{.....}$

c. $\frac{154}{100}+\frac{623}{100}$ = ... = ... = $\frac{.....}{.....}$

d. $\frac{7}{10}+\frac{9}{100}$ = ... = ... = $\frac{.....}{.....}$

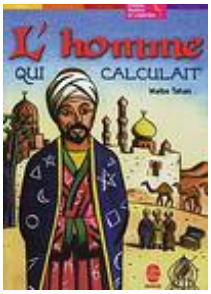
e. $\frac{1}{10}-\frac{1}{1000}$ = ... = ... = $\frac{.....}{.....}$

En t'aidant des questions précédentes, énonce une règle qui permet d'additionner ou de soustraire des fractions ,

d. les galettes

Yacine donne la moitié de la galette à Charlotte, le quart à pierre et le huitième à Jacques. A-t-il pensé à lui?

5ème **ACTIVITE « le partage des chameaux »**



Extrait du roman **« L'homme qui calculait » de Malba Tahan**

Bagdad, XIIIème siècle. Un berger génial, Beremiz, étonne tout le monde par l'étendue de ses connaissances et sa capacité à résoudre les problèmes les plus divers. Le cheikh Yazid demande à Beremiz de devenir le précepteur de sa fille Telassim. Cette dernière, cachée derrière une tenture pendant ses leçons de mathématiques, tombe amoureuse de son professeur... (Hachette)

1) Lis attentivement le chapitre 3 du roman (feuille jointe). N'hésite pas à utiliser le dictionnaire !
2) Calcule la moitié de 35, le tiers de 35 et le neuvième de 35. Que conclure ?
3) Considère la répartition effectuée par Beremiz : complète alors le tableau ci-dessous :

Partage de **36 CHAMEAUX**	Part du 1er héritier	Part de Ahmed	Part de Harim	TOTAL distribué	Reste
En **FRACTION du total**					
En **NOMBRE** de chameaux					

La totalité de l'héritage a-t-elle été distribuée aux trois frères ? …….

……

4) Imagine la répartition de Beremiz si l'héritage est de 35 chameaux :

Partage de **… CHAMEAUX**	Part du 1er héritier	Part de Ahmed	Part de Harim	TOTAL distribué	Reste
En **FRACTION du total**					
En **NOMBRE** de chameaux					

La totalité de l'héritage a-t-elle été distribuée aux trois frères ? …….

……

5) Et avec un héritage de 71 chameaux ?

Partage de **… CHAMEAUX**	Part du 1er héritier	Part de Ahmed	Part de Harim	TOTAL distribué	Reste

E n **FRACTION du total**					
E n **NOMBRE** de chameaux					

6) Revenons **au troupeau de 35 bêtes** !

Si le père avait exprimé la volonté de partager le troupeau en un quart, un quart et un quart, qu'aurait-on obtenu ?
Quel partage proposerais-tu pour distribuer TOUS les chameaux ?

Classe de 1re S

Partage de chameaux

Extrait du roman_

« L'HOMME QUI CALCULAIT » (chapitre3) de Malba TAHAN

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Première S	* suites	* approfondissement sur les suites * notion intuitive de limite	tableur

1. Cadre

Classe de 1re S à 28 élèves.

2. Objectifs

- Calcul des termes consécutifs d'une suite géométrique ; calcul de sommes de termes de suites géométriques ; notion de limite ; utilisation du tableur ;

- Place dans le programme : (BO n°7 du 31 août 2000)

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Suites		
Modes de génération d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques	Etude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation de vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.
Notion intuitive de limite finie perçue à partir d'exemples. Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition.	On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a : *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.* *Tout intervalle ouvert contenant a*	Le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. Toute définition en

Limite d'une suite géométrique.	*contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.* Démonstration du théorème « des gendarmes » ; les théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis. On pourra mettre la définition en oeuvre pour étudier une limite (exemple : suite (w_n) définie par $w_n = max(u_n, v_n)$ ou pour montrer l'unicité de la limite. On montrera avec des exemples la variété de comportement de suites convergeant vers une même limite.	ε et N est exclue. On indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour çà) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples. La définition d'une limite infinie pourra être abordée ou non.

Insertion dans la progression : le chapitre sur les suites a été fait (définition fonctionnelle/par récurrence, croissance/décroissance, suites arithmétiques et géométriques, sommes des termes) ; seule la notion de limite n'a pas été abordée (même si elle a été évoquée à plusieurs occasions)

- Notions abordées
  - termes consécutifs d'une suite
  - somme des termes d'une suite géométrique
  - limites

3. Prérequis

Fractions : prendre une fraction de, somme de fractions ;
Notion de suite ;
Utilisation de formules dans un tableur

4. Déroulement

Distribution de la fiche activité à faire à la maison
Récupération de la fiche ; bilan succinct fait par le professeur avant de démarrer l'activité tableur.
Activité tableur en demi-groupe en salle informatique (1 élève par poste).

5. Observations et commentaires

Activité d'introduction
Les élèves complètent le premier tableau sans se tromper. Beaucoup d'entre eux (23 sur 28) donnent des valeurs approchées à la place des fractions dans le deuxième.
En réponse à la question 6, différentes (peu nombreuses) propositions de partage du reste ont été faites :

- troncature au million (avec erreur) ou arrondi à la centaine de mille
- troncature à l'unité ou arrondi au centime près
- arrondi au million et répartition « équitable des restes » :
- modification de la somme de départ : 34 999 992 car c'est un nombre divisible par 2, 3 et 9
- ajout de 2 millions fictifs
- ajout de 2 058 823 dinars
- partages successifs du reste avec réajustement du reste pour qu'il soit toujours divisible par 2, 3

et 9
- partages successifs du reste
- partage en fonction des parts (expliqué oralement).

Il a manqué un temps de discussion sur les stratégies de partage avant le TP informatique.

TP informatique

Les élèves ont besoin d'aide pour entrer, recopier les formules. Ils rencontrent des difficultés pour deviner et calculer les rapports entre les parts obtenues par chaque couple de frères (suivant les méthodes de calculs choisis des erreurs d'arrondi peuvent ou non survenir).

En une heure, les élèves ont eu juste le temps de faire la partie A (les élèves ne maîtrisaient pas assez le tableur ; seul un élève a entamé la démonstration).

Proposition d'amendement de l'activité pour une nouvelle expérimentation

Les élèves pourraient finir la démonstration à la maison. On peut prolonger l'activité par un travail sur les sommes de suites géométriques (du type Achille et la Tortue[13] ou développement décimal périodique).

13 http://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxes_de_Zénon

Activité Suite de chameaux

1. Lire l'extrait du roman « L'homme qui calculait » de Malba Tahan (ch 3, p 19 – 22) au dos.
2. Compléter le tableau ci-dessous qui résume le partage effectué par Beremiz :

Partage de **36** chameaux	Part du 1er héritier	Part de Ahmed	Part de Harim	Total distribué	Reste
En FRACTION du total					
En NOMBRE de chameaux					

3. Le tableau à compléter ci-dessous résume le partage des 35 chameaux selon la volonté du père.

Partage de **35** chameaux	Part du 1er héritier	Part de Ahmed	Part de Harim	Total distribué	Reste
En FRACTION du total					
En NOMBRE de chameaux					

4. Y aurait-il eu un reste ? De combien ? (justifier)
5. Pourrait-on utiliser la technique de Beremiz pour un effectif total quelconque du troupeau de chameaux ?
6. On suppose maintenant que l'héritage ne se compose pas de chameaux mais de 35 millions de dinars. Effectuer un partage qui respecte le plus possible les dernières volontés du père sans laisser de reste trop important à Beremiz. (attention, Beremiz n'a pas un sou en poche …).

TP – info Partage

Enoncé :
3 frères viennent d'hériter de 35 millions de dinars. Selon la volonté de leur père défunt, l'aîné doit en recevoir la moitié, Ahmed un tiers et Harim un neuvième. Ce premier partage, sommes entières approchées par défaut, laisse un reste conséquent que l'on peut à nouveau répartir entre les 3 frères dans les mêmes proportions. Et ainsi de suite …
On s'intéresse à la somme effectivement récupérée par les frères en « fin » de partage.
Cette somme respecte-t-elle les volontés du père ?

Partie A :

1. Sur un tableur, créer 3 colonnes correspondant aux sommes totales récupérées par chacun des 3 frères après chaque partage, du premier au n-ième partage, pour n = 10.
2. En observant les résultats obtenus, conjecturer les rapports entre les sommes « finales » obtenues par chacun des trois frères et la somme de départ ainsi que les rapports entre les sommes obtenues pour chaque couple de frères.
3. Les volontés du père ont-elles été respectées ? Quelle somme emporte Bérémiz ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures et les conclusions

4. Sur une deuxième feuille du même classeur, refaire une répartition en arrondissant à chaque partage la somme au dinar près. Conjecturer les rapports entre les nouvelles « sommes finales » et la somme initiale à répartir. Qu'est-ce qui change ?

Appeler l'examinateur pour lui présenter les conjectures et les conclusions

Partie B :
Dans cette partie, on ne se préoccupe pas de travailler avec des valeurs entières approchées : on reste avec des valeurs « exactes ».
On note a_n, b_n et c_n les sommes récupérées au *n*-ième partage respectivement par l'aîné, Ahmed et Harim et r_n la somme restant à partager à l'issue du *n*-ième partage.
On notera $r_0 = 35\ 000\ 000$

1. De quelles nature sont les suites (r_n), (a_n), (b_n) et (c_n) ?
2. Déterminer les sommes respectives A_n, B_n et C_n des *n* premiers termes des suites (a_n), (b_n) et (c_n) pour *n* entier.
3. Déterminer la limite de ces sommes et les rapports de ces limites par rapport à la somme initiale.
4. Déterminer les rapports entre les sommes obtenues pour chaque couple de frères.
5. Expliquer le paradoxe.

Où l'on découvre la singulière histoire des 35 chameaux qui devaient être répartis entre trois frères. Beremiz Samir réussit une division qui paraissait impossible, à la plus grande satisfaction des trois héritiers. Le bénéfice inespéré que nous tirons de cette transaction.

Nous voyagions depuis quelques heures sans incident notable, quand il nous arriva une aventure qui mérite d'être contée. Dans cette affaire, mon compagnon Beremiz sut habilement mettre à profit ses capacités d'algébriste hors pair.

Près d'un ancien caravansérail[1] à moitié abandonné, trois hommes discutaient âprement à côté d'un groupe de chameaux.

Exaltés, furieux, ils échangeaient reproches et imprécations :

— C'est impossible !

1. *Caravansérail* : refuge construit au bord d'une route par le gouvernement ou par des personnes pieuses, afin de servir d'abri aux pèlerins ; bâtiment de grandes dimensions destiné à accueillir les caravanes.

— C'est du vol !

— C'est inadmissible !

Beremiz s'enquit alors de l'objet de leur dispute.

— Mes frères et moi venons d'hériter de ces 35 chameaux, expliqua le plus âgé. Selon la volonté expresse de notre père, je dois en recevoir la moitié, mon frère Ahmed Namir un tiers et notre frère cadet Harim Namir seulement un neuvième. Mais nous n'arrivons pas à nous partager ces 35 bêtes ; chaque fois que l'un d'entre nous formule une proposition, les deux autres la repoussent : en effet, que l'on divise 35 par 2, par 3 ou par 9, on n'obtient jamais un nombre entier. Que faire de 17 chameaux et demi ou de 11 chameaux trois quarts ? Comment allons-nous nous mettre d'accord ?

— C'est très simple, répliqua l'Homme qui Calculait. Je me charge d'opérer un partage équitable entre vous, si vous me permettez d'ajouter, aux 35 chameaux de l'héritage, ce bel animal qui nous a amenés jusqu'ici au moment propice.

Je me sentis alors obligé d'intervenir :

— Je ne puis accepter une telle folie ! Comment allons-nous poursuivre notre voyage sans notre monture ?

— Ô Bagdadi, ne t'inquiète pas du résultat final, me rassura Beremiz à voix basse. Je sais parfaitement ce que je fais. Prête-moi ton chameau, et tout à l'heure tu comprendras où je veux en venir.

Il avait l'air si sûr de lui que je n'hésitai pas à lui remettre mon beau *jamal*[1], qui fut immédiatement amené à côté des 35 autres, pour que s'effectue le partage entre les trois héritiers.

— Mes amis, dit Beremiz en s'adressant aux trois frères, je vais effectuer une répartition exacte et équitable de ces chameaux qui sont désormais, comme vous le voyez, au nombre de 36.

Puis, se tournant vers l'aîné, il poursuivit :

— Tu devais recevoir, mon ami, la moitié des 35 chameaux, c'est-à-dire 17 bêtes et demie. Tu en auras 18, soit la moitié de 36. Tu n'as aucune raison de te plaindre, puisqu'il est évident que tu sors gagnant de ce partage.

Beremiz s'adressa alors au deuxième héritier :

— Quant à toi, Ahmed Namir, tu devais recevoir un tiers des 35 chameaux, soit 11 bêtes et quelques dixièmes. Tu vas en obtenir 12, c'est-à-dire un tiers de 36. Tu aurais mauvaise grâce à protester puisque ma décision t'est clairement favorable.

Enfin il dit au cadet :

— Toi, Harim Namir, selon la volonté de ton père, tu devais hériter d'un neuvième des 35 chameaux, soit 3 montures et quelques dixièmes. Tu vas en avoir 4, soit le neuvième de 36. Tu as, toi aussi, fait une bonne affaire. Tu dois donc me remercier pour mon intervention !

1. *Jamal* : la langue arabe possède des dizaines de mots pour désigner le chameau.

— C'est du vol !

— C'est inadmissible !

Beremiz s'enquit alors de l'objet de leur dispute.

— Mes frères et moi venons d'hériter de ces 35 chameaux, expliqua le plus âgé. Selon la volonté expresse de notre père, je dois en recevoir la moitié, mon frère Ahmed Namir un tiers et notre frère cadet Harim Namir seulement un neuvième. Mais nous n'arrivons pas à nous partager ces 35 bêtes ; chaque fois que l'un d'entre nous formule une proposition, les deux autres la repoussent : en effet, que l'on divise 35 par 2, par 3 ou par 9, on n'obtient jamais un nombre entier. Que faire de 17 chameaux et demi ou de 11 chameaux trois quarts ? Comment allons-nous nous mettre d'accord ?

— C'est très simple, répliqua l'Homme qui Calculait. Je me charge d'opérer un partage équitable entre vous, si vous me permettez d'ajouter, aux 35 chameaux de l'héritage, ce bel animal qui nous a amenés jusqu'ici au moment propice.

Je me sentis alors obligé d'intervenir :

— Je ne puis accepter une telle folie ! Comment allons-nous poursuivre notre voyage sans notre monture ?

— Ô Bagdadi, ne t'inquiète pas du résultat final, me rassura Beremiz à voix basse. Je sais parfaitement ce que je fais. Prête-moi ton chameau, et tout à l'heure tu comprendras où je veux en venir.

Il avait l'air si sûr de lui que je n'hésitai pas à lui remettre mon beau *jamal*[1], qui fut immédiatement amené à côté des 35 autres, pour que s'effectue le partage entre les trois héritiers.

— Mes amis, dit Beremiz en s'adressant aux trois frères, je vais effectuer une répartition exacte et équitable de ces chameaux qui sont désormais, comme vous le voyez, au nombre de 36.

Puis, se tournant vers l'aîné, il poursuivit :

— Tu devais recevoir, mon ami, la moitié des 35 chameaux, c'est-à-dire 17 bêtes et demie. Tu en auras 18, soit la moitié de 36. Tu n'as aucune raison de te plaindre, puisqu'il est évident que tu sors gagnant de ce partage.

Beremiz s'adressa alors au deuxième héritier :

— Quant à toi, Ahmed Namir, tu devais recevoir un tiers des 35 chameaux, soit 11 bêtes et quelques dixièmes. Tu vas en obtenir 12, c'est-à-dire un tiers de 36. Tu aurais mauvaise grâce à protester puisque ma décision t'est clairement favorable.

Enfin il dit au cadet :

— Toi, Harim Namir, selon la volonté de ton père, tu devais hériter d'un neuvième des 35 chameaux, soit 3 montures et quelques dixièmes. Tu vas en avoir 4, soit le neuvième de 36. Tu as, toi aussi, fait une bonne affaire. Tu dois donc me remercier pour mon intervention !

1. *Jamal* : la langue arabe possède des dizaines de mots pour désigner le chameau.

Et il conclut sereinement :

— Grâce au partage avantageux que j'ai réalisé entre les frères Namir – partage dont chacun d'eux a tiré profit –, le premier frère se verra attribuer 18 montures, le deuxième 12 et le troisième 4. Récapitulons : 18 + 12 + 4 = 34 chameaux. Des 36 animaux, il en reste donc 2. L'un appartient, comme vous le savez, au Bagdadi, mon compagnon et ami ; quant à l'autre, il me revient de droit, car j'ai résolu, à la satisfaction générale, le problème complexe de votre héritage[1] !

— Vous êtes très intelligent, ô Étranger, s'exclama l'aîné des trois frères. Nous acceptons votre partage car nous sommes certains que la justice et l'équité ont inspiré votre décision !

Et l'astucieux Beremiz – le Calculateur Prodige – prit aussitôt possession de l'un des plus beaux *jamals* du troupeau.

— Mon ami, me dit-il en me tendant la longe de l'animal qui m'appartenait, tu vas pouvoir maintenant continuer ton voyage sur ton chameau docile et sûr ! Quant à moi, j'ai désormais ma propre monture !

Et nous poursuivîmes notre route vers Bagdad...

1. Voir "Le partage des 35 chameaux", p. 311.

Classe de TL

Les nombres de Fibonacci

extrait du livre

« Le démon des maths » (ch 6) de H.M. Enzensberger

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Terminale L spécialité	* suites	* approfondissement sur les suites * révision des fonctions trinômes	calculatrice

1. Cadre

Terminale L spécialité maths : 7 élèves la première année ; 5 la deuxième
en groupe classe ; travail en individuel pendant 1 h

2. Objectifs

‣ Ré-utilisation de connaissances vues dans des chapitres antérieurs voire l'année passée ;

‣ Place dans le programme : BO hors série n°7 du 1er septembre 2005

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Compléments sur les suites arithmétiques et géométriques		
Limite d'une suite géométrique de raison positive, et conséquences pour la somme des termes consécutifs d'une telle suite.	Les élèves doivent connaître le comportement, suivant les valeurs de q, de q^n lorsque n tend vers l'infini.	Pour aborder cette notion, la démarche expérimentale abordée dans le programme de première est à conserver : les potentialités d'un tableur (tableau de valeurs, nuage de points) sont à exploiter. Les notions de suite tendant vers l'infini ou de suite convergente ne sont pas à définir de façon formelle.

‣ Insertion dans la progression : activité donnée en clôture du chapitre sur les compléments sur les suites arithmétiques et géométriques.

‣ Notions abordées : suites arithmétiques et géométriques (caractérisation) ; limite de q^n ; raisonnement par récurrence ; trinôme du second degré.

3. Prérequis

Caractérisation des suites arithmétiques et géométriques ; développement d'expressions ; trinôme du second degré.

4. Déroulement

La fiche est distribuée aux élèves en début d'heure. Les élèves travaillent de façon individuelle ; avec correction commune par morceaux ; une aide individuelle est apportée par le professeur aux élèves pour avancer.

5. Observations et commentaires

Des difficultés ont été rencontrées pour démontrer les inégalités des questions 5 et 6. La première année les élèves ne sont allés que jusqu'au début de la question 7 (une partie de la classe est à la traîne et ne profite pas de l'activité) ; ils ont terminé la feuille la seconde année.

Activité Les nombres de Fibonacci

Dans le chapitre du « Démon des maths » est présentée la suite des nombres de Fibonacci[14].
Dans toute l'activité, on appellera (f_n) cette suite.

1. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n								

2. La suite (f_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? (justifier).
3. Quelle relation relie f_{n+1}, f_n et f_{n-1} pour $n \geqslant 2$?
4. En déduire que la suite (f_n) est croissante.
5. On considère la suite géométrique (v_n) de raison 2 telle que $v_1 = 1$
   a. Montrer par récurrence que $f_{2n} \geqslant v_n$ quelque soit *n*.
   b. En déduire que $f_{2n+1} \geqslant v_n$ quelque soit *n*.
   c. Quelle est la limite de (v_n) quand *n* tend vers + ∞ ?
   d. En déduire la limite de (f_n) quand *n* tend vers + ∞.
6. On s'intéresse maintenant à la limite de $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$
   a. Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, $f_n \leqslant f_{n+1} \leqslant 2 f_n$
   b. En déduire un encadrement de $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.
   c. La limite de $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ quand *n* tend vers + ∞ peut-elle être + ∞ ?
7. On cherche à résoudre l'équation $x^2 = x + 1$
   a. Montrer que cela revient à résoudre $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{5}{4} = 0$
   b. En déduire les solutions de l'équation $x^2 = x + 1$.
8. On peut montrer que la suite (f_n) peut se définir par $f_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$
   a. Vérifier que cette formule convient pour *n* = 1 et *n* = 2.
   b. Soit (a_n) la suite définie par $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$.
   Montrer que cette suite est géométrique et en trouver sa limite quand *n* tend vers + ∞.
   c. Soit (b_n) la suite définie par $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ pour $n \geqslant 1$.
   Montrer que cette suite est géométrique et en trouver sa limite quand *n* tend vers + ∞.
   d. Quelle est la limite quand *n* tend vers + ∞ de $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$? En déduire la limite de $\dfrac{f_{n+1}}{f_n}$.

14 Léonard de Pise (Leonardo Pisano, 1175-1250) est un mathématicien italien (fils de Guilielmo Bonacci). En 1202, il publie *Liber Abaci* (le livre des calculs), un traité fondé sur le calcul décimal à une époque où tout l'Occident utilisait encore les chiffres romains ; par cette publication, Fibonacci introduit le système de numération indienne.

Classe de 1re S

Les nombres de Fibonacci

extrait du livre

« Le démon des maths » de H.M. Enzensberger (ch 6)

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Première S	* suites * fonctions	* révision sur les suites	

1. Cadre

Devoir maison donné à une classe de 28 élèves de 1re S.

2. Objectifs

▸ Révision des notions sur les suites.

▸ Place dans le programme : BO hors série n°7 du 31 août 2000

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Suites		
Modes de génération d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques	Etude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation de vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.
Notion intuitive de limite finie perçue à partir d'exemples. Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition.	On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a : *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.* *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.*	Le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. Toute définition en Ɛ et N est exclue.

Limite d'une suite géométrique.	Démonstration du théorème « des gendarmes » ; les théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis. On pourra mettre la définition en oeuvre pour étudier une limite (exemple : suite (w_n) définie par $w_n=max(u_n,v_n)$ ou pour montrer l'unicité de la limite. On montrera avec des exemples la variété de comportement de suites convergeant vers une même limite.	On indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour ça) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples. La définition d'une limite infinie pourra être abordée ou non.
Généralités sur les fonctions		
Résolution de l'équation du second degré. Etude du signe d'un trinôme.	On aboutira ici aux formules usuelles donnant les racines et la forme factorisée d'un trinôme du second degré.	On fera le lien entre les résultats et l'observation des représentations graphiques obtenues à l'aide d'un grapheur.
Dérivation		
Fonction dérivée Lien entre signe de la dérivée et variations.	On étudiera, sur quelques exemples, le sens de variation de fonctions polynômes de degré 2 ou 3, de fonctions homographiques ou de fonctions rationnelles très simples. On introduira les notions et le vocabulaire usuels (extremum, majorant, minorant) et , de l'étude du sens de variations, on déduira des encadrements d'une fonction sur un intervalle.	On justifiera que la dérivée d'une fonction monotone sur un intervalle est de signe constant ; on admettra la réciproque. L'étude de fonctions ne sera pas présentée comme une fin en soi, mais interviendra lors de la résolution de problèmes.

▸ Insertion dans la progression : en clôture du chapitre sur les suites.

▸ Notions abordées

Caractérisation d'une suite géométrique ou arithmétique ; sens de variations ; bornes ; limite d'une suite géométrique ; racines d'un trinôme du second degré ; étude de fonction via la dérivée et son signe ; position relative.

3. Observations et commentaires

Les élèves ont trouvé le devoir un peu long mais tout le monde l'a rendu ; certains élèves font référence au texte en début de devoir.

Les nombres de Fibonacci

Dans le chapitre du « Démon des maths » est présentée la suite des nombres de Fibonacci[15].
Dans toute l'activité, on appellera (f_n) cette suite. Pour des raisons de « facilité et cohérence », on va rajouter comme premier terme (non présenté dans le livre) $f_0=0$

Partie A : la suite de Fibonacci

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f_n	0	1	1								

2. La suite (f_n) est-elle arithmétique ? géométrique ? (justifier).
3. Quelle relation (**1**) relie f_{n+1}, f_n et f_{n-1} pour $n\geqslant 1$?
4. En déduire que la suite (f_n) est croissante à partir du rang 2.
5.
   a. Résoudre l'équation (**E**) : $x^2=x+1$.
   b. Montrer que la suite (u_n) définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $u_n=a\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+b\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ respecte la relation (**1**) quelque soit les réels *a* et *b*.
   c. Déterminer a et b pour que $u_0=f_0$ et $u_1=f_1$. On admet que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a alors $u_n=f_n$
6.
   a. De quelle nature sont les suites (v_n) et (w_n) définies, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par
   $v_n=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ et $w_n=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$?
   b. Quelles sont les limites respectives des suites (v_n) et (w_n) ?
   En déduire la limite de la suite (f_n)

Partie B : en partance vers les étoiles

On s'intéresse maintenant à la suite (F_n) définie par $F_n=\frac{f_{n+1}}{f_n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

1. Calculer F_1 et F_2 .
2. En se servant de la partie A, montrer que $F_{n+1}=1+\frac{1}{F_n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.
   En déduire que la suite (F_n) est bornée (on précisera majorant et minorant).
3. On considère la fonction *g* définie sur [1 ; $+\infty$ [par $g(x)=1+\frac{1}{x}$
   a. Dresser le tableau de variations de *g*.
   b. Etudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ de *g* et de la droite (D) d'équation $y = x$.
   c. Tracer dans un même repère orthonormé d'unité 10 cm, $\mathcal{C}_g$ et (D).
   d. Utiliser ces courbes pour positionner les points $M_i(F_i;0)$ pour $i\in\{1;2;4;4;5\}$
   e. En se servant du graphique, conjecturer la valeur de la limite de la suite (F_n) .

15 Léonard de Pise (Leonardo Pisano, 1175-1250) est un mathématicien italien (fils de Guilielmo Bonacci). En 1202, il publie *Liber Abaci* (le livre des calculs), un traité fondé sur le calcul décimal à une époque où tout l'Occident utilisait encore les chiffres romains ; par cette publication, Fibonacci introduit le système de numération indienne.

Classe de 1re S

Les nombres de Fibonacci (2)

extrait du livre

« Le démon des maths » de H.M. Enzensberger (ch 10)

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Première S	* repérage dans le plan * calcul vectoriel	* révision sur la géométrie dans le plan	

1. Cadre

Devoir à la maison donné à une classe de 28 élèves de première S

2. Objectifs

- Révision des notions abordées en géométrie
- Place dans le programme : BO hors série n°7 du 31 août 2000)

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Repérage		
Repérage polaire dans le plan et trigonométrie ; mesure des angles orientés, mesure principale, relation de Chasles, lignes trigonométriques des angles associés. Repérage cartésien dans l'espace. Distance entre deux points en repère orthonormal.	Repérage d'abord d'un point du cercle trigonométrique, à l'aide d'un réel défini à un multiple près de 2π ; lien entre repérage polaire et repérage cartésien. En particulier, équation de quelques objets de l'espace : plans parallèles aux plans de coordonnées ; sphère centrée à l'origine, cône de sommet l'origine et cylindre, chacun ayant pour axe un axe du repère.	C'est en "enroulant IR" sur le cercle trigonométrique que les élèves ont construit en 2nde les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus ; une première approche du radian et des angles orientés a alors été réalisée, s'appuyant sur la proportionnalité entre mesure de l'angle au centre et longueur de l'arc intercepté. On gardera ici cette vision dynamique de l'enroulement. Il s'agit ici de rendre familiers quelques objets usuels.

- Insertion dans la progression : cette activité se place forcément après les chapitres sur le repérage… mais il peut être donné à distance en révision.
- Notions abordées : calcul vectoriel : coordonnées d'un vecteur, du milieu, calcul de distances ; repérage dans le plan : coordonnées polaires, trigonométrie ; géométrie plane (Thalès) ; calcul littéral : manipulation d'expressions, résolution de systèmes

3. Prérequis

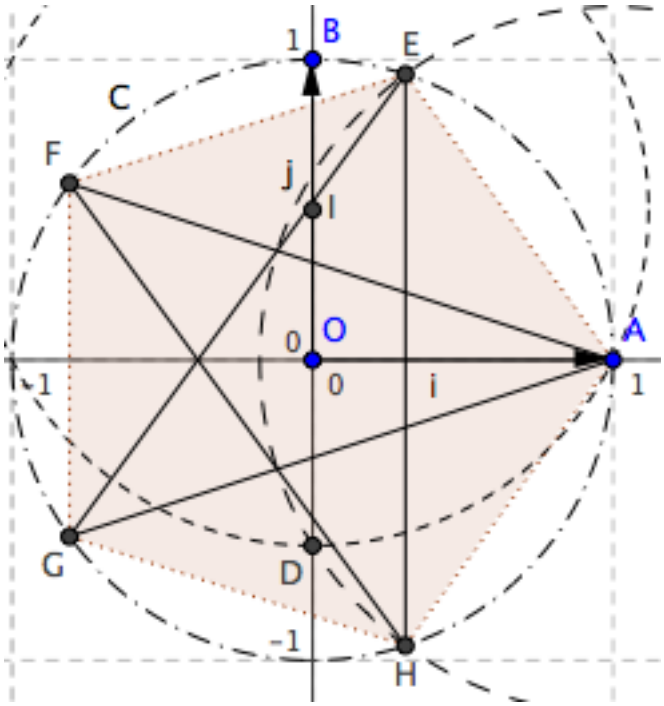
Chapitres calcul vectoriel ; repérage dans le plan

4. Observations et commentaires

Les élèves ont trouvé le devoir un peu long mais tous l'ont rendu.

Les nombres de Fibonacci (2)

Partie A : l'étoile à 5 branches

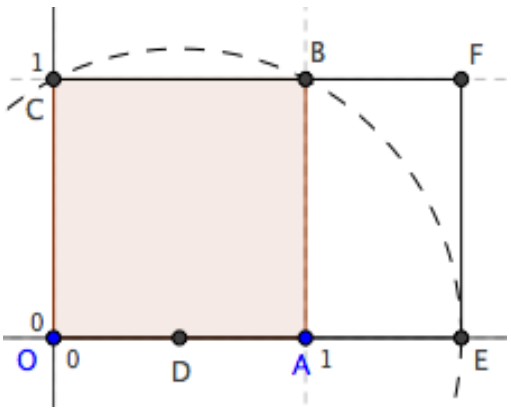


Sur la figure ci-contre, on considère un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$ où :

- C est le cercle de centre O et de rayon 1;
- A et B sont deux points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (0 ; 1) ;
- I est le milieu de [OB] ;
- D est à l'intersection entre la demi-droite [BO) et le cercle de centre I et de rayon IA :
- E est à l'intersection du cercle C et du cercle de centre A et de rayon AD.
- AEFGH est un pentagone régulier.

1. Reproduire cette figure : on prendra 5 cm pour unité et on repassera à l'encre l'étoile.
2. Calculer IA et en déduire OD puis les coordonnées cartésiennes de D.
3. Calculer AD.
4. On pose $\varphi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. Expliquer pourquoi $\varphi^2=\varphi+1$
5. Soit $(x\,;y)$ les coordonnées du point E.
   a. Montrer qu'elles vérifient le système $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-1)^2+y^2=\dfrac{5-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$
   b. Résoudre le système et trouver les coordonnées $(x\,;y)$ qui correspondent à la position de E sur la figure ci-dessus.
   c. Quelles sont les coordonnées polaires de E dans le repère $(O;\vec{i})$?
   En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{2\pi}{5}\right)$
   d. Montrer que $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)=\dfrac{\varphi}{2}$ et calculer $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ ..
6. Déterminer les valeurs exactes de $\dfrac{AF}{AE}$ et $\dfrac{AL}{LK}$ où K est le point d'intersection entre (EG) et (AF) et L le point d'intersection entre (EH) et (AF) .
7. Comment s'appelle ce nombre φ ?

Partie B : des étoiles aux escargots …



On considère le carré OABC de côté 1 ci-contre et D le milieu de [OA]. E est le point d'intersection de [OA) et du cercle de centre D et de rayon DB. F est le point tel que OEFC soit un rectangle.

1. Calculer OE.
2. Reproduire la figure (unité 5 cm).
3. Tracer le quart de cercle OB de centre A puis le carré BFGH où G appartient à [FE] et le quart de cercle BG de centre H. Poursuivre la spirale de cette façon.

Classe de STS

Population du Japon

extrait d'un article de

Le Monde daté du 24 octobre 2008

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
2ème année STS	Évolution de la population	Équation différentielle du premier ordre Étude de fonctions	Calculatrice non obligatoire

1. Cadre

2e année STS; 28 élèves ; travail individuel ; 1h cours puis fin à la maison

2. Objectifs

‣ Utilisation de connaissances sur les équations différentielles et les études de fonctions pour la compréhension et la lecture critique d'un article de journal.
‣ Place dans le programme : BO hors série n°6 du 27 septembre 2001

CONNAISSANCES ET SAVOIR FAIRE	COMMENTAIRES
a) Résolution des équations linéaires du premier ordre $a(t)x'(t)+ b(t)x(t) = c(t)$ b) Résolution des équations linéaires du second ordre à coefficients réels constants, dont le second membre est une fonction exponentielle-polynôme t → $e^{at}P(t)$, *où a* appartient à C.	On se placera dans le cas où a, b, c sont des fonctions dérivables à valeurs réelles et on cherchera les solutions sur un intervalle où a ne s'annule pas.
Travaux pratiques	
1° Résolution d'équations différentielles linéaires du premier ordre. 2° Résolution des équations linéaires du second ordre. 3° Exemples simples d'équations différentielles non linéaires, du premier ordre à variables séparables.	Pour les TP 1° et 2° : - il s'agit uniquement d'équations différentielles dont le type est précisé ci-dessus ; - toutes les indications permettant d'obtenir une solution particulière seront données. On privilégiera les exemples issus de la cinétique chimique. Aucune connaissance sur ce TP n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

‣ Insertion dans la progression : activité donnée en TP en début de deuxième année de STS à la fin du cours sur les équations différentielles du premier ordre.
‣ Notions abordées : équation différentielle linéaire du premier ordre, étude de fonctions.

3. Prérequis

Fonction dérivée, limite d'une fonction, représentation graphique d'une fonction à l'aide d'une calculatrice.

4. Déroulement

Dans un premier temps, les étudiants lisent l'article du Monde puis par binôme, ils commencent à réfléchir sur les différentes questions du TP. Le travail n'est pas fini à la fin de l'heure, les étudiants sont donc inviter à le finir pour le rendre la semaine suivante.

5. Observations et commentaires

Activité
Les étudiants se mettent au travail. Les binômes échangent en parlant doucement. Ils posent des questions quand ils ne comprennent pas le sens de la question (exemples : le 1 dans P(t + 1) signifie-t-il 1 an ? Que faut-il faire pour justifier à la première question ? Pourquoi peut-on approcher P(t + 1) – P(t) par P'(t) ?)
Avec de l'aide, les étudiants parvienne à répondre aux questions même si quelques erreurs sont à déplorer (erreur de virgule car nombre en million non converti, bornes pour la représentation graphique non respectées).
Bilan
Le bilan est plutôt positif. Les élèves comprennent que les résolutions d'équations différentielles peuvent servir à résoudre des problèmes de la vie courante. Ils semblent apprécier cette recherche par rapport à un article de presse et la critique qui en découle. À la fin du cours sur les équations différentielles du second ordre, les étudiants ont dû chercher en devoir maison un exercice appliqué à la mécanique. Ils ont trouvé le sujet beaucoup moins intéressant car trop physique (au sens sciences physiques), n'ont pas aimé du tout devoir travailler avec les forces. Dans le cas présent, au contraire, le fait que le travail fasse référence à un article de journal, les a agréablement surpris.
Propositions d'amendement
Seule une modélisation a été proposée (modèle de Malthus avec taux d'accroissement constant). Un autre modèle pourrait être proposé (modèle de Verhulst avec des taux de natalité et de mortalité pris comme des fonctions affine de la taille de la population).

DÉMOGRAPHIE UNE POPULATION EN DÉCROISSANCE RAPIDE

Le gouvernement japonais ne parvient pas à relancer la natalité

Article paru dans l'édition du 24.10.08

Un Japon sans Japonais ? L'idée pourrait surprendre mais, selon les démographes, si la tendance actuelle se maintient, la population japonaise, aujourd'hui de 127 millions d'âmes, pourrait tomber à... 0 en l'an 3000, comme le rappelle le dernier numéro du bulletin mensuel de l'Institut national d'études démographiques français. Cette projection rappelle que, dans l'archipel, 22,1 % de la population a plus de 65 ans et que le taux de fécondité se situait à 1,34 enfant par femme en 2007. Le Japon pourrait passer sous la barre des 100 millions d'habitants d'ici à 2050 et sous celle des 50 millions d'ici à la fin du siècle.

A l'origine de ces difficultés se trouvent différents facteurs comme la disparition, au milieu des années 1970, des solidarités familiales et de voisinage. A l'époque, « le modèle qui s'impose est celui d'un père qui subvient aux besoins de la famille, explique Sasai Tsukasa, de l'Institut national de la population et de la recherche sur la Sécurité sociale. La mère reste à la maison et s'occupe des enfants. » Dès les années 1980, de plus en plus de femmes se lancent dans une carrière professionnelle. Mais, dans les entreprises, l'habitude veut qu'une femme cesse son activité lorsqu'elle devient mère. Nombre de femmes ont donc renoncé à fonder une famille. La crise des années 1990, synonyme de précarisation, a incité nombre de couples à ne pas avoir d'enfants, craignant de ne pouvoir assurer leur éducation. D'où une chute continue du taux de fécondité.

Le gouvernement, qui compte un ministère chargé du déclin de la natalité, reste étrangement passif. Un « Angel Plan » a été mis en place fin 1994, qui prévoyait l'augmentation des places de crèche et des avantages fiscaux pour les couples avec enfants. Mais cet effort demeure limité et ce sont souvent les administrations locales qui se montrent les plus entreprenantes. Ainsi, l'arrondissement tokyoïte de Kita accorde 300 000 yens (2 240 euros) aux couples qui ont un enfant, alors que la Sécurité sociale ne rembourse aucun coût lié à la grossesse. Dans les entreprises, confrontées à une pénurie de main-d'oeuvre et à la féminisation du personnel, les mentalités évoluent. Des compagnies comme la maison de commerce Mitsui créent leurs propres services de crèche. « Le problème vient plutôt des PME, note M. Tsukasa. Les mentalités y sont plus conservatrices. »

La question de l'immigration, elle, reste à trancher. Les entreprises souhaitent la mise en place d'une politique pour attirer les travailleurs étrangers. Mais, hormis l'octroi de visas de travail, au début des années 1990, aux descendants de Japonais ayant émigré, la situation n'évolue guère. « Beaucoup s'inquiètent de voir les problèmes sociaux des populations issues de l'immigration observés en Europe se reproduire au Japon », explique M. Tsukasa, pour qui, « plus que la politique, ce sont les mentalités qu'il faut changer pour résoudre ces problèmes. Il faudra au moins une génération pour cela. »

Philippe Mesmer

TP équations différentielles et démographie
Vendredi 2 octobre 2009

Lire l'article ci-joint paru dans l'édition du Monde daté du 24 octobre 08

Peut-on retrouver les estimations de l'article ?

Essayons !

Au Japon, en 2007, le taux annuel de natalité était de 7,87 enfants pour 1000 et un taux annuel de mortalité de 9,26 pour 1000.
De plus, le taux de migration nette était de 0 pour 1000.
On note $P(t)$, la population du Japon en millions d'habitants, à l'instant t, exprimé en années (avec t ? 2007).
1. Justifier que :
$P(t + 1) - P(t) = -0{,}00139 \times P(t)$

2. On suppose que P est dérivable sur $[2007 ; +\infty[$.On approche alors $P(t + 1) - P(t)$ par $P'(t)$. Que devient alors la relation du 1. ?

3. Exprimer la taille de la population P en fonction de t sachant qu'en 2007, la population du Japon était de 127, 288 416 millions d'habitants.

Appeler le professeur pour faire vérifier la solution de l'équation différentielle.

4. Déterminer la limite de P en + ?.

5. Soit P', la fonction dérivée de P.

a) Calculer $P'(t)$.

b) En déduire les variations de P pour t ? 2007.

c) Les variations de P sont-elles en accord avec ce que rapporte l'article du Monde ? Justifier.

6. Tracer, sur une calculatrice, la courbe représentative de la fonction P sur l'intervalle [2007 ; 3000]. Prendre Ymin = 0 et Ymax = 130.

Appeler le professeur pour faire vérifier le graphique.

7. A l'aide de cette représentation graphique, déterminer :

1. à partir de quelle année, la population du Japon pourrait-elle passer sous la barre des 100 millions d'habitants ?

2. à partir de quelle année, la population du Japon pourrait-elle passer sous la barre des 50 millions d'habitants ?

8. Retrouver les résultats précédents par le calcul.

9. La fonction P est-elle celle qui a servi à modéliser l'évolution démographique du Japon dans l'article ? Justifier.

II. Deuxième modélisation

Dans la modélisation précédente (modèle de Malthus), le taux d'accroissement est supposé constant.
Le modèle de Verhulst imagine que le taux de natalité et le taux de mortalité sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la taille de la population. Autrement dit, plus la taille de la population augmente, plus son taux de natalité diminue et son taux de mortalité augmente. Verhulst pose d'autre part que, lorsque les populations sont de *petites tailles*, elles ont tendance à croître.
Si on appelle

- $P(t)$, la population du Japon en millions d'habitants, à l'instant t, exprimé en années
- $n(P(t))$ le taux de natalité
- $m(P(t))$ le taux de mortalité

où n et m sont des fonctions affines respectivement décroissante et croissante de la variable $P(t)$.
En prenant les données de 1985 à 2006, on modélise les fonctions n et m par :
$n(P(t)) = - 0{,}000\ 37\ P(t) + 0{,}056\ 24$
$m(P(t)) = 0{,}000\ 32\ P(t) - 0{,}032\ 30$

1. Montrer que la population suit l'équation différentielle

(E_1) $\quad P'(t) = P(t)$

2. On pose alors $y(t) =$.
a) Écrire l'équation différentielle (E_2) vérifiée par y.
b) Résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E_2).
c) Déterminer une fonction constante solution de l'équation (E_2).
d) En déduire la solution générale de (E_2).
e) En déduire l'expression générale de $P(t)$.
f) Sachant que la vitesse initiale à l'instant $t = 0$ est nulle, déterminer la vitesse y en fonction de t.

Correction du TP équations différentielles et démographie
du vendredi 2 octobre 2009

Au Japon, en 2007, le taux annuel de natalité était de 7,87 enfants pour 1000 et un taux annuel de mortalité de 9,26 pour 1000.
De plus, le taux de migration nette était de 0 pour 1000.
On note $P(t)$, la population du Japon en millions d'habitants, à l'instant t, exprimé en années (avec t ? 2007).

1. $P(t + 1) – P(t)$ est ce que l'on appelle l'accroissement démographique du Japon en millions d'habitants entre l'année t et l'année $t + 1$.
Il est égal à la différence entre le nombre de naissances et le nombre de décès soit :
$7,87/1000\ P(t) – 9,26/1000\ P(t) = 0,001\ 39\ P(t)$
Remarque : le taux de migration n'intervient pas car il est nul (0 pour 1000).

2. $P(t + 1) – P(t) = -0,00139 \times P(t)$ or $P(t + 1) – P(t) = P'(t)$
d'où $P'(t) = -0,00139 \times P(t)$
$P'(t) + 0,00139 \times P(t) = 0$ (E)

3. La solution générale de l'équation différentielle (E) s'écrit :
$P(t) = k.e^{-0,00139\ t}$

Or, en 2007, la population du Japon était de 127, 288 416 millions d'habitants soit :
$P(2007) = 127, 288\ 416$
$P(2007) = k.e^{-0,00139 \times 2007}$

On a donc l'équation :
$k.e^{-0,00139 \times 2007} = 127, 288\ 416$
$k =$
$k = 2\ 071,825\ 753$

On a donc :
$P(t) = 2\ 071,825\ 753.e^{-0,00139\ t}$

4. Déterminer la limite de P en + ?.
On sait que $e^{-0,00139\ t} = 0$
d'où $2\ 071,825\ 753.e^{-0,00139\ t} = 0$

5. Soit P', la fonction dérivée de P.

d) $P'(t) = 2\ 071,825\ 753 \times (-0,00139)\ e^{-0,00139\ t}$
$P'(t) = -2,879\ 837\ 797\ e^{-0,00139\ t}$

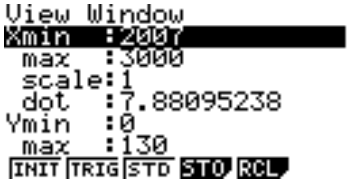
e) $e^{-0,00139\ t} > 0$ pour tout t réel
$-2,879\ 837\ 797 < 0$

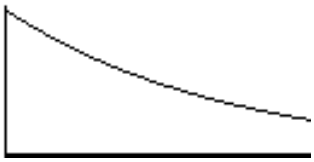
d'où le produit $-2,879\ 837\ 797\ e^{-0,00139\ t} < 0$ quelque soit t ? 2007

$P'(t) < 0$ quelque soit t ? 2007 donc $P(t)$ décroissante pour t ? 2007

f) Les variations de P sont décroissantes. Elles sont donc en accord avec ce que rapporte l'article du Monde intitulé « Démographie, une population en décroissance rapide ».

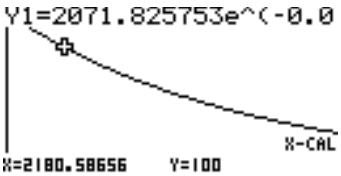
6.



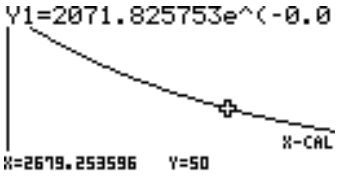


7. A l'aide de cette représentation graphique, déterminer :

3. À partir de 2 181, la population du Japon pourrait passer sous la barre des 100 millions d'habitants (voir représentation graphique ci-dessous).



4. À partir de 2 680, la population du Japon pourrait passer sous la barre des 50 millions d'habitants (voir représentation graphique ci-dessous).



8.

$2\,071{,}825\,753.e^{-0{,}00139\,t} < 100$
$e^{-0{,}00139\,t} <$
$\ln e^{-0{,}00139\,t} < \ln$
$-0{,}00139\,t < \ln$
$t >$
$t > 2\,180{,}586\,56$

$2\,071{,}825\,753.e^{-0{,}00139\,t} < 50$
$e^{-0{,}00139\,t} <$
$\ln e^{-0{,}00139\,t} < \ln$
$-0{,}00139\,t < \ln$
$t >$
$t > 2\,679{,}253\,596$

7. La fonction P n'est pas celle qui a servi à modéliser l'évolution démographique du Japon dans l'article car d'après l'article « la population pourrait passer sous la barre des 100 millions d'habitants d'ici à 2 050 » alors que $P(t) < 100$ pour $t > 2\,181$ ($2\,181 - 2\,050 = 131$ ans d'écart) et « sous celle des 50 millions d'habitants d'ici la fin du siècle » c'est-à-dire 2100 alors que $P(t) < 50$ pour $t > 2\,680$ ($2\,680 - 2\,100 = 580$ ans d'écart avec l'estimation de l'article).

Activité **Population et évolution**

Partie A :

	années	millions d'hommes
	-35000	**1**
	-10000	**10**
agriculture	**-5000**	**80**
ère chrétienne	**0**	**250**
	500	**200**
	1500	**460**
	1800	**800**
	1900	**1600**
	1950	**2500**
	2000	**6000**

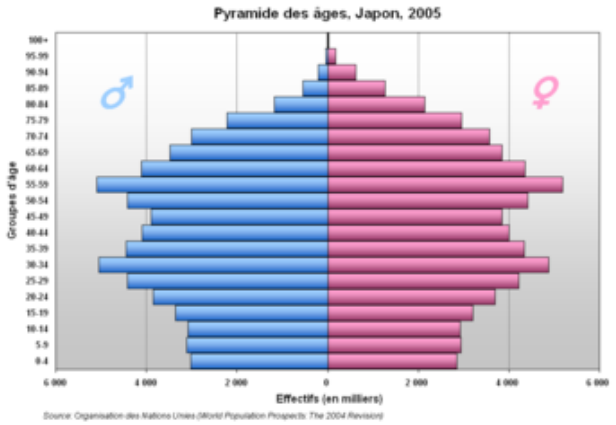
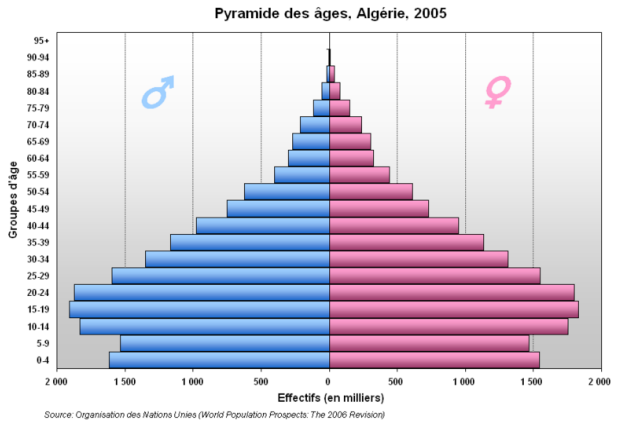
1. On s'intéresse à l'évolution de la population au cours de la préhistoire.
   a. La suite est-elle arithmétique ?
   b. Combien d'années séparent les deux premières valeurs du tableau ?
   c. Vérifier que la population a subi entre ces deux dates une augmentation d'environ 4,7 % tous les cinq cents ans.
   d. Si cette évolution c'était poursuivie, combien de millions d'hommes y aurait-il eu en l'an 2000 ?

2.

a. En utilisant un tableur, déterminer les coefficients multiplicateurs qui permettent de passer d'un nombre au suivant dans la colonne population.
b. On remarque plusieurs fois un facteur 2 pendant l'ère chrétienne. Correspondent-ils approximativement à la même évolution de la population ?

L'humanité a connu à ce jour deux grandes poussées démographiques :
– La première est issue de la sédentarisation des hommes et du développement de l'agriculture, au Moyen-Orient, en Chine, au Sahara et dans les Andes, il y a moins de 10.000 ans.
- La seconde poussée démographique se déroule sous nos yeux ; elle a débuté au début du XX^{e} siècle avec l'amélioration générale de l'hygiène mais est en voie d'achèvement.
Aujourd'hui, partout dans le monde la taille des familles se réduit à mesure que les jeunes filles acquièrent de l'instruction et des droits sociaux. De la sorte, la population mondiale croît de moins en moins vite et l'explosion démographique du XXe siècle ne sera sans doute bientôt plus qu'un lointain souvenir.
Suite à la baisse quasi-générale de l'indice de fécondité à la fin du XXe siècle, la population mondiale devrait plafonner aux environs de 8 ou 9 milliards vers 2050.

Partie B :

Pyramides des âges	
	
Japon	Algérie

1. Lire l'article sur l'évolution de la population au Japon et relever le taux de fécondité en 2007 ainsi que les prédictions de populations futures.
2. On construit un modèle mathématique qui va permettre d'étudier l'évolution « probable » de la population pour les années à venir (ouvrir le fichier …ods).
   On prend comme point de départ une pyramides des âges rectangulaire que l'on découpe en tranches de 20 ans. On suppose que la tranche qui engendre des enfants est celle de 20 à 40 ans en suivant le taux de fécondité qu'on supposera constant au cours des années et égal à 1,34. On suppose aussi que la population de 127 000 000 est équirépartie suivant les 5 tranches d'âge en 2007 et que pour chaque tranche il y ait autant de femmes que d'hommes.
   a. Combien d'enfants les femmes de la tranche 20-40 de 2007 vont-elles mettre au monde d'après ce modèle ?
   b. Ces enfants constituent la nouvelle tranche 0-20 de 2027. Compléter la ligne 2027 et trouver la nouvelle population à cette date. (demander à l'enseignant de valider les formules inscrites dans la feuille).
   c. Continuer de remplir le tableau tous les 20 ans.
   d. Retrouve-t-on les prédictions de l'article ?
   e. La suite ainsi constituée est-elle géométrique ?
   f. A partir d'une certaine date, l'évolution de la population suit deux suites géométriques intercalées. En préciser la raison pour chacune d'entre elles et leurs années respectives de « démarrage »
3. L'Algérie a une pyramide des âges plus triangulaire. Pour simplifier, on va supposer qu'elle forme un triangle isocèle rectangle. On se base sur une population d'environ 32 millions d'habitants en 2003 pour un taux de fécondité de 2,53.
   a. Créer un diagramme en barres horizontales avec la première ligne de données.
   b. Compléter le tableau par tranches de 20 ans.
   c. Au bout de combien d'années la population aura-t-elle dépassé les 100 millions d'habitants ?
   d. Créer un diagramme avec les données de l'année 2163. Que remarque-t-on ? Comment l'expliquer ?

Partie C : Modèle de Verhulst ?

Classe de 1re S

Suite et population

extrait du livre

« Le démon des maths » de H.M. Enzensberger (ch 6)

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Première S	* suites	* approfondissement sur les suites	tableur

1. Cadre

Classe de 1re S : travail individuel à la maison puis en individuel sur ordinateur (2 groupes).

2. Objectifs

-réinvestissement de certaines notions sur les suites ;

-utilisation du tableur ;

-utilisation d'une suite définie par récurrence ; influence des paramètres sur le sens de variations

▸ Place dans le programme : BO hors série n°7 du 31 août 2000 :

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Suites		
Modes de génération d'une suite numérique. Suite croissante, suite décroissante. Suites arithmétiques et suites géométriques	Etude de l'évolution de phénomènes discrets amenant à une relation de récurrence. Calcul des termes d'une suite sur calculatrice ou tableur ; observation de vitesses de croissance (resp. de décroissance) pour des suites arithmétiques et des suites géométriques. Comparaison des valeurs des premiers termes des suites $(1+t)^n$ et $1+nt$ pour différentes valeurs de t (en lien avec la notion de dérivée). On pourra étudier numériquement, sur ordinateur ou calculatrice, le temps de doublement d'un capital placé à taux d'intérêt constant, la période de désintégration d'une substance radioactive, etc.	On veillera à faire réaliser sur calculatrice des programmes où interviennent boucle et test.
Notion intuitive de limite finie perçue à partir d'exemples. Définition de la convergence d'une suite, utilisation de cette définition.	On utilisera au choix une des définitions suivantes pour la convergence d'une suite vers a : *Tout intervalle ouvert contenant a contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.* *Tout intervalle ouvert contenant a*	Le travail demandé ici à propos de la définition de la convergence est de nature épistémologique ; il sera présenté aux élèves comme tel et pourra permettre d'amorcer une réflexion, poursuivie en terminale, sur la nature des mathématiques. Toute définition en

Limite d'une suite géométrique.	*contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.* Démonstration du théorème « des gendarmes » ; les théorèmes sur la somme, le produit et le quotient de suites convergentes seront pour la plupart admis. On pourra mettre la définition en oeuvre pour étudier une limite (exemple : suite (w_n) définie par $w_n=max(u_n, v_n)$ ou pour montrer l'unicité de la limite. On montrera avec des exemples la variété de comportement de suites convergeant vers une même limite.	ε et N est exclue. On indiquera clairement qu'une fois la définition posée et les théorèmes établis, il est en général plus facile d'avoir recours aux théorèmes (ils sont là pour çà) plutôt qu'à la définition, sauf pour les contre-exemples. La définition d'une limite infinie pourra être abordée ou non.

‣ Insertion dans la progression : en fin de chapitre sur les suites.

‣ Notions abordées : suites définies par récurrence, suites arithmétiques et géométriques, modélisation de l'évolution d'un phénomène « discret » par une suite, notion intuitive de limite, utilisation des formules dans un tableur.

3. Prérequis

Cette activité se situant dans un cadre d'approfondissement, les prérequis sont les connaissances du chapitre sur les suites (hormis la notion de limite)

4. Déroulement

▸ La première partie est à faire à la maison avec la lecture du chapitre correspondant.

▸ Un très bref bilan est fait, surtout pour connaître la réponse des élèves à la question « Quel(s) paramètre(s) n'interviennent pas dans cette modélisation de population et la rendent peu réaliste. »

▸ La deuxième partie se fait en classe sur tableur : le temps imparti d'une heure n'a pas suffi, les élèves se sont arrêtés à la fin de la partie 2 ; la partie 3 s'est effectuée lors d'un bilan en classe et a permis notamment de mettre en évidence les différents comportement de la suite en faisant varier les paramètres (notion intuitive de limite, de divergence, même limite pour des suites de comportements différents).

5. Observations et commentaires

La partie à faire à la maison n'a posé aucun souci.

Certains des élèves ne maîtrisant pas bien le tableur, le début de la deuxième partie a pris plus de temps que prévu. La « mauvaise » valeur de K de l'énoncé n'a pas posé de problème : les élèves ont trouvé assez facilement une valeur qui convienne.

Il est dommage que les élèves n'aient pas traité les deux premières questions de la partie 3. Ils auraient mieux compris la « formule » de Verhulst.

TP-info Suites et populations

Partie A : préambule

Dans le chapitre du « Démon des maths » sont présentés la suite des nombres de Fibonacci[1].
Dans toute l'activité, on appellera (f_n) cette suite.

a. Compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
f_n								

b. Trouver la relation de récurrence qui relie f_{n+1}, f_n et f_{n-1} pour $n \geqslant 2$.

c. La suite (f_n) modélise l'évolution d'une population de lapins.
Quel(s) paramètre(s) n'interviennent pas dans cette modélisation de population et la rendent peu réaliste.

TP-info Suites et populations

Partie B : Travail sur tableur

Ouvrir le fichier tableur « suitesetpopulations.ods »

1. Etude de la suite de fibonacci

a. Quelle formule faut-il mettre en cellule B4 pour calculer les termes suivants de la suite ?
b. Faire afficher indices et valeurs prises par la suite jusqu'au rang 25.
c. Représenter les différents termes dans un diagramme XY.
d. D'après le graphique, cette suite peut-elle être arithmétique ? Pourquoi ?
e. A l'aide de calculs, effectués en colonne C, vérifier que cette suite n'est pas géométrique.

2. Etude de la population de Bretagne de 1801 à nos jours

a. Les données sont écrites en feuille « Bretagne » du fichier tableur.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	Année	Population			Population de la Bretagne de 1801 à nos jours											
2	1801	1833,41				(sources INSEE)										
3	1806	1880,94														
4	1821	1984095														
5	1826	2065,44														
6	1831	2103,84														
7	1836	2149,51														
8	1841	2180,76														
9	1846	2276,41														
10	1851	2303,11														
11	1856	2282,96														
12	1861	2327,41														
13	1866	2397,39														
14	1872	2345,14														
15	1876	2406,35														
16	1881	2446,24														
17	1886	2492,72														
18	1891	2517,01														
19	1896	2529,79														
20	1901	2559,4														
21	1906	2591,57														
22	1911	2601,72														
23	1921	2424,96														
24	1926	2411,35														
25	1931	2383,91														
26	1936	2396,65														
27	1946	2336,82														
28	1954	2338,8														
29	1962	2396,58														
30	1968	2468,23														
31	1975	2549,43														
32	1982	2707,89								2008	3141					
33	1990	2795,64														
34																

b. Les représenter sous forme d'une courbe. Que remarque-t-on ?
c. On peut modéliser l'évolution d'une population par un modèle de Verhulst. On pose K = 6500 et $u_{n+1}=u_n(a+1-\frac{a}{K}u_n)$

On peut remarquer que les recensements se faisaient tous les 5 ans. On posera donc u_0 la population de l'année 1801 et u_1 la population de l'année 1806.

- déterminer le coefficient *a* correspondant (à 0,0001 près)
- dans la feuille nommée « Modélisation », inscrire la valeur de *a* trouvée en cellule E4.
- calculer les populations fournies par cette modélisation jusqu'à 1911
- ce modèle est-il adapté ? Modifier la valeur de K en conséquence.

d. Les deux guerres ont fortement diminué la population bretonne.
On peut essayer de réappliquer le modèle précédent à partir de 1946.

- déterminer le coefficient *a* correspondant (à 0,0001 près) en prenant comme référence les années 1946 et 1954 ;
- calculer les populations suivantes (de 8 ans en 8 ans) à l'aide de ce modèle ;
- modifier le coefficient K de façon à s'adapter au mieux à l'année 1962 : que remarque-t-on ?

3. Etude du modèle

a. Recopier la valeur de K précédente dans la feuille « Etudes du modèle » et faire varier la valeur de *a* entre 0,5 et 1. Que remarque-t-on ? A quoi correspond donc K ?
b. Que se passe-t-il si *a* vaut 2 ?
c. Trouver d'autres valeurs « particulières » de *a* (qui produisent des effets différents sur les variations de population).
d. Sans le tableur, étudier le sens de variations de la suite (u_n).

Une copie d'écran de la feuille modélisation :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Année	Population	Estimation	Modélisation par la méthode de Verhulst					
2	1801	1833,41	1833,41	u(n+1)=u(n)(a+1-a/K*u(n))					
3	1806	1880,94	1880,94	K=					
4	1821	1984095		a=					
5	1826	2065,44							
6	1831	2103,84							
7	1836	2149,51							
8	1841	2180,76							
9	1846	2276,41							
10	1851	2303,11							
11	1856	2282,96							
12	1861	2327,41							
13	1866	2397,39							
14	1872	2345,14							
15	1876	2406,35							
16	1881	2446,24							
17	1886	2492,72							
18	1891	2517,01							
19	1896	2529,79							
20	1901	2559,4							
21	1906	2591,57							
22	1911	2601,72							
23	1921	2424,96							
24	1926	2411,35							
25	1931	2383,91							
26	1936	2396,65							
27	1946	2336,82							
28	1954	2338,8							
29	1962	2396,58							
30	1968	2468,23							
31	1975	2549,43							
32	1982	2707,89							
33	1990	2795,64							
34									
35									

Classe de 2nde

Tous devins !

extrait de la BD

« le Devin » d'Uderzo et Goscinny

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Seconde	* statistiques * probabilités * simulation	* introduire les probabilités via des simulations	calculatrice

1. Cadre

Classe de 2nde de 33 élèves – groupe classe – travail par binôme + 1 isolé ; une séance d'une heure

2. Objectifs

▸ Compréhension d'un problème ; modélisation ; simulation ; calculs de fréquences ; comparaison de situations.

▸ Place dans le programme : BO n° 30 du 23 juillet 2009

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Statistique descriptive, analyse de données		
Caractéristiques de position et de dispersion • médiane, quartiles ; • moyenne.	• utiliser un logiciel (par exemple, un tableur) ou une calculatrice pour étudier une série statistique. • passer des effectifs aux fréquences, calculer les caractéristiques d'une série définie par effectifs ou fréquences. • calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées. • représenter une série statistique graphiquement (nuage de points, histogramme, courbe des fréquences cumulées)	L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations pertinentes.
Echantillonnage		
Notion d'échantillon	• Concevoir, mettre en oeuvre et exploiter des simulations de situations concrètes à l'aide du tableur ou d'une calculatrice.	Un échantillon de taille n est constitué des résultats de n répétitions indépendantes de la même expérience.
Probabilité sur un ensemble fini		
Probabilité d'un événement	• Déterminer la probabilité d'événements dans des situations d'équiprobabilité • Utiliser des modèles définis à partir de fréquences observées	La probabilité d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

« Objectifs visés par l'enseignement des statistiques et probabilités à l'occasion de résolutions de problèmes dans le cadre des probabilités, rendre les élèves capables :
•d'étudier et modéliser des expériences relevant de l'équiprobabilité (par exemple, lancers de pièces ou de dés, tirage de cartes) ;
•de proposer un modèle probabiliste à partir de l'observation de fréquences dans des situations simples ;
•[….] »

‣ Insertion dans la progression : le chapitre sur les statistiques a déjà été fait ; cette activité sert d'introduction au chapitre sur les probabilités.

‣ Notions abordées : fréquences simulées.

3. Prérequis

Savoir faire un calcul de fréquences connaissant les effectifs.

4. Déroulement

► Distribution de la feuille ; lecture de la double page de BD.

► Rappel sur la touche de la calculatrice à utiliser.

► Remplissage du premier tableau.

► Les élèves répondent aux deux questions concernant le choix du devin.

► Découpage des dés pavés et remplissage du deuxième tableau.

5. Observations et commentaires

Certains élèves ont bloqué sur l'utilisation de la calculatrice dont deux parce que la calculatrice ne fonctionnait pas bien ; d'autres ont des soucis car ils utilisent un point au lieu d'une virgule dans la syntaxe. Certains élèves ne se souvenaient plus comment calculer des fréquences. Le découpage et le façonnage des dés pavés a pris un temps considérable jusqu'à 20 minutes pour les plus lents (!!!) par manque de matériel notamment (ciseaux, colle ou scotch). Peu de groupes ont complété le dernier tableau. Deux groupes n'ont pas bien fonctionné (l'un n'a même pas commencé à répondre aux questions). sans même répondre aux questions. Deux groupes n'ont pas obtenu 50 simulations (dont l'un des précédents). Des élèves qui avaient malencontreusement remis à zéro la calculatrice avant d'arriver à 50 ont cru bon de recommencer autant de lancers que ceux déjà inscrits avant de reprendre l'inscription des résultats. Pour les lancers de dés pavés, un groupe a visiblement répertorié n'importe comment ses résultats ;

►Résultats
Hormis les 2 groupes qui n'ont pas un total de 50 et qui ont trouvé des fréquences fausses, les élèves ont fait correctement le travail. Le total fournit des résultats proches des valeurs théoriques.
A la question « le devin a-t-il eu raison de choisir le VII ? »,
. 4 groupes ont répondu OUI dont 3 en justifiant par le fait que c'était la plus forte proportion (interprétation fausse de l'histoire) dont 1 groupe de bons élèves ;
. 10 groupes ont répondu NON dont 4 en justifiant par le fait que c'était la plus forte proportion.
A la question « laquelle aurait-il mieux fait de choisir ? »

. 5 groupes ont répondu 1 (une première élève a posé la question (« une question stupide » selon elle) « comment peut-on faire 1 ? » par contre elle ne l'a pas noté sur sa feuille ; d'autres ont parlé trop fort et la réponse a filtré jusqu'à d'autres groupes) ;

. 1 groupe a répondu 6 (c'est cette valeur qui obtient la plus grande fréquence dans leur tableau) ;

. 1 groupe a répondu 7 (en cohérence avec une réponse Oui) ;

. 1 groupe a répondu 2 ou 12 ; 3 groupes 12 ; 1 groupe 3 ou 12 ; 1 groupe 2 ou 10 ; 1 groupe 10 ou 11 ;

- seulement 7 groupes sur 16 ont effectué 50 lancers

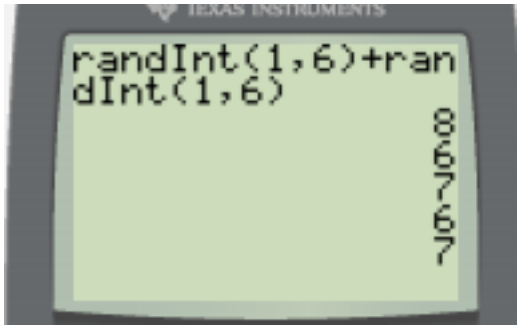
somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
effectif	0	7	31	60	126	154	111	56	17	4	1
aire	12	28	52	76	92	104	92	76	52	28	12
rapport		4	1,68	1,27	0,73						

▸Utilisation

Les premiers tableaux et leur compilation servent d'exemples dans le cours sur les probabilités.

Activité

Tous devins !



Travail à effectuer :

• Lire l'extrait de la BD ;

• répondre aux questions.

Questions :

1. En utilisant la fonction entAlea de la calculatrice (MATH → PRB), simuler 50 lancers de 2 dés et répertorier les résultats dans le tableau ci-dessous :

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
effectif											
fréquence											

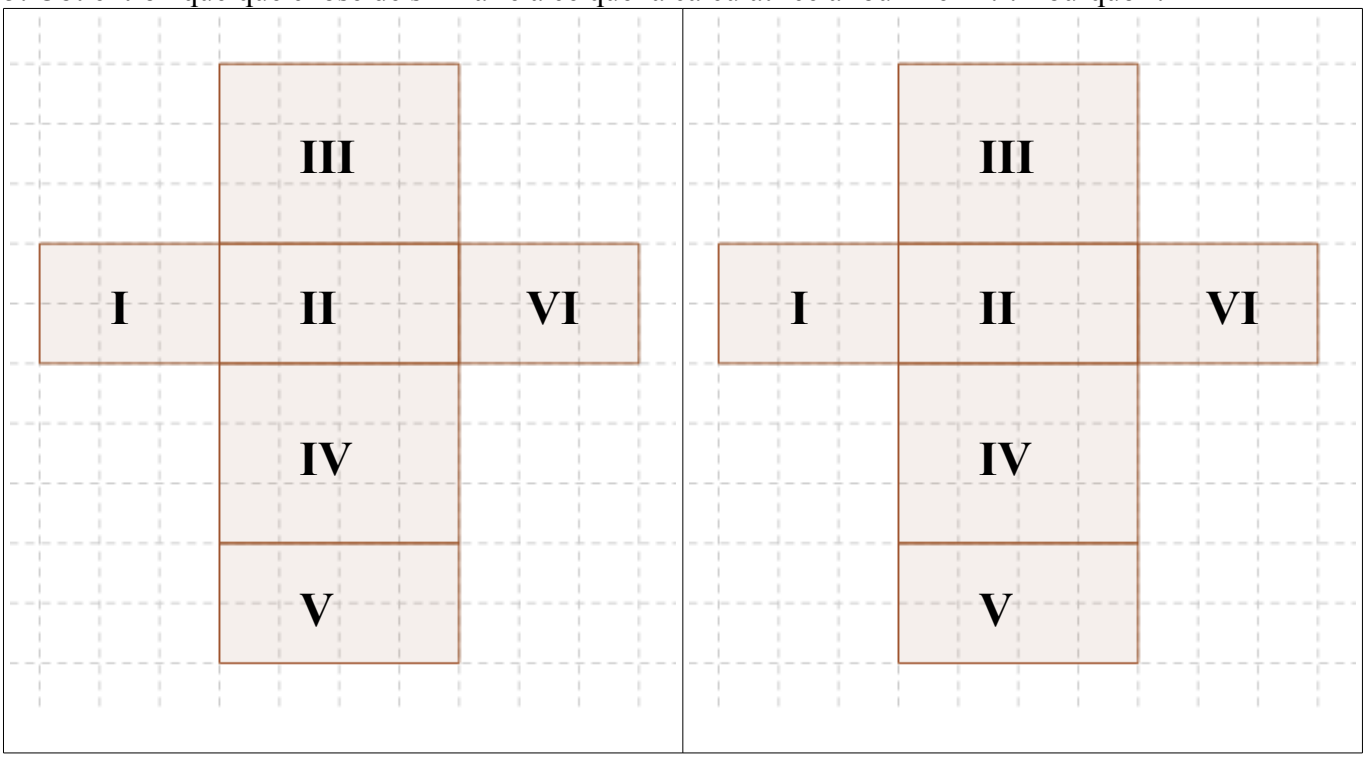
2. Le devin a-t-il eu raison de choisir VII ?

3. Parmi les valeurs proposées par le centurion, laquelle aurait-il mieux fait de choisir ?

4. Découper et coller les deux dés situés en bas de page, effectuer 50 lancers de ces 2 dés et répertorier les résultats dans le tableau ci-dessous :

somme	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
effectif											
fréquence											

5. Obtient-on quelque chose de similaire à ce que la calculatrice a fourni en 1. ? Pourquoi ?



Classe de 2nde

Statistiques

extrait du livre

« L'éventail du vivant » de S.-J. Gould

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Seconde	* statistiques	* déterminer les caractéristiques d'une série * comparer des séries statistiques	tableur

1. Cadre

Classe de 2e de 33 élèves. 2 séances d'1h en demi-groupe en salle informatique.

2. Objectifs

▸ Révision de connaissances de statistiques vues dans l'année ; réflexion sur la pertinence des caractéristiques d'une série statistique ; utilisation des formules dans un tableur.
▸ Place dans le programme : BO n° 30 du 23 juillet 2009

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Statistique descriptive, analyse de données		
Caractéristiques de position et de dispersion • médiane, quartiles ; • moyenne.	• utiliser un logiciel (par exemple, un tableur) ou une calculatrice pour étudier une série statistique. • passer des effectifs aux fréquences, calculer les caractéristiques d'une série définie par effectifs ou fréquences. • calculer des effectifs cumulés, des fréquences cumulées. • représenter une série statistique graphiquement (nuage de points, histogramme, courbe des fréquences cumulées)	L'objectif est de faire réfléchir les élèves sur des données réelles, riches et variées (issues, par exemple, d'un fichier mis à disposition par l'INSEE), synthétiser l'information et proposer des représentations pertinentes.

▸ Insertion dans la progression : à n'importe quel moment après le chapitre sur les statistiques.

▸ Notions abordées :

- caractéristiques d'une série statistique ;
- diagrammes associés ;
- formules dans un tableur.

3. Prérequis

Cette activité est donnée en approfondissement du chapitre sur les statistiques, dont la connaissance est nécessaire.

4. Déroulement

► Les élèves ont à lire à la maison un texte de Gould sur des pays imaginaires et la répartition des masses de leurs habitants ; des tableaux sont à compléter et des calculs à effectuer.

► Ensuite, en classe, en demi-groupe, un travail sur tableur est demandé sur la répartition de 10 euros entre 10 enfants (suite du texte de Gould).

5. Observations et commentaires

L'activité doit montrer que les indices ne sont pas forcément de bons résumés. Une suggestion : demander aux élèves de construire des répartitions effectivement différentes avec des indices communs (on pourra le faire au moyen du logiciel sinequanon par exemple). On pourra aussi commenter le passage du livre de Gould portant sur la signification du taux de survie à 5 ans utilisé en médecine.

Activité : Statistiques manipulables

Travail à effectuer :

1. Lire le texte de la page suivante.
2. Compléter le tableau suivant correspondant au premier exemple (*la contrée mythique*)
après l'absorption des cakes.

Masses en kg	25	50	75
Effectif			

3. Compléter les tableaux suivants correspondant au deuxième exemple (*la société totalitaire*)
après libéralisation
6 mois plus tard

Masses en kg			
Effectif			

1 an plus tard

Masses en kg			
Effectif			

2 ans plus tard

Masses en kg			
Effectif			

4. Compléter les tableaux suivants correspondant au deux exemples

exemples	premier	2è – 6 mois	2è – 1 an	2è – 2 ans
mode				
étendue				
médiane				
$[Q_1 ; Q_3]$				
moyenne				

5. Représenter l'évolution de la masse dans le cas du deuxième exemple par le(s) diagramme(s) de votre choix.
6. Dans le cas du deuxième exemple, calculer le pourcentage d'augmentation de la masse moyenne :
a.entre les 25 kg de départ et la masse au bout de 6 mois ;
b.entre 6 mois et un an ;
c.entre 1 an et 2 ans.
7. Si, dans le deuxième exemple, l'augmentation de la masse moyenne poursuit sa progression de la même façon :
a.au bout de combien de temps atteindra-t-elle 50 kg ?
b.quelle sera alors la répartition des masses dans la population ?

Extrait de « L'éventail du vivant – le mythe du progrès » (p 50-51)de Stephen Jay-Gould, éditions du Seuil

« Les cent habitants d'une contrée mythique suivent un même régime alimentaire et pèsent tous 50 kilos. Cette diététique fait un jour l'objet d'un débat, certains défendant une nouvelle marque de cake (particulièrement calorique), d'autres prêchant un accroissement de la frugalité. Loin d'être passionnés par ce débat, la plupart des habitants s'en tiennent à leurs habitudes alimentaires. Dix d'entre eux, toutefois, se mettent à dévorer de copieuses portions de cake et pèsent maintenant en moyenne 75 kilos, tandis que dix autres, accentuant leur régime, atteignent un poids moyen de 25 kilos. Le poids moyen de la population n'a donc pas changé et reste à sa valeur initiale de 50 kilos – mais l'écart en poids s'est considérablement accru (symétriquement dans les deux directions).

Ne mentionnant que le petit sous-ensemble de leurs partisans, les fabricants de cakes pourraient alors vanter l'esthétique de la silhouette rebondie et célébrer l'émergence d'une tendance à la prise de poids, tandis que, de leur côté, les moralistes défenseurs de l'anorexie pourraient, en invoquant leur propre sous-ensemble , exalter la maigreur et se réjouir de l'apparition d'une soi-disant tendance dans cette direction. Mais aucune tendance générale ne s'est dessinée, du moins au sens ordinaire du terme. Le poids moyen de la population n'a pas varié d'un seul kilo, et la plupart des gens (en l'occurrence 80 %) n'ont ni gagné ni perdu un seul gramme. Le seul changement a été un accroissement symétrique de l'écart pondéral de part et d'autres d'un poids moyen constant. (Libre à vous, bien sûr, de considérer que cet accroissement n'est pas sans intérêt, mais il ne constitue pas ce que l'on appelle habituellement une « tendance ».)

Cet exemple loufoque ne présente probablement aucun mystère pour vous. Peu d'entre nous éprouveraient des difficultés à identifier les changements réellement survenus dans cette population, et nous nous moquerions des fabricants de cake comme des partisans de l'abstinence s'ils tentaient de faire croire que les changements survenus dans leurs petits sous-ensembles traduisent une tendance générale. Mais je vais montrer que nombre de phénomènes, souvent perçus comme des tendances et vivement célébrés ou déplorés à grand renfort de publicité – notamment, la disparition du score de 400 au base-ball -, correspondent également à une variation symétrique de part et d'autre d'une valeur moyenne constante et sont donc tout aussi trompeurs, bien que de manière plus dissimulée.

Mon second exemple met en scène une société totalitaire gouvernée par les fanatiques de la diète. L'intoxication idéologique a été telle que tout le monde a succombé à la pression sociale et pèse 25 kilos. Vient ensuite aux affaires un gouvernement plus libéral, qui autorise un libre débat sur le poids idéal. Politiquement c'est parfait, mais physiologiquement le débat est faussé : 25 kilos est le poids minimal en dessous duquel on ne peut descendre sans mourir. Ainsi, bien que les citoyens soient maintenant libres de modifier leur poids, cette modification ne peut s'effectuer que dans une seule direction. La grande majorité des habitants, satisfaite du statu quo, décide de conserver ses 25 kilos. Quinze pour cent de la population fêtent leur liberté retrouvée en se gavant abondamment. Six mois plus tard, ces quinze individus pèsent en moyenne 37,5 kilos ; au bout d'un an, 50 kilos ; au bout de deux ans, 75 kilos.

C'est alors que des statisticiens véreux lancent une campagne en faveur des quinze obèses. Ils affirment que la philosophie de leurs clients domine l'ensemble de la société, ainsi qu'en témoigne clairement l'accroissement régulier du poids moyen de toute la population. Qui oserait d'ailleurs contester leurs chiffres ? Ils présentent même un très beau graphe (reproduit à la figure 3). Avant la libéralisation, le poids moyen stagnait à 25 kilos ; six mois plus tard, il est passé à 26,9 kilos (moyenne des 85 personnes restées à 25 kilos et des 15 personnes passées à 37,5 kilos) ; au bout de un an, il a atteint 28,8 kilos ; deux ans plus tard, 32,5 kilos (30 % de plus par rapport aux 25 kilos initiaux) : l'accroissement est indéniable.

Ici encore, vous pouvez considérer que l'exemple est exagéré et ne sert qu'à illustrer l'évidence de l'argument : vous avez alors compris le fonctionnement du système et de ses variations. Dès que l'on perçoit la situation d'ensemble, on sait que la plupart des habitants ont gardé un poids constant et que l'accroissement continu du poids moyen n'est qu'un artefact dû à l'amalgame de deux sous-populations entièrement distinctes – une majorité de conservateurs et une minorité de révolutionnaires -, et il est plus difficile de se laisser piéger. Mais supposez que vous ayez une vision incomplète de la situation et que vous n'écoutiez que les statisticiens marrons au service des quinze obèses. Supposez en outre que vous tendiez à accorder aux valeurs moyennes (comme je crains que ne fassent nombre d'entre nous) une réalité transcendant les individus réels et leurs différences. Qui sait si alors la figure 3 ne vous persuaderait pas que la population est soumise à une tendance qui la pousse, *dans sa totalité*, à un accroissement de son poids moyen ? »

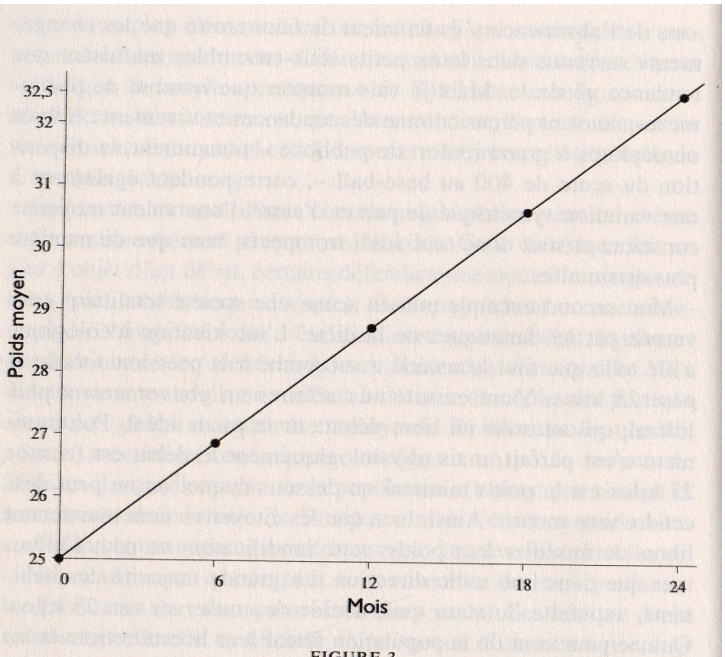


FIGURE 3

Ce graphe du poids moyen de la population imaginaire en fonction du temps démontre comment on peut donner l'impression fausse de l'existence d'une tendance globale.

TP-info Statistiques, moyenne et mode

Dans le livre de Stephen Jay Gould, « L 'éventail du vivant », on trouve, page 53, l'extrait suivant :
« De même qu'il y a plusieurs façons de plumer un canard, il y a plusieurs façons de représenter une « moyenne ». La plus courante, savamment appelée « moyenne arithmétique », additionne toutes les valeurs et divise par le nombre de cas. Si dix gamins possèdent entre eux 10 dollars, leur fortune moyenne est de 1 dollar. Mais une moyenne est parfois grossièrement trompeuse – surtout, comme dans l'exemple présenté à l'instant, lorsque les variations peuvent se développer significativement dans une direction et peu ou pas dans l'autre : la moyenne dérive alors dans cette première direction et donne l'impression (souvent tout à fait fausse) que l'ensemble de la population évolue dans cette même direction. Qui sait en fait si l'un des gamins ne possède pas un billet de 10 dollars et les neuf autres rien ? La moyenne arithmétique serait encore de 1 dollar par gamin, mais caractériserait-elle fidèlement cette petite population ? »

Travail à effectuer :
1. Lire le texte précédent.
2. Ouvrir les fichiers « statistiquesetmodes.ods » et « statistiquesetmodes.odt » déposés sur moodle et les enregistrer dans vos documents en mettant votre nom à la place (sans caractères accentués et sans perdre l'extension).
3. En se servant du fichier tableur, compléter le fichier texte.
4. Déposer les deux fichiers, texte « votrenom.odt » et tableur « votrenom.ods » sur la plateforme.

TP-info Statistiques, moyenne et mode

Fiche réponse : **NOM :** **Prénom :**

Partie A : la répartition d'argent (feuille « argent » du tableur)

1. Dans la cellule B7, entrer la formule suivante :
=($A5*B5+$A6*B6+$A7*B7+$A8*B8+$A9*B9+$A10*B10+$A11*B11+$A12*B12+$A13*B13+$A14*B14+$A15*B15)/10
Le « = » sert à indiquer qu'il y a une formule ; le « $ » sert à indiquer que le symbole qui suit (lettre(s) pour désigner une colonne ou nombre pour désigner une ligne) ne doit pas être modifié lors du recopiage.
2. Recopier cette cellule vers la droite jusqu'en colonne E (utiliser le petit carré en bas à droite de la cellule)
3. Compléter les cellules B8 à D12.
4. Imaginer une répartition 4 qui attribue les 10 € aux 10 enfants de façon à ce que le mode ne soit pas 0 et que tous n'aient pas la même somme. Compléter la colonne E.
5. Recopier ci-dessous les valeurs du tableau :

	Répartition 1	Répartition 2	Répartition 3	Répartition 4
moyenne				
étendue				
médiane				
Quartile 1				
Quartile 3				

6. A l'aide du tableur, créer les diagrammes en barres correspondant aux 4 répartitions et les coller ci-dessous.

(les données)

	A	B	C	D	E
1	NOM :			Prénom :	
2					
3		Effectifs			
4	Somme détenue en €	Répartition 1	Répartition 2	Répartition 3	Répartition 4
5	0	9	5	8	
6	1	0	1	0	
7	2	0	0	0	
8	3	0	3	1	
9	4	0	0	0	
10	5	0	0	0	
11	6	0	0	0	
12	7	0	0	1	
13	8	0	0	0	
14	9	0	0	0	
15	10	1	0	0	
16					
17	moyenne	1			
18	mode				
19	étendue				
20	médiane				
21	Quartile 1				
22	Quartile 3				

Partie B : les notes du devoir commun (feuille « notes » du tableur)

1. Trier la liste des notes pour chacune des classes de seconde.
2. A l'aide de ces listes triées, déterminer les médiane, quartile 1 et quartile 3 de chacune.
3. Calculer pour chaque classe de seconde la moyenne des notes et l'étendue. (on utilisera les fonctions =MOYENNE(plage de cellules) , =MAX(plage de cellules) et =MIN(plage de cellules) du tableur et on les recopiera vers la droite (utiliser le petit carré en bas à droite de la cellule).
4. Calculer moyenne et étendue de la série globale (qui comprend toutes les notes obtenues au DS commun) et déterminer médiane et quartiles 1 et 3 de cette série globale.
5. Recopier ci-dessous les valeurs obtenues :

seconde	10	A	B	C	D	E	F	G	H	I	global
moyenne											
étendue											
médiane											
Quartile 1											
Quartile 3											

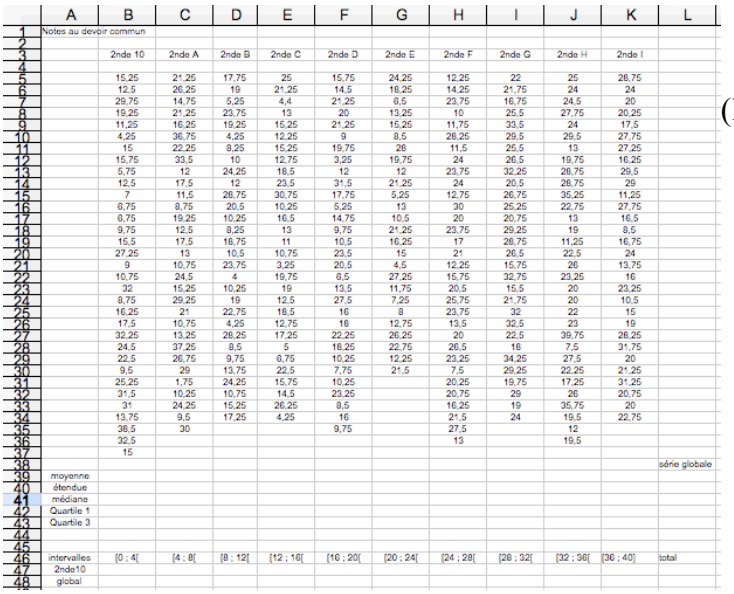
6.
7. Regrouper les notes en classe, pour la seconde 10 d'une part, pour la série globale d'autre part.
8. Recopier ci-dessous les valeurs trouvées en effectifs :

classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24[	[24 ;28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40 [	Total
2nde10											
global											

9. Recopier ci-dessous les valeurs trouvées en fréquence (en % à l'unité près) :

classes	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24[	[24 ;28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40 [	Total
2nde10											
global											

10. A l'aide du tableur, créer les histogrammes correspondants aux fréquences et les recopier ci-dessous :



(les données)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Notes au devoir commun											
2												
3		2nde 10	2nde A	2nde B	2nde C	2nde D	2nde E	2nde F	2nde G	2nde H	2nde I	
4												
5		15,25	21,25	17,75	25	15,75	24,25	12,25	22	25	26,75	
6		12,5	26,25	19	21,25	14,5	16,25	14,25	21,75	24	24	
7		29,75	14,75	5,25	4,4	21,25	0,5	23,75	16,75	24,5	20	
8		19,25	21,25	23,75	13	20	13,25	10	25,5	27,75	20,25	
9		11,25	16,25	19,25	15,25	21,25	15,25	11,75	33,5	24	17,5	
10		4,25	36,75	4,25	12,25	9	8,5	26,25	29,5	29,5	27,75	
11		15	22,25	8,25	15,25	19,75	26	11,5	25,5	13	27,25	
12		15,75	33,5	10	12,75	3,25	19,75	24	26,5	19,75	16,25	
13		5,75	12	24,25	18,5	12	12	23,75	32,25	26,75	29,5	
14		12,5	17,5	12	23,5	31,5	21,25	24	20,5	26,75	29	
15		7	11,5	26,75	30,75	17,75	5,25	12,75	26,75	35,25	11,25	
16		6,75	8,75	20,5	10,25	5,25	13	30	25,25	22,75	27,75	
17		6,75	19,25	10,25	16,5	14,75	10,5	20	20,75	13	16,5	
18		9,75	12,5	8,25	13	9,75	21,25	23,75	29,25	19	8,5	
19		15,5	17,5	16,75	11	10,5	16,25	17	26,75	11,25	16,75	
20		27,25	13	10,5	10,75	23,5	15	21	26,5	22,5	24	
21		9	10,75	23,75	3,25	20,5	4,5	12,25	15,75	26	13,75	
22		10,75	24,5	4	19,75	6,5	27,25	15,75	32,75	23,25	16	
23		32	15,25	10,25	19	13,5	11,75	20,5	15,5	20	23,25	
24		8,75	29,25	19	12,5	27,5	7,25	25,75	21,75	20	10,5	
25		16,25	21	22,75	18,5	16	9	23,75	32	22	15	
26		17,5	10,75	4,25	12,75	16	12,75	13,5	32,5	23	19	
27		32,25	13,25	26,25	17,25	22,25	26,25	20	22,5	39,75	26,25	
28		24,5	37,25	8,5	5	18,25	22,75	26,5	18	7,5	31,75	
29		22,5	26,75	9,75	6,75	10,25	12,25	23,25	34,25	27,5	20	
30		9,5	29	13,75	22,5	7,75	21,5	7,5	29,25	22,25	21,25	
31		25,25	1,75	24,25	15,75	10,25		20,25	19,75	17,25	31,25	
32		31,5	10,25	10,75	14,5	23,25		20,75	29	26	20,75	
33		31	24,25	15,25	26,25	8,5		16,25	19	35,75	20	
34		13,75	9,5	17,25	4,25	16		21,5	24	19,5	22,75	
35		38,5	30			9,75		27,5		12		
36		32,5						13		19,5		
37		15										
38												série globale
39	moyenne											
40	étendue											
41	médiane											
42	Quartile 1											
43	Quartile 3											
44												
45												
46	intervalles	[0 ; 4[	[4 ; 8[	[8 ; 12[	[12 ; 16[	[16 ; 20[	[20 ; 24[	[24 ; 28[	[28 ; 32[	[32 ; 36[	[36 ; 40]	total
47	2nde10											
48	global											

11. Comparer les résultats de la seconde 10 à ceux de la série globale.

Classe de CAP

Le « chiffre » du jour

extraits du journal

Ouest-France

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Terminale CAP	Mathématiques et actualité	Calcul numérique (calcul mental, « à la main » ou à l'aide de la calculatrice) Puissance (carré) d'un nombre	Calculatrice non obligatoire

1. Cadre

Groupe Terminale CAP Employés de Commerce MultiSpécialité (ECMS) ; 10 élèves ; travail en binôme 1h.

2. Objectifs

▸ Utilisation de connaissances sur les pourcentages directs et indirects, de traduction de données statistiques et déchiffrage de la presse quotidienne.
▸ Place dans le programme : BO hors série n°5 du 29 août 2002

DOMAINES DE CONNAISSANCES	COMPÉTENCES
Suites de nombres proportionnelles	Traiter de problème de pourcentages de la vie courante et de la vie professionnelle.

‣ Insertion dans la progression : activité donnée lors du chapitre Pourcentages, réduction, augmentation et après avoir travaillé les proportionnalités et la fonction linéaire. L'année précédente, le calcul numérique et les statistiques avaient été vus.
‣ Notions abordées : pourcentages directs et indirects, coefficient multiplicateur, etc.

3. Prérequis

Proportionnalité (quatrième proportionnelle).

4. Déroulement

Dans un premier temps, j'explique comment va se dérouler la séance. Le travail se fait en binôme. Chaque binôme reçoit une coupure de presse (coupure de Ouest-France de l'année en cours) et doit rédiger deux questions dont une au moins doit mobiliser des connaissances mathématiques. La deuxième peut mobiliser des connaissances mathématiques ou porter sur la compréhension du texte. Une fois les questions écrites, chaque binôme rédige la réponse aux questions. Ensuite, les coupures et les deux questions associées sont échangées et les binômes découvrent une nouvelle coupure de presse cherchent

les réponses aux questions posées par un autre binôme. Enfin, les binômes échangent sur leur travail, comparent leurs réponses et discutent en cas de désaccord.

5. Observations et commentaires

Les élèves ont du mal à se mettre dans le rôle de celui qui pose des questions. Ils ont plus l'habitude de répondre à des questions posées. L'enjeu d'avoir à écrire des questions qu'ils soumettront à leurs camarades ne semblent pas avoir apporté de motivation supplémentaire. Un élève dit tout haut une phrase du genre « Soit ABC, un triangle... » alors que sa coupure ne parle pas du tout de géométrie. L'ensemble des élèvent semblent formatés par les énoncés « classiques » de mathématiques. Nous avions pourtant travaillé au cours de ces deux années de CAP sur des supports de la vie courante (étiquettes d'emballage, publicités annonçant des soldes, etc.). Il est à espérer qu'avec l'évaluation par compétences au collège les élèves soient davantage habitués à ce type d'exercice et réagissent différemment dans un futur assez proche.
Alors que le travail consistait à utiliser les mathématiques pour comprendre l'actualité, les élèves ne prennent pas du tout de recul avec les textes soumis, ils ne sont pas surpris par les nombres. On peut se demander, s'ils ont bien compris qu'il s'agissait de coupures de journaux. Peut-être le manque d'intérêt pour la compréhension de ces brèves est-il dû au fait que les faits d'actualités proposés n'intéressaient pas les élèves, étaient trop loin de leurs préoccupations quotidiennes. Nous n'avons pas eu le temps de mettre en commun le travail des différents binômes et de prendre du recul sur les textes proposés car les élèves partaient en formation en entreprise après la séance proposée.

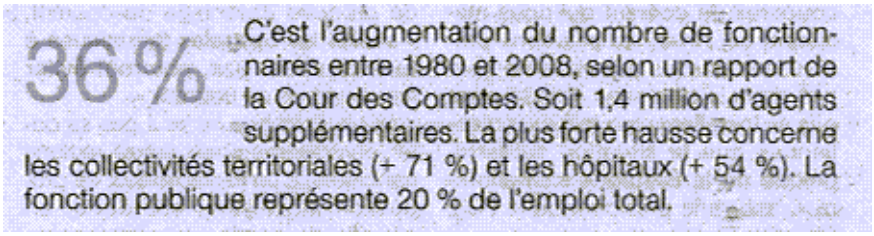
Ce type de travail où les élèves ont des supports différents permet d'individualiser facilement l'enseignement alors que la même tache est confiée à chaque élève. En effet, suivant les coupures, le fait qu'il y ait plus ou moins de nombres dans le texte, qu'il faille calculer un pourcentage direct ou indirect, rend le travail plus ou moins difficile.

Est-il opportun de trouver le même type d'articles avec des contenus qui traitent de thématiques plus proches des préoccupations des élèves ou est-il préférable de garder le type d'articles étudiés pour tenter d'ouvrir esprit des élèves sur le monde ?

Proportionnalité et coupures de journaux

Voici une coupure de journal. Trouver deux questions qui utilisent les données de cette coupure. Une question, au moins, devra être en rapport avec les mathématiques (les deux si possible). L'autre question pourra être une question de compréhension du texte.

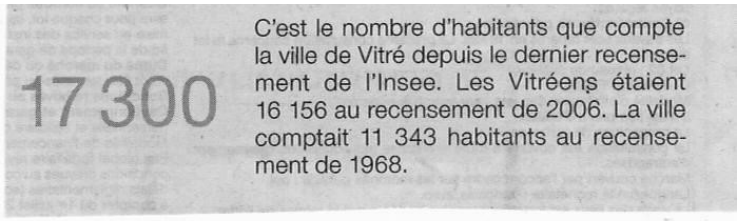
Ouest-France du jeudi 17 décembre 2009



Question n° 1

Question n° 2

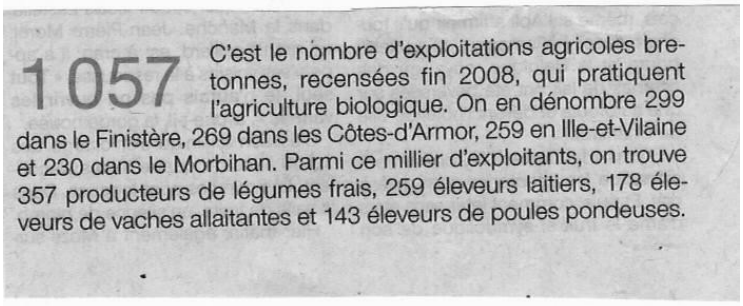
Voici les coupures proposées aux élèves par ordre de difficulté croissante :



17 300

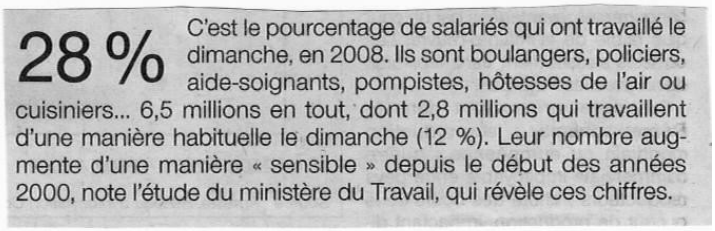
C'est le nombre d'habitants que compte la ville de Vitré depuis le dernier recensement de l'Insee. Les Vitréens étaient 16 156 au recensement de 2006. La ville comptait 11 343 habitants au recensement de 1968.

Même si la coupure comporte plusieurs nombres, le texte est clair. Il est facile de calculer l'augmentation du nombre d'habitants entre deux dates (**différence**) puis de ramener cette augmentation en **pourcentage**. Il est aussi possible de calculer le **coefficient d'augmentation**.



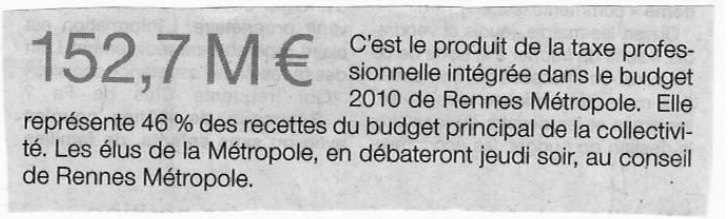
1 057 C'est le nombre d'exploitations agricoles bretonnes, recensées fin 2008, qui pratiquent l'agriculture biologique. On en dénombre 299 dans le Finistère, 269 dans les Côtes-d'Armor, 259 en Ille-et-Vilaine et 230 dans le Morbihan. Parmi ce millier d'exploitants, on trouve 357 producteurs de légumes frais, 259 éleveurs laitiers, 178 éleveurs de vaches allaitantes et 143 éleveurs de poules pondeuses.

Dans cette coupure aussi, il y a plusieurs nombres mais ceux-ci sont aussi clairement définis. Les élèves peuvent dresser un **tableau statistique**, calculer des **fréquences** et des fréquences en **pourcentages** et enfin dessiner un **diagramme circulaire**.



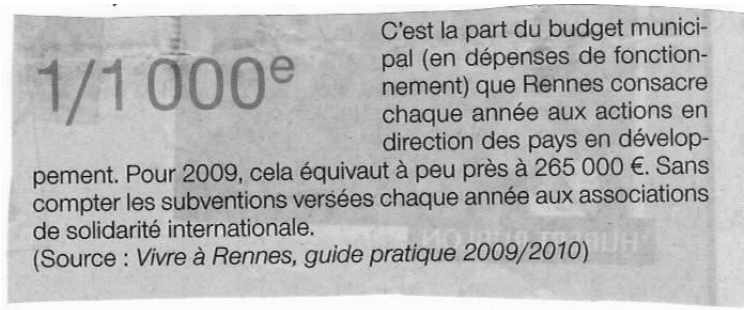
28 % C'est le pourcentage de salariés qui ont travaillé le dimanche, en 2008. Ils sont boulangers, policiers, aide-soignants, pompistes, hôtesses de l'air ou cuisiniers... 6,5 millions en tout, dont 2,8 millions qui travaillent d'une manière habituelle le dimanche (12 %). Leur nombre augmente d'une manière « sensible » depuis le début des années 2000, note l'étude du ministère du Travail, qui révèle ces chiffres.

Les trois coupures suivantes donnent un pourcentage et le nombre correspondant à ce pourcentage. Les élèves peuvent calculer le total (le nombre correspondant à 100 %) en recherchant la **quatrième proportionnelle**.



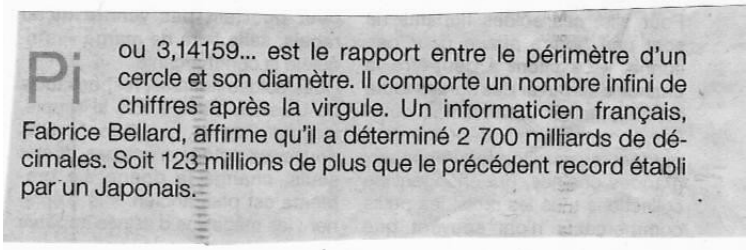
152,7 M € C'est le produit de la taxe professionnelle intégrée dans le budget 2010 de Rennes Métropole. Elle représente 46 % des recettes du budget principal de la collectivité. Les élus de la Métropole, en débateront jeudi soir, au conseil de Rennes Métropole.

106 millions d'enfants ont été vaccinés, en 2008, dans le monde, contre les principales maladies infantiles. Soit environ 80 % des nouveaux nés. L'Organisation mondiale de la Santé, l'Unicef et la Banque mondiale se félicitent de ce niveau record. Mais il manque 670 millions d'euros pour étendre la vaccination à tous les enfants des 72 pays les plus pauvres de la planète.



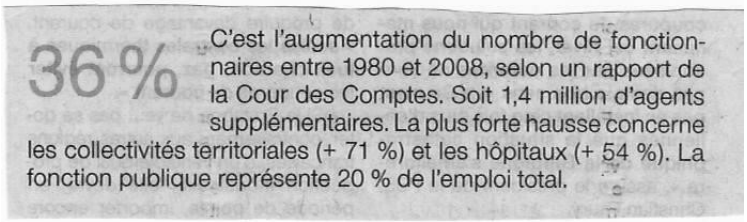
1/1 000e C'est la part du budget municipal (en dépenses de fonctionnement) que Rennes consacre chaque année aux actions en direction des pays en développement. Pour 2009, cela équivaut à peu près à 265 000 €. Sans compter les subventions versées chaque année aux associations de solidarité internationale.
(Source : *Vivre à Rennes, guide pratique 2009/2010*)

Là encore, les élèves peuvent calculer un total en recherchant la **quatrième proportionnelle**. Peut-être cette recherche est-elle un peu plus difficile que les précédentes car la portion est donnée sous forme de fraction et non sous forme de pourcentage.



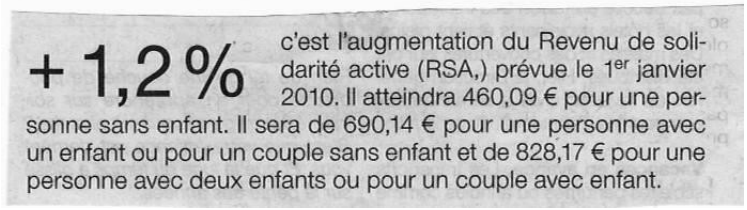
Pi ou 3,14159... est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre. Il comporte un nombre infini de chiffres après la virgule. Un informaticien français, Fabrice Bellard, affirme qu'il a déterminé 2 700 milliards de décimales. Soit 123 millions de plus que le précédent record établi par un Japonais.

Cette coupure même si les questions qu'elle amène ne sont pas difficiles reste un peu plus difficile à traiter que les précédentes de par les **grands nombres** (plusieurs millions et milliards) qu'elle impose. Les élèves calculeront une **différence**, un **pourcentage** par exemple.



36 % C'est l'augmentation du nombre de fonctionnaires entre 1980 et 2008, selon un rapport de la Cour des Comptes. Soit 1,4 million d'agents supplémentaires. La plus forte hausse concerne les collectivités territoriales (+ 71 %) et les hôpitaux (+ 54 %). La fonction publique représente 20 % de l'emploi total.

Dans cette coupure, les élèves peuvent encore rechercher une **quatrième proportionnelle** et en déduire un total avant et après l'augmentation. Ils peuvent aussi rechercher le **coefficient multiplicateur** qui permet de passer à la population avant et après l'augmentation. Néanmoins la difficulté vient du fait que certains nombres ne peuvent pas être exploités.



+ 1,2 % c'est l'augmentation du Revenu de solidarité active (RSA,) prévue le 1er janvier 2010. Il atteindra 460,09 € pour une personne sans enfant. Il sera de 690,14 € pour une personne avec un enfant ou pour un couple sans enfant et de 828,17 € pour une personne avec deux enfants ou pour un couple avec enfant.

Cette coupure semble la plus difficile car la question qui vient rapidement nécessite le calcul d'un pourcentage indirect.

Coupure 1
Les élèves ne demandent que des calculs simples (deux fois une différence). Même après les avoir incité à traduire cette différence en pourcentage, ils ne sont pas davantage inspirés.

Coupure 2
L'élève en question est la plus faible de la classe en mathématique. Elle bloque, n'arrive pas à écrire une seule question. Je l'invite à dresser un tableau statistique en lui indiquant le titre de trois colonnes. Elle parvient seulement à compléter le nombre d'exploitation correspondant à chaque département mais ne parvient par à calculer les pourcentages correspondant.

Coupure 3
Les questions écrites par le binôme qui avait cette coupure ne demandent pas de calculs. Il s'agit seulement de recopier des nombres extrait du texte.

Coupure 4
Les deux premières questions écrites par le binôme sont des questions de compréhension de texte. Le

binôme m'avait appelé pour savoir ce que signifiait M dans 152,7 M €. J'avais alors répondu que cela constituait une très bonne question. Il a fallu que j'aiguille un peu le binôme pour que la troisième question nécessitant des calculs mathématiques émerge.

Coupure 5
Le binôme demande de calculer un nombre correspondant à un pourcentage (46 %) alors que ce nombre est dans le texte.

Coupure 6
Le binôme qui a eu cette coupure n'a écrit qu'une question. Il s'agit de la question « mathématique » qui vient le plus naturellement. Aucun autre nombre n'est exploitable dans la coupure. Il aurait donc fallu que le binôme écrive une question de compréhension de texte. Mais alors que beaucoup de binômes ont trouvé davantage de questions de compréhension que de questions « mathématiques », celui-là a échoué.
Il parvient aussi à poser les calculs pour trouver la réponse à la question mathématique posée.

Coupure 7
Ce binôme s'est bien impliqué dans la recherche de questions et des réponses. Malgré tout, le terme rapport n'était pas compris et j'ai dû l'expliquer (quel est le rapport entre le périmètre d'un cercle et son diamètre ?). Pour répondre à la question, plutôt que d'utiliser des lettres pour le diamètre et le périmètre, les élèves ont fait un schéma, ont choisi une valeur du diamètre et ont calculé la valeur du périmètre correspondante.
La deuxième question demandait de calculer une différence (Combien il y a d'écart entre 2 700 milliards et 123 millions ?). Là encore le vocabulaire mathématique semble poser problème, il reste approximatif. Ils emploient le mot écart pour parler de différence. La réponse à la question a posé problème à cause des millions et des milliards.

Coupure 8
Ce binôme a été perturbé par les nombres donnés et a eu du mal à comprendre à quoi correspondaient les différents nombres (quel nombre était relié à quel pourcentage).
Finalement, la question 2 correspond à une question de compréhension de texte. Le binôme parvient à la résoudre.
En revanche, la réponse à la question 1 utilise deux pourcentages qui n'ont rien à voir entre eux.

Coupure 9
Le binôme qui a eu cette coupure à étudier était constitué des deux meilleures élèves de la classe. Elles ont d'ailleurs trouvé des questions pertinentes assez rapidement par rapport au reste de la classe. En revanche, elles n'ont pas su éviter le piège dans lequel il ne fallait pas tomber. La coupure donnait le pourcentage d'augmentation et le montant après augmentation. Elles ont fait leurs calculs à partir de ce montant et du pourcentage d'augmentation.

Classe de 1re S et de STS

Jours de foot

extrait du Journal

Ouest-France pages sport

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Première S et 2e année de STS	* statistiques	* révision sur les statistiques * introduction de la notion d'écart-type	calculatrice

1. Cadre

Classe de première S à 28 élèves la première année et une classe de première S à 31 élèves la deuxième année ; travail individuel en classe entière.
Classe de 2e année de STS à 28 élèves ; travail individuel ; 1h (en classe) puis fin à la maison.

2. Objectifs

‣ Révision et utilisation des notions de statistiques des années précédentes ; introduction de la notion d'écart-type ; utilisation du mode statistique de la calculatrice.
‣ Place dans le programme de première S : BO hors série n°7 du 31 août 2000

CONTENUS	MODALITÉS DE MISE EN ŒUVRE	COMMENTAIRES
Statistique		
Variance et écart-type. Diagramme en boîte ; intervalle interquartile. Influence sur l'écart-type et l'intervalle interquartile d'une transformation affine des données.	On cherchera des résumés pertinents et on commentera les diagrammes en boîtes des quantités numériques associées à des séries simulées ou non. On observera l'influence des valeurs extrêmes d'une série sur l'écart-type ainsi que la fluctuation de l'écart-type entre séries de même taille. L'usage d'un tableur ou d'une calculatrice permettent d'observer dynamiquement et en temps réel, les effets des modifications des données.	L'objectif est de résumer une série par un couple (mesure de tendance centrale ; mesure de dispersion). Deux choix usuels sont couramment proposés : le couple (médiane ; intervalle interquartile), robuste par rapport aux valeurs extrêmes de la série, et le couple (moyenne ; écart-type). On démontrera que la moyenne est le réel qui minimise $\sum (x_i - \overline{x})^2$ alors qu'elle ne minimise pas $\sum \lvert x_i - \overline{x} \rvert$. On notera s l'écart-type d'une série, plutôt que σ, réservé à l'écart-type d'une loi de probabilité.

‣ Place dans le programme de première S : BO hors série n°6 du 27 septembre 2001

CONNAISSANCES ET SAVOIR FAIRE	COMMENTAIRES
a) Séries statistiques à une variable : Méthode de représentation.	

Caractéristiques de position (médiane, moyenne). Caractéristiques de dispersion (interquartiles, variance, écart type). b) Séries statistiques à deux variables : Tableaux d'effectifs. Nuage de points : point moyen. Ajustement affine (méthode graphique : méthode des moindres carrés, droites de régression). Coefficient de corrélation linéaire.	Il s'agit, d'une part de préciser la signification de chaque caractéristique, d'autre part d'associer la précision des résultats numériques obtenus (à l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur) à la précision sur les données et à la méthode mise en œuvre, notamment dans le cas où les classes sont définies par des intervalles. Pour l'ajustement affin, on distinguera liaison entre deux variables statistiques et relation de cause à effet. Pour la méthode des moindres carrés, on fera observer que l'on crée une dissymétrie entre les deux variables statistique qui conduit, suivant le problème à résoudre, à privilégier l'une des deux droites.
‣**Travaux pratiques**	
1° Étude de séries statistiques à une variable. 2° Exemples d'étude de séries statistiques à deux variables.	On interprètera les résultats obtenus. En fournissant aux étudiants des indications sur la marche à suivre, on pourra, d'une part étudier quelques exemples d'ajustement qui, par un changement de variable simple, se ramène à un ajustement affine, d'autre part à propos des séries chronologiques, procéder à un lissage obtenu, par exemple, par la méthode des moyennes mobiles, avant d'effectuer, si nécessaire, un ajustement affine ; mais aucune connaissance sur ces démarches n'est exigible dans le cadre du programme de mathématiques.

‣ Insertion dans la progression : en première S, activité introductive au chapitre de statistiques ; en classe de STS, activité donnée en TP à la fin de premier trimestre de deuxième année à la fin du cours sur les séries statistiques à une variable.

‣ Notions abordées : le vocabulaire et les notions statistiques vues les années précédentes, ainsi que la notion d'écart-type.

3. Prérequis

Calculs de fréquences ; mode, étendue, médiane, quartiles.

4. Déroulement

En classe de première S, distribution de la fiche – travail individuel avec corrections communes par morceaux.
En classe de STS, travail en binôme avec professeur qui donne des indications si besoin.

5. Observations et commentaires

Activité
En première S, cette activité a été donnée deux années de suite avec une légère modification :
- la première année, les championnats considérés étaient ceux d'Espagne et d'Italie avec 20 équipes dans les deux cas ;
- la deuxième année, les championnats considérés étaient ceux qui faisaient intervenir les deux équipes « locales ».
Le calcul des fréquences a généré plus de questions dans le deuxième cas, les calculs ne tombant pas « juste ».
En STS, pour savoir si le fait que les équipes locales ou internationales influaient sur la dernière question, plusieurs championnats ont été donnés à l'étude (France Allemagne, France Italie, France Angleterre, Ligue 1 Ligue 2, CFA groupe C Division d'honneur).

Bilan
L'activité permet de faire le point sur les connaissances des élèves.
Suivant les championnats, les calculs de fréquences peuvent amener des questionnements intéressants (les élèves ne parviennent pas à avoir une somme de fréquence égale à 1 quand des arrondis sont utilisés).
En première S, la deuxième année, les productions « littéraires » ont été de bien meilleure qualité : les élèves ont vraiment joué le jeu du chroniqueur sportif.
En STS, les élèves ont trouvé le travail long et peu intéressant, certains auraient préféré les résultats de rugby... Les articles de la question 8 ont été très décevants quel que soit la championnat étudié.
Certains championnats n'ont pas le même nombre d'équipes (France 20 et Allemagne 18 ; CFA 18 et DH 14). Certaines questions sont alors plus pertinentes.

Proposition d'amendement
Dans la deuxième fiche de première S et dans celle de STS, la dernière colonne d'un des tableaux a été effacée puis recopiée. La question de savoir si elle a été bien recopiée nous semble pertinente. Elle permet aux élèves de comprendre que le nombre de buts marqués et encaissés est le même. Malgré tout, nous pensons que seule une valeur pourrait être effacée et demandée.

Activité Statistiques

Voici les résultats à l'issue de la quatrième journée de championnat , en Espagne et en Italie : (extrait Ouest-France du 25/09/08)

		Pts	J	G	N	P	p.	c.
1	Villarreal	10	4	3	1	0	6	2
2	Real Madrid	9	4	3	0	1	14	6
3	Atl. Madrid	9	4	3	0	1	11	3
4	FC Séville	8	4	2	2	0	7	4
5	Valence	7	3	2	1	0	6	2
6	Almeria	7	3	2	1	0	6	3
7	FC Barcelone	7	4	2	1	1	10	5
8	Esp. Barcelone	7	4	2	1	1	3	3
9	Getafe	5	4	1	2	1	4	4
10	La Corogne	5	4	1	2	1	2	2
11	Athl. Bilbao	4	3	1	1	1	3	3
12	Numencia	3	3	1	0	2	5	6
13	Osasuna	3	4	0	3	1	2	3
14	Valladolid	3	3	1	0	2	2	4
15	Huelva	3	3	1	0	2	1	5
16	Bétis Séville	2	4	0	2	2	2	4
17	Majorque	2	3	0	2	1	1	4
18	Santander	2	4	0	2	2	2	6
19	Malaga	1	3	0	1	2	0	5
20	Gijon	0	4	0	0	4	6	19

		Pts	J	G	N	P	p.	c.
1	Inter Milan	10	4	3	1	0	7	3
2	Lazio Rome	9	4	3	0	1	10	5
3	At. Bergame	9	4	3	0	1	3	1
4	Naples	8	4	2	2	0	5	3
5	Juventus Turin	8	4	2	2	0	4	2
6	Udinese	7	4	2	1	1	6	2
7	Catania	7	4	2	1	1	4	3
8	Genoa	6	4	2	0	2	6	4
9	Milan AC	6	4	2	0	2	7	6
10	Palerme	6	4	2	0	2	7	7
11	Torino	5	4	1	2	1	6	5
12	Sienne	5	4	1	2	1	3	2
13	Chievo Verone	5	4	1	2	1	4	5
14	AS Rome	4	4	1	1	2	6	7
15	Lecce	4	4	1	1	2	3	5
16	Fiorentina	4	4	1	1	2	3	6
17	Sampdoria	3	4	0	3	1	2	4
18	Bologne	3	4	1	0	3	2	6
19	Reggina	1	4	0	1	3	3	8
20	Cagliari	0	4	0	0	4	1	8

On s'intéresse aux deux dernières colonnes de chaque grille qui représentent le nombre de buts marqués et encaissés.

1. Compléter les tableaux suivants :

Espagne p.	0	1	2	3	4	5	6	7				Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

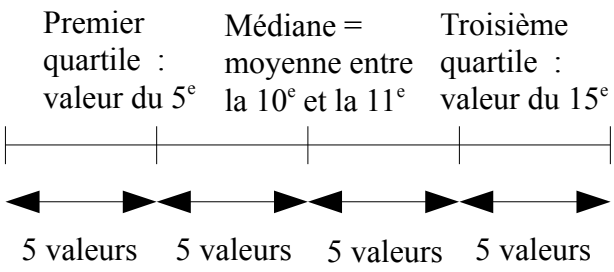
Espagne c.	0	1	2	3	4	5	6	7				Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

Italie p.	0	1	2	3	4	5	6	7				Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

Italie c.	0	1	2	3	4	5	6	7				Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

2. Pour chacune des séries ci-dessus, déterminer sa valeur minimale, sa valeur maximale et son étendue. Ces séries ont-elles un mode (une valeur qui revient plus fréquemment que les autres) ?

3. Pour chaque série, on répartit les valeurs ordonnées par ordre croissant en 4 groupes de même effectif (ici l'effectif total est de 20, donc on fait 4 groupes de 5 valeurs). Pour chaque série, déterminer les quartiles, la médiane et l'intervalle interquartile.



4. Entrer chacune des séries dans la calculatrice.
   a. Utiliser la calculatrice pour déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ_x de chaque série.
   b. Pour chaque série, déterminer le pourcentage de clubs qui n'appartiennent pas aux intervalles $[\overline{x} - \sigma_x ; \overline{x} + \sigma_x]$ et $[\overline{x} - 2\sigma_x ; \overline{x} + 2\sigma_x]$.
   c. À quoi sert l'écart-type ?
5. Récapituler tous les résultats dans le tableau suivant :

séries d'origine	**mode**	**étendue**	**médiane**	**intervalle interquartile**	**moyenne**	**écart-type**
Espagne p.						
Espagne c.						
Italie p.						
Italie c.						

6. Compléter à nouveau le tableau suivant après avoir enlevé pour chaque série ses valeurs extrêmes (min et max) (on pourra utiliser la calculatrice)

sans valeurs extrêmes	**mode**	**étendue**	**médiane**	**intervalle interquartile**	**moyenne**	**écart-type**
Espagne p.						
Espagne c.						
Italie p.						
Italie c.						

   Que remarque-t-on ?
7. Répondre aux questions suivantes :
   a. En ne tenant compte que des séries de départ :
      - un club a une défense ou un gardien défectueux ?
      - un club n'a pas de buteur efficace ?
      - les buts sont plus nombreux en Espagne qu'en Italie ?
   b. En se servant des résultats précédents :
      - est-ce une coïncidence que l'on trouve la même moyenne pour le .p et .c d'un même championnat ?
      - les niveaux des clubs sont plus hétérogènes en Espagne qu'en Italie ?
      - en supposant que les supporters apprécient les matchs proportionnellement au nombre de buts marqués, le championnat d'Italie est-il plus attractif que celui d'Espagne ?
1. En ce mettant dans la peau d'un chroniqueur sportif, rédiger un court article comparatif des résultats à l'issue de la 4e journée de championnat en Espagne et Italie.

Activité

Jours de foot

Voici les résultats à l'issue des neuvième et septième journées de championnat , respectivement en CFA Groupe D et en CFA 2 Groupe H : (extrait Ouest-France du 12/10/09)

CFA - Groupe D

La Vitréenne prend la tête

Pontivy - Auxerre ..... 2 - 1
PONTIVY : Gray (70'), Guyader (85').
AUXERRE : Adriana (44').
700 spectateurs.

Cherbourg - Avranches ..... 1 - 1
CHERBOURG : Mangara (2').
AVRANCHES : Besnier (5').
1411 spectateurs.

Romorantin - Levallois ..... 2 - 0
ROMORANTIN : Claudio (4'), Girard (90' + 2').
850 spectateurs.

Ivry - Caen ..... 1 - 2
IVRY : Rogin (89', sp).
CAEN : Bassingha (8' csc), Raineau (58').
250 spectateurs.

Rennes - Le Havre ..... 3 - 3
RENNES : Thomert (39'), Badiane (42'), Bru (59' sp).
LE HAVRE : Mendes (11'), Nikezic (52'), Nestor (84').
269 spectateurs.

Quevilly - La Vitréenne ..... 1 - 2
QUEVILLY : Ouhabi (69').
LA VITRÉENNE : Bekkar (18'), Pallois (90' + 2' csc).
500 spectateurs.

Carquefou - Orléans ..... 0 - 2
ORLÉANS : Eglin (64'), Lefaix (73').
600 spectateurs.

Quimper - Mantes-Jolie .....
300 spectateurs.

Moissy-Crama. - Viry-Châtillon ... 2
MOISSY-CRAMAYEL : Agasson (9'), Oroque (36').
VIRY-CHÂTILLON : Roga (47', 90' + 1'), Aïchour (56'), Nehouthe (66').
400 spectateurs.

		Pts	J	G	N	P	p.	c.
1.	La Vitréenne	29	9	6	2	1	17	5
2.	Orléans	29	9	6	2	1	15	8
3.	Le Havre	28	9	5	4	0	22	12
4.	Rennes	25	9	5	1	3	12	11
5.	Cherbourg	25	9	5	1	3	13	14
6.	Mantes-Jolie	24	9	4	3	2	12	14
7.	Levallois	22	9	4	1	4	14	15
8.	Caen	21	9	3	3	3	15	11
9.	Auxerre	21	9	3	3	3	9	9
10.	Pontivy	20	9	3	2	4	14	12
11.	Viry-Châtillon	20	9	3	2	4	17	17
12.	Moissy-Crama.	20	9	3	2	4	17	18
13.	Avranches	20	9	3	2	4	9	7
14.	Romorantin	19	9	2	4	3	13	14
15.	Quevilly	19	9	2	4	3	11	13
16.	Ivry	16	9	2	1	6	6	10
17.	Quimper	14	9	1	2	6	5	17
18.	Carquefou	13	9	1	1	7	8	18

10e journée (24 octobre) : Auxerre Cherbourg ; La Vitréenne - Ivry ; Quimper Quevilly ; Viry-Châtillon - Carquefou Levallois - Moissy-Crama. ; Le Havre Pontivy ; Caen - Rennes ; Avranches Romorantin ; Mantes-Jolie - Orléans

CFA 2 - Groupe H

Déjà 27 buts encaissés pour Ecommoy

St-Lô - Changé ..... 4 - 4
SAINT-LO : Hervieu (10'), Koré (11' et 13'), Théault (77').
CHANGE : Geslin (7'), Even (9' et 57'), Avodé (61').

Laval - US Montagnarde ..... 1 - 2
LAVAL : Genest (42').
US MONTAGNARDE : Adjoev (6'), Le Grand (17').

Guingamp - Ecommoy ..... 4 - 0
GUINGAMP : Illien (40'), Knockaert (69'), Ihou (86'), Hamroun (90'+1).

Dives - Brest ..... 1 - 0
DIVES : Haubert (7').

Alençon - Mondeville ..... 0 - 0

AS Vitré - Concarneau ..... 0 - 1
CONCARNEAU : Drouglazet (12').

St-Malo - Chapelle-Marais ..... 2 - 1
SAINT-MALO : Moreau (16'), Valérius (84').
CHAPELLE-DES-MARAIS : Le Gac (64').

Lorient - Vertou ..... 2 - 1
LORIENT : Courtet (12'), Saar (39').
VERTOU : Delanoë (40').

		Pts	J	G	N	P	p.	c.
1.	Lorient	25	7	6	0	1	29	5
2.	Concarneau	23	7	5	1	1	10	3
3.	AS Vitré	21	7	4	2	1	13	5
4.	Dives	18	7	3	2	2	10	11
5.	Guingamp	18	7	3	2	2	12	8
6.	Laval	17	7	3	1	3	13	9
7.	Alençon	17	7	3	1	3	9	11
8.	Brest	16	7	3	0	4	9	9
9.	Changé	16	7	2	3	2	10	15
10.	St-Malo	16	7	3	0	4	13	11
11.	St-Lô	15	7	2	2	3	18	19
12.	US Montagn.	15	7	2	2	3	6	12
13.	Vertou	14	7	2	1	4	9	12
14.	Ecommoy	14	7	2	1	4	9	27
15.	Chapelle-Marais	12	7	1	2	4	6	9
16.	Mondeville	12	7	1	2	4	6	16

8e journée (24 octobre) : Mondeville - Lorient ; Vertou - Dives ; Concarneau - Alençon ; US Montagn. - Changé ; Chapelle-Marais - AS Vitré ; Ecommoy - St-Lô ; Laval - St-Malo ; Brest - Guingamp

7 buts : Courtet (Lorient). **6 buts :** Daniel (Alençon), Koré, Théault (FC Saint-Lô). **5 buts:** Buron, Martin (Lorient) ; Bone (Ecommoy) ; Massouké (Vitré). **4 buts :** Midjo (Saint-Malo), Barthelmé (Lorient), M. Autret (Brest), Morel (Dives), T. Delanoë (Vertou). 3 buts : Lamatina, Garot (Laval) ; Quenet (Vitré), Adjoev (La Montagne), Drouglazet (Concarneau), Moreau (Saint-Malo). **2 buts :** Hubert, Viel, Gourmelon (Concarneau) ; Lecreux (Mondeville), Bova, Leguen (Brest) ; Raddas, Le Goff, Trideau (Laval) ; Lavallée (Dives) ; Buhot (Saint-Lô) ; Le Borgne, Bouderbal (Lorient); Valérius, Christophe (Saint-Malo) ; Coutant, Geslin, Even (Changé) ; Hanteville (Ecommoy) ; Boly, Scarpelli, Hamroun (Guingamp), Le Gac (La Chapelle-des-Marais).

On s'intéresse aux deux dernières colonnes de chaque grille qui représentent le nombre de buts marqués et encaissés.

1. Compléter les tableaux suivants :

CFA – D p.	5											Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

CFA – D c.	7											Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

CFA 2 - H p.	6											Total
Nombre de clubs												
Fréquence												

CFA 2 - H c.	3											Total
Nombre de clubs												

Fréquence												

Pour le CFA groupe D, la dernière colonne avait été coupée à la photocopie : a-t-elle été bien recopiée ?

2. Pour chacune des séries ci-dessus, déterminer sa valeur minimale, sa valeur maximale et son étendue. Ces séries ont-elles un mode (une valeur qui revient plus fréquemment que les autres) ?
3. Pour chaque série, on répartit les valeurs ordonnées par ordre croissant.
   Lorsque les effectifs sont pairs, la médiane est la moyenne entre les 2 valeurs centrales.
   Les quartiles correspondent aux valeurs situées aux quarts supérieurs et inférieurs ajustés ainsi : 25 % des valeurs sont en dessous du premier quartile et 75 % en dessous du troisième quartile. (au sens large)
   Pour chaque série, déterminer les quartiles, la médiane et l'intervalle interquartile.
4. Entrer chacune des séries dans la calculatrice.
   a. Utiliser la calculatrice pour déterminer la moyenne $\overline{x}$ et l'écart type σ_x de chaque série.
   b. Pour chaque série, déterminer le pourcentage de clubs qui n'appartiennent pas aux intervalles [$\overline{x} - \sigma_x$; $\overline{x} + \sigma_x$] et [$\overline{x} - 2\ \sigma_x$; $\overline{x} + 2\ \sigma_x$] .
   c. À quoi sert l'écart-type ?
5. Récapituler tous les résultats dans le tableau suivant :

séries d'origine	**mode**	**étendue**	**médiane**	**intervalle interquartile**	**moyenne**	**écart-type**
CFA – D p.						
CFA – D c.						
CFA 2-H p.						
CFA 2-H c.						

6. Compléter à nouveau le tableau suivant après avoir enlevé pour chaque série ses valeurs extrêmes (min et max) (on pourra utiliser la calculatrice)

sans valeurs extrêmes	**mode**	**étendue**	**médiane**	**intervalle interquartile**	**moyenne**	**écart-type**
CFA – D p.						
CFA – D c.						
CFA 2-H p.						
CFA 2-H c.						

Que remarque-t-on ?

7. Répondre aux questions suivantes :
   a. En ne tenant compte que des séries de départ :
      - un club a une défense ou un gardien défectueux ?
      - un club n'a pas de butteur efficace ?
      - les buts sont plus nombreux en CFA-D qu'en CFA 2-H ?
   a. En se servant des résultats précédents :
      - est-ce une coïncidence que l'on trouve la même moyenne pour le .p et .c d'un même championnat ?
      - les niveaux des clubs sont plus hétérogènes en CFA-D qu'en CFA 2-H ?
      - en supposant que les supporters apprécient les matchs proportionnellement au nombre de

buts marqués, le championnat de CFA 2-H est-il plus attractif que celui de CFA-D ?

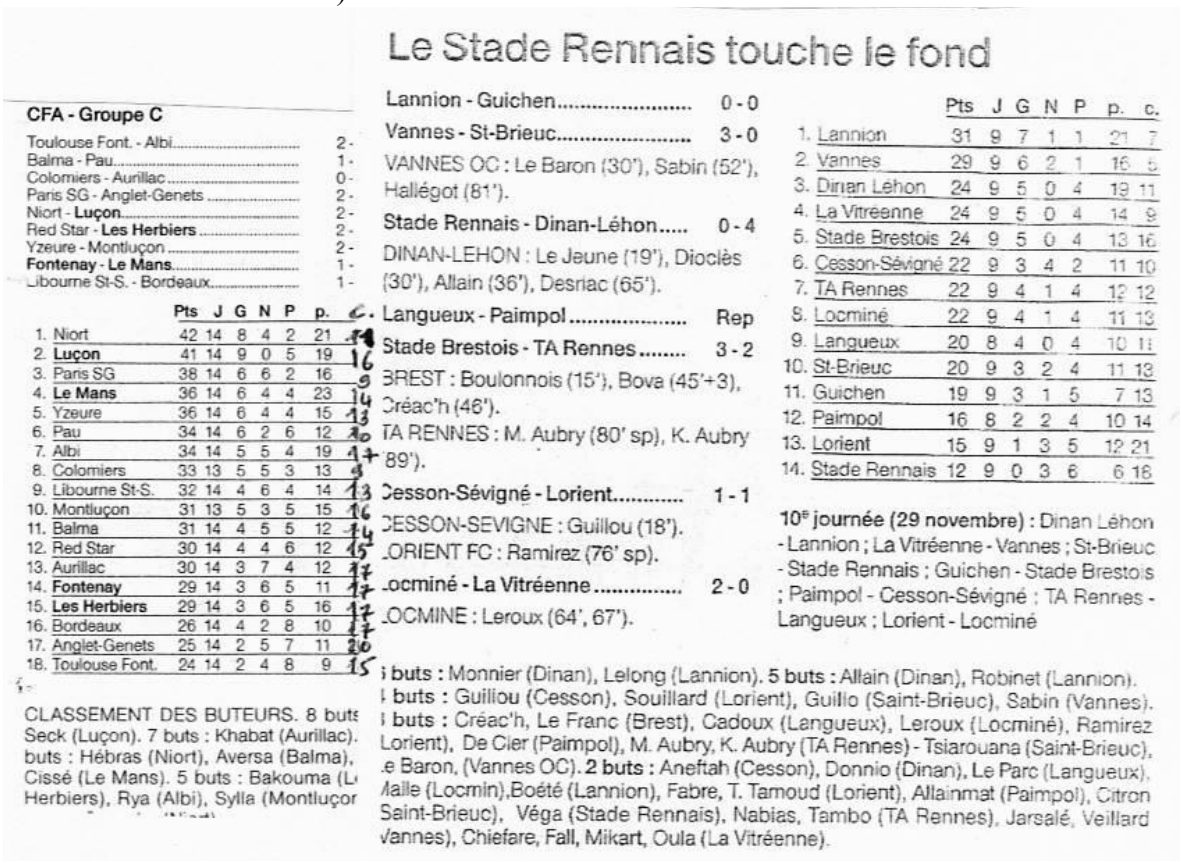
1. En ce mettant dans la peau d'un chroniqueur sportif, rédiger un court article comparatif des résultats à l'issue de ces journées de championnat en CFA-D et CFA 2-H.

-

TP Statistiques

Vendredi 4 décembre 2009

Voici les résultats du championnat de football respectivement de CFA – Groupe C et de DH (extrait Ouest-France du 30/11/09).



CFA - Groupe C

Toulouse Font. - Albi 2-
Balma - Pau 1-
Colomiers - Aurillac 0-
Paris SG - Anglet-Genets 2-
Niort - **Luçon** 2-
Red Star - **Les Herbiers** 2-
Yzeure - Montluçon 2-
Fontenay - Le Mans 1-
Libourne St-S. - Bordeaux 1-

		Pts	J	G	N	P	p.	c.
1.	Niort	42	14	8	4	2	21	8
2.	**Luçon**	41	14	9	0	5	19	16
3.	Paris SG	38	14	6	6	2	16	9
4.	**Le Mans**	36	14	6	4	4	23	14
5.	Yzeure	36	14	6	4	4	15	13
6.	Pau	34	14	6	2	6	12	20
7.	Albi	34	14	5	5	4	19	17
8.	Colomiers	33	13	5	5	3	13	8
9.	Libourne St-S.	32	14	4	6	4	14	13
10.	Montluçon	31	13	5	3	5	15	16
11.	Balma	31	14	4	5	5	12	14
12.	Red Star	30	14	4	4	6	12	15
13.	Aurillac	30	14	3	7	4	12	17
14.	**Fontenay**	29	14	3	6	5	11	17
15.	**Les Herbiers**	29	14	3	6	5	16	17
16.	Bordeaux	26	14	4	2	8	10	17
17.	Anglet-Genets	25	14	2	5	7	11	20
18.	Toulouse Font.	24	14	2	4	8	9	15

CLASSEMENT DES BUTEURS. 8 buts Seck (Luçon). 7 buts : Khabat (Aurillac). buts : Hébras (Niort), Aversa (Balma), Cissé (Le Mans). 5 buts : Bakouma (L Herbiers), Rya (Albi), Sylla (Montluçor

Le Stade Rennais touche le fond

Lannion - Guichen ..... 0 - 0
Vannes - St-Brieuc ..... 3 - 0
VANNES OC : Le Baron (30'), Sabin (52'), Halligot (81').
Stade Rennais - Dinan-Léhon ..... 0 - 4
DINAN-LEHON : Le Jeune (19'), Dioclès (30'), Allain (36'), Desriac (65').
Langueux - Paimpol ..... Rep
Stade Brestois - TA Rennes ..... 3 - 2
BREST : Boulonnois (15'), Bova (45'+3), Créac'h (46').
TA RENNES : M. Aubry (80' sp), K. Aubry (89').
Cesson-Sévigné - Lorient ..... 1 - 1
CESSON-SEVIGNE : Guillou (18').
LORIENT FC : Ramirez (76' sp).
Locminé - La Vitréenne ..... 2 - 0
LOCMINE : Leroux (64', 67').

		Pts	J	G	N	P	p.	c.
1.	Lannion	31	9	7	1	1	21	7
2.	Vannes	29	9	6	2	1	16	5
3.	Dinan Léhon	24	9	5	0	4	19	11
4.	La Vitreenne	24	9	5	0	4	14	9
5.	Stade Brestois	24	9	5	0	4	13	16
6.	Cesson-Sévigné	22	9	3	4	2	11	10
7.	TA Rennes	22	9	4	1	4	12	12
8.	Locminé	22	9	4	1	4	11	13
9.	Langueux	20	8	4	0	4	10	11
10.	St-Brieuc	20	9	3	2	4	11	13
11.	Guichen	19	9	3	1	5	7	13
12.	Paimpol	16	8	2	2	4	10	14
13.	Lorient	15	9	1	3	5	12	21
14.	Stade Rennais	12	9	0	3	6	6	16

10e journée (29 novembre) : Dinan Léhon - Lannion ; La Vitréenne - Vannes ; St-Brieuc - Stade Rennais ; Guichen - Stade Brestois ; Paimpol - Cesson-Sévigné ; TA Rennes - Langueux ; Lorient - Locminé

buts : Monnier (Dinan), Lelong (Lannion). **5 buts :** Allain (Dinan), Robinet (Lannion). **buts :** Guillou (Cesson), Souillard (Lorient), Guillo (Saint-Brieuc), Sabin (Vannes). **buts :** Créac'h, Le Franc (Brest), Cadoux (Langueux), Leroux (Locminé), Ramirez Lorient), De Cler (Paimpol), M. Aubry, K. Aubry (TA Rennes) - Tsiarouana (Saint-Brieuc), e Baron, (Vannes OC). **2 buts :** Aneftah (Cesson), Donnio (Dinan), Le Parc (Langueux), Malle (Locmin),Boété (Lannion), Fabre, T. Tamoud (Lorient), Allainmat (Paimpol), Citron Saint-Brieuc), Véga (Stade Rennais), Nabias, Tambo (TA Rennes), Jarsalé, Veillard Vannes), Chiefare, Fall, Mikart, Oula (La Vitréenne).

Tous les clubs ont-ils joués le même nombre de matches ?

On s'intéresse aux deux dernières colonnes de chaque grille qui représentent le nombre de buts marqués et encaissés.

I. Organisation des données

Entrer chacune des séries dans la calculatrice.

1. Compléter les tableaux suivants :

CFA – Groupe C p.													Total
Nombre de club													
Fréquence													

CFA – Groupe C c.													Total
Nombre de club													
Fréquence													

DH p.													Total
Nombre de club													
Fréquence													

DH c.													Total
Nombre de club													
Fréquence													

Pour le championnat de CFA – Groupe C, la dernière colonne avait été coupée à la photocopie : a-t-elle été bien recopiée ?

2. Au vue des résultats, peut-on dire
- si un club a une défense ou un gardien défectueux ?

- si un club n'a pas de buteur efficace ?

- si les buts sont plus nombreux dans le championnat de CFA – Groupe C que dans le championnat de DH ?

II. Calculs statistiques

Certains résultats demandés seront notés dans le tableau ci-dessous :

5. Pour chacune des séries, déterminer sa valeur minimale, sa valeur maximale et son étendue. Ces séries ont-elles un mode (une valeur qui revient plus fréquemment que les autres) ?

6. Pour chaque série, déterminer les premier et troisième quartiles, la médiane et l'intervalle interquartile.

7. Utiliser la calculatrice pour déterminer la moyenne et l'écart type σ de chaque série.

Séries d'origine	**mode**	**étendue**	**Médiane**	**Intervalle interquartile**	**moyenne**	**Ecart-type**
CFA – Groupe C p.						
CFA – Groupe C c.						
DH p.						
DH c.						

8. Pour chaque série, déterminer le pourcentage de clubs qui n'appartiennent pas aux intervalles $[\ -\sigma\ ;\ +\sigma]$ et $[\ -2\sigma\ ;\ +2\sigma]$. A quoi sert l'écart-type ?

9. Compléter à nouveau le tableau suivant après avoir enlevé pour chaque série ses valeurs extrêmes (min. et max.) (utiliser la calculatrice).

Sans valeurs extrême	**mode**	**étendue**	**Médiane**	**Intervalle interquartile**	**moyenne**	**Ecart-type**
CFA – Groupe C p.						
CFA – Groupe C c.						
DH p.						
DH c.						

Que remarque-t-on ?

10. Est-ce une coïncidence de trouver la même moyenne pour le p. et le c. d'un même championnat ?

11. Dans quel championnat les clubs sont-ils les plus hétérogènes ?

12. Calculer le nombre de buts moyens par match dans chaque championnat.

13. En supposant que les supporters apprécient les matches proportionnellement au nombre de buts marqués, quel est le championnat le plus attractif ?

14. En se mettant dans la peau d'un chroniqueur sportif, rédiger un court article comparatif des résultats à l'issu de ces journées de championnat de CFA – Groupe C et de DH.

Classe de 1re S ou TS

La durée du jour

1. Cadre

Cette activité peut être menée en classes de premières et terminales S. Elle n'a pas été testée en classe.

2. Objectifs

Partie Repérage du programme de première S : BO n° 30 du 23 juillet 2009

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Repérage		
Repérage polaire dans le plan et trigonométrie ; mesures des angles orientés, mesure principale, relation de Chasles, lignes trigonométriques des angles associés. Repérage cartésien dans l'espace. Distance entre deux points en repère orthonormal.	Repérage d'abord d'un point du cercle trigonométrique, à l'aide d'un réel défini à un multiple près de 2p i ; lien entre repérage polaire et repérage cartésien.	

L'activité nécessite de visualiser certaines figures dans l'espace, utilise les formules trigonométrique. Pour une partie du travail il est préférable de connaître le produit scalaire dans l'espace (au programme de la terminale S)**.**.

3. Prérequis

La trigonométrie dans le triangle rectangle.

4. Déroulement.

Poser le problème, montrer le tableau donnant les heures de lever et coucher du soleil pour une année dans un calendrier de la Poste, une page de journal donnant ces heures pour une journée. Poser le problème. Faire des hypothèses, des dessins. Montrer des photos de la terre vue de l'espace. Faire le calcul à une latitude donnée aux solstices d'été et d'hiver.
Pour plus d'information sur ces questions on pourra consulter les suites suivants :

http://xavier.hubaut.info/coursmath/var/jour.htm
http://mapage.noos.fr/r.ferreol/atelecharger/textes/jour/duree%20du%20jour.html
http://www.imcce.fr/langues/fr/

http://images.math.cnrs.fr/Chercher-midi-a-midi-et-quart.html

Activité : La durée du jour

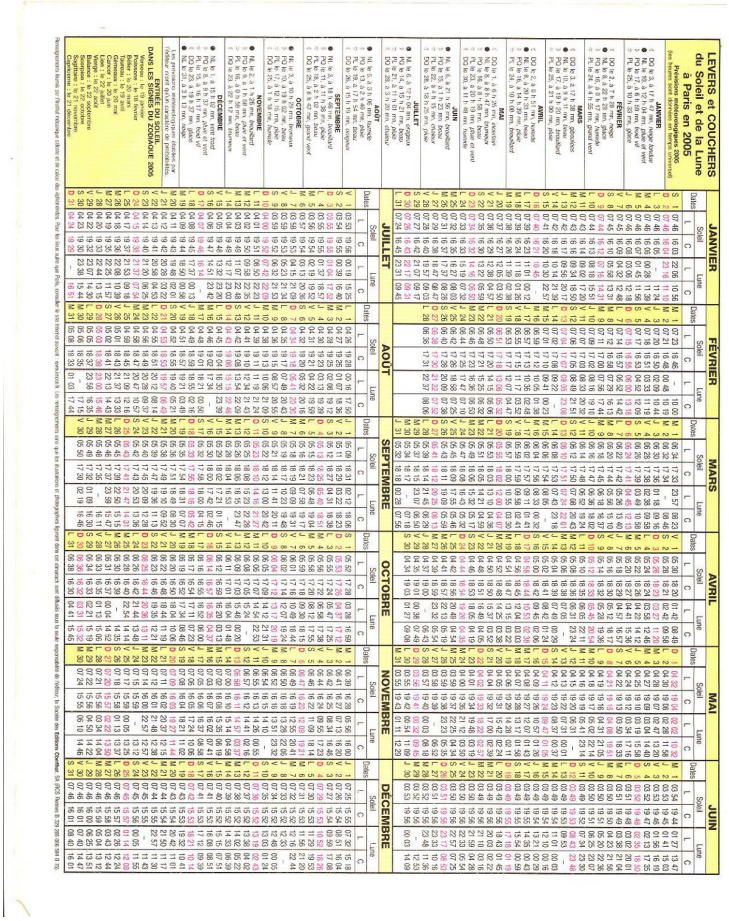
D'où il paraît que les hommes sont dans une impuissance naturelle et immuable de traiter quelque science que ce soit dans un ordre absolument accompli. Mais il ne s'ensuit pas de là qu'on doive abandonner toute sorte d'ordre.

Pascal, De l'esprit géométrique.

Introduction

Chacun peut voir l'éphéméride tous les jours dans Ouest-France.
Chacun peut prendre son calendrier de la poste et y lire les heures de levers et couchers du soleil pour tous les jours de l'année.

Un compas, quelques chiffres sur la terre permettent de retrouver la durée du jour à toute date de l'année en tout point de la terre.
Enfin presque. La terre n'est pas exactement une sphère, son orbite autour du soleil pas exactement un cercle... Mais on peut obtenir une bonne approximation et comprendre beaucoup avec un peu de trigonométrie. Nous assimilerons la terre à une sphère et l'orbite terrestre à un cercle.



Quelques expériences de pensée

Supposez que le soleil se trouve (très loin) exactement au dessus du pôle nord. Décrivez les durées du jour en différents points de la terre.

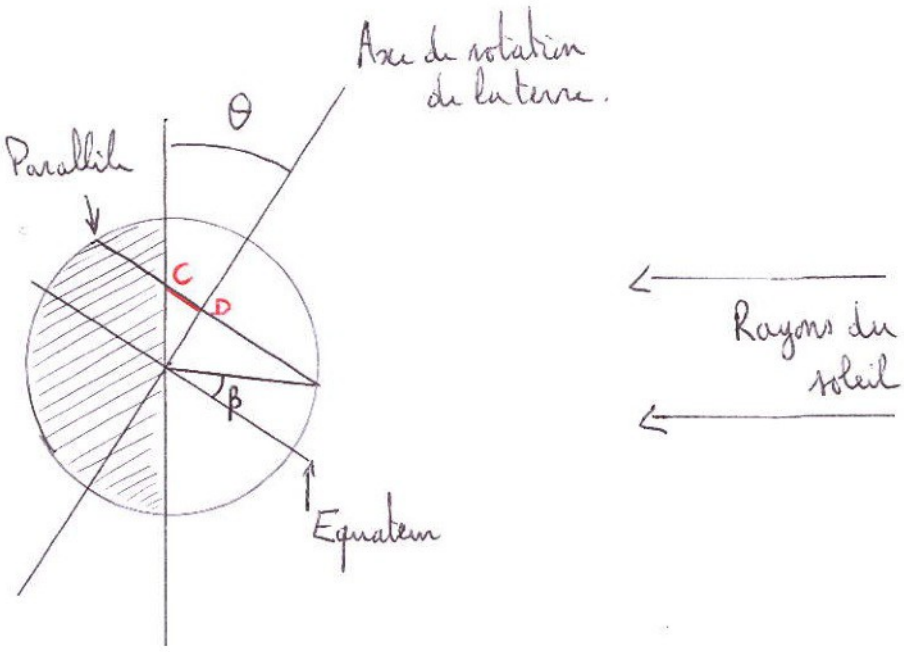
Supposez que les rayons du soleil soient perpendiculaires à la direction de l'axe de rotation de la terre. Décrivez les durées du jour en différents points de la terre.

Pouvez-vous imaginer un déplacement de la terre tel que les rayons du soleil soient toujours perpendiculaires à l'axe de rotation de la terre ? La terre se déplace-t-elle de cette manière ?

Arrive-t-il souvent que les rayons du soleil soient perpendiculaires à l'axe de rotation de la terre ?

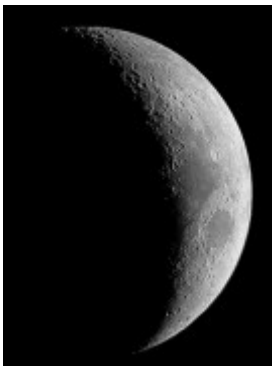
Décrire la durée des jours à l'équateur. Aux pôles. Que représentent les tropiques ? Les cercles polaires ?

Supposons que l'axe de la terre soit penché par rapport aux rayons du soleil comme sur le dessin ci dessous.



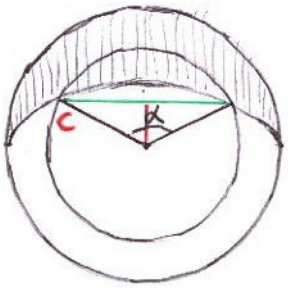
Imaginez que vous vous placiez dans l'espace très loin au-dessus du pôle nord. Vous voyez la terre comme un cercle et sur ce cercle vous voyez la séparation entre le jour et la nuit. Dessinez à peu près la forme de la séparation entre les deux. Même chose si vous vous placez très loin au-dessus (ou en dessous si vous préférez) du pôle sud.

Les photos suivantes peuvent aider à faire les dessins demandés.



Calculez de la durée du jour en fonction de la latitude et de l'angle d'inclinaison des rayons solaires par rapport à l'axe de rotation de la terre

Tracez la trajectoire d'un point à la surface de la terre (dans l'un des hémisphère) au cours d'une journée sur le dessin précédent. Il fait nuit en ce point lorsqu'il se trouve à l'ombre. Exprimez la durée de la nuit en ce point utilisant un angle.



Vue du dessus du pôle nord

La durée de la nuit en heures est α divisé par 2π (ou 360 si on travaille en degré) multiplié par 24.

Exprimez le cosinus de l'angle en fonction de la latitude du point et de l'angle θ.

Réponse (si l désigne la latitude et θ l'angle d'inclinaison de l'axe de rotation de la terre par rapport au plan de l'écliptique) : $\cos(\alpha/2)=\tan(\theta)\tan(l)$.

Réfléchissez à la formule. Que se passe-t-il si $\tan(\theta)\tan(l)>1$? A quoi cela correspond-il ?

L'axe de rotation de la terre fait avec le plan de rotation autour du soleil un angle de 66,56 degrés. Rennes se trouve à 48 degré 6 minutes 52 secondes de latitude nord. Quelle est la durée du jour au solstice d'hiver à Rennes ?

Comparer à ce qui est indiqué sur le calendrier de la poste.

Calculez de l'angle d'inclinaison des rayons solaires par rapport à l'axe de rotation de la terre en fonction de la date

C'est un peu plus dur[16].

Faites un programme sur votre calculatrice demandant la date, la latitude et rendant les heures de lever et coucher du soleil.

16http://mapage.noos.fr/r.ferreol/atelecharger/textes/jour/duree%20du%20jour.html

Classe de 1re S ou 1re ES ou TS ou TES

Le pari de Pascal

1. Cadre

Cette activité peut être menée en classes de premières et terminales S et ES. Elle n'a pas été testée en classe.

2. Objectifs

Réfléchir à la notion d'espérance mathématiques. Utiliser des modèles mathématiques simples pour comprendre un texte historique difficile.
Partie Probabilités-Statistique du programme de première S : BO n° 30 du 23 juillet 2009

CONTENUS	CAPACITES ATTENDUES	COMMENTAIRES
Probabilités		
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, espérance, variance, écart-type. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.).	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boîtes obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10$; 100 ; 1000. On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.).	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.* On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance de lois de probabilité.

3. Prérequis

Avoir défini l'espérance d'une variable aléatoire et l'avoir calculé dans quelques cas simples. Pour la dernière partie de l'activité (calcul de mensualité de remboursement d'emprunt) avoir travaillé avec les suites géométriques.

4. Déroulement

Faire lire le texte de Pascal sans commentaire. Faire ensuite quelques caluls d'espérance pour un jeu de pile ou face avec différentes mises et différentes probabilités de gagner. Faire ensuite une

lecture commune. Discuter en prenant pour point de départ la dernière partie du dialogue de Rohmer. Aborder le problème de l'importance de la répétition de l'expérience.

Activité : Le pari de Pascal

Les raisonnements que Pascal a tenus pour répondre à des problèmes au sujet de jeux de hasard que lui a posés le chevalier de Méré sont considérés comme les premiers exemples de ce qu'on appelle aujourd'hui le calcul mathématique des probabilités et l'espérance mathématique[17]. Le fameux pari de Pascal n'est qu'une application de ces raisonnements au domaine religieux. L'histoire littéraire a accordé une très grande place au fragment 397 des pensées où l'argument du pari est exposé.

1) Une petite discussion sur les jeux de hasard

Imaginons le jeu simple suivant. Un joueur mise une certaine somme M. Une pièce équilibrée est lancée. Si elle tombe sur pile, le joueur se voit donner une somme S, sinon il perd sa mise.

Question : combien le joueur gagne-t-il en moyenne ?

Réponse : il gagne S-M avec probabilité 1/2, -M avec probabilité 1/2, donc il gagne en moyenne la somme 1/2(S-M)+1/2(-M) soit 1/2(S-2M).

En moyenne le joueur gagne quelque chose si S>2M, il perd quelque chose si S<2M.

La quantité 1/2(S-2M) est appelée l'espérance du gain du joueur. Le sens de cette moyenne n'est pas forcément très clair.

Une façon de mieux en comprendre la signification est de considérer une répétition d'un grand nombre N de parties. La pièce tombera certainement à peu près N/2 fois sur pile, N/2 fois sur face. Les gains du joueur seront donc à peu près : N/2(S-M)+N/2(-M)=N/2(S-2M) soit un gain moyen par partie de 1/2(S-2M).

Ce qui est déduit de ce calcul est que si l'espérance du gain est positive on a intérêt à jouer, si elle est négative intérêt à ne pas jouer.

Par exemple, dans notre jeu si S=3M, on a intérêt à jouer.

Remplaçons la pièce par un dé à 6 faces. Un joueur mise une certaine somme M. Un dé équilibré est lancé. S'il tombe sur 6, le joueur se voit donner une somme S, sinon il perd sa mise. Ici le gain moyen du joueur est 1/6(S-M)+5/6(-M)=1/6(S-6M). Pour que le jeu soit intéressant pour le joueur, il faut donc que S>6M.

Remplaçons la pièce par un dé à p faces avec la même règle de jeu. Cette fois le gain moyen du joueur est 1/p(S-pM). Pour que le jeu soit intéressant pour le joueur, il faut donc que S>pM.

Conclusion 1 : plus le nombre de face est grand (plus la probabilité de gagner est petite), plus le lot doit être important pour que le jeu soit intéressant pour le joueur.
Conclusion 2 : si le lot S est infini alors quelque soit le nombre de faces du dé, le joueur a intérêt à jouer.
Conclusion 3 : si le dé a un nombre infini de faces, quelque soit le lot, le joueur n'a pas intérêt à jouer.
Problème : Et si le dé a une infinité de face, et le gain est infini ?

17 Voir l'article de Yves Derriennic, Pascal et les problème du chevalier de Méré, Gazette des mathématiciens numéro 97, 2003. Article disponible à l'adresse suivante : http://smf4.emath.fr/en/Publications/Gazette/2003/97/smf_gazette_97_45-71.pdf

2) Lecture d'un extrait (célèbre) des pensées

Fragment 397 des pensées.

Examinons donc ce point, et disons : "Dieu est, ou il n'est pas." Mais de quel côté pencherons-nous ? La raison n'y peut rien déterminer : il y a un chaos infini qui nous sépare. Il se joue un jeu, à l'extrémité de cette distance infinie, où il arrivera croix ou pile. Que gagerez-vous ? Par raison, vous ne pouvez faire ni l'un ni l'autre ; par raison, vous ne pouvez défendre nul des deux[18].
Ne blâmez donc pas de fausseté ceux qui ont pris un choix ; car vous n'en savez rien.

- "Non ; mais je les blâmerai d'avoir fait, non ce choix, mais un choix ; car, encore que celui qui prend croix et l'autre soient en pareille faute, ils sont tous deux en faute : le juste est de ne point parier."

- Oui ; mais il faut parier. Cela n'est pas volontaire, vous êtes embarqué. Lequel prendrez-vous donc ? Voyons. Puisqu'il faut choisir, voyons ce qui vous intéresse le moins. Vous avez deux choses à perdre : le vrai et le bien, et deux choses à engager : votre raison et votre volonté, votre connaissance et votre béatitude ; et votre nature a deux choses à fuir : l'erreur et la misère. Votre raison n'est pas plus blessée, en choisissant l'un que l'autre, puisqu'il faut nécessairement choisir. Voilà un point vidé. Mais votre béatitude ? Pesons le gain et la perte, en prenant croix que Dieu est. Estimons ces deux cas : si vous gagnez, vous gagnez tout ; si vous perdez, vous ne perdez rien. Gagez donc qu'il est, sans hésiter[19].

- "Cela est admirable. Oui, il faut gager ; mais je gage peut-être trop."

- Voyons. puisqu'il y a pareil hasard de gain et de perte, si vous n'aviez qu'à gagner deux vies pour une, vous pourriez encore gagner [20] ; mais s'il y en avait trois à gagner, il faudrait encore jouer (puisque vous êtes dans la nécessité de jouer), et vous seriez imprudent, lorsque vous êtes forcé de jouer, de ne pas hasarder votre vie pour en gagner trois, à un jeu où il y a pareil hasard de perte et de gain [21]. Mais il y a une éternité de vie et de bonheur. Et cela étant, quand il aurait une infinité de hasards [22], on peut imaginer un dé à la place d'une pièce, dé dont on ne connaît pas le nombre de face dont un seul serait pour vous, vous auriez encore raison de gager un pour avoir deux[23] ; et vous agiriez de mauvais sens, en étant obligé à jouer, de refuser de jouer une vie contre trois à un jeu où d'une infinité de hasards il y en a un pour vous, s'il y avait une infinité de vie infiniment heureuse à gagner[24]. Mais il y a ici une infinité de vie infiniment heureuse à gagner, un hasard de gain contre un nombre fini de hasards de perte[25], et ce que vous jouez est fini. Cela ôte tout parti[26] : partout où est l'infini, et où il n'y a pas infinité de hasards de perte contre celui du gain, il n'y a point à balancer, il faut tout donner[27]. Et ainsi, quand on est forcé à jouer, il faut renoncer à la raison pour garder la vie, plutôt que de la hasarder pour le gain infini aussi prêt à arriver que la perte du néant.
Car il ne sert de rien de dire qu'il est incertain si on gagnera, et qu'il est certain qu'on hasarde, et que l'infinie distance qui est entre la certitude de ce qu'on s'expose, et l'incertitude de ce qu'on gagnera, égale

18 La raison n'est d'aucun secours. L'information nécessaire à la décision est hors de portée.
19 La mise n'est pas prise en compte ici.
20 Si on peut gagner deux vies contre une misée à un jeu de pile ou face équiprobable alors cela peut être intéressant de tenter sa chance.
21 Si on est obligé de jouer avec un gain de trois vies alors il faut parier.
22 Le jeu maintenant peut être déséquilibré, non équiprobable.
23 En moyenne ?
24 Attention ! Forme indéterminée l'infini divisé par l'infini.
25 Le dé a un nombre fini de faces.
26 Nous avons donc l'infini divisé par un nombre fini.
27 La mise étant finie, l'espérance du gain est infinie.

le bien fini, qu'on expose certainement, à l'infini, qui est incertain[28]. Cela n'est pas ; aussi tout joueur hasarde avec certitude pour gagner avec incertitude ; et néanmoins il hasarde certainement le fini pour gagner incertainement le fini, sans pécher contre la raison. Il n'y a pas infinité de distance entre cette certitude de ce qu'on s'expose et l'incertitude du gain ; cela est faux. Il y a, à la vérité, infinité entre la certitude de gagner et la certitude de perdre. Mais l'incertitude de gagner est proportionnée à la certitude de ce qu'on hasarde, selon la proportion des hasards de gain et de perte. Et de là vient que, s'il y a autant de hasards d'un côté que de l'autre, le parti est à jouer égal contre égal [29] ; et alors la certitude de ce qu'on s'expose est égale à l'incertitude du gain : tant s'en faut qu'elle en soit infiniment distante. Et ainsi, notre proposition est dans un force infinie, quand il y a le fini à hasarder à un jeu où il y a pareils hasards de gain que de perte, et l'infini à gagner. Cela est démonstratif ; et si les hommes sont capables de quelque vérité, celle-là l'est.

3) Critique

Une discussion ouverte doit être possible. On pourra montrer un extrait du film « Ma nuit chez Maud » d'Eric Rohmer où il est question du pari de Pascal[30].

Voici le dialogue.
Version du Pari de Pascal, inventée par Eric Rohmer pour « Ma nuit chez Maud ».
L'histoire se passe à Clermont-Ferrand. Celui qui dit « je » le premier est ingénieur. L'autre (Vidal) est professeur de philosophie à la fac. Ils ont été amis il y a une douzaine d'années lorsqu'ils étaient étudiants. Ils se rencontrent par hasard dans un café.
– Ah, tiens ! dis-je, Pascal !
– Ca t'étonne ?
– C'est curieux. Je suis justement en train de le relire, en ce moment.
– Et alors ?
– Je suis très déçu.
– Dis, continue, ça m'intéresse.
– Ben, je ne sais pas. D'abord, j'ai l'impression de le connaître presque par cœur. Et puis ça ne m'apporte rien : je trouve ça assez vide. Dans la mesure où je suis catholique, ou tout au moins j'essaie de l'être, ça ne va pas du tout dans le sens de mon catholicisme actuel. C'est justement parce que je suis

28 Un tiens vaut mieux que deux tu l'auras ; Pascal conteste que la certitude puisse avoir une valeur infinie.
29 Jeu équilibré.
30 Le texte du passage du film est retranscrit dans l'article d'Yves Derriennic (http://smf4.emath.fr/Publications/Gazette/2003/97/smf_gazette_97_45-71.pdf).

chrétien que je m'insurge contre ce rigorisme. Ou alors, si le christianisme c'est ça, moi je suis athée !... Tu es toujours marxiste ?
– Oui, précisément : pour un communiste, ce texte du pari est extrêmement actuel. Au fond, moi, je doute profondément que l'histoire ait un sens. Pourtant, je parie pour le sens de l'histoire, et je me trouve dans la situation pascalienne. Hypothèse A : la vie sociale et toute action politique sont totalement dépourvues de sens. Hypothèse B : l'histoire a un sens. Je ne suis absolument pas sûr que l'hypothèse B ait plus de chances d'être vraie que l'hypothèse A. Je vais même dire qu'elle en a moins. Admettons que l'hypothèse B n'a que dix pour cent de chances et l'hypothèse A quatre-vingt-dix pour cent. Néanmoins, je ne peux pas ne pas parier pour l'hypothèse B, parce qu'elle est la seule qui me permette de vivre. Admettons que j'aie parié pour l'hypothèse A et que l'hypothèse B se vérifie, malgré ses dix pour cent de chances, seulement : alors j'ai absolument perdu ma vie... Donc je dois choisir l'hypothèse B, parce qu'elle est la seule qui justifie ma vie et mon action. Naturellement, il y a quatre-vingt-dix chances pour cent que je me trompe, mais ça n'a aucune importance.
– C'est ce qu'on appelle l'espérance mathématique, c'est-à-dire le produit du gain par la probabilité. Dans le cas de ton hypothèse B, la probabilité est faible, mais le gain est infini, puisque c'est pour toi le sens de ta vie, et pour Pascal le salut éternel.
Deux jours plus tard
Dès qu'elles sont sorties, Vidal se lève et va vers la bibliothèque.
– Il doit bien y avoir un Pascal, ici. On a beau être franc-maçon...
Il s'accroupit et découvre sur le rayon inférieur, une édition scolaire des Pensées. Il la feuillette. Je me suis levé et m'approche de lui.
– Pourrais-tu me dire, me demande-t-il, s'il y a une référence précise aux mathématiques dans le texte sur le pari. (Il lit) : « Partout où est l'infini et où il n'y a pas infinité de hasard de perte contre celui de gain, il n'y a point à balancer : il faut tout donner... et ainsi, quand on est forcé à jouer, il faut renoncer à la raison
pour garder la vie », etc.
Il me tend le livre. J'y jette un coup d'oeil.
– C'est exactement ça, « l'espérance mathématique », dis-je. Dans le cas de Pascal, elle est toujours infinie... à moins que la probabilité de salut ne soit nulle. Puisque l'infini multiplié par zéro égale zéro. Donc l'argument ne vaut rien pour quelqu'un qui est absolument incroyant.

Dans le cas du pari de Pascal la question du refus de jouer ne se pose pas. « On est embarqué » comme il dit. Quand cette question se pose, on peut s'interroger sur le sens du choix de l'option qui assure la plus grande espérance. En effet, l'intérêt de jouer quand l'espérance est positive est lié à la possibilité de répéter le jeu. Cet intérêt est-il le même lorsque la répétition est impossible ?

Prenons un exemple.

Supposez que vous et votre famille disposiez d'un revenu annuel de 50 000 euros après impôts (selon l'INSEE le revenu moyen en France en 2007 avant impôts par ménage est de 39 000 euros environ, 54 000 pour les familles ayant deux enfants) et qu'aucune autre source de revenu ne soit imaginable.
Et que je vous propose le jeu suivant. Vous misez 500 000 euros. Avec probabilité 1/100 je vous donne 101 fois votre mise, avec probabilité 99/100 vous perdez 500 000 euros ?

Jouez-vous ?

L'espérance du gain est 1/100(101.500 000-100.500 000)=5000 euros. Elle est donc positive. Vous pouvez considérer qu'il est donc intéressant de jouer. Et en effet si je vous faisait crédit pendant autant de partie que vous voulez vous auriez intérêt à jouer. Mais je ne fais pas crédit. Vous devez déposez l'argent sur mon compte. Il vous faut donc l'emprunter. Disons que vous l'empruntez à 3%. Calculez (en utilisant les suites géométriques) ce qu'il vous faudra donner chaque année à la banque pour rembourser cet emprunt en 40 ans.

Le type de raisonnement conduit par Pascal a été repris sous des formes diverses et appliqué à une multitude de situations. La validité des résultats obtenus est le plus souvent très discutée. Mais les recherches sociales s'appuyant sur ce type de raisonnement ont eu et ont toujours beaucoup de succès. Citons par exemple le travail de G. Becker sur l'économie du crime ("Crime and Punishment: An Economic Approach", 1968).

Classe de 1re S

Problème du Chevalier de Méré

extrait

d'une lettre de Pascal à Fermat

Classe	Thèmes	Objectifs	Outils
Première S	* statistiques * probabilités	* tableur * espérance	tableur

1. Cadre

Une classe de 1re S de 31 élèves en demi-groupe pour l'activité tableur.

2. Objectifs

‣ Modélisation et simulation d'une expérience aléatoire sur tableur (utilisation de formules ; condition) ; aspect théorique avec arbres de dénombrement, loi de probabilité et calcul de l'espérance
‣ Place dans le programme : BO hors série n°7 du 31 août 2000

CONTENUS	MODALITES DE MISE EN OEUVRE	COMMENTAIRES
Probabilités		
Définition d'une loi de probabilité sur un ensemble fini. Espérance, variance, écart-type d'une loi de probabilité. Probabilité d'un événement, de la réunion et de l'intersection d'événements. Cas de l'équiprobabilité. Variable aléatoire, loi d'une variable aléatoire, espérance, variance, écart-type. Modélisation d'expériences aléatoires de référence (lancers d'un ou plusieurs dés ou pièces discernables ou non, tirage au hasard dans une urne, choix de chiffres au hasard, etc.)	Le lien entre loi de probabilité et distributions de fréquences sera éclairé par un énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres. On expliquera ainsi la convergence des moyennes vers l'espérance et des variances empiriques vers les variances théoriques ; on illustrera ceci par des simulations dans des cas simples. On pourra aussi illustrer cette loi avec les diagrammes en boites obtenus en simulant par exemple 100 sondages de taille n, pour $n = 10$; 100 ; 1000. On simulera des lois de probabilités simples obtenues comme images d'une loi équirépartie par une variable aléatoire (sondage, somme des faces de deux dés, etc.)	On pourra par exemple choisir comme énoncé vulgarisé de la loi des grands nombres la proposition suivante : *Pour une expérience donnée, dans le modèle défini par une loi de probabilité P, les distributions des fréquences calculées sur des séries de taille n se rapprochent de P quand n devient grand.* On indiquera que simuler une expérience consiste à simuler un modèle de cette expérience. La modélisation avec des lois ne découlant pas d'une loi équirépartie est hors programme. On évitera le calcul systématique et sans but précis de l'espérance et de la variance des lois de probabilités.

‣ Insertion dans la progression : en fin de chapitre sur les probabilités.
‣ Notions abordées : fonctions du tableur : nombres aléatoires, condition ; probabilités : loi de probabilité ; espérance.

3. Déroulement

Le texte est donné à lire à la maison avec un tableau à compléter pour résumer les différentes répartitions proposées.
En demi-groupe : travail individuel sur ordinateur ; le tableur permet de simuler les répartitions et de confronter avec les sommes proposées par Pascal.
À la maison : travail à faire sur exercice de même type (au choix).
En classe entière, bilan en termes de probabilités (partie démonstration).

4. Observations et commentaires

Activité
Les tableaux ont été remplis à la maison par tous les élèves mais je n'ai pas pu les récupérer pour faire le bilan car le texte pouvait servir d'aide pour le devoir maison.
Pour la partie tableur, le professeur aide beaucoup les élèves pour l'établissement du premier cas ; les élèves se débrouillent ensuite -erreurs entre les 2 groupes suivant le choix de la condition (somme ou pas) : si la condition n'est pas la somme des résultats précédents mais la valeur de la dernière case, la feuille doit subir plus de modifications pour modéliser les répartitions suivantes.

Bilan du devoir maison : sur les 15 devoirs récupérés (les élèves avaient à choisir un sujet au choix sur les 4 mais certains ont émis l'hypothèse de pouvoir gagner des points supplémentaires en les abordant tous) :
Certains ont repris le raisonnement de Pascal, en modifiant les valeurs, d'autres ont cherché à traduire en termes de probabilités, et d'autres encore en termes de parts.
1. Problème de Pacioli (1)
- Raisonnement adapté de Pascal : 9,375 ducats pour le premier joueur et 0,625 au second (3 élèves)
- En termes de probabilité : 1/16 pour le second de gagner 4 parties à suivre multiplié par les 10 ducats → 0,625 au second et 9,375 ducats pour le premier joueur (3 élèves)
- En termes de parts : 70 points obtenus mis en rapport avec les 10 ducats ; répartition proportionnelle aux gains actuels soit 50/70 des 10 ducats pour le premier (3 élèves)
2. Problème de Pacioli (2)
- En termes de parts : 9 flèches ont été tirées donc répartition 4/9 pour le premier joueur, 3/9 pour le second et 2/9 pour le dernier (3 élèves)
- En termes de parts des coups non tirés (?) : total de 16 coups ; répartition 1/4 ; 3/16 ; 1/8 puis répartition équitable du reste ce qui donne 3,9583 au premier, 3,3333 au second et 2,7083 au dernier
3. Problème de Forestani
- 5 parties sur 15 envisageables donnent 1/3 des 4 ducats ; et répartition équitable des 7 parties non jouées soit 1/3 + 1/2 de 7/15 des 4 ducats pour le premier joueur (2 élèves)
- 8 jeux effectués donc répartition 5/8 et 3/8 (1 élève)
4. Version d'actualité
- Raisonnement adapté de Pascal : Federer reçoit 882 500 € et Nadal 647 500 € (3 élèves)
- Les raisonnements adaptés de Pascal concernent 6 élèves, les raisonnements par probabilités 3 élèves et les raisonnements en parts (qui conduisent à des résultats faux) (6 + 1 (?) élèves)

Proposition d'amendement
Une autre version d'actualité : « à prendre ou à laisser », jeu passant actuellement à la télévision, propose au concurrent d'arrêter le jeu en cours de route contre une somme donnée par le banquier.

Activité **Problème du Chevalier de Méré**

Thème : le problème des paris

« Deux joueurs jouent à « un jeu de pur hasard », et le premier qui gagne un nombre de « parties » déterminé sera désigné vainqueur. S'ils doivent « quitter le jeu » avant qu'il soit normalement achevé par la victoire de l'un ou de l'autre, comment doivent-ils partager « l'argent qu'ils ont mis en jeu » ?

Problème posé par le Chevalier de Méré

Deux joueurs A et B sont engagés dans un jeu en plusieurs parties aléatoires. Chacun parie 32 pistoles. Le premier qui gagne trois parties remporte la totalité de la mise. Le Chevalier de Méré s'est demandé comment répartir la mise si les joueurs décident d'interrompre le jeu avant que l'un d'entre eux ait gagné trois parties.

Texte à lire : Réponse de Pascal

Voici à peu près comme je fais pour savoir la valeur de chacune des parties, quand deux joueurs jouent, par exemple, en trois parties, et chacun a mis 32 pistoles au jeu :
Posons que le premier en ait deux et l'autre une ; ils jouent maintenant une partie, dont le sort est tel que, si le premier la gagne, il gagne tout l'argent qui est au jeu, savoir, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, il sont deux parties à deux parties, et par conséquent, s'ils veulent se séparer, il faut qu'ils retirent chacun leur mise, savoir, chacun 32 pistoles.
Considérez donc, Monsieur, que si le premier gagne, il lui appartient 64 ; s'il perd, il lui appartient 32. Donc s'ils veulent ne point hasarder cette partie et se séparer sans la jouer, le premier doit dire :
"Je suis sûr d'avoir 32 pistoles, car la perte même me les donne ; mais pour les 32 autres, peut-être je les aurai, peut-être vous les aurez ; le hasard est égal ; partageons donc ces 32 pistoles par la moitié et me donnez, outre cela, mes 32 qui me sont sûres." Il aura donc 48 pistoles et l'autre 16.
Posons maintenant que le premier ait deux parties et l'autre point, et ils commencent à jouer une partie. Le sort de cette partie est tel que, si le premier la gagne, il tire tout l'argent, 64 pistoles ; si l'autre la gagne, les voilà revenus au cas précédent, auquel le premier aura deux parties et l'autre une.
Or, nous avons déjà montré qu'en ce cas, il appartient à celui qui a les deux parties, 48 pistoles : donc, s'ils veulent ne point jouer cette partie, il doit dire ainsi : "Si je la gagne, je gagnerai tout, qui est 64 ; si je la perds, il m'appartiendra légitimement 48 : donc donnez-moi les 48 qui me sont certaines au cas même que je perde, et partageons les 16 autres par la moitié, puisqu'il y a autant de hasard que vous les gagniez comme moi." Ainsi il y aura 48 et 8, qui sont 56 pistoles.
Posons enfin que le premier n'ait qu'une partie et l'autre point.
Vous voyez, Monsieur, que, s'ils commencent une partie nouvelle, le sort en est tel que, si le premier la gagne, il aura deux parties à point, et partant, par le cas précédent, il appartient 56 ; s'il la perd, ils sont partie à partie : donc il lui appartient 32 pistoles. Donc il doit dire : "Si vous voulez ne la pas jouer, donnez-moi 32 pistoles qui me sont sûres, et partageons le reste de 56 par la moitié. De 56 ôtez 32, reste 24 ; partagez donc 24 par la moitié, prenez-en 12, et moi 12, qui avec 32, font 44."

Travail préparatoire à effectuer à la maison et à rapporter le jeudi 20 mai 2010 :

1. Combien de parties au maximum faut-il jouer pour avoir un gagnant ?
2. Résumer le texte dans les trois premières colonnes du tableau suivant :

Cas de figure	2 à 1	2 à rien	1 à rien	2 à 2	1 à 1	0 à 0
Gain premier joueur						

Gain deuxième joueur						

3. Compléter les 3 colonnes restantes.

TP-info Problème du Chevalier de Méré

Partie A : modélisation avec le tableur

Avec le tableur, on peut simuler la victoire de l'un ou l'autre des joueurs de la façon suivante :
en affectant à la victoire du premier joueur la valeur 0 et à celle du second la valeur 1, la fonction ALEA.ENTRE.BORNES(0;1) permet de simuler le résultat d'une partie.

1. Ouvrir une feuille de tableur :
   a. On suppose que le premier joueur a remporté les deux premières parties et le deuxième joueur la troisième partie. Générer aléatoirement à l'aide du tableur le résultat de la quatrième partie.
   b. Si le premier joueur a gagné cette quatrième partie, il a gagné le jeu ; sinon il faut faire une cinquième partie. En utilisant la fonction SI(condition ; valeur si la condition est respectée ; valeur si la condition n'est pas respectée), simuler le « résultat » de cette cinquième partie ou faire afficher « arrêt » si celle-ci n'a pas lieu d'être.

Appeler le professeur pour valider

   c. Quelles sont les sommes possibles lorsqu'on additionne les valeurs affichées pour chacune des parties (la valeur « arrêt » étant comptabilisée 0 par le logiciel) ? En déduire la formule à utiliser pour calculer le gain du premier joueur.

Appeler le professeur pour valider

2.
   a. On reproduit 100 fois le jeu précédent. Faire une moyenne du gain du premier joueur. Est-ce en rapport avec ce qu'a proposé Pascal.
   b. Obtient-on toujours le même résultat si on reproduit le jeu 500 fois ? 1000 fois ?

Appeler le professeur pour valider

3. On s'intéresse maintenant au deuxième cas de figure exposé par Pascal : le premier joueur a remporté 2 parties et l'autre aucune.
   a. Utiliser des formules adéquates pour simuler les 3 « dernières » parties (ou « arrêt » s'il y a lieu).
   b. Reproduire le jeu 1000 fois et calculer la moyenne de gain pour le premier joueur.

Appeler le professeur pour valider

4. Modéliser le dernier cas évoqué par Pascal.

Appeler le professeur pour valider

Partie B : démonstration

1. On s'intéresse au premier cas : le premier joueur a gagné les deux premières parties et le second la troisième.
   a. Construire un arbre qui représente les différentes possibilités pour la fin du jeu.
   b. En déduire la loi de probabilité du gain du joueur 1 ainsi que son espérance.

c. Comparer avec les résultats de Pascal.

2. Résoudre de même les deux autres cas évoqués par Pascal.

Devoir maison à rendre pour le mardi 1 juin 2010

Résoudre un des problèmes suivants (au choix) à rendre pour le mardi 1 juin.

1. Problème de Pacioli (1)

« Deux camps jouent à la balle ; chaque manche est de dix points et il faut 60 points pour gagner le jeu ; la mise totale est de dix ducats. Il arrive que, pour quelque raison accidentelle, le jeu ne puisse s'achever. On demande ce que touche de la mise totale chacun des deux camps, lorsque l'un a 50 points et l'autre 20 points ».

2. Problème de Pacioli (2)

« Trois hommes tirant à l'arbalète jouent à qui marquera le premier les 6 coups « les meilleurs ». La mise totale est de 10 ducats. Alors que le premier tireur a 4 coups, le second 3, le troisième 2, ils ne veulent pas poursuivre et s'accordent pour partager la mise. Comment font-ils ?»

3. Problème de Forestani

« Un gentilhomme âgé qui, retrouvant sa maison de campagne, et affectionnant beaucoup le jeu de balle, demande à deux jeunes paysans d'y jouer devant lui à cette condition que celui des deux qui aura gagné le premier huit jeux aura 4 ducats. Et voilà qu'ils perdent la balle alors que l'un a 5 jeux et l'autre 3. Comment partager la récompense ? »

4. Version d'actualité

Roger Federer et Rafaël Nadal disputent la finale d'un tournoi. Le vainqueur se verra remettre la somme de 1 000 000 € et son challenger 530 000 €. Un orage très violent s'abat sur le terrain alors que Roger Federer mène 2 sets à 1. Devant les dégâts occasionnés par les grêlons et le temps qu'il faudra pour les réparer, les organisateurs décident de supprimer la finale. Comment vont-ils répartir les gains ?

Sommaire des activités proposées

Classe	Thème	Support texte	Page
5e	Fractions	L'homme qui calculait	10
1re S	Suites	L'homme qui calculait	15
T L	Suites et fonctions	Le démon des maths	21
1re S	Suites et fonctions	Le démon des maths	24
1re S	Repérage dans le plan	Le démon des maths	27
STS	Equations différentielles	Article sur la population du Japon	30
1re S	Suites	Le démon des maths et données INSEE sur la population de la Bretagne	40
2e	Statistiques et probabilités	Le Devin	45
2e	Statistiques	L'éventail du vivant	49
LP	Pourcentages	Coupures de presse (Le chiffre du jour)	56
1re S et STS	Statistiques	Extrait de la page des sports d'un journal	62
T S	Trigonométrie	Coupures de presse (La durée du jour)	73
1re S, T ES	Probabilités	Le pari de Pascal	78
1re S	Probabilités	Le problème du Chevalier de Méré	84

FICHE SIGNALÉTIQUE

TITRE : **Lectures mathématiques**

AUTEURS : A. Carrié, M. Dubois, C. Le Bihan, S. Le Borgne, R. Quarez.

ÉDITEUR : IREM de Rennes

DATE : Novembre 2010

NIVEAU : Collège, Lycée, Lycée professionnel.

MOTS-CLÉS : mathématiques, littérature, presse, compétences transversales.

RÉSUMÉ : Cette brochure contient la description d'activités pouvant être proposées dans les classes de mathématiques à différents niveaux : cinquième, seconde, première, terminale, CAP, STS. Ces activités sont toutes conçues à partir d'un texte littéraire ou journalistique.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21x29.7	92 pages	8 €	200 ex.

ISBN 2-85728-074-2
IREM de RENNES – Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu
35042 RENNES CEDX
mél : sec-irem@univ-rennes1.fr
Site WEB : http://www.irem.univ-rennes1.fr