CARDAN, deux exercices du second degré

Dans l'Ars Magna, Jérôme CARDAN décrit plusieurs méthodes de résolution d'équations du second degré. La diversité des méthodes est issue d'un traitement différent des équations suivant leur écriture. Là ou nous réunissons les équations du second degré sous la seule forme générale $ax^2 + bx + c = 0$, Cardan et les mathématiciens qui lui sont contemporains distinguent plusieurs formes permettant d'éviter les coefficients négatifs, à savoir $N = ax^2$; $N + x^2 = ax$; $N = ax^2 + bx$; $N + bx = x^2$.
La construction et la démonstration des règles qu'il édicte s'appuient sur les méthodes de calcul des mathématiciens d'expression arabe connues par les manuscrits de LÉONARD de PISE. Il s'agit en particulier d'AL KHWARIZMI qu'il cite dès le début de son ouvrage. Cardan utilise aussi la géométrie euclidienne qui reste une référence indépassable à son époque.
Pour illustrer les différentes procédures de résolution il propose des séries d'exercices résolus lui permettant de faire valoir l'efficacité des règles proposées. Voici deux de ces exercices d'abord dans le texte original de l'Ars Magna

QVÆSTIO I.

Quęst. prima. Est numerus, à cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atque insuper 4, residuum autem in se duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12. Pones itaque quadratum numeri incogniti quem quęris, esse 1 rem, abijce $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ eius & insuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m:4, duc in se fit $\frac{25}{144}$ q̄d^ti p:16 m:3 $\frac{1}{3}$ rebus, & hoc est æquale uni rei, & 12, abijce similia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}$ q̄d^ti p:4 m:3 $\frac{1}{3}$ rebus, redde quod est minus, alteri parti, pro uniuersali regula, erũt res 4 $\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}$ q̄drati p:4, quare per quartam regulam tertij capituli, deuidi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum q̄drati, & fiẽt res 24 $\frac{24}{25}$ ęquales 23 $\frac{1}{25}$ p:q̄drato, quare per tertiam regulã, duces

ces 12 $\frac{12}{25}$ in se, fiet 155 $\frac{469}{625}$, minue 23 $\frac{1}{25}$ fiẽt 132 $\frac{544}{625}$, huius ℞ est 11 $\frac{13}{25}$, quam adde ad 12 $\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet æstimatio rei quęsita 24, scilicet quadrati huius radix, est numerus ille qui quæritur. Ex hoc docemur per principalia capitula uitare deriuatiua, nam in positione rei pro primo numero, fuisset quadratum eius operationis fundamentum, & peruenisses ad 1 q̄d q̄d^m p:23 $\frac{1}{25}$ æqualia 24 $\frac{24}{25}$ q̄d^to, quare hæc sit tibi pro exemplo, nunc sequamur secundam illius.

QVÆSTIO II.

Duo duces diuiserunt militibus suis aureos 48 singuli, Porrò unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites habuit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus singulis militibus daret, quęritur quot unicuique milites fuerint? Pone numerũ militum minorem 1 rem, maior erit 1 pos^o p:2, quia igitur summa distribuenda æqualis fuit, manifestum est, quòd quantitates erunt proportione similes, est aũt 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1 pos^em p:2, fit $\frac{1}{12}$ pos^is p:$\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorum hominum, fit $\frac{1}{12}$ q̄d^ti p:$\frac{1}{6}$ pos^is, duc uero omnia ad 1 q̄d^m; fiet 1 q̄d^m p:2 pos^es, æqualia 24, accipe dimidium numeri rerum & est 1, duc in se, fit 1, adde ad 24, fit 25, ab huius ℞ minue 1 dimidium numeri rerum, fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei 12 pro singulo, alijs 8 pro singulo. multiplicatio autem illa, quando reducitur quadrati pars ad integrum fit per excessum hominum, scilicet 12 per 2. Et causa in hoc est, quòd proportio differentiæ secundæ ad primam, est ut aggregati quod diuidi debet ad productum ex numero hominum inuicem, uelut proportio 48 ad 24, productum ex 4 in 6, est uelut 4 differentię aureorum ad 2 differentiam hominũ. & per hanc docuit modum operandi in quæstionibus proportionũ, sed magis præcipue quando uolumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus perabsurdum esset intelligere medium hominem, nedum quantitatem aliquam irrationalem uel radicem. Quęst. secũda

QUÆSTIO I	PROBLEME I
Est numerus, a cuius quadrato si abieceris $\frac{1}{3}$ & $\frac{1}{4}$ ipsius quadrati, atqueI insuper 4, residuum autem in se duxeris, fiet productum æquale quadrato illius numeri, & etiam 12.	**Soit un nombre tel que si tu soustrais de son carré $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ du même carré auquel il est additionné 4, et si tu multiplies ce qui reste par lui-même, cela produit le même nombre au carré plus 12**.
Pones itaque quadratum numeri incogniti quem queris, esse 1 rem, abijceII $\frac{1}{3}$ & eius & $\frac{1}{4}$ insuper 4, fiet $\frac{5}{12}$ rei m:4, duc in se fit $\frac{25}{144}$ $\overline{q}d^{um}$ p:16 m:3$\frac{1}{3}$ rebus, & hoc est æquale uni rei, & 12, abijce similia, fiet 1 res æqualis $\frac{25}{144}\overline{q}d^{um}$ p:4 m:3$\frac{1}{3}$ rebus, redde quod est minus, alteri parti, pro universalis regula, erunt res 4$\frac{1}{3}$ æquales $\frac{25}{144}\overline{q}d^{um}$ p:4, quare per quartam regulam tertrij[1] capituli, devidi numerum rerum & 4 per $\frac{25}{144}$ numerum quadrati, & fient res $\frac{24}{25}$ equales 23 $\frac{1}{25}$ p: $\overline{q}$*drato*, quare per tertiam regulam, duces 12. $\frac{12}{25}$ in se, fiet 155 $\frac{469}{625}$. minue 23 $\frac{1}{25}$ sient 132 $\frac{544}{625}$, huius ℜ 11 $\frac{13}{25}$, quam adde ad 12 $\frac{12}{25}$ dimidium numeri rerum, fiet aestimatio rei quesita 24, scilicet quadrati huius radix, est numerus ille qui quaeritur. Ex hoc docemur per principalia vitare derivativa, nam inpositione rei pro primo numero, suisset quadratum eius operationi fundamentum, & pervenisses ad 1$\overline{q}$d$\overline{q}$ d^{um} p: 23$\frac{1}{25}$ æqualia 24$\frac{24}{15}$ $\overline{q}d^{to}$, quare hæc sit tibi pro exemplo, nunc sequamur secundam ilius.	Pose comme nombre inconnu le carré du nombre que tu cherches, soit 1 inconnue. Soustrait $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$ de celui-ci ajouté à 4 cela fait[2] $\frac{5}{12}$ d'inconnue m:4, multiplié par lui-même cela fait $\frac{25}{144}$ $\overline{q}d^{um}$ p:16 m:3$\frac{1}{3}$ d'inconnue[3] et c'est égal à une inconnue et 12, retranche également, cela fait une inconnue égale à $\frac{25}{144}$ $\overline{q}d^{um}$ p:4 m:3$\frac{1}{3}$ d'inconnue. Bouge ce qui est négatif dans l'autre partie, selon la règle universelle, cela fait[4] l'inconnue 4$\frac{1}{3}$ égale à $\frac{25}{144}$ $\overline{q}d^{um}$ p : 4, selon la quatrième règle du troisième chapitre divise le *nombre d'inconnues* et 4 par $\frac{25}{144}$ cela fait $\frac{24}{25}$ inconnue égale à 23 $\frac{1}{25}$ p:$\overline{q}$*drato*, selon la troisième règle multiplie 12 $\frac{12}{25}$ par lui-même cela fait 155 $\frac{469}{625}$ diminué de 23 $\frac{1}{25}$ cela fait 132 $\frac{544}{625}$ dont la ℜ *e*st 11 $\frac{13}{25}$ lequel ajouté à 12 $\frac{12}{25}$ fait 24, la valeur de l'inconnue[5]. Alors ce qui est cherché est la racine de ce nombre. Par cela nous apprenons comment éviter les cas dérivés en utilisant ceux qui sont principaux et si au lieu de prendre le premier nombre pour inconnue cela avait été son carré nous serions parvenus à 1 $\overline{q}$d$\overline{q}d^{um}$

[1] Les typographes de l'époque remplaçaient le deuxième i du groupe ii par un j.

[2] $[(x - \frac{1}{3}x) - \frac{1}{4}x - 4)] = \frac{5}{12}x - 4$.

[3] $(\frac{5}{12}x - 4)^2 = \frac{25}{144}x^2 + 16 - 3\frac{1}{3}x$.

4 $\frac{25}{144}x^2 + 16 - 3\frac{1}{3}x = x + 12$; $4\frac{1}{3}x = \frac{25}{144}x^2 + 4$.

La division par $\frac{25}{144}$ donne $24\frac{24}{25}x = 23\frac{1}{25} + x^2$ soit $x^2 + 23\frac{1}{25} = 24\frac{24}{25}x$.

[5] Le coefficient b de x est $24\frac{24}{25}$ donc sa moitié $\frac{b}{2}$ est $12\frac{12}{25}$ dont le carré $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ est $155\frac{469}{625}$ duquel on retranche $c = 23\frac{1}{25}$. Cela donne $\frac{b^2}{4} - ac$, en fait le discriminant, $132\frac{544}{625}$ dont la racine carrée $\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$ est $11\frac{13}{25}$. Cette racine ajoutée à $\frac{b}{2}$ donne la solution $11\frac{13}{25} + 12\frac{12}{25} = 24$. La racine carrée de ce nombre est le nombre cherché.

p:23 $\frac{1}{25}$ égal à 24 $\frac{24}{15}$ $\bar{q}d^{to}$. Alors que ce soit un exemple pour toi. Maintenant suivons son deuxième problème (d'Al Khwarizmi).

QUÆSTIO II

Duo duces diviserunt militibus suis auros singuli, Porrò unus ex his habuit milites duos plus altero, & illi qui milites habuit duos minus, contigit ut aureos quatuor plus singulis militibus daret, queritur quot unicuique milites suerunt.

Pone numerum militum minorem 1 rem, maior erit 1pos^{o} p : 2, quia igitur summa distribuen da aequalis suit, manifestum est, quod quantitates erunt proportione similes, est aunt 4 duodecima pars 48, multiplica igitur $\frac{1}{12}$ in 1positionem p : 2. fit $\frac{1}{12}$ pos^{is} p: $\frac{1}{6}$, hoc multiplica per numerum priorum hominum, fit $\frac{1}{12}\bar{q}d^{ti}$ p: $\frac{1}{6}pos^{is}$, duc vero omnia ad $1\bar{q}d^{m}$, fiet $\frac{1}{12}\bar{q}d^{m}$ p: 2 aequalia 24, accipe dimidium numeri rerum & est 1, duc in se, fit 1, adde ad 24, fit 25, hab huius ℜ minue 1 dimidium numeri rerum, fit 4, numerus hominum minor, & 6 maior, & primis obtigerunt aurei 12 pro singulo, alriis 8 pro singulo. Multiplicatio autem illia, quando redicitur quadati pars ad integrum fit per exessum hominum, scilicet 12 per 2. Et causa in hoc est, quod proprio differenciæ secundæ ad primam, est ut aggregati quod dividi debet ad productum ex 4 in 6, est velut 4 differenciæ aureorum ad 2 differenciam hominum. & per hanc docuit modum operandi in quæstionibus proportionum, sed magis præcepue quando volumus numerum integrum, ut in hominum numero, in quibus perabsurdum esset intelligere medium hominem, nedum quantitatem aliquam irrationalem vel radicem.

PROBLEME II

Deux chefs doivent chacun diviser 48 aurei entre leurs soldats. L'un d'eux a deux soldats de plus que l'autre. Celui qui a deux soldats de plus a 4 aurei de plus pour chaque soldat. Ce qui est à trouver c'est combien de soldats a chacun d'eux.

Soit une inconnue le nombre inférieur de soldats. Le plus grand nombre sera 1pos^{o} plus 2. Il est clair que les deux quantités sont en même proportion. 4 est un douzième de 48, par conséquent[6] multiplie $\frac{1}{12}$ par une inconnue p:2 faisant $\frac{1}{12}$ pos^{is} p: $\frac{1}{6}$. Multiplie cela par le premier nombre d'hommes cela fait $\frac{1}{12}$ $\bar{q}d^{ti}$ p: $\frac{1}{6}$ pos^{is} multiplie le tout pour avoir $1\bar{q}d^{m}$, cela fait $1\bar{q}d^{m}$ p:2 pos égal à 24. Prend la moitié du nombre d'inconnues, c'est 1 qui multiplié par lui-même fait 1, ajoute lui 24, cela fait 25. Sa ℜ diminuée de 1 la moitié du *nombre d'inconnues* cela fait 4, le plus petit nombre d'hommes et 6 le pus grand. Les premiers auront 12 aurei chacun, les autres 8 chacun. La multiplication toutefois par laquelle la fraction du carré devient un entier fait des hommes en plus, 12 par 2. Et la raison pour cela est que rapport de la seconde différence à la première est le rapport de la somme qui doit être divisé par le produit des nombres d'hommes. C'est à dire le rapport de 48 à 24 (produit de 4 par 6) est celui de 4 (la différence d'aurei) à 2 (la différence d'hommes). Par ceci est montré le *modus operandi* pour les questions de proportions, particulièrement quand nous voulons un nombre entier, comme pour le nombre d'hommes. Dans de tels cas il serait complètement absurde d'arriver à un demi homme laissant seule une quantité irrationnelle ou une racine.

IREM-Rennes
Gérard HAMON
2002 revu 2009

---

[6] Le plus petit nombre de soldats est x et le plus grand $x + 2$. Les quantités sont en même proportions, comme 4 est à 48 soit $\frac{1}{12}$. On a donc $\frac{1}{12}(x + 2) = \frac{1}{12}x + \frac{1}{6}$ qui multiplié par le plus petit nombre de soldats, x, donne $\frac{1}{12}x^2 + \frac{1}{6}x$. Cardan multiplie ce nombre par 12 afin d'avoir des coefficients entiers et il égalise cela à 24, procédure qui n'a rien d'évidente. Il parvient à l'équation $x^2 + 2x = 24$. Il juge nécessaire de s'en expliquer par la suite. Ensuite il s'agit d'une méthode de résolution connue. La moitié du coefficient de x vaut 1, son carré 1 auquel il ajoute 24, la constante. Cela conduit à 25 dont la racine carrée est 5. Il en retranche la moitié du coefficient de x, cela donne 4 la valeur de x, chacun d'eux touche 12 aurei. Il ajoute 1, cela donne 6 le nombre de soldat le plus élevé, chacun d'eux touche 8 aurei.