

Des intégrateurs mécaniques à la prédiction des marées

Frédérique PLANTEVIN
I.R.E.M. de Brest

Résumé : Décomposer des signaux périodiques en série de Fourier est une question commune à beaucoup de champs scientifiques très concrets dès le XIX^{ème} siècle. En pleine apogée du calcul intégral mécanique, plusieurs instruments ont été conçus à cette fin : les analyseurs harmoniques. Le principe de ces machines sera exposé. Un analyseur Mader-Ott sera présenté et mis en œuvre sur quelques signaux précis. Le lien avec la prédiction des marées sera montré ainsi que le cadre général du travail initié à Brest entre l'I.R.E.M. et le S.H.O.M.¹.



Mots-clés : Analyse et synthèse harmoniques, analyseur harmonique, planimètre, prédicteur de marée

1. Introduction

Dès la deuxième moitié du XIX^{ème} siècle, le calcul des coefficients de Fourier de signaux réels périodiques - ou supposés tels - occupait un grand nombre d'ingénieurs et de

¹ Service Hydrographique et Océanographique de la Marine.

scientifiques d'horizons très divers. Pour une fonction f d'une variable - le temps pour ce qui nous intéresse ici - périodique de période T , les coefficients de Fourier sont donnés par

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt, \text{ et } b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)dt \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{et } a_0 = \frac{1}{2T} \int_0^T f(t)dt.$$

Ils existent dès que f est intégrable. La série de Fourier de f , lorsqu'elle existe, est la somme trigonométrique infinie suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right).$$

Il se trouve que pour une très large classe de fonctions, cette somme infinie existe et coïncide pour chaque temps t avec $f(t)$. Ce résultat s'énonce en disant que toute fonction périodique se décompose en une somme de fonctions harmoniques élémentaires $t \mapsto \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right), t \mapsto \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right), n \in \mathbb{N}$. Lorsque la relation

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nt\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nt\right)$$

est vérifiée, les coefficients de Fourier portent toute l'information contenue dans f . Le calcul des coefficients de Fourier constitue l'*analyse* de la fonction. Le calcul de f à partir de ses coefficients en constitue la *synthèse*.

Lorsque l'on parle d'analyser une fonction (ou un signal) dans la pratique, il ne s'agit pas de calculs formels, mais plutôt de mesures à partir du graphe enregistré de cette fonction. Aujourd'hui, ce calcul se fait très rapidement numériquement à partir des signaux discrétisés, mais jusque dans les années 1950, il était réalisé par des méthodes d'une variété et d'une ingéniosité remarquables : graphiques, mécaniques, optiques, acoustiques puis électrotechniques. Les instruments qui permettent de mener à bien le calcul des coefficients de Fourier d'une fonction donnée et donc d'en réaliser l'analyse, s'appellent logiquement des *analyseurs harmoniques*, ils peuvent être de l'un des types mentionnés.

Ceux dont nous allons parler ici sont des instruments mécaniques. Entre 1878 et 1909, il en a été conçu et construit cinq de principes distincts dans différents pays. Au moins trois d'entre eux seront utilisés jusqu'au milieu du vingtième siècle. Leur conception suit le développement des instruments de calcul intégral de manière naturelle puisque ce sont des instruments mécaniques d'intégration. Il n'est pas question de décrire ici le développement historique de tous ces instruments (mécaniques d'intégration) mais juste d'en présenter certains aspects et de donner quelques indications sur la genèse des analyseurs harmoniques.

Après avoir décrit le principe de l'intégration mécanique, nous présenterons les deux voies qui ont mené à l'invention de deux analyseurs harmoniques particuliers : le tout

premier dû à Thomson (1878) et le dernier à Mader (1909). Le choix du premier s'impose par son caractère historique : il a été le premier instrument à réaliser automatiquement le calcul des coefficients de Fourier d'un graphe donné et aussi, il a été conçu dans un projet global de description des marées. Le choix du deuxième vient naturellement parce que l'I.R.E.M. en possède un exemplaire. On peut donc le manipuler et le décrire complètement. Il a aussi pour lui d'être très semblable à celui dont le S.H.O.M. s'est servi pour analyser les enregistrements de hauteurs d'eau. Il sera donc décrit et mis en oeuvre. Pour finir, le problème de la prédiction de la marée sera présenté. Il sera montré en quoi il constitue en fait un problème de synthèse harmonique.

2. Planimètres : calculer mécaniquement l'intégrale d'une fonction

Dès le début du XIX^{ème} siècle, une grande variété d'instruments mécaniques d'intégration sont élaborés en Europe². On peut les ranger dans trois catégories : les planimètres (qui mesurent l'aire de régions du plan), les intégromètres (qui mesurent l'intégrale d'une fonction donnée par son graphe ainsi que ses premiers moments), et les intégraphes (qui tracent le graphe d'une primitive d'une fonction donnée par son graphe). Tous ces instruments sont analogiques : en contraste avec des méthodes d'approximation numérique, leur principe est exact. Ils réalisent mécaniquement l'intégration de la courbe donnée (avec le sens qui convient à ce mot).

Le premier planimètre date de 1825³. C'est un planimètre à cône. Plusieurs autres planimètres à cône ont été construits puis le cône a été remplacé par le disque sans changer le principe de fonctionnement.

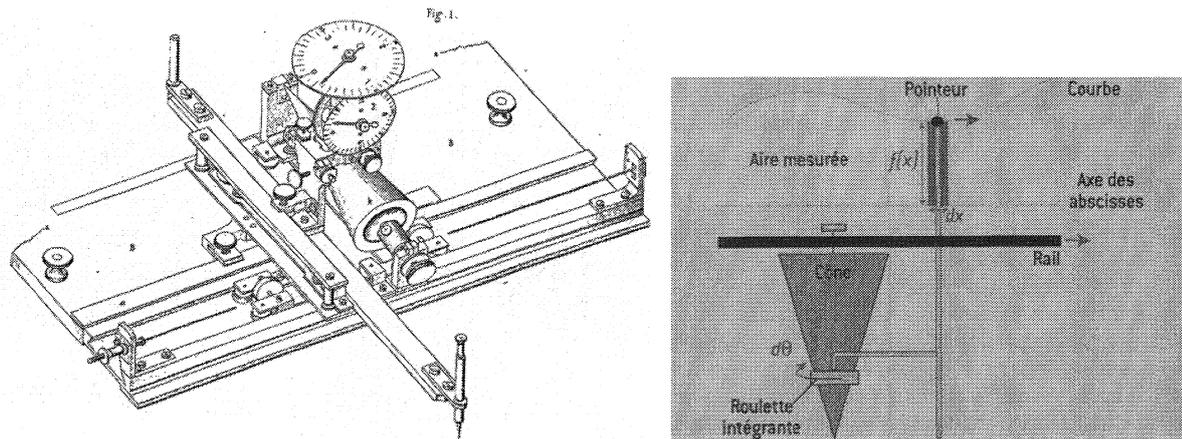


Figure 1 : Dessin et schéma explicatif⁴ du planimètre à cône de Ernst.

Ces planimètres calculent l'aire sous le graphe d'une fonction donnée (par son graphe) ;

² Pour avoir une idée précise de cette diversité : Tournès, D., *Instruments grapho-mécaniques d'intégration* in *Histoire du calcul graphique et grapho-mécanique*, à paraître - on peut aussi consulter le site du R.E.H.S.E.I.S. - Les instruments de calcul savant - <http://tr.im/DR8n>.

³ Il est dû à Tito Gonella (Florence) en 1825.

⁴ Document d'accompagnement de l'exposition « Venez prendre l'aire ! » - Musée des Arts et Métiers - Paris de novembre 2006 à mars 2007 - gracieusement mis à disposition par M.-J. Durand-Richard.

leur principe est relativement simple : le pointeur suit le graphe de la fonction dont on veut connaître l'intégrale sur un intervalle ; son mouvement infinitésimal le long de cette courbe d'équation $y = f(x)$ entraîne une roulette (posée sur un cône ou un disque selon l'instrument) dont l'axe de rotation est parallèle à l'axe des ordonnées et qui roule sans glisser. Les instruments sont construits⁵ de sorte que l'angle de rotation produit par un mouvement infinitésimal du pointeur le long de la courbe entre x et $x + dx$ soit proportionnel à l'aire du rectangle infinitésimal sous la portion de courbe parcourue c'est-à-dire $f(x)dx$. La roulette (qui est graduée) totalise les contributions au fur et à mesure du déplacement du pointeur le long de la courbe, réalisant ainsi mécaniquement la somme de Riemann de f sur l'intervalle considéré. Les planimètres à disque fonctionnent selon le même principe, le disque étant vu comme un cône complètement ouvert. Tous ces instruments privilégient une direction fixée comme axe des abscisses, le pointeur suit le graphe en partant d'une origine puis y revient en suivant l'axe des abscisses (ou éventuellement un deuxième graphe). Ils calculent donc l'aire algébrique du domaine du plan entre le graphe d'une fonction et l'axe des abscisses (ou entre deux graphes).

3. Planimètres polaire : calculer mécaniquement l'aire d'une région du plan

Le planimètre polaire a été inventé en 1854 par Amsler⁶ par simplification des ses prédécesseurs. C'est un instrument ingénieux, précis et relativement facile d'usage, et surtout susceptible de tenir dans la poche de l'ingénieur - un atout définitif si l'on pense aux instruments prédécesseurs. Il emporte un succès immédiat⁷, un très grand nombre d'exemplaires en seront produits.

L'idée d'Amsler est de s'affranchir de l'axe de référence : son planimètre se pose directement sur la feuille où est dessinée une courbe fermée, le pôle est planté dans le support et le pointeur suit la courbe, la roulette est fixée à l'axe qui porte le pointeur. Au final, la roulette donne l'aire du domaine borné par la courbe, réalisant mécaniquement le théorème de Green-Riemann⁸. Un très grand nombre de travaux concernent cet instrument fascinant, y compris contemporains⁹.

⁵ Pour voir les planimètres en question, le lecteur pourra regarder visiter le site du Musée des Arts et Métiers ou celui du R.E.H.S.E.I.S., pour une analyse de leur fonctionnement, le lecteur pourra aussi se reporter au site de l'I.R.E.M. de Brest.

⁶ Jakob Amsler (1823-1912), ingénieur mathématicien et physicien suisse.

⁷ Pour en savoir plus sur le contexte historique, le lecteur peut consulter Durand-Richard, M.-J., *Planimètres et intégraphes en Angleterre*, site du R.E.H.S.E.I.S. - Les instruments du calcul savant, 2008 - <http://tr.im/DTfO>.

⁸ Il faut noter que cette interprétation n'est pas celle d'Amsler.

⁹ Par exemple : Gatterdam, R. W., The planimeter as an example of Green's Theorem, *The American Mathematical Monthly*, 88(9), 701-704, 1981- Aebischer, B., Le planimètre polaire, document numérique à l'URL <http://tr.im/E0ss>.

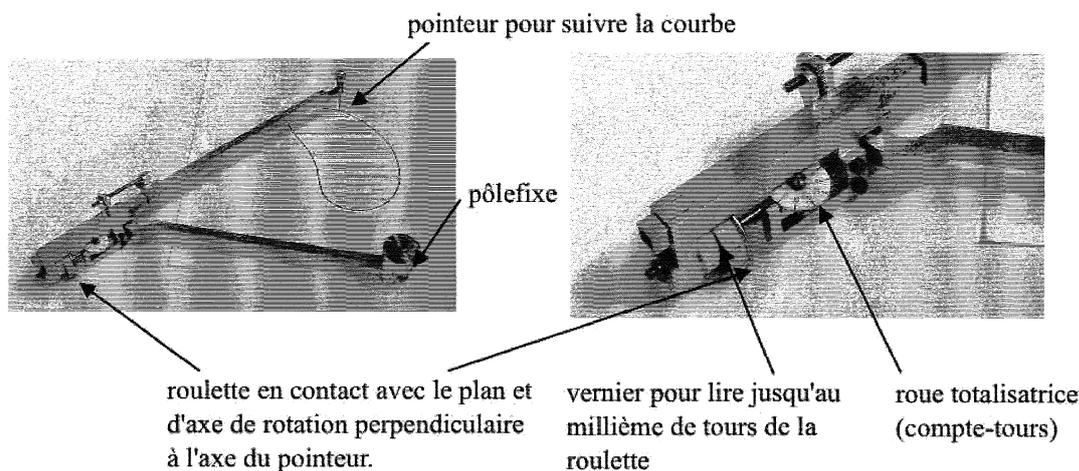


Figure 2 : Planimètre polaire¹⁰ d'Amsler en position pour mesurer l'aire hachurée.

4. Calculer mécaniquement l'intégrale du produit de deux fonctions

Parallèlement à l'évolution de ce type d'intégrateurs, d'autres instruments sont inventés et développés en Grande-Bretagne sous l'impulsion de Thomson¹¹. En 1876, son frère (James Thomson) propose à la société royale de Londres un nouveau type de planimètre¹² où la roulette intégrante roulant sans glisser sur un cône serait remplacée par une sphère entraînée par un disque et entraînant à son tour un cylindre enregistreur. Ce système est susceptible, selon lui, d'éviter les frottements excessifs de la roulette sur le cône, l'usure et l'imprécision qui en découlent. Cette nouvelle machine ne sera pas construite, mais elle servira à Thomson (William). De ses principes, il tirera un instrument capable de réaliser le calcul mécanique de l'intégrale du produit de deux fonctions données par leur graphe respectif¹³.

Le principe en est le suivant : la rotation du disque (qui joue le rôle du cône) doit être proportionnelle à la valeur d'une des deux fonctions à un certain temps t et la distance de la sphère au centre du disque (analogue de l'altitude de la roulette sur le cône) doit être proportionnelle à la valeur de la deuxième fonction à ce même temps t .

¹⁰ Collection privée mise à disposition de l'I.R.E.M. de Brest.

¹¹ William Thomson (1824-1912), physicien anglais connu sous le nom de Lord Kelvin.

¹² Thomson, J., An Integrating Machine having a new Kinematic Principle, *Proc. Roy. Soc.*, 24 (1876), 262-265. Texte original et traduction française par M.-J. Durand-Richard disponibles à l'URL : <http://tr.im/DZUu>.

¹³ Thomson, W., An instrument for calculating the integral of the product of two given functions, *Proc. Roy. Soc.* 24, 266, 1876. Texte original et traduction française par M.-J. Durand-Richard disponibles à l'URL : <http://tr.im/DZUu>.

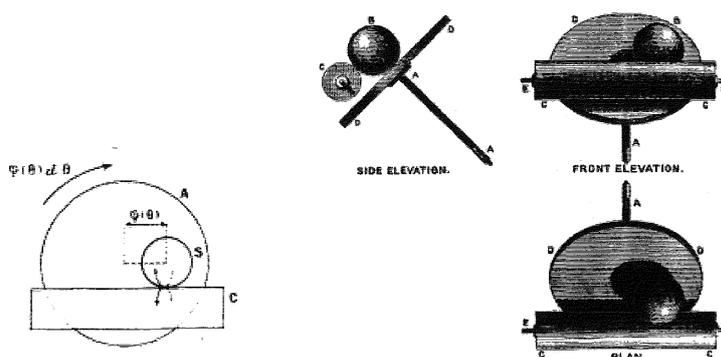


Figure 3 : Le principe d'intégration du produit de deux fonctions de J.Thomson expliqué par Morin¹⁴
Le principe d'entraînement du «Disk-, Globe-, and Cylinder- Integrator» de J.Thomson ¹⁵ par lui-même.

La rotation du disque est transmise par la sphère au cylindre qui tourne d'un angle proportionnel au produit des deux fonctions, l'angle total de rotation donne l'intégrale du produit. Le principe de cette machine sera mis en œuvre directement au cas du calcul des coefficients de Fourier avec l'analyseur harmonique dit de Kelvin deux ans plus tard.

5. Analyseurs harmoniques : calculer mécaniquement les coefficients de Fourier d'une fonction

Pour calculer les coefficients de Fourier, il faut calculer des intégrales de produit de deux fonctions, la fonction à analyser, disons f et l'une des deux fonctions $t \mapsto \cos(\frac{2\pi}{T}nt)$, $t \mapsto \sin(\frac{2\pi}{T}nt)$. Thomson est le premier à avoir trouvé le moyen de réaliser un instrument mécanique capable d'automatiser ce calcul fastidieux (qui était fait à la main jusque là). Nous venons de voir la genèse de son idée. Mais ce n'est pas la seule façon de procéder. Deux faits distincts vont mener à la conception de l'analyseur de Mader : d'une part, les travaux d'un mathématicien, Clifford, et d'autre part la mise au point d'un nouvel analyseur harmonique utilisant un planimètre polaire. Ces deux points sont présentés et l'analyseur harmonique de Mader décrit en détails après une courte présentation de celui de Thomson. Tous les analyseurs harmoniques existants (Kelvin, Boucherot, Yule, Scharp, Mader) sont décrits et dessinés dans l'ouvrage de Morin¹⁶ qui consacre quarante pages à ce sujet.

5.1. L'analyseur harmonique de Kelvin

Le système d'intégration sphère-disque-cylindre permet à Thomson d'inventer le premier analyseur harmonique ¹⁷, ce qui était son but. Le calcul d'un coefficient requiert un intégrateur, c'est-à-dire un ensemble sphère-disque-cylindre, qu'il faut ensuite piloter

¹⁴ Morin, H. de, *Les appareils d'intégration*, Gauthiers-Villars, Paris, 1913.

¹⁵ Extrait du texte original.

¹⁶ Morin, H. de, *Les appareils d'intégration*, Gauthiers-Villars, Paris, 1913. On peut en trouver une version numérisée en libre accès à cette URL : <http://tr.im/E0FA>.

¹⁷ Thomson, W., Harmonic Analyser, *Proc. Roy. Soc.*, 27, 371-373, 1878. Texte original et traduction française par M.-J. Durand-Richard disponibles à l'URL : <http://tr.im/DZUu>.

(guider la rotation du disque par le graphe de la fonction à analyser et la place de la sphère par les fonctions harmoniques élémentaires). Il en fait fabriquer plusieurs versions, dont le plus imposant est visible au British Science Museum¹⁸ de nos jours. Il mesure plusieurs mètres de long et permet, grâce à ses sept sphères, de calculer simultanément les trois premières harmoniques du signal à analyser. Il a été construit pour l'Office Météorologique britannique et était utilisé pour analyser les variations des différents éléments météorologiques et y trouver des composantes périodiques. Cette machine n'a pas eu vraiment de successeur dans le domaine du calcul intégral, mais elle revêt une importance toute particulière dans le sujet qui nous intéresse, car elle fait partie d'un projet plus vaste autour de l'analyse et de la prédiction de la marée comme on le verra plus loin.

5.2. L'analyseur harmonique de Mader-Ott

Le calcul des coefficients de Fourier occupe donc beaucoup de scientifiques à cette époque, les ingénieurs, les physiciens, mais aussi les mathématiciens. Ainsi Clifford¹⁹ et, plus tard, Finsterwalder²⁰, apparemment indépendamment l'un de l'autre, ont travaillé sur une représentation graphique des «composantes harmoniques d'un mouvement périodique». Ils proposent de construire par une méthode géométrique des courbes fermées dont l'aire est proportionnelle aux différents coefficients a_n et b_n ($n \in \mathbb{N}^*$). La courbe périodique de période T à analyser est enroulée sur un cylindre de rayon $\frac{T}{n}$; la courbe gauche résultante (qui est fermée) est projetée sur deux plans perpendiculaires contenant l'axe du cylindre; les deux courbes planes fermées entourent un domaine dont l'aire est proportionnelle à b_n , si le plan contient l'origine (plan E_1 fig.4), à a_n , s'il s'agit du plan perpendiculaire (plan E_2). Le calcul des coefficients a_n et b_n pour chaque n se ramène donc à un calcul d'aire que l'on peut mener avec un planimètre polaire.

¹⁸ Sa fiche documentaire est visible à l'URL : <http://tr.im/E0uw> et des photos à ces URL : <http://tr.im/E0uS> et <http://tr.im/E0va>.

¹⁹ Clifford, W.K., *Graphic representation of the Harmonic Components of a Periodic Motion*, Proceedings of the London Mathematical Society, s1-5, 11-14, 1873.

²⁰ Finsterwalder, S., *Harmonsiche Analyse mittelst des Polarplanimeters*, Zeitschrift für Mathematik und Physik, 43, 85-92, 1898.

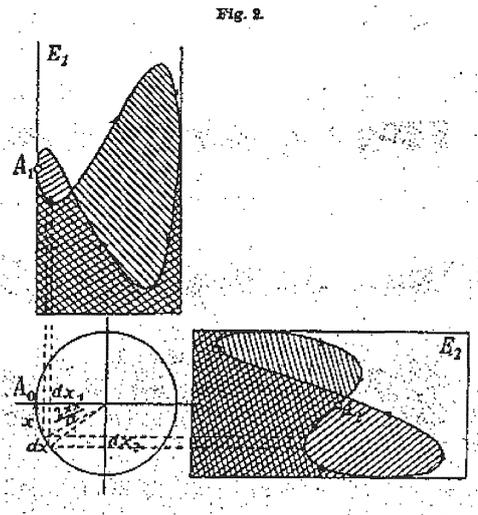
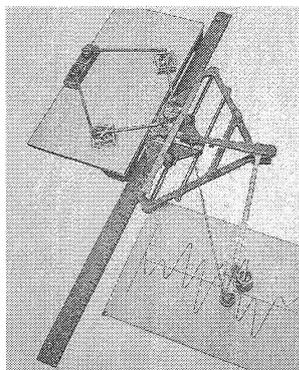


Figure 4 : Schéma de Finsterwalder visualisant la projection sur les deux plans E_1 et E_2 .

Cette idée, de concevoir des machines qui construisent, à partir du graphe d'une fonction f à analyser et pour un réglage donné, une courbe auxiliaire fermée que l'on pourrait ensuite «planimétrer», pour calculer un coefficient de Fourier de f , va être mise en œuvre en 1895 par Yule²¹, mais pas avec ces courbes auxiliaires-là. L'analyseur de Yule sera construit et même amélioré aux Etats-Unis, mais s'il en subsiste un exemplaire, il n'est pas facile à trouver, contrairement à celui de Mader qui est encore très répandu et d'utilisation avérée.

Mader²², un ingénieur berlinois, s'inspire très directement de l'idée de Clifford et de Finsterwalder pour concevoir son analyseur. Il met au point les mécanismes qui vont réaliser la transformation du graphe à analyser en autant de courbes auxiliaires que de coefficients de Fourier à déterminer. L'analyseur sera produit (entre autres) par la firme Ott en un nombre assez important d'exemplaires.



Les analyseurs harmoniques (notice Mlf 477 et MAf 341) (analyse de Fourier) permettent de déterminer la fréquence et l'amplitude des oscillations fondamentales et des harmoniques de courbes périodiques (étude d'oscillations, électrotechnique, construction de machines, géophysique, etc.).

Figure 5 : Schéma de l'analyseur harmonique double par le constructeur Ott.

²¹ Yule, G.U., On a simple form of Harmonic Analyser, *Proc. Phys. Soc* (London), 13,403-412, 1895.

²² Mader, O., Ein einfacher harmonischer Analysator mit beliebiger Basis, *Elek. Zeit.*, 30, 847,1909.

L'instrument est en deux parties : une partie de transformation du graphe, équerre-pointeur-chariot-roues, et une partie intégration avec le planimètre.

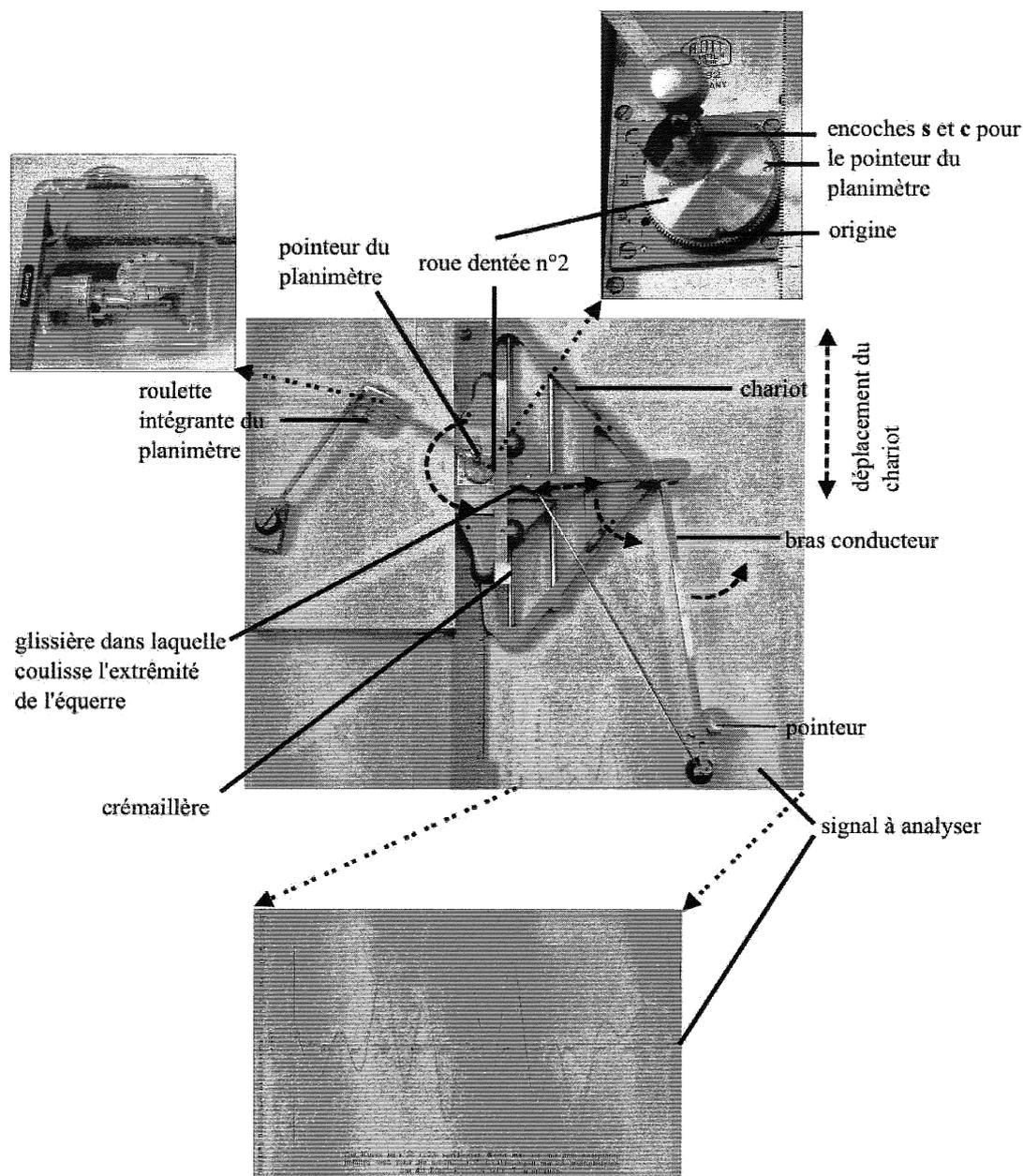


Figure 6 : L'analyseur harmonique de Mader-Ott en place pour mesurer le coefficient de Fourier b_2 du graphe extrait de la notice de l'appareil²³.

L'instrument est en premier lieu réglé en fonction de la durée du signal à analyser (qui

²³ Brochure Ad. 341, *Der harmonische Analysator Mader-Ott*, 1931.

est assimilée à T , sa période) : deux règles graduées, l'une verticale, l'autre horizontale (voir figure 7) permettent de placer l'origine du graphe. Le bras conducteur, qui porte le pointeur avec lequel on suit le graphe, est solidaire d'une équerre qui tourne au fur et à mesure que l'on suit le graphe. Sa rotation est limitée par deux butées portées par le chariot. La hauteur du pointeur sur le bras est réglée de sorte que les extrémités de l'intervalle d'étude coïncident avec les angles extrémaux de rotation du bras (et donc de l'équerre).

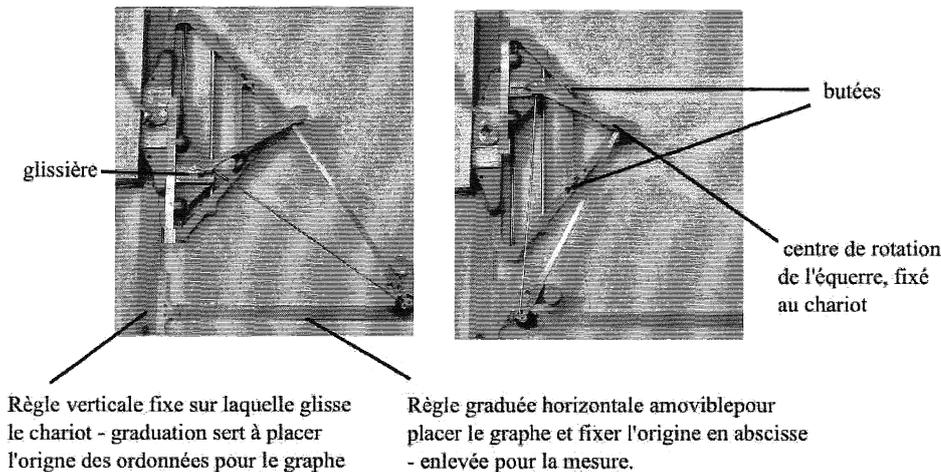


Figure 7 : Course angulaire maximale du bras conducteur lors de la mesure.

Le chariot se déplace verticalement au fur et à mesure que l'on avance sur le graphe ; ce mouvement vertical est transmis à une roue dentée par l'intermédiaire d'un engrenage. Sur la roue dentée est plantée la pointe d'un planimètre polaire. Le mouvement le long du graphe produit le mouvement de la pointe du planimètre qui trace une courbe virtuelle et le planimètre calcule l'aire du domaine qu'elle enferme (car c'est bien une courbe fermée) comme on va le revoir plus loin. Si l'on décompose le mouvement en deux composantes, l'une le long de l'axe des ordonnées, l'autre le long de l'axe des abscisses, on constate que chacune produit un déplacement du chariot et donc la rotation de la roue dentée ; sans entrer dans les détails, la partie horizontale est annulée par le trajet de retour (de la droite vers la gauche donc) qui se fait le long de l'axe des abscisses. La justification précise de ce fait ainsi qu'une description plus détaillée de l'instrument, fait l'objet d'une note en préparation avec E.Rannou²⁴.

La pointe du planimètre est posée dans une des deux encoches sur la roue dentée (fig. 8) ; l'encoche **c** (c pour cosinus) permet de mesurer un coefficient de type a_n , l'encoche **s** (s pour sinus) permet de mesurer un coefficient de type b_n , selon la configuration montrée dans la figure 4. Le choix de la roue dentée détermine l'ordre du coefficient de Fourier calculé, l'ordre est inversement proportionnel au rayon de la roue. La place de la roue est assignée selon sa taille (puisqu'elle s'engrène sur la crémaillère qui ne se déplace que

²⁴ Plantevin., F., Rannou, E., *L'analyseur harmonique de Mader-Ott*, en préparation.

verticalement).

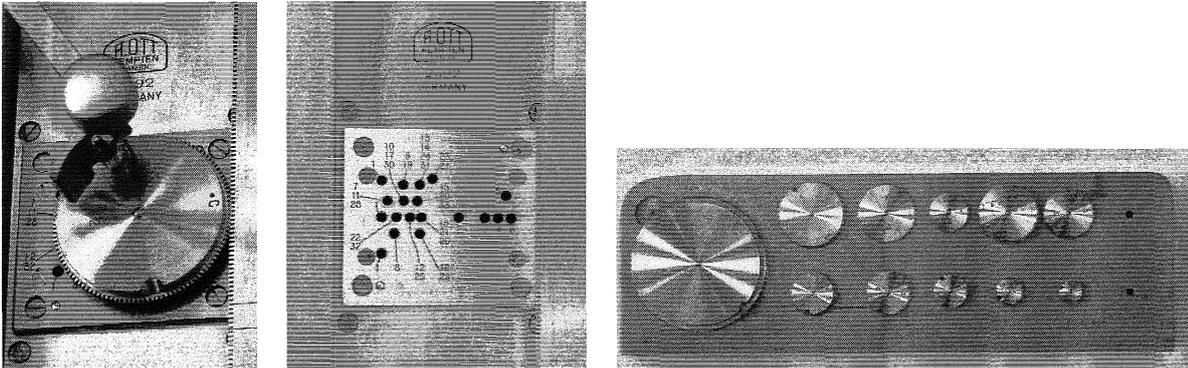


Figure 8 : Détails de l'analyseur harmonique de Mader-Ott : pointe du planimètre sur roue dentée pour le calcul de b_2 ; emplacements des différentes roues pour le calcul des coefficients d'ordre 1 à 33 ; jeu de roues pour le calcul des 18 premiers coefficients de Fourier a_n et b_n .

Pour les coefficients d'ordre supérieur à 7, on doit utiliser une roue intermédiaire car le diamètre des roues devient trop petit. Il y en a deux dans cet instrument ; elles présentent deux engrenages : un bas pour s'adapter à la crémaillère, l'autre haut (le seul que l'on voit) pour s'adapter aux roues d'index plus grand que 7.

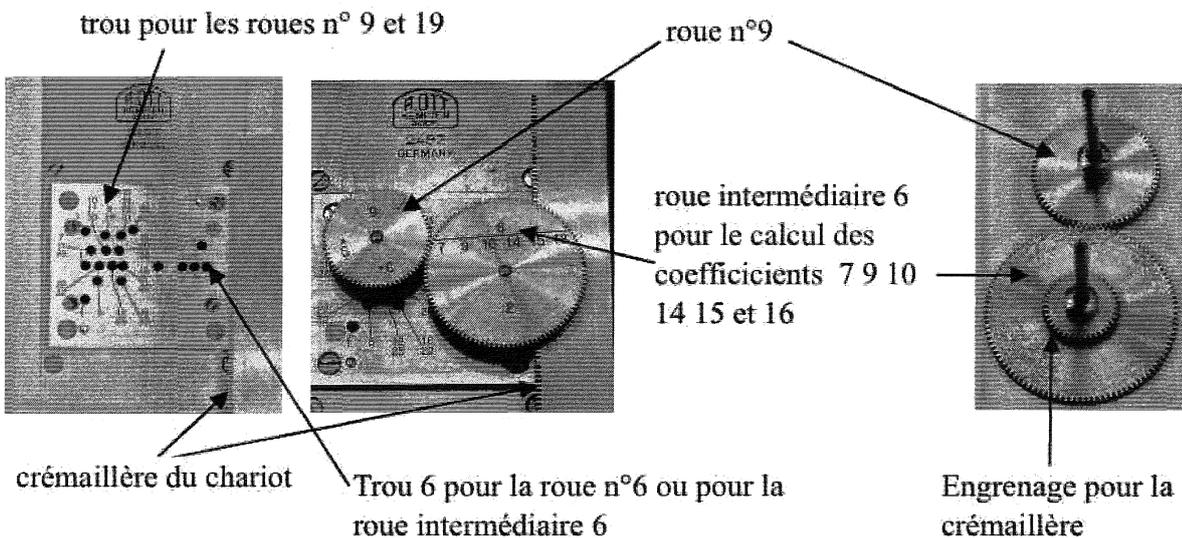


Figure 9 : Calcul des coefficients b_9 et a_9 avec la roue intermédiaire $\frac{6}{7\ 9\ 10\ 14\ 15\ 16}$ placée dans le trou 6 pour s'engrener sur la roue 9.

La brochure de l'analyseur fournit le graphe de la fonction :

$$f(x) = \sin x + \cos 2x - 3 \sin 3x + 2 \cos 8x - 3 \sin 8x - \cos 9x + 2 \sin 9x.$$

Il est représenté en fonction d'angles en degrés et l'échelle est indiquée. Cela permet

de l'utiliser pour l'apprentissage direct de l'instrument : on va chercher les coefficients $b_1, a_2, b_3, a_8, b_8, a_9$, et b_9 et pouvoir comparer directement la valeur obtenue à la formule. On cherchera également les autres coefficients d'ordre inférieur à 9, a_0, a_1, b_2, a_3 et a_n, b_n pour $n = 4, 5, 6, 7$ pour vérifier que l'instrument les donne bien nuls.

Quelques unes de ces mesures sont rapportées dans le tableau ci-dessous. La mesure consiste à relever l'index du planimètre au début de la mesure, le repère d'origine sur la roue dentée coïncidant avec l'origine sur la crémaillère, le pointeur étant placé à l'origine du repère dans lequel le graphe de f est représenté, puis à suivre le graphe de f , à revenir le long de l'axe des abscisses et à relever l'index final du planimètre. La différence entre les deux index donne le coefficient recherché - en grandeur et en signe et - en dixième de millimètre. La précision admise de l'instrument selon le constructeur est de ± 3 unités de vernier, ce qui correspond à 0.03 cm. Pour obtenir la précision indiquée, le manipulateur doit s'entraîner et effectuer plusieurs mesures successives du même coefficient.

Coefficient	Index départ	Index arrivée	Coefficient calculé en unités de vernier	Coefficient calculé en cm	Coefficient exact en cm
a_0	1123	1121	-2	-0.02	0
a_1	2384	2381	-3	0.03	0
b_1	2349	2449	100	1.00	1
a_2	2223	2319	96	0.96	1
b_3	2287	1983	-304	-3.04	-3
b_9	2203	2406	203	2.03	2

Le tracé des courbes auxiliaires n'est pas réalisé par l'instrument ; la pointe du planimètre calée dans la roue dentée la trace et son mouvement entraîne la roulette intégrante du planimètre qui totalise simultanément l'aire du domaine virtuel qu'elle entoure. E. Rannou a réalisé un analyseur harmonique virtuel dans le langage de Maple. Il permet de la construire effectivement pour des exemples donnés analytiquement. Ainsi, on peut travailler sur les signaux de la notice d'emploi de l'instrument qui fournit le graphe du signal à analyser et sa formule analytique et faire simultanément la mesure réelle avec l'analyseur réel, et encore soumettre la formule de la fonction analysée à l'analyseur virtuel et voir ainsi se créer la courbe auxiliaire (figure 10) ; on peut même ensuite suivre la courbe auxiliaire avec un planimètre polaire et retrouver le résultat de l'analyseur.

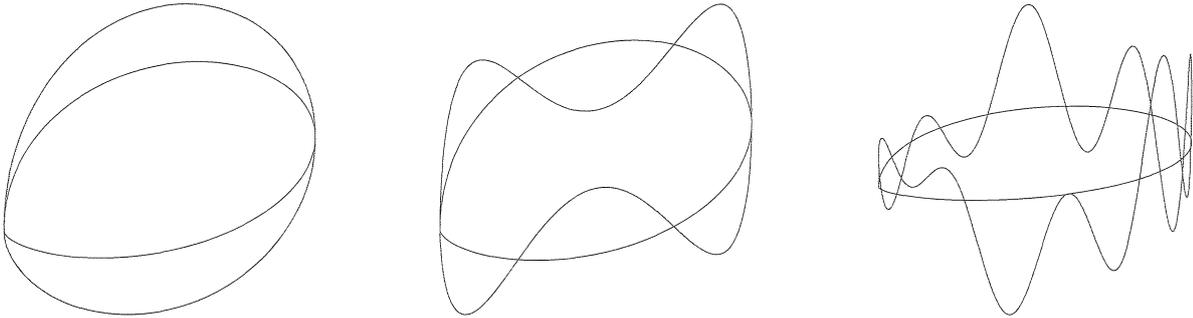


Figure 10 : Courbes auxiliaires construites par l'analyseur virtuel de E. Rannou calculant b_1 pour $\sin(\cdot)$, $\sin(3\cdot)$ et le signal de la figure 6.

6. Et la marée ? Question de synthèse

Prédire la marée, c'est prédire les hauteurs d'eau dans un port donné. Il y a plusieurs aspects dans cette question : connaître à l'avance les hauteurs d'eau extrémales²⁵ et les moments où elles sont atteintes, être capable de donner la hauteur d'eau à tout moment de la journée. L'expérience immédiate que nous en avons est qu'il s'agit d'un phénomène périodique : si l'on vit à Brest, on constate qu'il y a deux hautes mers par jour toute l'année. On constate aussi que l'amplitude des variations de hauteur d'eau est différente selon les phases de la lune mais aussi selon les saisons. Une observation un peu plus attentive montre que ces deux données ne suffisent pas pour connaître la hauteur d'eau dans le port, même s'il suffit pour justifier le régime de marées semi-diurne de la mer d'Iroise. En fait, la marée n'est pas périodique. Elle est produite par des phénomènes astronomiques qui le sont cependant, et on peut considérer dans une première approximation, que l'océan réagit d'une façon linéaire²⁶ à ces différentes forces et que, pour cette raison, la marée est quasiment périodique. Elle est la superposition (la somme) de composantes harmoniques simples de fréquences *a priori* incommensurables entre elles :

$$h(t) = h_1(t) + h_2(t) + \dots, \text{ avec } h_i(t) = A_i \sin(\omega_i t + \phi_i)$$

Les pulsations - ou vitesses ou fréquences - des composantes, ω_i , sont reliées à celles des phénomènes astronomiques concernés²⁷ et peuvent être déterminées par une étude

²⁵ Il n'est pas tenu compte des vagues, les relevés de hauteur d'eau - appelés marégrammes - se font dans des *puits de tranquillité* à l'abri des jetées des ports.

²⁶ Hypothèse formulée par P. S. de Laplace en 1790 et largement utilisée par la suite ; Laplace, P. S. de, Mémoire sur le flux et le reflux de la mer, *Mém. Acad. Sciences*, 45-181, 1790.

²⁷ Par exemple, la vitesse de rotation de la Terre sur son axe par rapport au Soleil, notée T_T , $T_T = 15^\circ$ par heure, la vitesse de rotation de la Terre autour du Soleil, notée h_T , $h_T = 0.04106864^\circ$ par heure, la rotation de la Lune autour de la Terre, notée s_L , $s_L = 0.54901653^\circ$ par heure, la précession de la Lune, notée p_L , $p_L = 0.00464183^\circ$ par heure, la précession du plan de l'orbite de la Lune, notée N_L , $N_L = 0.00220641^\circ$ par heure. Avec les trois premières, on peut donner les vitesses de deux des composantes principales de la marée : la marée lunaire, M_2 , et la marée solaire S_2 . La composante M_2 est la marée que l'on observerait

théorique du système Terre-Lune-Soleil en suivant la méthode de Laplace. Il reste à déterminer l'amplitude A_i et la phase ϕ_i de chaque composante. Ce qui est fait par l'analyse des marégrammes²⁸, c'est-à-dire le calcul des coefficients de Fourier des enregistrements de $h(t)$.

On commence à comprendre comment la question de l'analyse harmonique des hauteurs d'eau en un lieu, Brest par exemple - un lieu très connu pour cela puisque Laplace y a élaboré sa théorie et l'a testée, dans un premier temps, sur l'analyse des enregistrements des hauteurs d'eau de 1771 à 1776 - est liée à la question de la prédiction des marées. C'est en fait une question de synthèse, un processus de reconstruction, familier au traicteur de signaux, moins naturel peut-être pour le mathématicien. Si l'on sait engendrer des composantes périodiques de fréquences prescrites et d'amplitude réglable, si l'on connaît les « bonnes » amplitudes, alors on sait reproduire le signal de départ et donc le connaître pour des temps ultérieurs. Des machines de ce genre ont été inventées pour prédire les hauteurs d'eau, en même temps que les analyseurs harmoniques en fait : la première est due à Thomson²⁹, elle est connue sous le nom de Tide Predictor - *prédicteur de marée*. Dans cet article de 1881, qui est en fait une communication devant la société des ingénieurs civils, Thomson montre bien que le centre de son travail est la compréhension de la marée, analyse et prédiction, de l'analyseur harmonique au prédicteur de marée. L'entreprise Kelvin & Bottomley construira une dizaine de ces machines pour les services hydrographiques de plusieurs pays - en plus de la Grande Bretagne - dont la France, le Brésil, l'Argentine, le Portugal, le Japon, entre 1881 et 1925. Le S.H.O.M. a acquis le Tide Predictor n°3 (après qu'il eût servi une vingtaine d'années au Liverpool Tide Institute) en 1900 pour déterminer les hauteurs d'eau des ports des colonies françaises, puis en 1947, le TP n°6 dans les mêmes conditions. On peut voir ce dernier dans le hall d'entrée du S.H.O.M. à Brest ; quant au premier, après avoir été donné au Musée des Arts et Métiers et y avoir été exposé longtemps, il a rejoint les réserves du musée à l'occasion des travaux de rénovation et y est resté.

si le Soleil pouvait être négligé et que la Lune était sur une orbite circulaire dans le plan de l'équateur ; sa vitesse est $2T_T - 2s_L + 2h_T$. La composante S_2 est la marée que l'on observerait seule si le Soleil était toujours dans le plan de l'équateur de la Terre, que l'orbite de la Terre était un cercle, et bien sûr si la Lune pouvait être négligée ; sa vitesse est $2T_T$.

²⁸ Pour avoir une idée des méthodes utilisées pour déterminer les constantes harmoniques à partir des marégrammes, puis pour les utiliser pour la prédiction, on peut consulter les ouvrages suivants : Cartwright, D.E., *Tides - A scientific history*, Cambridge University Press, 1989 et Simon, B., *La marée océanique côtière*, Institut Océanographique éditeur, 2007.

²⁹ Thomson, W., The tide-gauge, tidal harmonic analyser and tide predictor, *Proceedings of the Institution of the Civil Engineer*, Londres, 65, 4-74, 1881.



Figure 11 : Le prédicteur de marée du S.H.O.M. à Brest, construit par Kelvin & Bottomley en 1924 sous le nom de TP n°6.

Il ne reste plus qu'à connaître les bonnes amplitudes - et les bonnes phases - pour les bonnes composantes périodiques (car on n'en considère toujours qu'un nombre limité). Amplitudes et phases sont appelées constantes harmoniques et l'analyse des marégrammes d'un lieu les fournit effectivement pour ce lieu, pour peu que l'enregistrement soit suffisamment long. Et cela peut être très long. Laplace a lancé de grandes campagnes d'enregistrement des hauteurs d'eau, préconisant des mesures continues sur une période d'au moins 18 années³⁰. Il lui faudra attendre 1822, et 15 années de mesures soignées pour être capable de séparer certaines composantes.

Il nous reste à comprendre pourquoi, car $t \mapsto h(t)$ n'est pas périodique. Le résultat de Fourier ne s'applique donc pas à h . Par contre, chaque composante h_i est périodique et peut-être approchée par un polynôme trigonométrique d'un certain degré N que l'on note P_N . On a

$$h_i(t) \approx P_N(t) = A_0 + \sum_{n=1}^N A_n \cos(\omega_n t) + \sum_{n=1}^N B_n \sin(\omega_n t)$$

où les ω_n sont pris parmi les fréquences toutes distinctes de type $m\omega_i$ (certains multiples

³⁰ L'enregistrement des hauteurs d'eau n'a été automatisé que dans les années 1850. C'était donc une entreprise très délicate à mener à bien sur une si grande période. Il faut noter que l'existence des enregistrements faits à Brest de 1771 à 1776 était déjà remarquable et rare à cette époque.

des ω_i). Alors, il est remarquable que pour tout nombre réel S , on ait

$$\frac{2}{T} \int_S^{S+T} P_N(t) \cos(\omega_n t) dt \rightarrow A_n, \quad \frac{2}{T} \int_S^{S+T} P_N(t) \sin(\omega_n t) dt \rightarrow B_n, \quad \frac{1}{T} \int_S^{S+T} P_N(t) \rightarrow A_0$$

quand $T \rightarrow \infty$.

Ainsi, si les hauteurs d'eau sont enregistrées sur des périodes suffisamment longues, on peut déterminer les constantes harmoniques qui permettent de prédire la marée pour l'année à venir en un lieu par l'analyse harmonique de ses marégrammes.

7. Conclusion

L'histoire des prédicteurs de marée est très riche et on le comprend mieux, espérons-nous, complémentaire de celle des instruments mécaniques d'intégration tels que les analyseurs harmoniques. Ces deux thèmes se développent au sein de l'I.R.E.M. de Brest autour de l'auteur et de E. Rannou, et en collaboration avec M.-J. Durand-Richard ³¹. En juillet 2009, une convention a été signée entre l'I.R.E.M. (pour l'U.B.O.) et le S.H.O.M. pour exploiter ses archives disponibles sur l'histoire de la prédiction des hauteurs d'eau à Brest (pour Brest et de nombreux autres ports dans le monde) et l'analyse harmonique des marées, et mettre en valeur l'histoire de son TP. C'est dans le cadre de cette convention que se placeront les travaux à venir sur ce sujet.

Remerciements : L'auteur remercie Ronan Créac'h, Lucia Pineau, Thierry Gendrieux et Louis Le Caignec pour leur accueil au S.H.O.M. dès sa première visite. Elle remercie aussi M. Le Goff qui lui a fait découvrir le fonctionnement du Tide Predictor n°6.

Crédits photographiques : les photos de l'analyseur harmonique et du planimètre polaire ont été prises par l'auteur ; les dessin et schéma de la figure 1 ont été gracieusement fournis par M.-J. Durand-Richard ; la photographie du TP a été prise et transmise par le S.H.O.M. dans le cadre de la convention S.H.O.M.-U.B.O. n°117/2009 ; la photographie de la première page est un clin d'œil, trouvée au hasard de recherches sur la toile.

³¹ Laboratoire de Recherches Épistémologiques et Historiques sur les Sciences Exactes et les Institutions Scientifiques.