

Des outils informatiques modernes pour décrypter une figure (fausse ?) de Descartes

Luc Sinègre
IREM de Rouen

Introduction

La question soulevée dans ce texte, *comment les outils de la géométrie dynamique peuvent aider à comprendre et même "redresser" une figure de Descartes*, s'inscrit dans une recherche épistémologique beaucoup plus vaste. Ce travail, qui a déjà été commenté et partiellement résumé¹, ne peut pas être repris, ici, en détails. Je commence toutefois par redonner les grandes lignes du problème afin que le lecteur puisse comprendre à quelle situation la figure est associée.

La *Propositio* de Descartes

Ce texte² latin de Descartes (1641) est une réponse à un vieux problème géométrique posé à la communauté mathématique de l'époque par Desargues. Il commence par l'énoncé de la proposition.

Étant donnée une section conique quelconque et un point quelconque situé hors de son plan, on cherche un cercle qui soit une base du cône que décrira une ligne droite, menée du point donné, pris comme sommet en tournant autour de la section conique ; en effet, il est évident que la surface ainsi décrite est conique, ce qu'on peut démontrer facilement, après avoir trouvé le cercle qui lui sert de base.

Descartes affirme donc être en mesure de reconstruire les sections circulaires de cônes dont les bases sont des coniques quelconques.

La résolution est méthodique et d'ordre algorithmique. On considère des cas de plus en plus généraux, chaque cas se ramenant à un cas déjà traité antérieurement.

- Le premier cas est celui où la base du cône est elliptique et centrée sur la projection orthogonale du sommet ;
- le deuxième cas arrive lorsque la base est l'une quelconque des trois coniques et lorsque le sommet a sa projection orthogonale sur l'un des axes principaux de la conique ;

¹ Hamel, Sinègre, Warusfel, Sur une proposition de Descartes, dans *Histoire du calcul, de la Géométrie à l'Algèbre*, Sinègre dir., chez Vuibert, juillet 2009, et Hamel, Sinègre, Warusfel, Le problème des figures qui accompagnent une proposition peu connue de Descartes sur les cônes, *La figure et le geste*, Actes du colloque d'épistémologie de Nancy (2007).

² Adam et Tannery (1899), pages 708-714 du volume III.

- dans le troisième cas, la base est parabolique et la situation du sommet quelconque ;
- le quatrième cas, qui est une généralisation du troisième cas quand la base est elliptique ou hyperbolique, est à peine effleuré par l'auteur.

Les démonstrations des deux premiers cas, le second se déclinant lui-même en quatre sous-cas, sont entièrement géométriques et assez simples. À partir du troisième cas, c'est différent. Quatre ans après la publication de la *Géométrie*, ce texte applique ce que Descartes vient d'exposer à une situation nouvelle. Il ne s'agit d'ailleurs pas de "représenter" les points, mais de construire géométriquement une solution d'une équation du troisième degré.

La tactique générale

Pour construire une section dont le centre serait le projeté orthogonal du sommet du cône, Descartes fait tourner un plan autour d'une tangente en un point bien choisi de la base.

Sur la figure 1, à partir d'un diamètre $[BC]$ de la conique de base Γ , on choisit dans le triangle BAC le point L de la génératrice $[AC]$ telle que LAB soit isocèle en A . La droite (BL) détermine alors, avec la tangente $(B\Delta)$, un plan de coupe. Dans les sections du cône par ces plans, le diamètre conjugué de $[BL]$ dans la section conique γ est parallèle à la tangente $(B\Delta)$. Pour que le plan de la section soit orthogonal à (AD) , si on note D le milieu de $[BL]$, il suffit donc de faire en sorte que la tangente $(B\Delta)$ soit orthogonale au plan (BAC) .

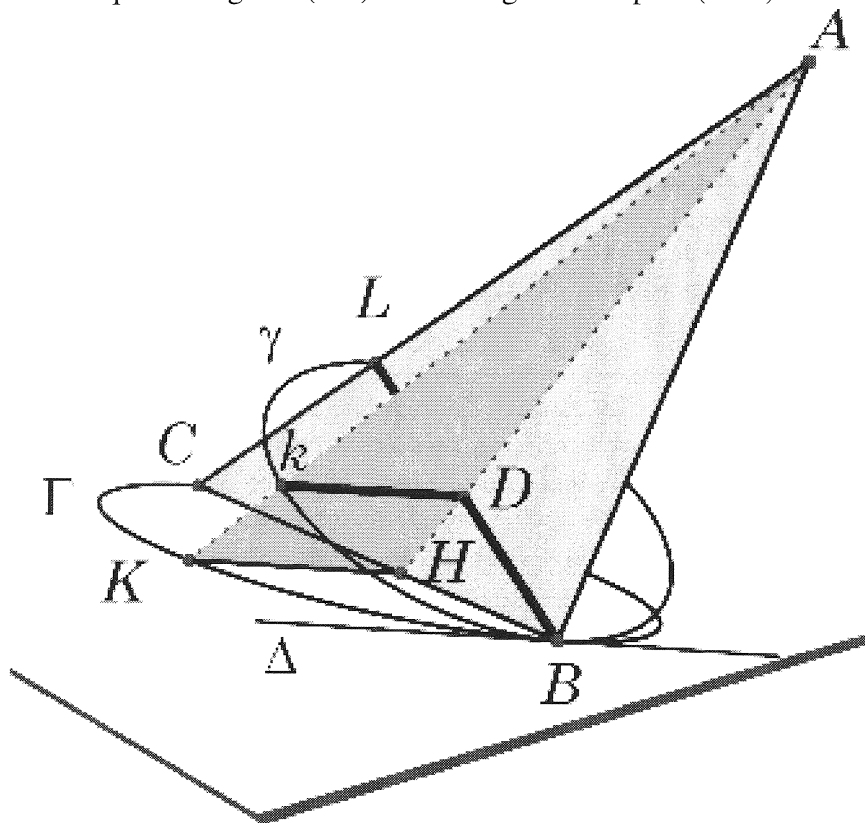


Figure 1.

Dans les premiers cas, cette condition est très facile à réaliser car la figure possède toujours un plan de symétrie.

L'équation du Tertius

Dans le troisième cas, comme la base est parabolique et la situation du sommet quelconque, le point B n'est plus offert par un plan de symétrie. Descartes traduit la condition

spatiale d'orthogonalité par une condition analytique plane en introduisant $x = BN$, distance de B à son projeté sur l'axe principal de la conique. Ne sont donc associés à des coordonnées³ que certains points du plan de base.

Il note a la distance du sommet A du cône au sommet G de la parabole, b la distance entre le projeté E de A sur le plan de la parabole et F le projeté sur son axe, c la distance entre F et Y un point de l'axe qu'il a utilisé dans la *Géométrie* pour construire les solutions des équations cubiques par intersection d'un cercle et d'une parabole, et enfin r le paramètre⁴ de la parabole. Donc avec $a = AG$, $b = EF$, $c = FY$, $2GY = r$ on trouve *par analyse* (comme le dit Descartes sans expliciter complètement son calcul),

$$x^3 = +\frac{a^2}{b}x^2 - \frac{c^2}{b}x^2 + crx - \frac{1}{4}br^2.$$

Le point B , s'obtient alors facilement, dit-il, à partir de cette équation, par sa *Géométrie*. Mais, pour éviter d'effectuer de longs calculs, Descartes, pour construire le point B sur la figure⁵ 2, ne traite que le cas où $a = c$ dans la construction. C'est précisément cette figure que nous avons choisie de commenter.

L'utilisation de Cabri II

Après avoir créé un rectangle sous *Cabri* on peut lui associer une image .jpg. Évidemment, il faut prendre la peine de repérer, grâce à un logiciel de photographie, le rapport longueur sur largeur de l'image et le respecter, pour obtenir une copie isométrique⁶. Une fois cette petite opération achevée, tous les outils de *Cabri* sont opérationnels pour analyser la figure.

Sur la gravure de Clerselier, le point ambigu est le point Y , mais on peut repérer ce point puisque l'on sait que R a pour abscisse la moitié de $c+r$. On mesure avec *Cabri* $GR = 4,53$ et $FG = 3,79$, on obtient donc le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}c = 4,53 \\ c - \frac{1}{2}r = 3,79 \end{cases}$$

qui fournit $c = 5,55$ et $r = 3,51$ ⁷.

Les positions de B

Pour construire le point B qui correspond au cas particulier de la figure 2 (où $a=c$), il faut construire une solution $x=BN$ de l'équation

$$x^3 - crx + \frac{1}{4}br^2 = 0.$$

³ Au sens moderne, car le mot est impropre.

⁴ Depuis Mydorge, on appelle *paramètre* le *latus rectum* d'Apollonius. Mais ce paramètre est le double du nôtre et aussi le double de GY .

⁵ La plus ancienne édition de ce texte, dont l'original est perdu, est celle de Clerselier. Elle contient la figure que nous avons choisi de commenter. *Lettres de M. Descartes*, Tome 3, où sont traitées les plus belles questions de la morale, de la physique, de la médecine et des mathématiques, publié par Claude Clerselier, C. Angot (Paris), 1657-1667, p.475-479.

⁶ Le plus simple consiste à créer un carré qui respectera les proportions d'une image extraite par un *Copier-Coller* de la photographie par l'outil *Carré* (*Rectangle*, *shift* enfoncé).

⁷ On peut aussi chercher par tâtonnements une parabole qui s'ajuste aussi bien que possible sur celle de la gravure (en modifiant foyer et directrice symétriquement par rapport à G).

Pour ce faire, Descartes ajoute la racine nulle et transforme l'équation obtenue,

$$x^4 - crx^2 + \frac{1}{4}br^2x = 0$$

par le changement de variable $x^2 = ry$. Ceci donne

$$y^2 - cy + \frac{bx}{4} = 0,$$

soit encore $x^2 + y^2 - (r+c)y + \frac{bx}{4} = 0$, équation d'un cercle de centre S de coordonnées $(-\frac{b}{8}, \frac{r+c}{2})$. On cherche donc l'intersection du cercle de centre S et passant par l'origine G avec la parabole de sommet G .

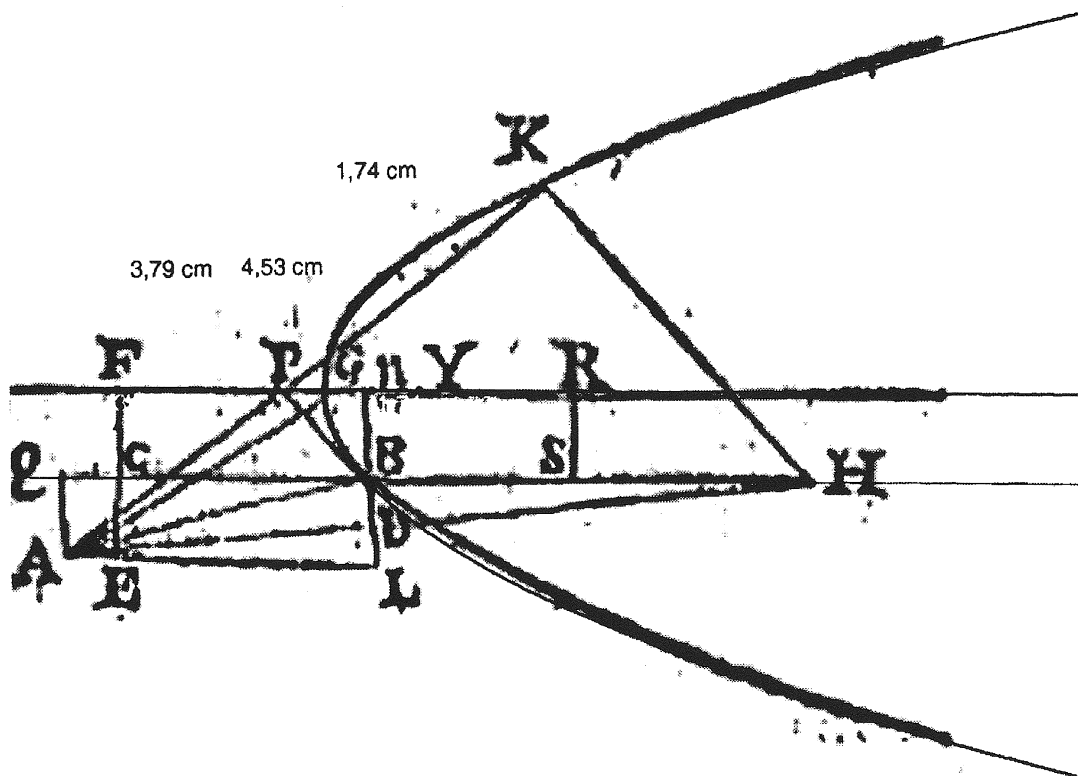


Figure 2.

On sait que l'édition originale (et donc sans doute aussi le manuscrit perdu de Descartes) contient sur ce point une erreur, puisque le texte a remplacé le huitième par un demi en changeant le signe. Cette erreur est compatible avec la figure, car c'est bien le point S de coordonnées $(\frac{b}{2}, \frac{r+c}{2})$ qu'a tracé l'auteur de la figure. Mais le S dévoile qu'une autre erreur a été commise, erreur de signe cette fois, puisque le point est placé du mauvais côté de l'axe de symétrie de la parabole.

Le point B devrait être à l'intersection du cercle de centre S passant par G avec la parabole, mais la vérification montre qu'il n'en est rien (cf. le cercle le plus bas). Il est probable qu'une deuxième erreur se serait ajoutée à la première. La médiatrice de $[GB]$ rencontre la droite (SR)

du bon côté, au point S' qui n'est pas si loin du point s qui aurait du être au bon endroit compte tenu de l'erreur de calcul ($b/2$ à la place de $b/8$). On a indiqué sur la figure le point correct S'' centre du cercle de rayon $S''G$ qui rencontre la parabole au bon point B'' très près du sommet.

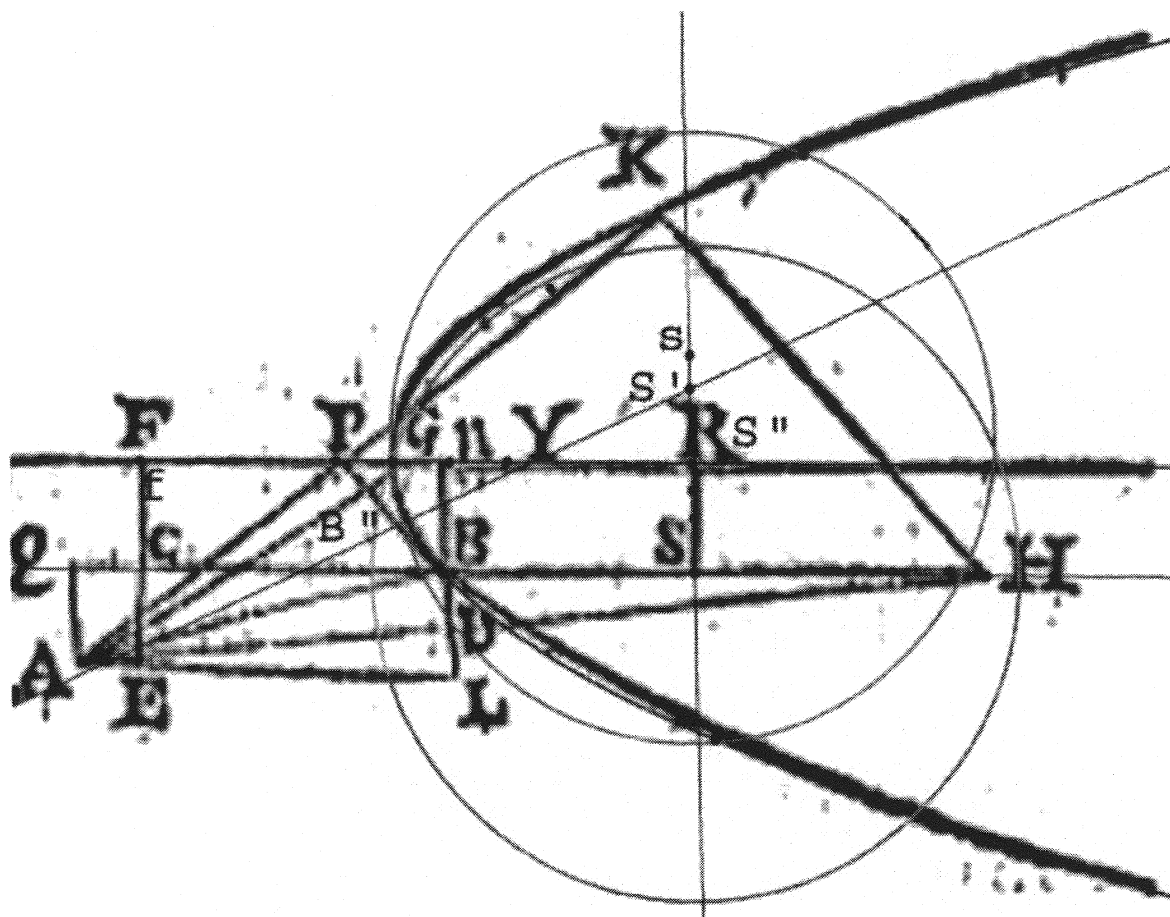


Figure 3.

Il est donc certain que le point B n'a été construit ni à partir du point S indiqué sur la figure, ni de son symétrique exact (en cohérence avec l'erreur de calcul algébrique).

Si l'on admet que la largeur de la figure de Clerselier fait environ 10 centimètres, ce qui est raisonnable, la réelle valeur de b est de 1,5 centimètre et la différence entre $b/8$ et $b/4$ fait moins de 2 millimètres !

Le point B sur lequel repose la suite est donc faux, à plusieurs titres. Mais comme, pour cette figure, l'auteur n'a sans doute pas respecté toutes les règles de construction qu'il professe, malgré plusieurs erreurs, ce point B se retrouve très près du véritable point⁸.

Le problème du point A

Descartes a représenté le point A dans le plan de base, c'est-à-dire dans celui de la parabole. Ce n'est évidemment qu'une trace du point A de la situation spatiale que nous noterons dans la suite A_s pour éviter les confusions. Le texte nous dit que A_s a pour projection orthogonale sur le plan de la parabole le point E. Le dessin n'est donc pas une *vue de dessus* puisque ces points

⁸ Par malchance, dans cette situation, une petite variation de B , ou de x , entraîne de grandes variations pour les autres points qui vont en dépendre. C'est le problème de cette méthode de construction qui induit de grandes variations sur la racine à partir de tous petits changements sur le centre du cercle.

on cherche le point a rabattu du point A_s autour de la perpendiculaire (m') en P à l'axe, on trouve un point situé à 1 millimètre de A sur la figure d'origine.

Sur la même figure 4, on peut placer un point bien étrange de la gravure d'origine, le point Q (par intersection de deux cercles de centre F et G par exemple).

Si l'on conjecture que le point Q peut être lui aussi produit par rabattement à partir du point A_s , on trouve une droite (d) qui est très proche de B et presque orthogonale à la tangente à la parabole (BP). Inversement, si l'on cherche quel point du plan est le rabattu du point A_s autour de la normale en B à la parabole, on trouve le point q qui, replacé sur la figure, serait à 4 millimètres de Q !

Plus précisément, pour respecter le texte, il faut admettre que le point Q appartient à la parallèle en B à l'axe de la parabole. Ce point serait donc obtenu à partir de A_s par deux rabattements. Le premier, autour de la normale en B , envoie A_s sur q . Le second, simple rotation autour de B , envoie q sur notre point Q . Cette précision efface les 4 millimètres que l'on venait de trouver.

Tout laisse donc supposer que le point A a été rabattu dans deux directions différentes. Au début du calcul algébrique, Descartes invite d'ailleurs le lecteur à calculer A_sB et PB .

L'analyse qu'on doit faire pour trouver le point B est la suivante. Étant données ou posées les grandeurs AG , EF , FY , YG , GN et NB , on cherche AB et aussi BP , tangente à la parabole en B ...

La représentation plane adoptée permet donc, si notre hypothèse est correcte, de lire la première longueur calculée (et de vérifier le calcul ?) sur la figure puisque $A_sB = qB = QB$. Cette mesure lui donne la longueur du côté du triangle isocèle BAL_s^9 .

Le texte nous invite alors (avec nos notations) à construire le point H comme le symétrique de Q par rapport à B . La figure, qui est incohérente, ne permet pas de vérifier cette propriété. En effet l'égalité $BH = c = FY$ est certaine et devrait nous amener à modifier la position du point Y . Ceci produit une parabole très évasée et très éloignée de la parabole d'origine.

Pour résoudre ce paradoxe, j'ai corrigé la position du point H en supposant qu'une inversion s'était produite à la gravure. L'angle droit du triangle AHK n'est pas placé au bon endroit. Mais même avec le point H corrigé, l'angle AKH au sol ou dans l'espace est encore très près d'être droit si l'on utilise le point B erroné. Cela est une conséquence de la grande variabilité de la figure en fonction de GN .

Le point L

Le point L_s de la figure spatiale est le quatrième sommet du parallélogramme A_sBHL_s . Comment Descartes a-t-il choisi de le représenter au sol ?

⁹ Notons w le projeté orthogonal de E sur la normale en B et t l'intersection de (FE) avec la parallèle en B à l'axe. On a $BE^2 - Bq^2 = wE^2 - wq^2$; c'est la puissance du point E par rapport au cercle de centre w et de rayon wq . Mais comme E est sur l'axe radical des deux cercles (pour le comprendre, il suffit de se rappeler qu'il appartient au plan radical des deux sphères correspondantes), c'est aussi la puissance du point E par rapport au premier cercle que nous noterons $-Ee^2$.

On a donc $Bq^2 = BE^2 + Ee^2$ et comme $BE^2 = Bt^2 + tE^2 = (y + (c - r/2))^2 + (c - x)^2$,

$$A_sB^2 = Bq^2 = (y + (c - r/2))^2 + (c - x)^2 + a^2 - b^2 - (c - r/2)^2,$$

$$A_sB^2 = \left(\frac{x^2}{r} + (c - r/2) \right)^2 + (c - x)^2 + a^2 - b^2 - (c - r/2)^2.$$

Pour compléter la démarche de Descartes, nous avons déjà calculé, spatialement cette distance. On voit ici comment notre interprétation de la figure permet d'arriver au même résultat de manière à la fois simple et plane.

puisque l'erreur initiale du $b/2$ compliquée par le pataquès autour du point B a obscurci l'ensemble.

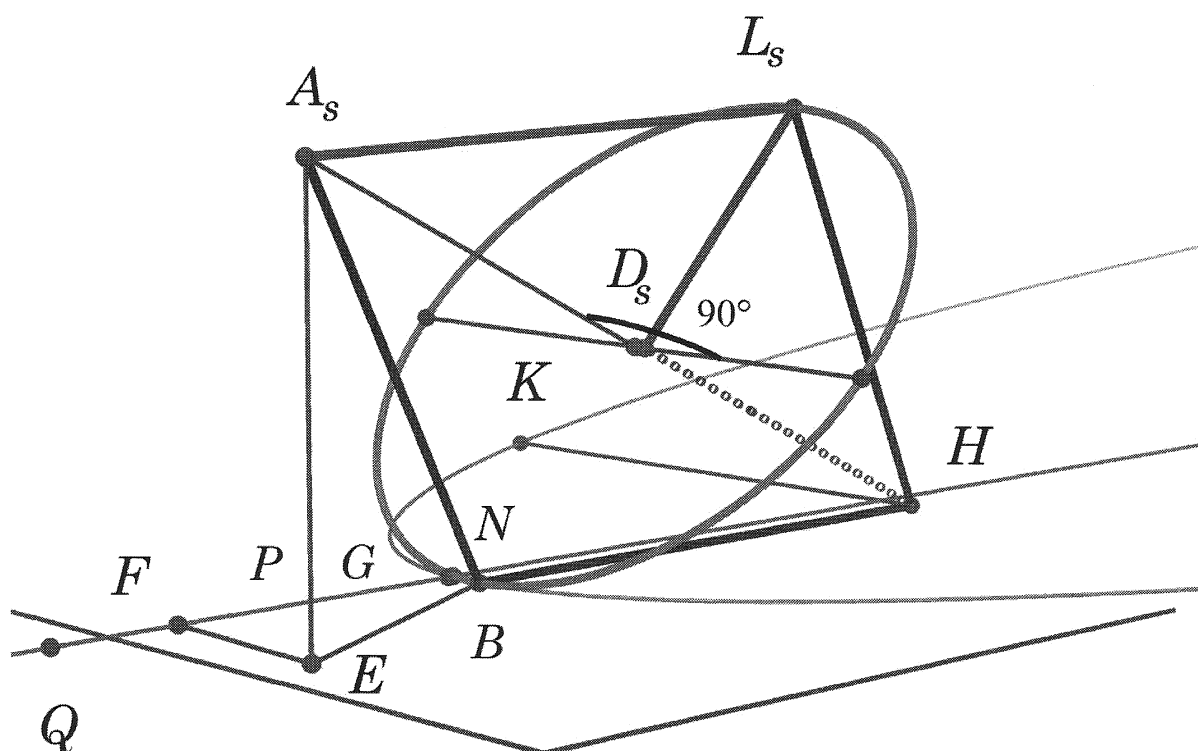


Figure 6.

Pour confirmer mon analyse, je dois donc rebâtir une figure spatiale à partir d'une situation où le point B serait juste. Dans ce cas, le point A_s se projette orthogonalement sur le centre D_s de l'ellipse qui est la section singulière recherchée (voir figure 6). Et l'angle A_sHK est droit.

Les places les plus probables

Nous venons de voir comment les deux versions de *Cabri* permettent de poser plusieurs hypothèses de rabattements quant aux points que nous cherchions. À chaque fois, il est difficile de trancher, car de faibles variations des positions des points de départ entraînent des modifications importantes. Comme nous n'avons pas le manuscrit de Descartes et donc la figure originale (qui était probablement fautive), on est obligé de travailler sur une figure qui est déjà passée dans les mains d'un graveur sur bois, lui-même œuvrant après la mort du maître et sans doute sans que quiconque ait pu le guider.

Mais l'étude générale du texte de Descartes, que j'ai menée avec André Warusfel et Thierry Hamel, m'amène à privilégier certaines de ces éventualités. J'ai fait ailleurs¹⁰ l'hypothèse que

¹⁰ Cf. *Le problème des figures qui accompagnent une proposition peu connue de Descartes sur les cônes*, op. cité.

cet algorithme cartésien était un algorithme de construction. Mais ces constructions, qui figurent des situations spatiales, sont effectives dans le plan, où certains points spatiaux ont été rabattus. Les points les plus probables sont donc ceux qui permettent la construction la plus simple.

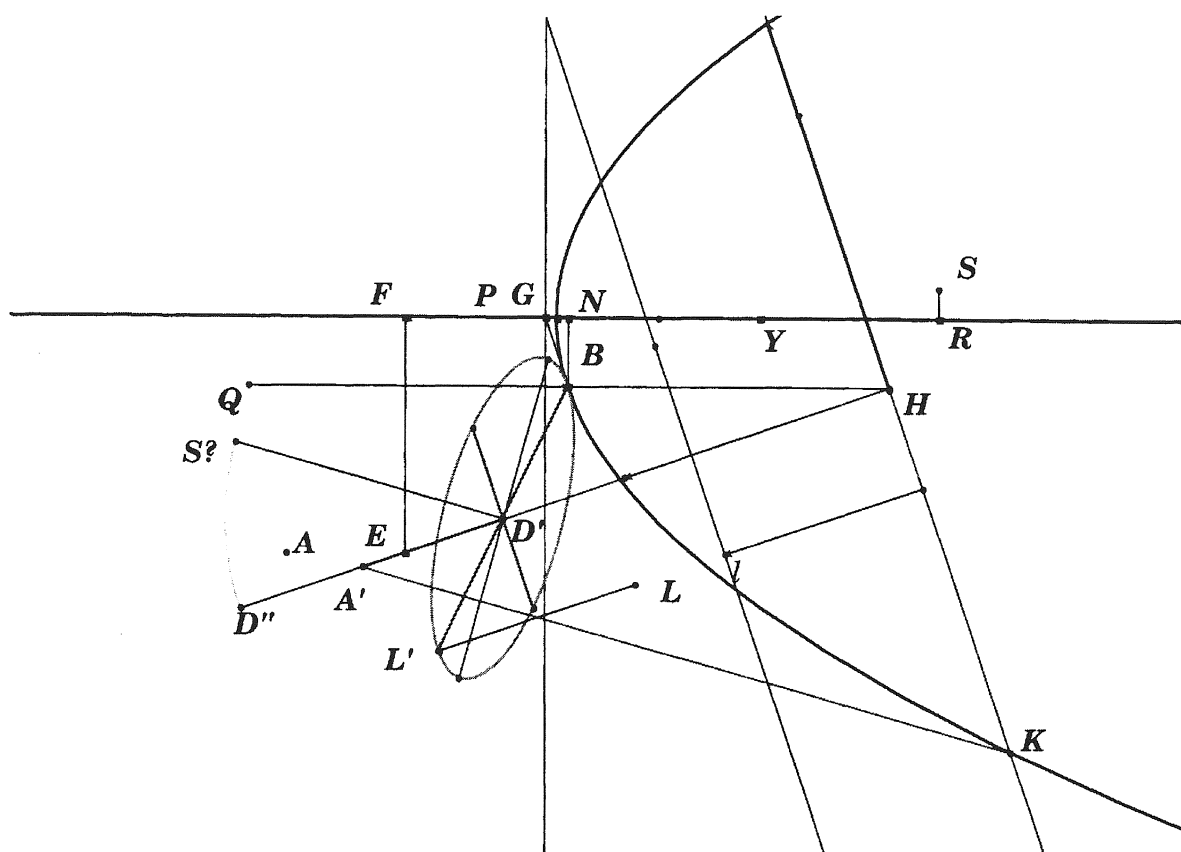


Figure 7.

Quelle est la question ? Il nous faut imaginer comment Descartes pouvait tracer, à partir d'un cône défini par une parabole et un sommet A_S , une ellipse homologique, associée à un centre D et un nouveau sommet A' tel que $A_S D_S = A' D$. Au départ, le sommet A_S est déterminé par sa projection orthogonale E sur le plan de base. L'ellipse recherchée est une section du même cône sur laquelle le sommet se projette orthogonalement en son centre.

Je ne reviens pas sur la construction de B . Je pense qu'il a rabattu d'abord le point A_S suivant la normale en B à la parabole sur le point q , point qui est lui-même rabattu sur la parallèle à l'axe passant par B en Q ($BA_S = Bq = BQ$). Le point H est alors le symétrique de Q par rapport à B ; il permet d'obtenir le point K . Le point A' est alors le rabattu du point A_S autour de la droite (HK) . Le milieu D_S de $A_S H$ est lui-même rabattu sur D , si bien que, par symétrie, on peut tracer au sol le parallélogramme $A'BHL$ ¹¹. Ce rabattement est surtout utile pour visualiser la figure, si on a compris les conventions.

On opère ensuite une nouvelle rotation autour de la tangente en B . Dans une figure précédente, Descartes a déjà utilisé ce type de *double-rotation*, donc cette hypothèse est plausible. Elle envoie alors le point L_S sur un nouveau point que je note L' . Ce point L' est l'image de L , précédemment placé, par la translation qui envoie (HK) sur la tangente. Ceci

¹¹ C'est la raison qui m'a fait préférer le point A' au point A qui est rabattu autour de la perpendiculaire en P à l'axe.

permet aussi de rabattre D sur D' et, comme la conjugaison de la section elliptique est conservée, l'autre diamètre est facile à construire.

La représentation du sommet A_5 dans le plan (noté S sur la figure) peut être placé en distance par rapport à D' le centre puisque $SD' = A'H/2$; hélas, à moins de savoir rechercher les directions principales de l'ellipse trouvée, il n'est pas possible de le placer dans une *bonne position*. C'est le talon d'Achille de cette méthode.

Conclusion

En racontant comment j'ai introduit des logiciels de *géométrie dynamique* pour essayer de venir à bout d'une recherche historique, je n'ai pas voulu donner de modèle. Mais l'histoire est déjà intéressante par elle-même. Elle donnera peut-être l'envie de remonter vers les autres articles que nous avons écrits sur le sujet.

Mon but à Rennes était tout autre. Importer une figure extraite d'un livre ou d'un document pour mieux l'étudier, opérer des allers-retours *Cabri II-Cabri 3D* fournissent des applications de la *géométrie dynamique* assez originales.

Tout ceci donnera, je l'espère, à d'autres groupes de l'IREM, ou à d'autres enseignants, des idées pour bâtir des exercices ou des problèmes.

Cette étude permet aussi de réfléchir à la façon de représenter l'espace (vue aérienne, perspectives centrale ou cavalière) et à son histoire. Descartes sait comment Desargues introduit la géométrie projective. Mais il prend un point de vue très différent, entièrement métrique, car il pense sans doute que la géométrie projective ne permet pas de résoudre ce problème de nature métrique. Le paradoxe est pourtant que sa méthode le conduit à un problème affine qu'il ne voit pas¹², mais qu'il ne saurait pas résoudre : *Comment retrouver les directions principales à partir de deux directions conjuguées ?* Sa manière est très proche de celle que prenaient les charpentiers de l'époque pour construire au sol les éléments de charpentes qu'ils allaient ériger ensuite. Ce faisant, il livre une pièce importante qui devrait figurer dans l'épais dossier des textes qui ont préparé la *Géométrie de Monge*.

¹² Apollonius construit à deux reprises les directions principales d'une conique (à la fin du livre I et au livre II). Mais sa construction utilise la donnée de la conique elle-même (par exemple, pour rechercher les directions principales d'une ellipse, il construit les médiatrices d'un rectangle inscrit dans cette ellipse). Une construction directe à la règle et au compas est beaucoup plus sophistiquée (cf. Delteil et Caire, *Compléments de Géométrie* Paris, Baillièrre, p.199).