De l'architecture aux mathématiques : des lycéens sur le terrain

Pierre AGERON,
Odile JENVRIN,
Jean-Pierre LE GOFF,
IREM de Basse Normandie

Première partie : mise en contexte

I- Mathématiques et patrimoine : quelques idées

Dans la variété de nos expériences et des publics auxquels nous nous adressons, nous partageons la conviction qu'il est possible et fécond d'exploiter les objets du patrimoine local dans le contexte d'un enseignement de mathématiques. L'exemple qui sera développé plus loin est relatif au patrimoine bâti (crypte de l'abbatiale de la Trinité à Caen), mais il peut s'agir aussi de patrimoine pictural ou écrit. Parmi les thèmes que nous avons déjà expérimentés : la numération pseudo-romaine sur les pans de bois médiévaux, les entrelacs dans la sculpture romane, la perspective dans la peinture de la Renaissance, etc. Indépendamment de l'IREM, mais toujours à Caen, Matthieu Gaud a fait travailler des lycéens de Seconde sur les cercles tangents dans les roses gothiques de l'église Saint-Pierre (voir son article dans la revue *Repères IREM*, n° 70, pp. 79-97).

Pour nous, la culture historique ou architecturale ne sert pas de prétexte ou de béquille à la culture mathématique ou scientifique, pas davantage d'ailleurs que l'inverse. D'abord, parce que tabler *a priori* sur une motivation des élèves pour l'une ou l'autre risque de conduire à de sérieuses désillusions. Et surtout, parce qu'il ne s'agit pas de leur enrober une pilule amère dans un habillage sucré, mais de leur enseigner à marcher sur leurs deux jambes, humaniste et scientifique. La rigueur propre à chaque approche doit donc être intégralement préservée, même si certaines simplifications bien contrôlées sont évidemment légitimes.

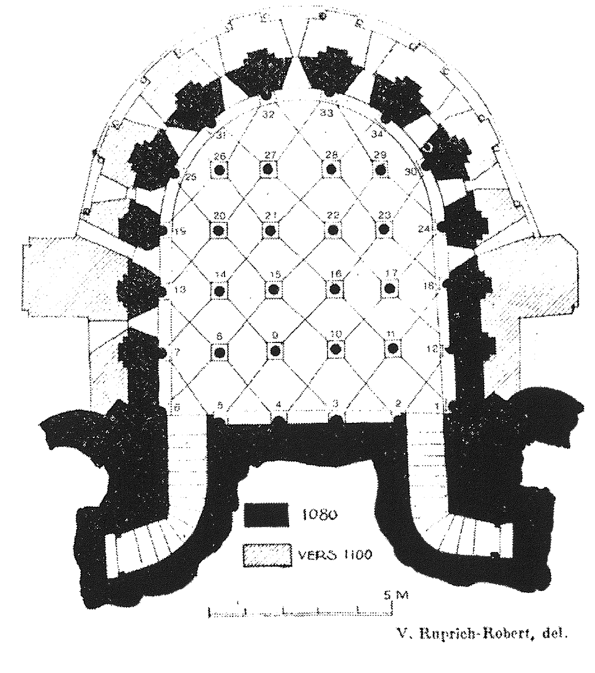
Notre intuition, confortée par diverses expériences, est que la motivation résultant d'une activité mixte est supérieure à l'addition des motivations. Exemplaire est à ce titre l'activité de modélisation dans la crypte de l'abbatiale de la Trinité tentée par Odile Jenvrin auprès de ses élèves de Première S : l'activité les a visiblement séduits et enrichis, à coup sûr bien davantage que ne l'auraient fait, isolément, une visite traditionnelle du monument ou des exercices de mathématiques sur les thèmes abordés.

Un aspect essentiel de la réussite d'une telle activité nous semble être la sortie hors des murs de l'école. Le choix du lieu est important : il doit se trouver au cœur de l'environnement quotidien des élèves, si possible accessible à pied, mais préférablement peu connu, un brin mystérieux et habituellement fermé au public. Cachots, cryptes, cours intérieures dissimulées, réserves de musées ou de bibliothèques sont quelques exemples possibles. Bien que notre ville soit riche en patrimoine ancien, nous pensons que la rareté de celui-ci dans certains quartiers n'est pas un réel obstacle, car des éléments contemporains peuvent autant être objets de curiosité et d'enquête. Dernière condition : en cas d'étude d'un objet architectural, ses dimensions doivent rester modestes afin qu'il soit possible de l'approcher, voire de le toucher. L'étude des objets lointains ou inaccessibles est intéressante, mais doit être abordée avec des publics déjà aguerris.

II- La crypte de la trinité de Caen et sa voûte d'arêtes

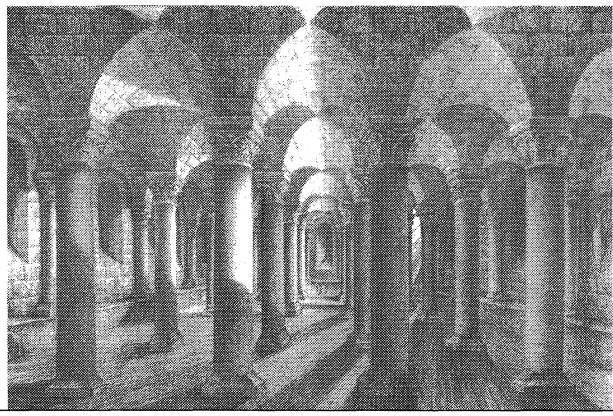
L'abbaye de la Trinité est une abbaye bénédictine féminine, fondée par Guillaume de Normandie et son épouse Mathilde en 1060. Son église, aujourd'hui église paroissiale Saint-Gilles, est un chef d'œuvre de l'art roman de Normandie. On sait qu'une première dédicace eut lieu en 1066. L'examen attentif des maçonneries du chœur révèle qu'il fut allongé, sans doute quelques dizaines d'années plus tard. Comme l'église se situait sur la pente d'un coteau, on dut construire en sous-œuvre de cette extension une crypte. On est surpris en y pénétrant de constater qu'elle reçoit la lumière du jour.

On descend à la crypte par un petit escalier. Une norme de sécurité y limite le nombre de personnes à vingt. On y découvre un réseau serré de colonnes : seize colonnes libres, ordonnées en quatre rangées de quatre, et dix-huit colonnes engagées dans les murs. Le couvrement est une voûte d'arêtes, type de voûtement bien connu dans l'art roman. C'est cet objet que les lycéens d'Odile Jenvrin ont étudié. A l'intention du lecteur, nous allons ici préciser un peu plus de quoi il s'agit, en utilisant quelques outils qui ne sont plus au programme des lycées (notamment des notions simples sur les coniques).



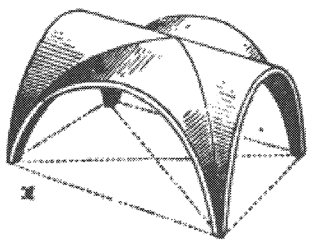
Ci-contre :
Plan de la crypte par V. Ruprich-Robert, avec le repérage des piliers et des chapiteaux.

Ci-dessous :
Vue d'ensemble, dessin par Ducarel.

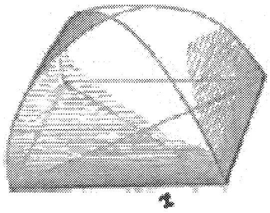


Le *couvrement* d'une pièce est ce qui la limite par le haut. Pour un mathématicien, c'est une surface de l'espace. Supposons que nous voulions couvrir un espace carré. Le plus simple est le banal plafond. Plus élégante est la *voûte en berceau plein-cintre* : autrement dit, en termes géométriques habituels, un segment de demi-cylindre de révolution, d'axe parallèle au sol. Ce dernier mode de couvrement privilégie une direction de notre carré, ce qui n'est pas en général le but recherché. Pour rétablir la symétrie, il est naturel de faire se croiser *deux* berceaux plein-cintre B et B', de même rayon et d'axes perpendiculaires. Mais pour que la circulation sous la voûte soit possible, il est alors nécessaire de retrancher certaines parties de ces berceaux. Deux possibilités, en quelque sorte duales l'une de l'autre, apparaissent :

retrancher de chaque berceau les parties qui sont sous l'autre, ou au contraire n'en conserver que les parties qui sont sous l'autre.



VOUTE D'ARÊTE.



VOUTE EN ARC DE CLOÎTRE.

Illustration tirée de Charles Blanc, *Grammaire des Arts du Dessin* (1867).

La voûte V obtenue dans le premier cas est appelée *voûte d'arêtes plein-cintre* (à gauche, vue du dessus et vue de l'intrados) ; la voûte V' obtenue dans le second cas est appelée *voûte en arc-de-cloître plein-cintre* (à droite, *idem*). La première ne s'appuie que sur les quatre coins du carré, alors que la seconde porte sur tout son périmètre (mais on la rencontre le plus souvent incomplète, dans un angle notamment). La réunion ensembliste de la voûte d'arêtes V et de la voûte en arc de cloître V' redonne les deux berceaux : $V \cup V' = B \cup B'$. L'intersection de V et V', qui est aussi celle de B et B', est la réunion de deux arêtes A et A' (deux arcs de courbe) se croisant en un point Q au faîte de la voûte : $V \cap V' = B \cap B' = A \cup A'$; $A \cap A' = \{Q\}$. Les arêtes A et A' apparaissent saillantes à quelqu'un qui déambule sous la voûte d'arêtes V et rentrantes lorsqu'il déambule sous la voûte en arc-de-cloître V'.

Une façon de reconnaître la nature de ces arêtes est de recourir à l'algèbre. Identifions l'espace physique à l'espace euclidien standard $\boldsymbol{R}^3$ et supposons que la surface à couvrir soit le carré $[-b,b]\times[-b,b]\times\{0\}$. On doit chercher l'intersection $B \cap B'$ des deux voûtes en berceau plein-cintre :

$$B = \{(x, y, z) / \, x^2 + z^2 = b^2 \text{ et } z \geq 0\} \text{ et } B' = \{(x, y, z) | \, y^2 + z^2 = b^2 \text{ et } z \geq 0\}.$$

Pour cela, on fait subir au repère canonique la rotation d'axe Oz et d'angle $\pi/4$. En notant X, Y et Z les coordonnées de (x, y, z) dans ce nouveau repère, on a :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(X - Y),\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + Y) \text{ et } z = Z.$$

La condition $(x,y,z) \in B \cap B'$ équivaut alors à

$$\frac{1}{\sqrt{2}}X^2 + \frac{1}{\sqrt{2}}Y^2 + Z^2 = b^2 \text{ et } XY = 0 \text{ et } Z \geq 0.$$

On voit ainsi que les arêtes d'une voûte d'arête (ou d'une voûte en arc-de-cloître) plein-cintre sont des demi-ellipses, l'une dans le plan OXZ et l'autre dans le plan OYZ. Leur demi-petit axe est b et leur demi-grand axe est $a = b\sqrt{2}$ (d'où une excentricité égale à $\frac{1}{\sqrt{2}}$). Le point $Q = (0, 0, b)$ est un point double (et $B \cap B'$ n'est pas une sous-variété de $\boldsymbol{R}^3$). Notons enfin, car c'est le modèle qui sera proposé aux élèves, que les équations de ces deux demi-ellipses peuvent être mises sous forme fonctionnelle :

$$Z = b\sqrt{1 - \frac{X^2}{2b^2}} \text{ et } Z = b\sqrt{1 - \frac{Y^2}{2b^2}}$$

La répartition régulière des colonnes dans la crypte de la Trinité de Caen fait apparaître son sol comme une réunion de carrés, délimités par les bases des colonnes. Le couvrement de la crypte consiste en une répétition du motif *voûte d'arêtes* dans chaque carré. Dans la réalité, ces carrés sont fort approximatifs, surtout lorsqu'on s'approche des murs de la crypte. Quant aux arêtes, dont la théorie nous dit qu'elles sont des demi-ellipses, il est certain que ce n'est pas comme telles que les bâtisseurs du XII$^{\text{ème}}$ siècle les ont construites : ils les voyaient plus vraisemblablement comme des *anses de panier*, ou *demi-ovales* obtenus par raccord continûment différentiable d'arcs de cercles. Dans la troisième partie de cet article, Jean-Pierre Le Goff approfondira cette question dans une perspective historique. Mais pour l'heure, il est temps de voir avec Odile Jenvrin comment elle a *envoyé ses lycéens sur le terrain*.

Pierre AGERON

Deuxième partie : des lycéens dans la crypte

Le professeur de mathématiques organise un enseignement pour ses élèves dont la totalité des contenus est inscrite dans le référentiel de la classe. Comme il doit traiter tous les contenus dans le temps de l'année scolaire, une contrainte forte est de finir le programme. Par conséquent, il ne suffit pas de trouver un sujet personnellement intéressant pour y consacrer du temps en classe. L'action présentée ci- après trouve sa porte d'entrée dans le référentiel de mathématiques de première S par la géométrie dans l'espace, tout en ouvrant aussi des prolongements dans la partie Analyse du référentiel.

Le professeur fait pour ses élèves l'hypothèse que les voûtes décrites dans la première partie montrent clairement l'intersection de deux cylindres de même diamètre et d'axes perpendiculaires.

D'un point de vue théorique, l'intersection est constituée de deux courbes qui sont des demi-ellipses dont les grand et petit axes sont directement mesurables sur place. Même si les coniques ne figurent plus dans les référentiels de filière S, l'équation du cylindre est étudiée en première S en géométrie dans l'espace. La conique peut-être proposée par le professeur dans sa formulation fonctionnelle par une racine carrée, où les constantes des grand et petit axes, respectivement a et b, sont visibles. D'une façon générale, le modèle théorique proposé aux élèves est :

$$Z = b\sqrt{1-\frac{X^2}{2b^2}}$$

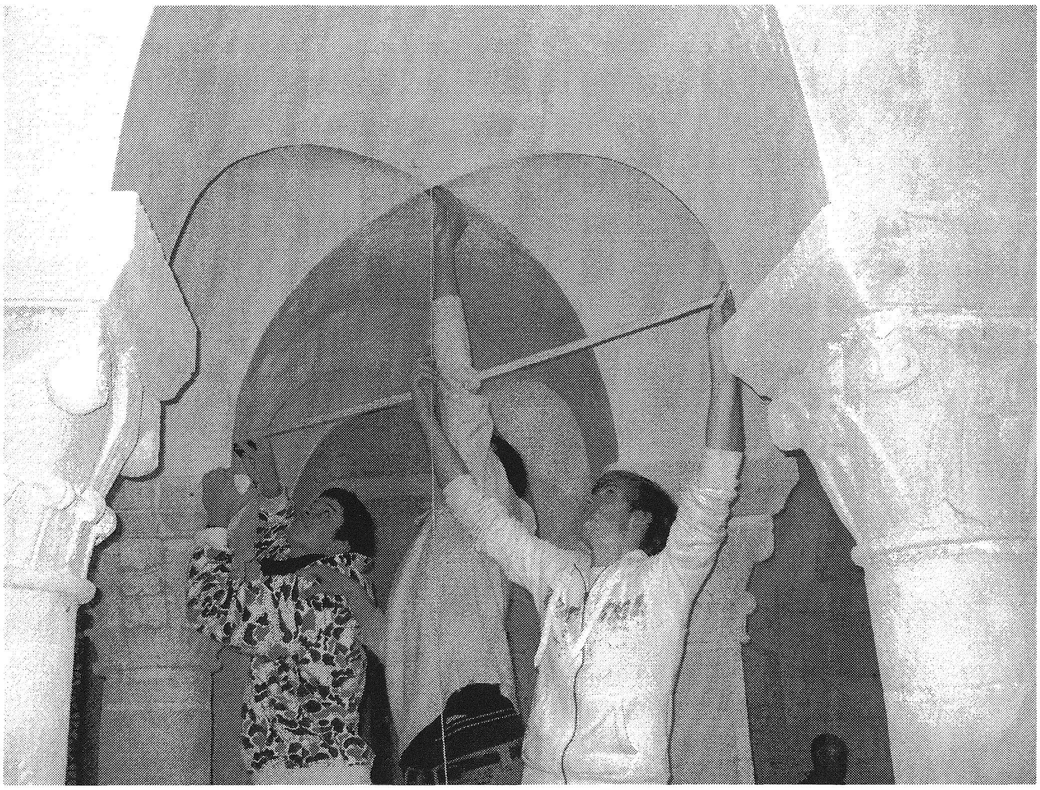
De plus, l'espace du lieu est assez *bas de plafond* pour rendre les mesures réalisables à hauteur d'homme, d'une part, et éveiller l'esprit critique des élèves sur la cohérence pratique de leurs relevés, puis de leurs calculs, d'autre part.

I- Des objectifs multiples pour deux heures de cours de mathématiques de Première S

Ce site de Saint-Gilles permet avec peu de contraintes matérielles d'atteindre plusieurs objectifs :

- visualiser un repère théorique $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ dans une situation matérielle réelle, et s'en servir ;
- graduer les axes et faire des relevés de hauteurs, dans ce cas facilités par l'utilisation d'un télémètre ;
- comprendre que le repère naturel de la situation n'est pas le repère le plus facile pour l'étude de la courbe, située matériellement *au-dessus de nos têtes*, puis visualiser un nouveau repère adapté $(O';\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$;

- utiliser un tableur pour entrer les relevés, calculer les *pseudo* relevés dans le second repère par soustraction de la hauteur du pilier (avec ou sans la corniche sculptée ?), avec la cellule active du tableur ;
- calculer, toujours par la cellule active du tableur, les valeurs dites théoriques proposées par la fonction du professeur, $z' = f(x) = b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$, où le professeur a remplacé les constantes a et b par des valeurs (qui ont *marché* pour lui auparavant) ;
- construire, par le tableur, une courbe de relevés expérimentaux et une courbe théorique dans le même repère ;
- analyser les deux courbes pour valider ou refuser le modèle théorique proposé sur la courbe de voûte d'arêtes étudiée.



Naturellement, le matériel étant de la maçonnerie, on espère que le modèle théorique proposé par le professeur ne correspondra pas bien au cas particulier étudié par le groupe d'élèves. La similitude des courbes le rendra juste assez crédible pour inciter les élèves à rejeter la fonction proposée puis à la modifier eux-mêmes. Ils pourront utiliser ici leurs mesures sur site (des grand et petit axes de l'ellipse) pour le nouvel énoncé de la fonction et enfin valider eux-mêmes leur proposition en s'appuyant sur de nouvelles courbes réalisées grâce au tableur.

De plus, on a voulu extraire le cours de mathématiques de la salle de classe en lui donnant un contenu concret et en sortant physiquement de l'établissement par dix minutes de marche à pied. Les élèves ont fait des mathématiques par équipe, assis par terre, l'un accroupi pour prendre des mesures, l'autre la tête en l'air pour viser le point rouge du télémètre sur la voûte, le troisième pour noter sur papier le relevé de mesure, le quatrième pour entrer en simultané dans le tableur de l'ordinateur portable, tous les élèves étant interchangeables à tous les postes. Le bilan positif sur l'image affective des mathématiques a clairement été formulé par les élèves unanimement contents.

II- La production finale des élèves (voir aussi un compte-rendu d'élève, dans l'encadré *infra*)

La production finale demandée est un rapport écrit individuel relatant l'expérience matérielle, son but annoncé, les relevés et leur traitement sur tableur, puis l'analyse et la réponse finale à la question posée au départ. C'est un exercice difficile en Première Scientifique : rédiger un écrit libre comportant des croquis à la façon d'un article de magazine scientifique rompt avec l'habituel cheminement sécurisé par des questions numérotées et imposées dans un ordre préétabli.

L'expérience montre que pour la forme, la quasi totalité des élèves ont voulu rédiger leur rapport à l'aide d'un traitement de texte en y insérant les tableaux et courbes du tableur. Pour le contenu, il leur a été difficile de rendre dès le premier compte-rendu la structure globale du travail réalisé : souvent, le positionnement du repère de l'espace a été oublié dans le texte, ou alors les courbes sont présentes, mais pas leur analyse. Beaucoup d'élèves ont tout simplement *oublié* de donner une réponse finale à la question posée au début de leur texte. Ces erreurs communes à l'ensemble du groupe classe ont donné lieu à une suite de propositions écrites pour le professeur pour encourager une deuxième version du compte-rendu. Ceci semble bien accepté par le fait qu'il s'agit de reprendre un fichier *traitement de texte* déjà existant pour l'améliorer.

III- Description de la séance devant les élèves

On prévoit deux heures de cours pour cette séance.

- En classe, la veille de la séance, on distribue une feuille d'instructions pratiques sur le matériel à emporter, des vêtements confortables, etc. dont le but est surtout de poser le problème que nous allons traiter : une photo de la voûte, puis le modèle mathématique que nous proposons d'y valider. Enfin, on pose une question qui nécessite une étude de terrain. Les groupes d'élèves sont nominativement constitués entre eux et les tâches pratiques à réaliser sont expliquées comme la prise de mesure avec un télémètre.
- Sur site, les élèves se mettent immédiatement au travail dès que le professeur a placé chaque groupe sur son lieu particulier. En effet, la crypte comportant seize colonnes, on a choisi au préalable sur quel carré de quatre colonnes chaque groupe allait étudier la voûte d'arête du *plafond*. Ceci est le travail d'équipe où chaque élève prend un rôle dans le groupe pour le transmettre à son voisin dès qu'il a fait une *manipulation*. Le lieu permet à plusieurs groupes de travailler le même problème sur des sites physiquement voisins tout en ayant des différences de mesures.
- Sur place, les élèves utilisent directement le tableur, analysent tout en regardant le lieu.
- De retour en classe, il s'est avéré nécessaire de reprendre le traitement des relevés en salle machines pour préciser la maîtrise du tableur, puis d'expliquer le compte-rendu écrit demandé en devoir à la maison.
- Après avoir rendu les devoirs corrigés, le professeur explique ce qui peut être amélioré dans une seconde version : il remet une liste des erreurs de construction logique du texte les plus fréquentes pour que chacun puisse reprendre son texte. On l'encourage en disant, par exemple, que la note ne pourra être que plus élevée pour le devoir maison.

- Sur place, le professeur est surpris d'entendre un élève lui dire que la courbe visée est une *conique*. En effet, les coniques ne figurant pas au référentiel, on avait pris soin de ne pas prononcer ce mot, ni celui de grand axe ou petit axe, afin de centrer leur réflexion sur l'objet d'étude lui-même. Après lui avoir demandé ce qu'il entend par *conique*, il montre sa calculatrice dans laquelle il avait visité tous les menus. Le menu *conique* de sa calculatrice lui propose des équations qu'il a lui-même rapprochées du modèle théorique proposé pour ce travail. Il avait donc associé une équation à ce nouveau mot *conique* : ce travail lui a permis d'associer un objet à sa première perception.

Auteur: M. Nicolas

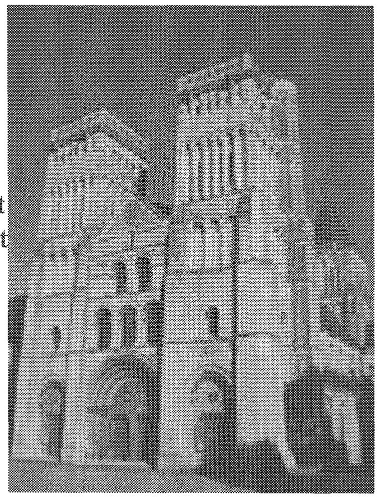
Participants: M. Baptiste
J. Marine
B. Marc-Antoine

Première S-SI
Jeudi 4 Novembre 2008

Crypte de l'Abbaye aux Dames

Nous avons expérimenté en un lieu d'art roman la faisabilité de poser un modèle mathématique, ici une fonction, sur une situation matérielle, puis en vérifier la validité, Ensuite nous avons traité les données relevées par un logiciel de calcul, OpenOffice calcul.
Le lieu d'art roman en question est la crypte de l'abbaye aux Dames se trouvant à Caen(14).

Une abbaye pleine d'histoire:



Cette abbaye a été construite au XI siècle par la Reine Mathilde qui était épouse de Guillaume le Conquérant. Cependant la reine Mathilde était la cousine éloignée de Guillaume, de ce fait ils n'auraient pas dû se marier car la religion interdisait de se marier avec une cousine étant antérieur à la 7ème génération. Par conséquent l'Eglise les a puni à construire à leur frais un couvent, l'Abbaye aux Dames, pour la reine Mathilde et un monastère, l'Abbaye aux Hommes, pour Guillaume.

Conjecture:

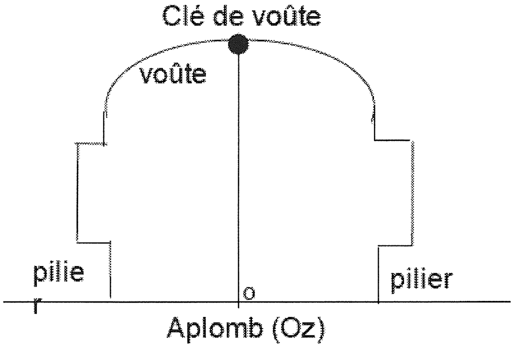
Le professeur nous a proposé une fonction numérique d'une variable réelle $z = f(x)$ dont le graphe est supposé être l'une des deux courbes de la voûte d'arêtes situées au dessus d'un carré au sol délimité par quatre piliers. La fonction du professeur est la suivante:

$$z = 0,29*\sqrt{(1-(x^2)/(0,70^2))}$$

Le but de notre étude est de comparer les relevés pratiques à la courbe théorique afin de voir si le modèle proposé est celui qui convient.

Procédure de prise de mesures:

Nous avons choisi une des deux courbes de la voûte d'arête, on a ensuite posé une grande feuille de papier en dessous qui nous a permis de tracer un repère direct, le trait se situant juste au-dessous de la courbe visée est l'axe Ox. L'origine du repère se situe à l'aplomb de la clé de voûte et l'aplomb constitue Oz. L'axe Ox est gradué tous les 10cm. Les mesures sont prisent tous les 10cm sur l'axe des abscisses jusqu'à la courbe.



Relever des mesures:

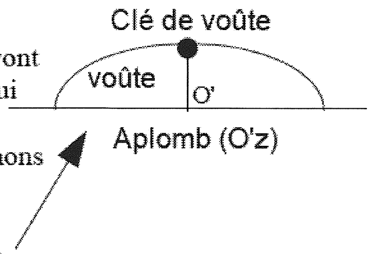
Abscisse	Côtes (axe Oz)	Côtes sans la Hauteur du Pilier	Côtes sans le pilier avec la formule théorique	Côtes sans le pilier avec notre modèle
-0,6	2,950	0,210	0,149	0,290
-0,5	3,068	0,328	0,203	0,360
-0,4	3,158	0,418	0,238	0,409
-0,3	3,186	0,446	0,262	0,443
-0,2	3,196	0,456	0,278	0,466
-0,1	3,221	0,481	0,287	0,479
0,0	3,223	0,483	0,290	0,483
0,1	3,217	0,477	0,287	0,479
0,2	3,212	0,472	0,278	0,466
0,3	3,195	0,455	0,262	0,443
0,4	3,164	0,424	0,238	0,409
0,5	3,109	0,369	0,203	0,360
0,6	3,049	0,309	0,149	0,290
0,7	2,936	0,196	0,000	0,173
	hauteur totale	hauteur totale-hauteur pilier	Z = 0,29*racine(1-(x²)/(0,70²	Z = 0,483*racine(1-(x²)/(0,75²

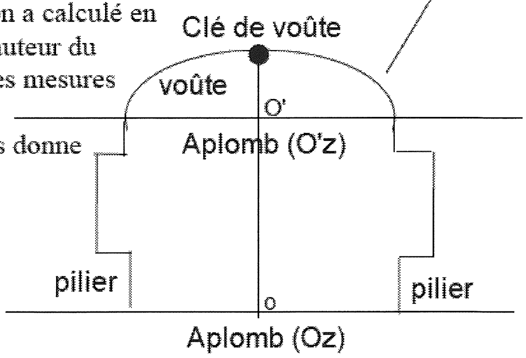
* hauteur du pilier = 2,74m

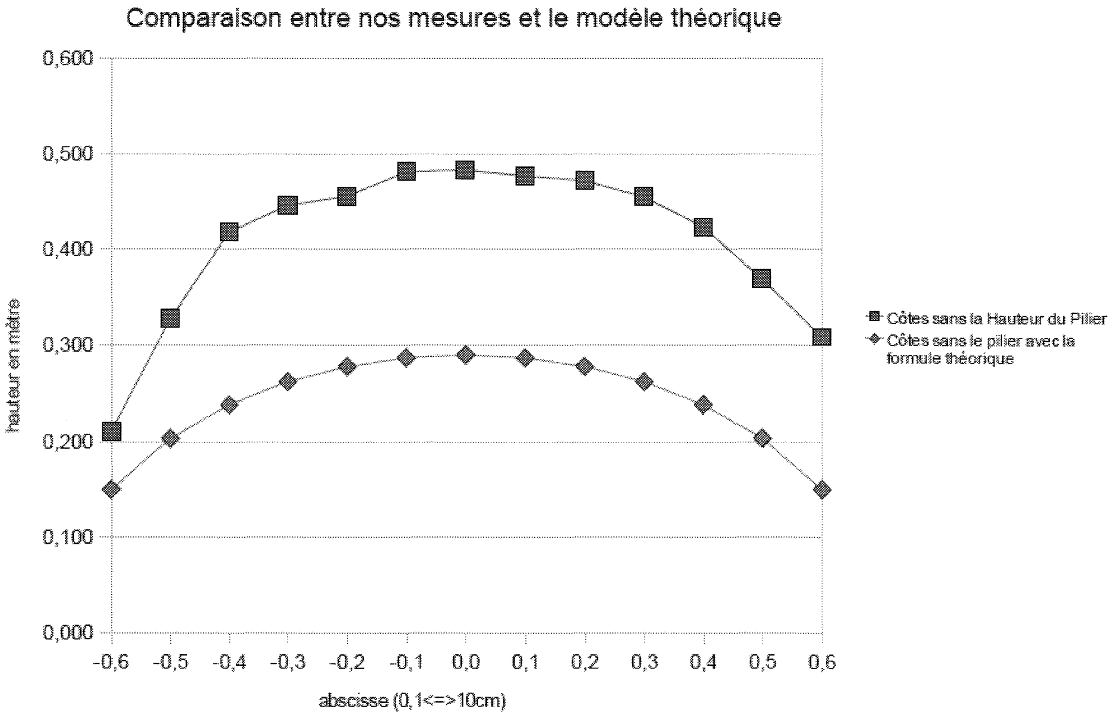
Une fois les mesures relevées, nous les avons exploitées avec un logiciel de calcul. De ce fait nous avons pu les comparer avec le modèle du professeur.

Interprétation mathématique:

Dans la première colonne se sont les repères de l'abscisse, ils vont de -0,6 à 0,7, on leurs attribuent la hauteur du sol jusqu'à la voûte, qui est en fait la hauteur de l'axe Oz. Ensuite on retire la hauteur du poteau qui est de 2,74m, ce qui nous amène au point O'. Nous obtenons donc la nouvelle hauteur O'z que l'on a calculé en soustrayant la hauteur totale, à la hauteur du pilier. Une fois que l'on a obtenu ces mesures on les comparent avec la formule théorique du professeur, ce qui nous donne une première courbe.







Sur cette courbe nous pouvons constater que le modèle proposé par le professeur ne correspond pas avec nos mesures donc il faut remettre en cause la conjecture et faire notre propre modèle.

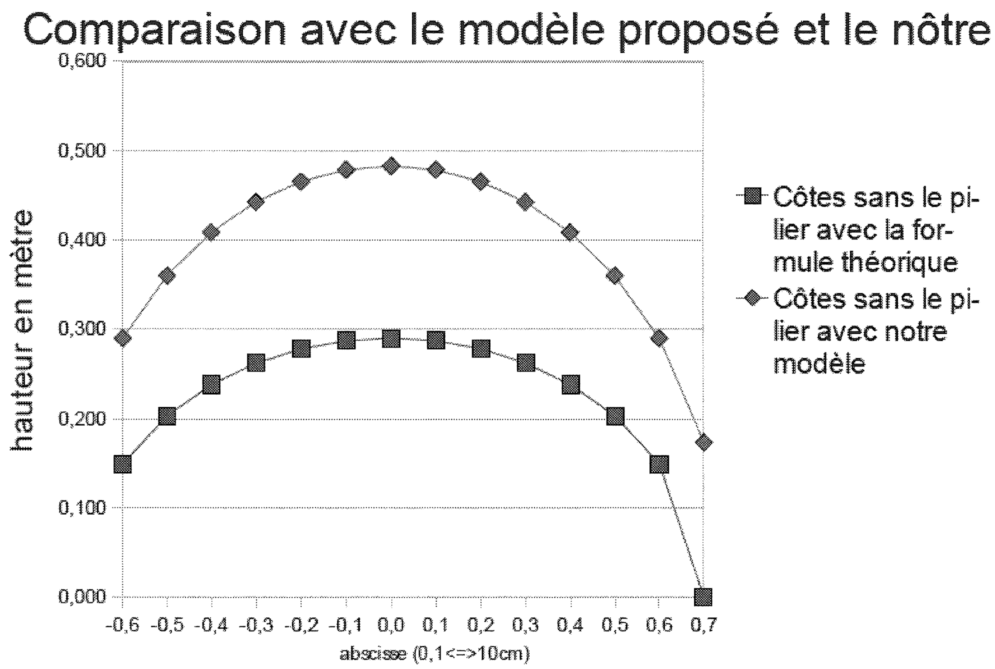
Pour notre modèle on va remplacer la première mesure du professeur, par la nôtre qui est: 0,483

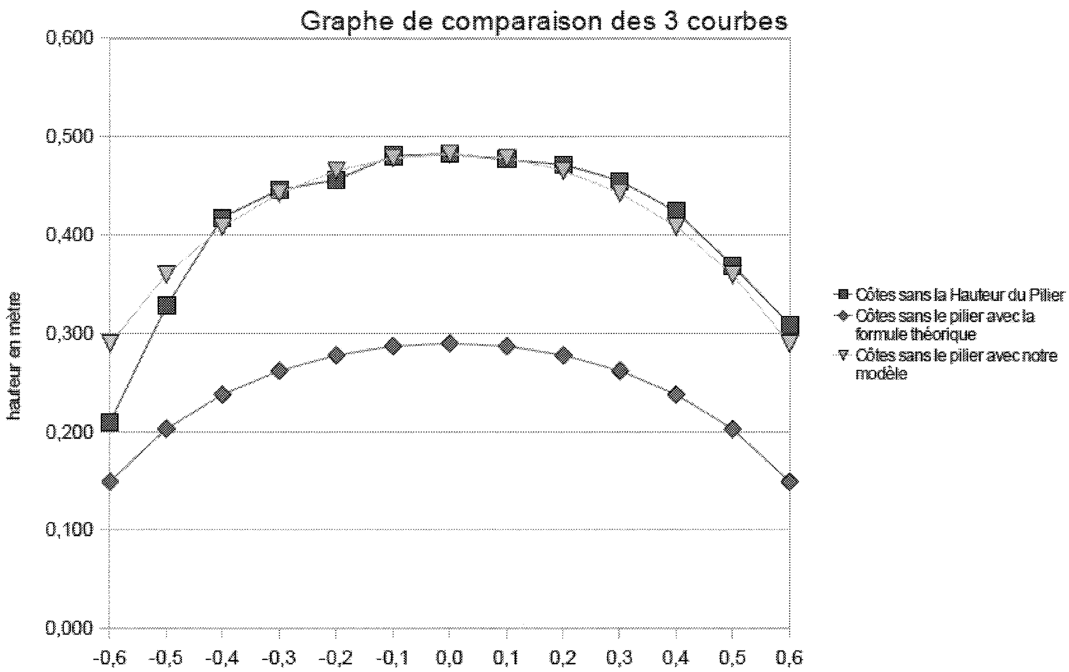
Modèle du professeur: z = 0,29*√(1-(x²)/(0,70²))

Ainsi que la moitié de la diagonale
car pour nous la diagonale mesure 1m506cm par conséquent on retiendra 0,75m.

Donc notre modèle est: z = 0,483*√(1-(x²)/(0,75²))

traçons maintenant la nouvelle courbe.





Conclusion:

On constate que les deux courbes peuvent se superposer, de ce fait on répond bien à la conjecture posée car le graphe de la courbe ressemble à la voûte. On peut donc retenir le modèle mathématique suivant: $z = 0{,}483*\sqrt{(1-(x^2)/(0{,}75^2))}$.

IV- Une histoire pédagogique en plusieurs épisodes

Pour mettre cette action au service du programme de mathématiques de Première Scientifique devant être couvert dans l'année, sa présentation est imaginée en plusieurs étapes réparties dans le temps.

Le premier épisode consiste à traiter la géométrie dans l'espace tôt dans l'année scolaire pour la réinvestir, et à la terminer par l'équation du cylindre. Le deuxième épisode est le déroulement de la séance ainsi que le devoir maison.

Plus tard dans l'année, en troisième épisode, lorsqu'on traitera les fonctions numériques avec leur étude et leur interprétation graphique, on reprendra en classe exactement l'étude de la fonction du modèle de la voûte d'arête. C'est une fonction irrationnelle, à la limite du programme de Première S et il faudra aider les élèves au moment du calcul de la fonction dérivée, par exemple à l'aide d'un logiciel de calcul formel :

$$f'(x) = -\frac{b}{a^2}\frac{x}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}$$

L'étude de signe qui suit propose alors un autre exemple d'expression positive que le récurrent *un carré est toujours positif* pour le dénominateur des dérivées de fonctions rationnelles.

La collègue d'histoire-géographie a saisi cette occasion pour replacer le contexte historique de la construction, les acteurs de l'époque, la Reine Mathilde, épouse de Guillaume le Conquérant, Duc de Normandie et Roi d'Angleterre, les raisons historiques de la construction l'Abbaye aux Dames et de l'Abbaye aux Hommes à Caen. Certains élèves ont repris ces points en introduction de leur compte-rendu de … mathématique.

Il était prévisible que cette initiative, au départ pour deux heures de cours élèves, déborderait en temps : elle a pris en réalité plutôt cinq heures, soit une semaine de *programme S*. Cependant, outre le ressenti des élèves très positif, j'espère qu'ils ont amélioré leur perception du modèle mathématique sur une situation matérielle, ce qui est la motivation essentielle pour l'épreuve pratique du bac S. Cette séquence a mis en œuvre autant le besoin d'un modèle théorique, la confrontation au réel par les relevés sur le terrain, qu'un usage motivé des TICE. C'est une action de formation sur le long terme qui se veut détachée de l'habituel devoir surveillé en temps limité. L'évaluation de la formation acquise ne peut être à mon sens qu'un devoir maison, individuel, avec documents et sans limitation de temps. La lecture des compte-rendus a aussi montré une capacité de vue globale de la situation chez certains élèves qui ne réussissent pas très bien habituellement au DS. Malheureusement, je ne pourrai pas conduire une seconde expérience de ce type avec ma classe .... si je veux *boucler le programme*.

V- Une suite possible…

Il est clair maintenant que je reconduirai ce travail avec d'autres groupes : je prendrai néanmoins la précaution au préalable de vérifier la maîtrise du tableur par les élèves. En effet, les élèves de cette expérience ont regretté de ne pas pouvoir finir leur étude sur site.

Cette situation pourrait aussi être exploitée pour mettre ensemble des élèves de première S et terminale S sur le même sujet d'étude, encourageant un travail coopératif. Les normes de sécurité de la crypte en sa qualité d'espace réduit ne l'ont pas permis cette fois.

Ce travail entre mathématiques et architecture peut être à mon sens élargi à mes élèves de classe européenne pour lesquels j'enseigne les mathématiques en anglais en DNL (Discipline Non Linguistique). Initialement, je recherchais un contenu possible pour un projet européen *eTwinning* dans lequel mes élèves français partageraient leurs travaux avec des lycéens d'un autre pays européen. J'ai expérimenté la faisabilité mathématique avec des élèves en le proposant en première S. Je pense maintenant que je peux transposer la démarche en anglais. De plus, si un collègue d'une autre matière y trouve une porte d'entrée pour l'éclairer d'un autre point de vue, qu'il soit libre de s'y associer.

Odile JENVRIN

Troisième partie : Notes historico-practico-géométriques sur la question des voûtes en architecture

I- La voûte comme objet pédagogique

Comme on vient de le dire et de le voir, la voûte est un objet pédagogique du plus grand intérêt. Nous allons nous attacher, dans cette troisième partie, à mettre en perspective historique l'objet en question et à mettre en évidence, chemin faisant, ce que cet objet peut concerner, à savoir :

- tous les niveaux d'enseignement : on peut y trouver des idées utiles pour le primaire jusqu'à l'université ;
- tous les terrains : géométrie spéculative et géométrie pratique ; celle des supposés *matheux* et celle des *utilisateurs* de mathématiques ;
- de nombreux champs de la mathématique : géométrie élémentaire, géométrie des coniques, calcul des fonctions, puis calcul intégral, etc., voire certaines branches des sciences physiques : statique des solides, ou encore des techniques : matériaux, modes de construction, etc.

Résumer une histoire de la théorie des voûtes en architecture est chose complexe car cette histoire est tissée de plusieurs fils relevant en particulier des distinctions opérées ci-dessus (2° & 3°).

Nous n'indiquerons que quelques-unes des pistes de recherche possibles où la mathématique sera sollicitée.

II- La question de la forme et de la structure

II.1- La question de la forme et de la structure est d'abord géométrique

- La question se pose de façon globale, avec une dimension esthétique : forme des voûtes, du linteau au berceau, de la surface plane [pla(t-)fond] à la coupole, en passant par les surfaces réglées ; on fera usage alors de formes plus ou moins sophistiquées : du plan et des polyèdres aux conoïdes (ellipsoïde, paraboloïde et hyperboloïde), en passant par l'hémisphère, le cône, le cylindre, et autres surfaces de révolution, et jusqu'aux hosoèdres de Caravelli ou aux équidomoïdes de Léopold Hugo ; il suffit de feuilleter les ouvrages des théoriciens de l'architecture pour apprécier la très grande diversité des formes, des temps les plus reculés à la période contemporaine ; pour ne donner qu'un exemple de l'inventivité expérimentale des bâtisseurs : il existe, en Afrique, des constructions fondées sur la mise en berceau ou en révolution d'une chaînette approximative (la voûte nubienne en Égypte ou les maisons *obus* au Cameroun), bien avant que cette courbe ne soit théorisée à partir de la trigonométrie hyperbolique et reconnue comme modèle d'un certain équilibre statique.

- La question se pose de façon locale lorsqu'il s'agit de définir les formes géométriques des composants de la voûte, avec une dominante technique et des aspects décoratifs : la taille de ces composants a conduit à la codification d'un art particulièrement complexe, le trait pour la coupe des bois et des pierres, que l'on appelle la stéréotomie. Sur ce point, citons simplement quelques noms de théoriciens, architectes ou géomètres, pour en baliser le processus d'élaboration : les architectes Villard de Honnecourt, Philibert de L'Orme, Sebastiano Serlio, le géomètre et ingénieur Girard Desargues, le graveur Abraham Bosse, le père Derand, architecte de la Société de Jésus, l'ingénieur Amédée Frézier.

II.2- La question de la stabilité et du contrôle des poussées

Elle conduit à des calculs qui ne seront esquissés qu'à partir du XVII$^{\text{ème}}$ siècle puis développés au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, la mathématisation de la physique – en particulier de la statique et de la mécanique – et l'invention du calcul infinitésimal aidant. Cela dit, géométrie et statique interfèrent très tôt, surtout en stéréotomie, sur la question de la forme des voussoirs (les pierres composant la voûte) et la direction des panneaux de joint (les surfaces de contact entre voussoirs, en général planes), et les solutions géométriques adoptées relèvent en premier lieu de la pragmatique : les voûtes anciennes que nous connaissons sont, en dernier ressort, celles qui ont tenu la durée…, ce qui a supposé de nombreuses tentatives soldées par des échecs : une leçon à méditer.

Pour ne donner qu'un exemple des questions qui se posent à l'architecte, indiquons qu'un voussoir, dans le cas d'un arc sur ouverture (linteau ou berceau), donne des formes simples, mais que le cas d'une voûte sur plan (couvrant un espace donné) est plus complexe puisque les arcs de la voûte peuvent rayonner autour de la clé et que la question des poussées relève de quatre panneaux de joint.

Ces questions de statique, peuvent être illustrées facilement et dès le primaire dans le cadre d'une approche des styles roman ou gothique, par exemple : il suffit de faire usage d'une maquette (voire, de la faire construire, au collège) avec un jeu de *cubes* en formes de voussoirs pour un arc en berceau ou une ogive en tiers-point que l'on dispose sur des piliers à corbeaux et une charpente provisoire *ad hoc* – le boisage ou l'échafaudage – posée sur les encorbellements ; une fois placée la clé de voûte, la ferme peut être retirée et, faute de contreforts ou d'arcs-boutants, on constate tactilement et visuellement la poussée de la voûte sur les piédroits qui s'écartent jusqu'à l'effondrement s'ils ne sont pas contrepoussés manuellement ou matériellement. Les participants à l'atelier de Rennes ont pu faire cette expérience sur un tel matériel, apporté tout exprès et décrit par ailleurs.

Sur le calcul des poussées (lycée ou université), on pourra consulter avec profit les premiers textes sur la question dans les *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, par exemple : ils ont été rédigés par Philippe de La Hire et Antoine Parent. Puis viennent les ouvrages de géométrie pratique à l'usage des ingénieurs et des architectes, par Mauduit, Camus, Bossut ou Bérard : dans un premier temps, on considèrera les voussoirs comme libres de se mouvoir sans frottements (malgré le grain de la pierre et la fine couche de joint au mortier mise entre les panneaux de joint) ; et on concevra en général ces voussoirs comment devant avoir des panneaux de joints perpendiculaires à l'intrados, c'est-à-dire la partie visible de la voûte, du point de vue *naturel* que constitue le volume qu'elle couvre, l'autre côté étant l'extrados, souvent masqué au regard et supportant un plancher ou une couverture en charpente.

II.3- Il ne faut pas mésestimer le domaine technique de l'*appareil* (ou *appareillage*)

Il est propre à l'architecture, mais joue dialectiquement avec les aspects géométrique et statique : quel type de maçonnerie ? Par moellons, chaux/ciment et remplage ou par pierre taillée ? Quels cintres va-t-il falloir fabriquer et donc quelles courbes va-t-il falloir tracer ? On voit que cette question croise celle des connaissances géométriques effectives (en termes de géométrie pratique et théorique) qui sont effectivement mises en œuvre à chaque époque ; surtout lorsque la transmission de la mémoire des savoirs et des procédés relève de l'oral, dans le contexte du compagnonnage et des maîtrises qui veillent sur leurs secrets : c'est toute la différence entre les *Carnets* de Villard de Honnecourt (XII^{ème} siècle), et les traités imprimés de Philibert de l'Orme (XVI^{ème}), lorsque la Renaissance renoue avec la théorie architecturale et voit la réimpression du traité de Vitruve (I^{er} siècle). De ce point de vue, la connaissance du contenu des traités de géométrie pratique est essentielle, et il s'agit de savoir ce que l'on a retenu des pratiques empiriques anciennes, de la leçon euclidienne sur la règle et le compas, voire de la leçon apollonienne sur les coniques.

C'est ce dernier point auquel nous allons consacrer la seconde partie, en donnant des exemples de tracés et en indiquant très succinctement leur contexte historique, mais aussi leur emploi pédagogique éventuel.

II.4- Notons enfin que la question du couvrement ne doit pas être confondue avec celle de la couverture

Le couvrement est ce qui ferme l'espace du point de vue de l'intrados, tandis que la couverture est constituée de la charpente et du toit, visible du point de vue extérieur ; les deux viennent à être confondus, comme avec une coupole, auquel cas l'apparence de la couverture sera l'extrados du couvrement. Il faut distinguer divers modes de couvrement ; dans le cas des voûtes, il y a essentiellement deux genres, selon qu'il s'agit de couvrir :

- une ouverture dans une cloison ; on a alors à faire un linteau, un arc en plein cintre (roman) ou en ogive (gothique), un berceau (arc surbaissé elliptique, semi-ovale ou *anse de panier*) et le tracé est dans ce cas essentiellement un problème plan ;
- une pièce étendue au-delà de l'épaisseur d'un mur ; il s'agit alors de construire une nef (l'analogie avec les navires relève de la similitude entre formes et assemblages des fermes de toiture et des couples de coque), pour le couvrement en berceau ou en plein cintre d'une allée ou d'un couloir, ou d'édifier une voûte à plan centré sur une base carrée, avec retombées sur des pilastres ou des piédroits (par exemple la voûte en arc-de-cloître), ou une voûte sur une base octogonale (dite tambour), ou encore une voûte circulaire comme une coupole (ou dôme) sur une tour ou un tambour circulaires. On passe alors dans le domaine des surfaces de l'espace à trois dimensions.

Dans le premier cas, n'intervient quasiment que le tracé de courbes planes (arc en plein cintre du roman, arc en ogive du gothique, nécessitant essentiellement la règle et le compas) et la forme des voussoirs qui composent les arcs/voûtes couvrant ces ouvertures. Dans le second cas, si les voûtes sont sur plan centré rectiligne (carré, tambour octogonal, etc.) ou curviligne (voûte hémisphérique) et si elles comportent des arcs d'entrée qui supportent une maçonnerie moellonée soutenue par des arcatures complémentaires (croisée d'ogives multipartites, etc.), il en va de même, car point n'est besoin de tailler les pierres au cordeau.

Dans le second cas et lorsqu'il s'agit de pierre de taille, il faut tracer la forme des voussoirs (souvent très complexes) sur les blocs de pierre au sol avant leur mise en place, qui doit être faite *du premier coup* si possible, car on ne présente pas plusieurs fois le bloc taillé pour le plaisir de voir si ça rentre … C'est bien un travail d'anticipation et de précision que doit faire le tailleur de pierres, d'où la complexité de l'art du trait.

Ces considérations nous amènent à opérer un retour sur les aspects techniques et la question des connaissances géométriques d'une époque : dans le cas de l'art roman ou de l'art gothique, par exemple, la question peut se formuler ainsi : comment conçoit-on les cintres en bois appelés à soutenir la voûte en construction (arc ou surface) avant qu'on ne les retire une fois placée la clé de voûte qui verrouille le dispositif ? Ces cintres, sortes de moules qu'il faut tracer en creux, supposent des constructions que l'on retrouve chez les charpentiers (*cf.* la planche de Philibert de l'Orme, *infra*).

Dans la situation qui a été proposée aux élèves de l'Institut Lemonnier, par exemple, c'est-à-dire dans le cas du croisement de deux berceaux en plein cintre (à la croisée de la nef et du transept ou aux tournants d'un cloître), ce qui revient à déterminer l'intersection de deux cylindres ayant des bases semi-circulaires isométriques, il fallait tracer des courbes ovales, que la géométrie *dans l'espace* dit être des ellipses, mais que l'on a commencé à approcher par des ovales diverses ou que l'on a construites au cordeau par des procédés connus des anciens mais dont on ne savait pas nécessairement qu'elles conduisaient à des ellipses ; après la redécouverte des *Coniques* d'Apollonius de Perge au XVI$^{\text{ème}}$ siècle ou encore des *Livres de la section du cylindre et de la section du cône* de Sérénus d'Antinoë, et suite à la prise de conscience que les perspectives coniques ou cylindriques du cercle sont des coniques (le plus souvent des ellipses dans la pratique), on construira des instruments de tracé des ellipses et on travaillera en particulier sur le tracé des arcs dits rampants (reposant sur des piédroits inégaux). Auparavant, lorsqu'il s'agissait de tracer uniquement les arcatures et les arcs de croisement pour soutenir une voûte moellonée, on a très probablement utilisé d'autres procédés plus pragmatiques, faisant appel aux seuls instruments de la géométrie euclidienne, la règle, le compas ou l'équerre ; l'ovale était approchée par des arcs de cercle coïncidents sans rupture de pente, qui ne requièrent pas un tracé point par point : ce sont les voûtes surbaissées dites *en anse de panier*.

III- De quelques constructions d'une voûte surbaissée, en *berceau* ou en *anse de panier*

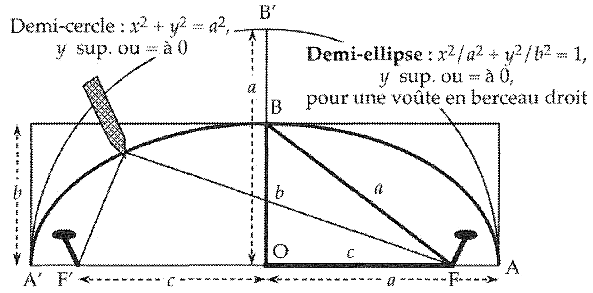
Nous allons maintenant détailler les diverses constructions évoquées ci-dessus.

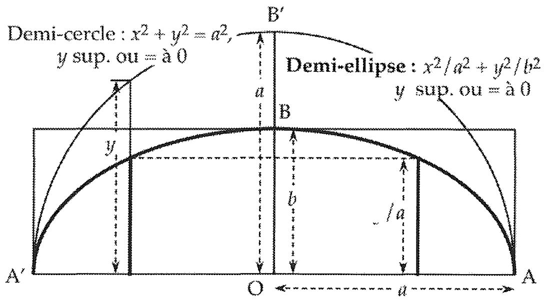
III.1- Construction d'une voûte surbaissée ou en *berceau*, solution elliptique

III.1.a- Construction par la méthode dite de l'*ovale du jardinier*, courante dans les géométries pratiques ; pour le lycée quant à l'objet, mais le tracé peut en être fait dès le CM.

Une corde non élastique, $FBF'F$ (sur la figure de gauche), est refermée et nouée, puis placée de façon à entourer deux pieux plantés en F et F', ce qui suppose qu'elle mesure plus du double de FF'. Elle est tendue par un stylet qui en fait un triangle rectiligne ; sa pointe peut circuler et laisser au sol la trace d'une ovale. La théorie des coniques nous montre aisément que F et F', définis par $OF = OF' = c$, O étant le milieu de FF', sont en fait les foyers d'une ellipse de grand axe $2a$ et de petit axe $2b$. La corde mesure donc $2a + 2c$ (*grand axe* $A'A$ + *distance focale* $F'F$) et l'on a : $c^2 = a^2 - b^2$.

III.1.b- Construction par affinité orthogonale d'axe AA' et de rapport b/a ($b < a$, figure de droite) ; cette notion est plutôt pour le lycée, mais le tracé point par point peut être effectué dès le collège, voire au CM dans le cadre de l'apprentissage de la proportionnalité.

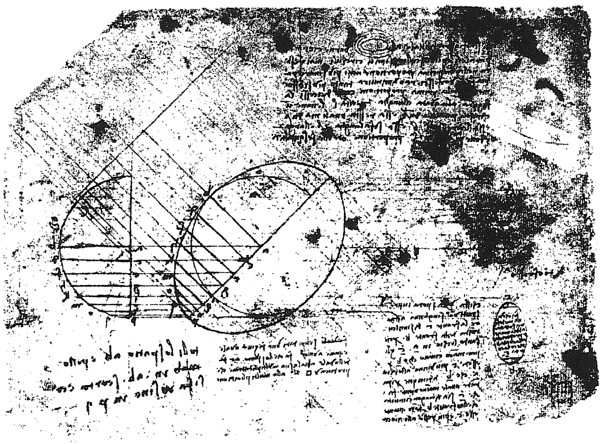




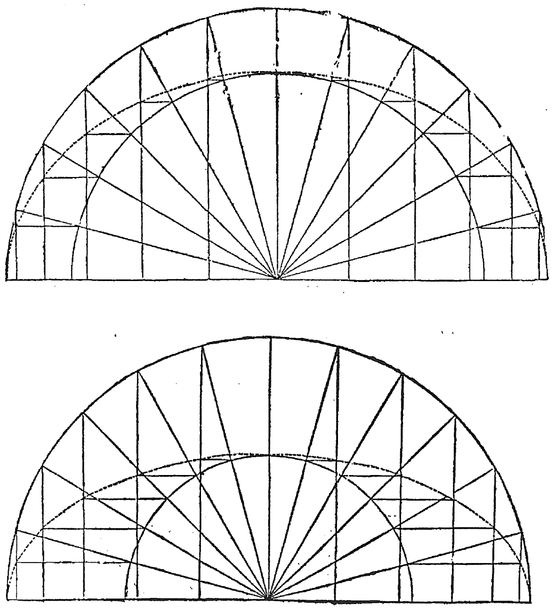
Le cercle de rayon a et d'équation $x^2 + y^2 = a^2$ devient alors l'ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b, ayant pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$. Notons qu'une affinité orthogonale d'axe BB' et de rapport b/a transforme le même cercle en une ellipse de grand axe vertical ayant une équation où a et b sont échangés. On obtient une figure analogue par affinité horizontale de rapport b'/a lorsque $b' > a$, et elle est semblable à la précédente si a est moyenne géométrique entre b et b' (car alors, $b'/a = a/b$).

On trouve cette construction, sans doute fort ancienne, dans les carnets de Leonardo da Vinci (*Illustration* 1), par exemple ou chez Sebastiano Serlio (f° 13 v°, *Ill.* 2, et 14 r°, *Ill.* 3, du *Second Livre de l'Architecture* (1545). Philibert de l'Orme, dans les *Nouvelles Inventions*... (1561, *Ill.* 4) puis dans *L'Art de bien bastir* (1567, *Ill.* 5), montre que dans le cas d'une croisée de berceaux en plein cintre (voûte d'arête) ou du couvrement d'un plan carré (voûte en arc-de-cloître), les courbes d'intersection que l'on obtient sont des ellipses de grand axe $2a\sqrt{2}$ et de petit axe $2a$, $2a$ étant le côté du carré. On voit au passage que les tracés servent aussi en charpenterie, pour les fermes des couvrements en bois.

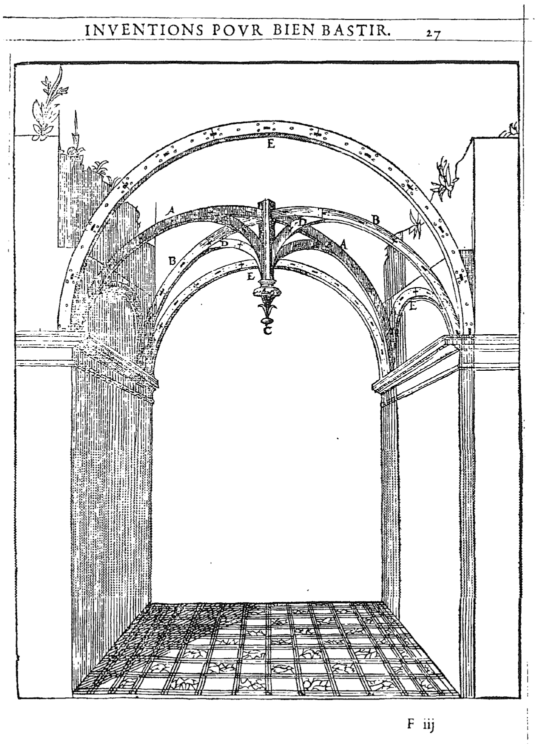
Ill. 1. Léonard de Vinci :

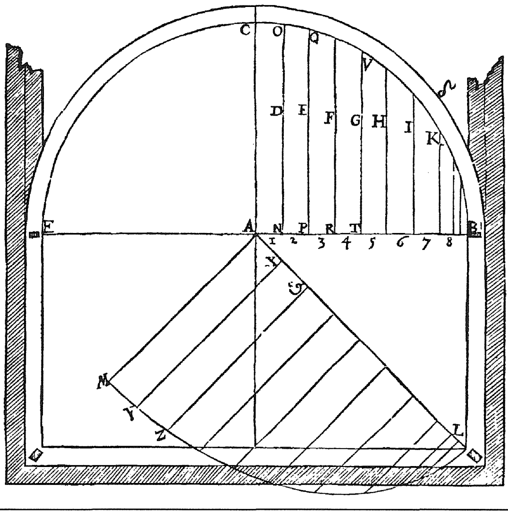


Ill. 2 & 3. Sebastiano Serlio :



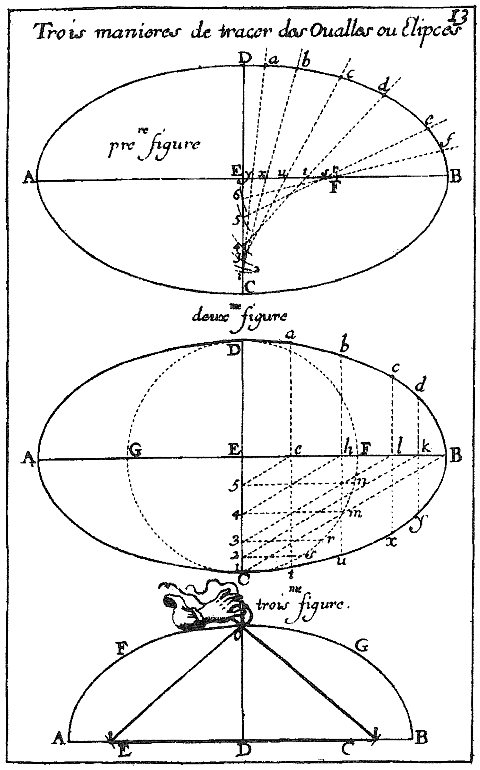
Ill. 4 & 5. Philibert de l'Orme :





Abraham Bosse consacre plusieurs pages de ses traités de stéréotomie et d'architecture à la construction des arcs elliptiques, en berceau ou rampants. Par exemple, dans la planche 13, page 63, d'un traité de 1665, il donne trois modes de construction de l'ellipse (*Ill.* 6 : 2ème figure : affinité ; 3ème figure : méthode du jardinier ; 1ère figure : procédé alternatif fondé sur la variation d'une ligne de longueur constante coupant les axes selon un segment constant).

Ill. 6. Abraham Bosse :



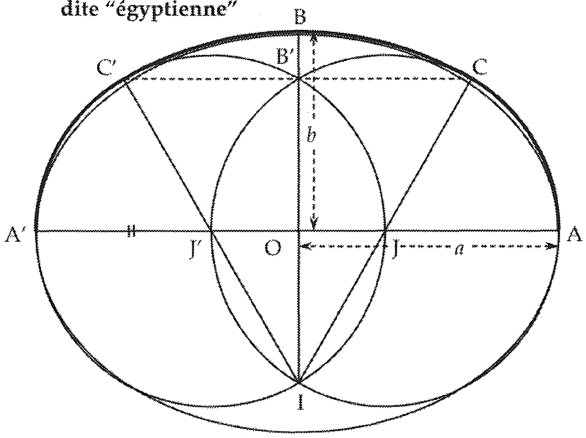
III.2- Construction d'une voûte surbaissée, dite *anse de panier*, solution à la règle et au compas

Il s'agit de construire un ovale ou plutôt un demi-ovale dans un espace défini par son *diamètre* ou *largeur* 2*a* et par sa *hauteur* *b* qu'on appelle la *montée* (2*a* et 2*b* sont les grand axe et petit axe de la solution elliptique). D'origine ancienne, cette construction de l'ovale semble d'abord être connue dans des cas particuliers, lorsque l'une des deux contraintes est fixée.

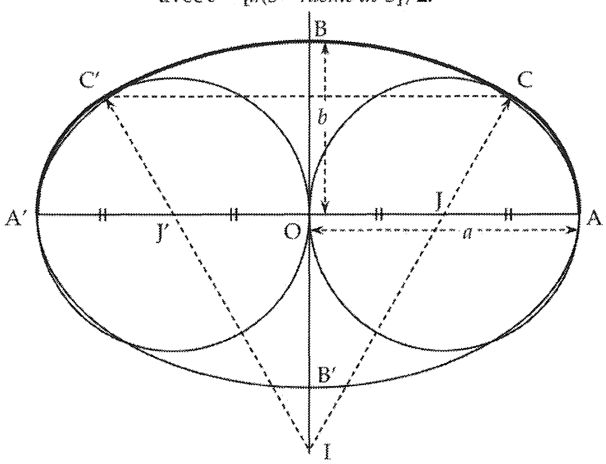
III.2.a- C'est le cas de l'*anse de panier* dite *égyptienne*, où la largeur (ou *diamètre* dans le cas d'une arche) 2*a* est fixée.

L'*anse de panier égyptienne à trois centres* relève d'une pratique élémentaire (CM ou collège) et a probablement été conçue à l'origine pour dessiner des ovales complets ; elle consiste à partager le *diamètre* du berceau en trois parties égales (construction dite aussi *en tiers-point*), en J et J'. Puis on trace les cercles de centre J' et J et de rayons respectifs $J'A'$ et JA, qui se coupent en B' et I. On trace ensuite les lignes IJ' et IJ, qui recoupent les cercles en C' et C (resp.). Enfin, on trace un arc de cercle de centre I et de rayon $IC' = IC$ pour former, dans le sens horaire, l'arc d'extrémités C' et C. Les trois arcs forment une demi-ovale, qui se trouve être une *anse de panier* pour une voûte en berceau de *diamètre* $A'A$ et de *montée* OB. Cette construction fixe une valeur de la *montée* OB ($= b$), lorsque le *diamètre* $A'A = 2a$ est donné et que l'angle que fait la demi-droite $[IJC)$ avec $[OA)$ est choisi de 60°. Car de cette manière elle relève de la division du cercle en six, qui permet l'obtention de l'hexagone régulier ou de la rosace figurant la symétrie d'ordre 3. On notera que OB ou $b = IB - IO = 2JC - (JC\sqrt{3})/2$, avec $JC = JA = 2a/3$: donc $OB = (4-\sqrt{3})a/3$ soit environ $3a/4$; le rapport b/a qui en résulte est égal à : $b/a = (4-\sqrt{3})/3$, soit environ 3/4. On pourra comparer l'*anse égyptienne* (en trait gras) avec la demi-ellipse (en trait plus fin) d'axes $A'A = 2a$ et $2OB = 2b$.

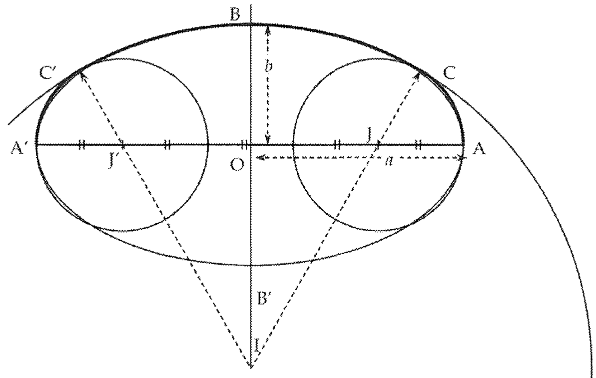
Anse de panier (demi-ovale) dite "égyptienne" Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$



Anse de panier (demi-ovale)
diamètre $2a$ donné, divisé en quart-point
Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
avec $b = [a(3 - \textit{racine de } 3]/2$.

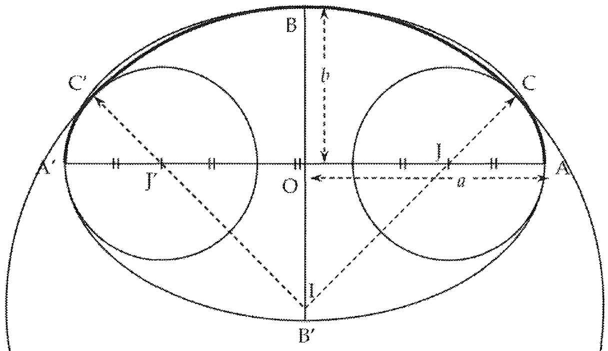


Anse de panier (demi-ovale),
diamètre $2a$ donné, divisé en quint-point,
avec alignement des centres à 60°



Petits cercles : $(x \pm 3a/5)^2 + y^2 = (2a/5)^2$.
Grand cercle : $x^2 + (y + 3a/5)^2 = (8a/5)^2$.
Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
avec $b = a[8 - 3\ \textit{racine}\ (3)]/5$.

Anse de panier (demi-ovale),
diamètre $2a$ donné, divisé en quint-point,
avec alignement des centres à 45°



Petits cercles : $(x \pm 3a/5)^2 + y^2 = (2a/5)^2$.
Grand cercle : $x^2 + (y + 3a/5)^2 = (2a/5 + [3a\ \textit{racine}\ (2)]/5)^2$.
Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$,
avec $b = a[3\ \textit{racine}\ (2) - 1]/5$.

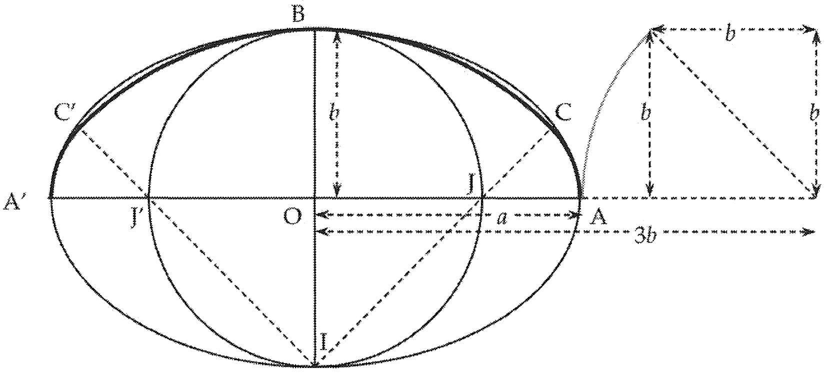
III.2.b- On trouve également des constructions *en quart-point* et *en quint-point*. Il est clair que le choix de l'angle que fait la droite des centres d'arcs avec l'horizontale intervient dans la forme de l'ovale (voir les deux cas de figure, 60° ou 45°, *en quint-point*).

III.2.c- Une autre construction simple permet de tracer une ovale lorsque c'est la *montée b* qui est donnée : on trace alors le cercle de rayon $OB = b$, avec ses diamètres perpendiculaires *BI* et *JJ'*. Le prolongement de *IJ* et de *IJ'* jusqu'en des points *C* et *C'* tels que $IC = IC' = IB$ détermine trois arcs de cercle, l'un centré en *I* de rayon *IB* et les deux autres centrés en *J* et *J'* et de rayon $JC = J'C'$, qui forme la voûte surbaissée.

Cercle : $x^2 + y^2 = b^2$ Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

Anse de panier simple du deuxième type : petit axe donné

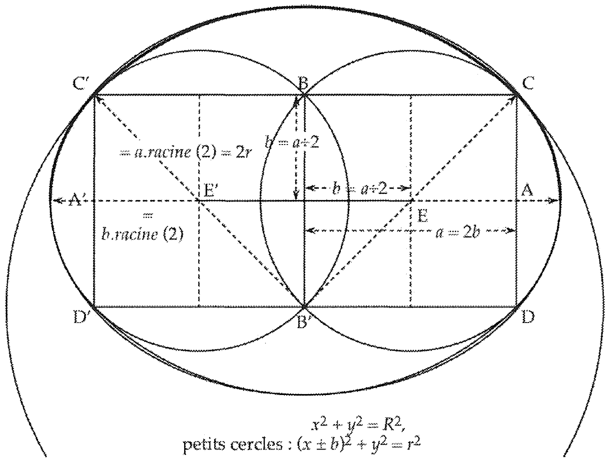
donné, IC = IB = $2b$, IJ = b . *racine*(2), JC = JA = $2b$ – IJ,
& $a = b$ + JA = b [3 – *racine*(2)]



III.2.d- On relève bien d'autres constructions d'ovales, dont certaines ne semblent pas immédiatement liées à la question de l'arcature, puisque les contraintes ne sont pas de *diamètre* ou de *montée*. C'est le cas de la méthode qui consiste à partir d'un rectangle bi-carré, ou *domino*, *CC'D'D*, inscrit dans l'ovale. Ce sont alors les centres des arcs qui sont imposés et les valeurs du *diamètre* et de la *montée*, d'une part, et de l'angle de la droite des centres avec l'horizontale d'autre part (ici 45°) s'en déduisent par des considérations de géométrie élémentaire. Les centres des grands arcs de l'ovale, *B* et *B'* sont les milieux des côtés *CC'* et *DD'* du rectangle ; les centres des petits arcs, *E* et *E'*, sont les centres des carrés *BCDB'* et *BC'D'B'*.

Anse de panier à 3 centres donnés
dans un rectangle domino (B', E & E')

Ellipse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$



$x^2 + y^2 = R^2$,
petits cercles : $(x \pm b)^2 + y^2 = r^2$

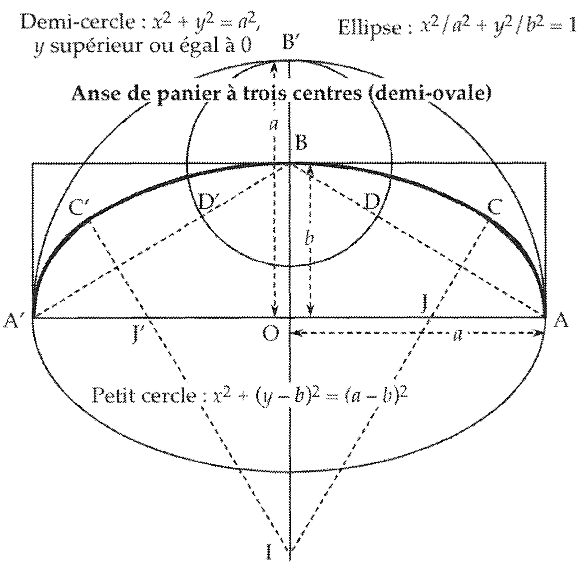
III.3- L'*anse de panier à trois centres*, cas général

Dans tous les cas particuliers qui précèdent, on obtient pour finir une *anse de panier* qui relève d'une conception générale, dite de l'*anse de panier à trois centres*, dont la construction ressortit à diverses pratiques. En voici deux, qui relèvent de la géométrie du collège (4ème-3ème) : le *diamètre* du berceau $AA' = 2a$ et la *montée* du berceau $OB' = b$ étant donnés ($b < a$, dans la pratique), les deux arcs de cercle latéraux ont même rayon et sont centrés à égale distance de *O*, en *J* et *J'* ; l'arc de cercle central sera centré sur (*OB'*), en *I*. Les points *I*, *J* (resp. *J'*) seront choisis de façon à être alignés avec le point *C* (resp. *C'*) où se raccordent les cercles centrés en I et J, ce qui assure la non rupture de pente (tangente commune). Notons qu'aux XVII$^{\text{ème}}$ et XVIII$^{\text{ème}}$ siècles, l'on affinera l'approximation de l'ellipse par des *anses de panier* à 3, 5, 7, …, ou $2n + 1$ arcs de cercles ayant des tangentes communes aux points de rencontre, et perpendiculaires à (AA') aux extrémités A et A' (dites *naissances* du berceau), de façon à former le dit berceau, supposé symétrique par rapport à (OB').

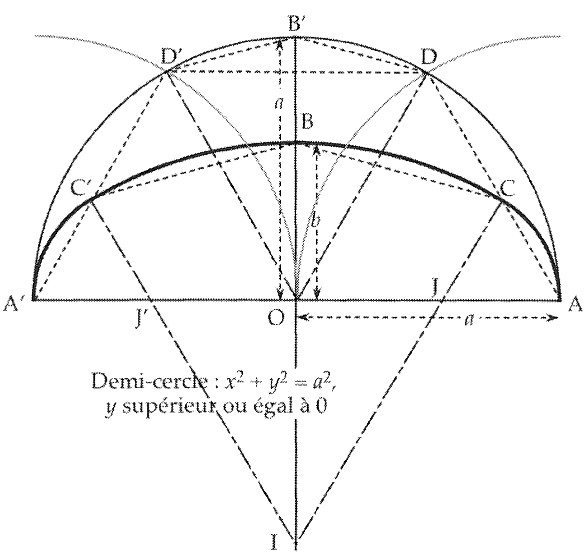
Dans le cas de l'*anse de panier à trois centres*, et *a fortiori* à $2n + 1$ centres, il y a une infinité de solutions ; une seule assure le moindre écart de courbure, que l'on construit comme suit.

III.3.a- On trace le cercle de centre B et de rayon $BB' = a - b$; il coupe $[A'B]$ et $[AB]$ en D' et D (resp.) ; on trace les médiatrices de $[A''D'']$ et de $[AD]$, qui se coupent en I sur (OB') et qui coupent $[OA]$ en J et $[A'O]$ en J'. Les arcs de cercle centrés en J' et en J, de rayon $J'A' = JA$ et centré en I, de rayon IB, se croisent en C' et C pour former une *anse de panier* (en trait gras), que l'on pourra comparer avec la demi-ellipse (en trait plus fin) d'axes $A'A = 2a$ et $2OB = 2b$.

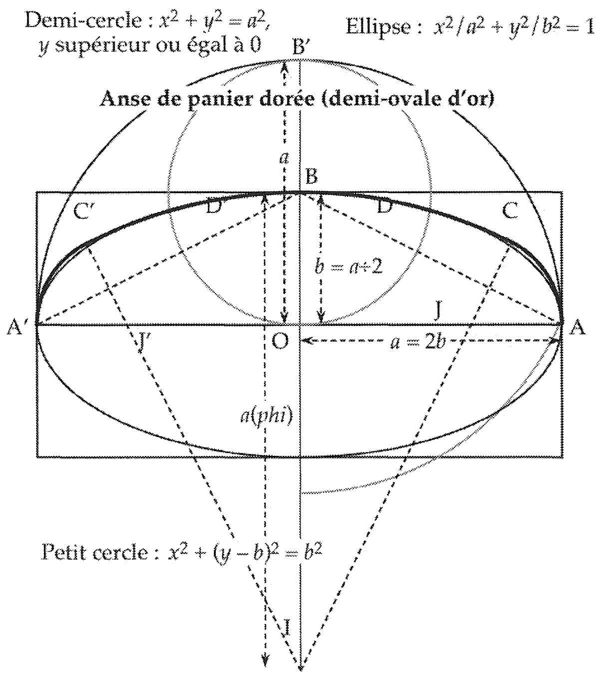
III.3.b- Une construction alternative de l'*anse de panier à trois centres* peut être obtenue par parallélisme, comme le montre la figure de droite.



Anse de panier à 3 centres (demi-ovale),
a et b donnés : construction alternative par parallélisme



III.3.c- Notons enfin qu'un cas particulier d'*anse de panier à trois centres* est curieux, que l'on accorde ou non quelque crédit *aux effets merveilleux* du nombre d'or : elle s'inscrit dans un *domino* (c'est donc le résultat 'inverse' du cas 2-e où le domino est inscrit dans l'ovale) et fait intervenir le nombre d'or, Φ, noté *phi* sur la figure.



Dans la construction de l'*anse à panier à trois centres*, il suffit de placer B au milieu de OB' ; le cercle auxiliaire de centre B touche le grand axe en O ; $DB = DB' = b = a/2$. $A'B = AB = a\sqrt{5}/2$, d'où $A'D' = DA = a\sqrt{5}/2 - a/2 = a/\Phi$. Soit H le milieu de DA, on a $DH = a/2\Phi$ et $BH = a/2(1 + 1/\Phi) = a\Phi/2$. Par similitude de ABO et de BHI, on obtient $HI = 2BH = a\Phi$ et $BI = BA\Phi = a\Phi\sqrt{5}/2$. Rien de surprenant donc que cette ovale ait pu être privilégiée, parmi les anses de panier possibles, du fait de son rapport avec le nombre d'or : le triangle BHI est, en grandeurs linéaires égal à Φ fois le triangle BOA. On construit I d'abord, par usage du partage en moyenne et extrême raison, puis les perpendiculaires issues de I à $A'B$ et BA (de pieds H' et H), et les points I et J sont alors déterminés.

Nous renvoyons à d'autres études à paraitre, que nous avons commises sur les auteurs du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle (Mauduit, Camus, Bossut ou Bérard), pour la construction des ovales à 5 ou 7 centres.

IV- Du reporteur de profil comme modèle des lignes ordonnées et de leur accumulation.

En guise de prolongement, nous voudrions revenir sur la question de la mesure des ordonnées sous une courbe ou une surface. Cela permettra de comprendre comment introduire la notion d'intégrale en s'appuyant une fois de plus sur les idées géométriques qui ont jalonné son heuristique, de la *quadrature d*['un segment d]*e la parabole* par Archimède à la création (ou réinvention ?) des indivisibles au XVII$^{\text{ème}}$ siècle par Cavalieri.

Dans la situation proposée par Odile Jenvrin à ses élèves, il s'agissait de prendre des mesures sur les voûtes d'arête de la crypte de l'Abbaye-aux-Dames de Caen. Une question que l'on peut se poser à propos d'une telle voûte, d'époque romane, est celle de la forme qui a présidé à la confection de cintres ou de fermes avant maçonnerie du couvrement. Le modèle proposé était imposé, sans qu'il soit fait état *a priori* de la courbe que la formule recouvre (une ellipse) pour des raisons pédagogiques évidentes dans le contexte. On a vu que la différence entre ellipse et *anse de panier* de *diamètre* le grand axe et de *montée* le demi-petit axe, est assez peu sensible. Mais cet écart peut être perçu si les mesures sont fines. Ce peut être l'objet d'une étude plus poussée dans un autre contexte, à condition de disposer d'un outil de mesure adapté. Au-delà des télémètres, sonique, optique ou à laser, un outil élémentaire existe, qui matérialise les ordonnées de la courbe, dans le cas d'une voûte accessible sans déploiement d'un échafaudage démesuré (des escabeaux suffisaient en l'occurrence) : c'est la transposition en grand format de ce que les menuisiers et plâtriers connaissent sous le nome de *reporteur* ou *rapporteur* de profil. Cet outil, qui mesure entre 15 et 30 centimètres d'amplitude suivant les modèles, est conçu pour des corniches et profils décoratifs et fait penser à un peigne double (comme le peigne à poux) dont les dents seraient mobiles. En voici une description (voir la figure) : il est composé d'aiguilles ou de lamelles de longueurs égales, juxtaposées parallèlement et dans un même plan ; elles peuvent coulisser et être déplacées en restant assujetties à la droite qui leur a été assignée primitivement dans le dispositif. Lorsque ces aiguilles sont appliquées contre un profil à recopier par l'une de leurs extrémités, celles-ci épousant la courbe du profil, on retrouve cette courbe dans la forme que dessinent en quelque sorte les autres extrémités.

Au passage, il est clair que l'aire du rectangle primitif que ces aiguilles constituent, reste inchangée lorsque celles-ci dessinent une figure mixtiligne comprise entre deux courbes en quelque sorte parallèles. Ceci n'a pas valeur de preuve, mais constitue une *monstration* très convaincante de l'égalité des deux aires, qui est au fondement de la méthode des *indivisibles*.

Il constitue un modèle intuitif de ce qui différencie peut-être la géométrie des Grecs de celle des Chinois (par exemple) : il peut aussi servir à faire comprendre le principe des quadratures de figures rectilignes dans l'Antiquité et celui de l'intégration par l'usage des rectangles ordonnés infinitésimaux qui conduiront à l'intégrale de Leibniz puis de Cauchy-Riemann.

En effet, si la géométrie grecque, comme la géométrie chinoise, use couramment mais implicitement du théorème sur la conservation des aires par décomposition-recomposition des aires rectilignes, voire mixtilignes (principe dit parfois et fort peu justement du *tangram*), l'heuristique grecque semble avoir intégré le principe des indivisibles comme le montrent par exemple l'une des trois quadratures du segment de parabole par Archimède, d'une part, et, d'autre part, le fond de la démonstration de la 47$^{\text{ème}}$ proposition du Livre I des *Éléments* d'Euclide, dans lequel les demi-carrés des côtés de l'angle droit sont transformés en demi-rectangles composant le carré de l'hypoténuse. Le tout repose en effet sur l'équivalence en aire des parallélogrammes ayant même base et même hauteur.

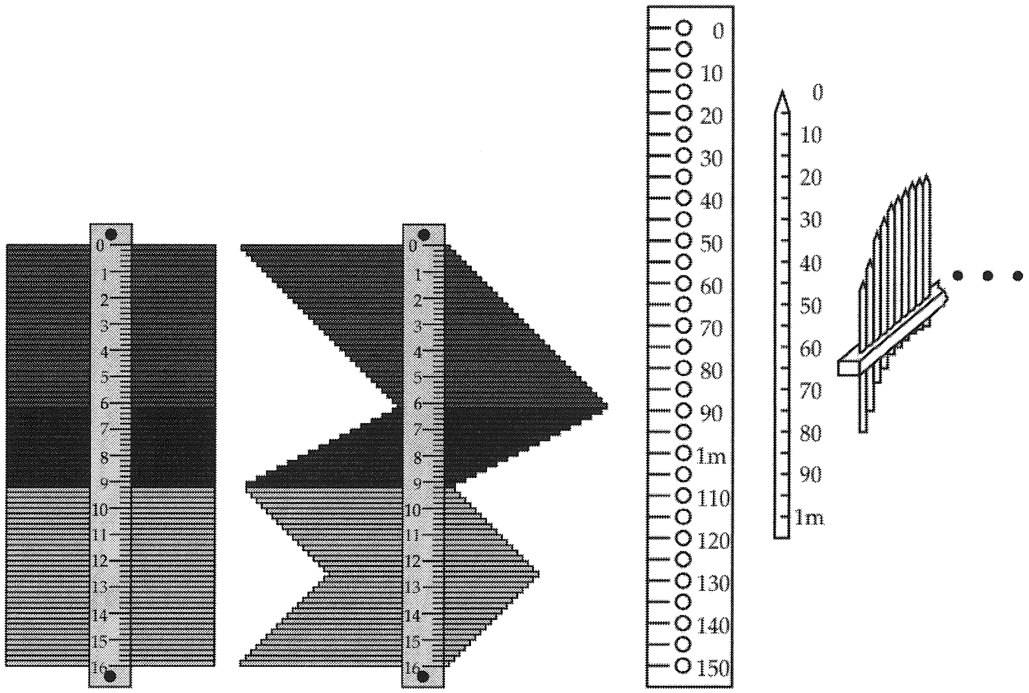
Il en va de même du rapport d'égalité ou d'inégalité qui existe entre les aires des deux triangles que *sépare* la médiane ou toute autre *cévienne* d'un triangle : il n'y a pas que la base qui est coupée en deux parties égales ou dans un rapport donné ; toutes les lignes parallèles à cette base sont divisées dans le même rapport d'égalité ou d'inégalité. L'usage de ces considérations est certes non explicite dans l'Antiquité grecque, mais cela s'expliquerait assez bien par les interdits posés en son temps par l'École des Éléates à propos de l'infini. Cette propriété apparaît clairement dans certaine déformation du reporteur de profil (*cf.* les figures) et peut être confirmé par l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique tel que CABRI.

Quant à l'intégrale de Leibniz, somme (d'où le symbole $\int$) de rectangles d'épaisseur infime (dx) et de hauteur variable ($f(x)$), elle n'est au fond que l'héritière des manipulations des géomètres du premier XVII$^{\text{ème}}$ siècle ; Roberval, par exemple, *tasse* contre le diamètre vertical du cercle générateur d'une cycloïde, en les déplaçant sur leurs droites-supports, *toutes* les lignes parallèles horizontales comprises entre des demi-arches de cycloïde et de sinusoïde, pour constater que *toutes ces lignes* forment un demi-cercle, estimant ainsi l'aire comprise entre les deux demi-arches.

S'il en est ainsi, c'est que les *hauteurs* $f(x)$ des rectangles infinitésimaux sont aussi les ordonnées sous la courbe : un reporteur de profil assez grand permet donc de mesurer les ordonnées avec une précision d'autant plus grande que le *pas* d'incrémentation des abscisses sera petit. Dans les mesures prises par les élèves d'Odile Jenvrin, ce pas avait été fixé à 10 centimètres.

On peut imaginer que *notre* peigne ait une largeur de manche *ad hoc* (légèrement supérieure à la diagonale du carré de base de la croisée) et une longueur de dents variable, chacune excédant la hauteur estimée du point de la courbe qu'elle est censée pointer et munie d'une échelle dont le zéro est en pointe ; on peut décider en outre que ce peigne soit plus ou moins serré. On peut imaginer encore un peigne à une seule dent amovible, de hauteur excédant la *montée* estimée de la voûte, cette dent étant déplacée dans une série d'orifices équirépartis sur le manche et plus ou moins éloignés selon l'ambition de la précision. Un tel instrument aurait le mérite de faire toucher *physiquement* la notion de ligne ordonnée à une courbe, primitivement (et même encore chez Descartes et ses héritiers immédiats) érigée à l'extrémité de la ligne d'abscisse dans une direction donnée, sans la connotation plus tardive du réseau dit aujourd'hui *cartésien*. Il matérialise aussi l'aire sous la courbe dont on mesure les ordonnées, sous forme d'une accumulation d'indivisibles verticaux.

Nul doute que la manipulation de tels instruments conceptuels ne joue le rôle *monstrateur* évoqué plus haut, si nécessaire aux personnes que l'on qualifie de *visuelles* ou de *tactiles*.



Jean-Pierre LE GOFF

Pour toute demande d'information complémentaire :
pierre.ageron@math.unicaen.fr
odile.jenvrin @ac-caen.fr
legoff.jeanpierre@orange.fr