UNIVERSITÉ DE RENNES 1

UFR de Mathématiques

Les divisions

Liaison cycle 3 - 6^e

IREM RENNES

Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques

LES DIVISIONS

Liaison Cycle 3 – 6ème

IREM DE RENNES

1ère édition : juin 2008
2ème édition : avril 2011

SOMMAIRE

Intitulé

INTRODUCTION

Historique et composition du groupe

Ce groupe fait suite au travail mené à l'IREM de Rennes concernant la liaison Cycle 3 – sixième et qui a abouti à la publication d'un fascicule intitulé « De l'écriture fractionnaire à la Multiplication des décimaux » édité en juin 2002.
A l'époque déjà certains professeurs de sixième, fréquentant l'IREM de Rennes, avaient la volonté d'améliorer les performances de leurs élèves concernant le sens et les techniques de division (division euclidienne et division décimale en particulier).

C'est pourquoi un groupe s'est constitué en septembre 2003 autour des objectifs suivants :

1 - **Élaborer une progression-programmation** répartissant les enseignements des divisions entre école et collège (la mise en œuvre des nouveaux programmes de 2002 au cycle 3 et ceux actuels de sixième rend nécessaire ce travail de répartition).

2 - **Proposer et expérimenter des situations de référence** propices aux apprentissages dans les domaines de la division euclidienne, du quotient de deux entiers, de la division d'un décimal par un entier et de la division de décimaux, concernant le sens et les techniques instrumentées ou non.

3 - **Élaborer des dispositifs de différenciation pédagogique** mis à l'épreuve dans les classes cibles des participants ; cette différenciation prendra appui sur :
- une évaluation initiale (prenant nécessairement en compte les évaluations nationales réalisées en Sixième) adaptée aux élèves des différents niveaux.
- des évaluations régulières en cours d'apprentissage permettant les réajustements nécessaires au niveau des tâches proposées, de l'aide à apporter aux élèves et des structures pédagogiques employées.

Le groupe a fonctionné en 2003-2004 dans le secteur scolaire de Fougères.
Il réunissait M. Février IEN de Fougères, M. Le Poche formateur IUFM, 4 instituteurs ou professeurs des écoles : M. Barbot et M. Le Bras de l'école primaire de Lecousse, M. Reichert et M. Coeurquetin de l'école primaire de St Marc-Le-Blanc, 2 professeurs de collège : M Sicard du collège V. Ségalen à Chateaugiron et Mme Goupil-Lebot du Collège Gandhi à Fougères.
Faute de moyens stabilisés, les instituteurs ont abandonné leur participation au groupe et ont été remplacés par deux professeurs des écoles : M. Larosa de l'école publique de Tremblay et Mme Gautier de l'école publique de St Maugan, bénéficiant du statut de maître formateur auprès de l'IUFM. L'expérimentation a alors essentiellement concerné les élèves de CE2.

Rubriques	Programmes 2002	Programmes 2007
Calcul mental	**Le calcul mental** Automatisé ou réfléchi, le calcul mental doit occuper la place principale à l'école élémentaire et faire l'objet d'une pratique régulière, dès le cycle 2. Une bonne maîtrise de celui-ci est indispensable pour les besoins de la vie quotidienne (que ce soit pour obtenir un résultat exact ou pour en évaluer un ordre de grandeur). Elle est nécessaire également à une …	**Le calcul mental** Dans ce domaine, les compétences en mémorisation des résultats et calcul réfléchi exact ou approché sont à développer en priorité. Pour cela, une bonne connaissance des tables est indispensable. Elle suppose de savoir fournir aussi bien un résultat direct (somme ou produit) qu'un résultat dérivé (complément et différence, facteur d'un produit ou quotient). Le calcul réfléchi implique la mise en œuvre de procédures personnelles, adaptées à chaque calcul particulier : elles peuvent être uniquement mentales ou s'appuyer sur un écrit. L'explicitation et l'analyse, …
Calcul instrumenté	**Le calcul instrumenté** Au-delà de son emploi dans le cadre de la résolution de problèmes, la pratique du calcul instrumenté (utilisation d'une calculatrice ou initiation à l'usage d'un tableur) doit donner lieu à des activités spécifiques. L'utilisation de machines nécessite en effet … est utile d'étudier certaines fonctionnalités des calculatrices, comme le résultat fourni par l'usage de la touche $\boxed{\div}$ en relation avec l'opération division, l'utilisation des touches mémoire en relation avec le calcul d'une expression comportant des parenthèses.	**Le calcul instrumenté : la calculatrice doit faire l'objet d'une utilisation raisonnée** Le calcul instrumenté est largement répandu dans la vie courante. Chacun, quelle que soit son activité sociale ou professionnelle, peut avoir recours à l'usage d'une calculatrice. Il est donc essentiel que l'école soit en prise avec cette réalité de notre temps. .. y avoir recours. La calculatrice sera notamment utilisée pour des grands nombres, pour des séries de calcul, pour des vérifications. Il est néanmoins très important de montrer aux élèves que si le recours à la calculatrice peut se révéler nécessaire pour certains calculs complexes, il est d'autres situations dans lesquelles le calcul mental s'avère plus rapide et plus ….

Rubriques	Programmes 2002	Programmes 2007
Calcul posé	**Le calcul posé** Le travail sur les techniques usuelles (calcul posé) doit faire l'objet d'un recentrage. Pour l'addition, la soustraction et la multiplication, leur usage dans des cas simples (résultat à deux, trois ou quatre chiffres) doit être assuré. Cependant, une part essentielle de l'activité doit résider dans la recherche de la compréhension et de la justification des techniques utilisées, ce qui conduit à retarder un peu leur mise en place (par rapport à ce qui est fait habituellement) : à fin du cycle 2 pour la technique de l'addition et au cycle 3 pour celles de la soustraction et de la multiplication. Pour la division, on se limitera à des calculs posés simples à la fin du cycle 3 (du type 432 divisé par 7 ou 432 divisé par 35), calculés en gardant la trace des soustractions effectuées et en ayant la possibilité de poser des produits annexes. Il est essentiel que, bien avant que les techniques écrites usuelles ne soient mises en place, les élèves soient invités à produire des résultats en élaborant et en utilisant des procédures personnelles, non standard (mentalement ou en s'aidant d'un écrit).	**Le calcul posé** Les techniques opératoires usuelles sont mises en place sur des nombres d'usage courant, en s'attachant à assurer une bonne compréhension des étapes du calcul. Elles ne doivent pas faire l'objet d'une recherche de virtuosité excessive. La maîtrise d'une technique opératoire pour chacune des opérations est indispensable. Le travail de construction et d'appropriation de ces techniques fait appel à de nombreuses propriétés du système d'écriture des nombres (numération décimale de position). L'apprentissage doit être conduit avec le souci qu'en soit assurée la compréhension. L'objectif d'automatisation des procédures repose sur une pratique progressive, régulière et bien comprise du calcul. Dans tous les cas, les élèves doivent être entraînés à utiliser des moyens de contrôle des résultats de leurs calculs.
Calcul posé Division décimale		La maîtrise des techniques opératoires des quatre opérations - addition et soustraction de nombres entiers et décimaux, multiplication de deux nombres entiers ou d'un nombre décimal par un nombre entier, division euclidienne de deux entiers - est un objectif important du cycle 3. À ce niveau, une première approche de la division décimale peut être faite en introduisant le quotient décimal d'un nombre entier par 2, 4 et 5.

<table>
<tr><th>Rubriques</th><th>Programmes 2002</th><th>Programmes 2007</th></tr>
<tr><td>Objectifs généraux</td><td>Une place centrale pour la résolution de problèmes

Construction des connaissances
Ainsi, un problème de partage....
Au cycle 3, en partant des procédures élaborées précédemment, en les organisant et en cherchant comment réduire le nombre d'étapes, ils élaborent des techniques de calcul pour une nouvelle opération (la division) qu'ils reconnaissent alors comme pertinente pour résoudre tous ces types de problèmes. Le sens de la notion se construit ainsi progressivement, dans la durée.</td><td rowspan="3">L'enseignement du calcul doit associer étroitement la construction du sens des opérations et l'acquisition des diverses techniques opératoires qui se confortent et se renforcent l'une l'autre. Ce travail commencé à l'école se poursuivra au collège.

La résolution de problèmes est au centre des activités mathématiques et permet de donner leur signification à toutes les connaissances qui y sont travaillées : Les situations sur lesquelles portent les problèmes proposés peuvent être issues de la vie de la classe, de la vie courante, de jeux, d'autres domaines de connaissances ou s'appuyer sur des objets mathématiques (figures, nombres, mesures...).

Au travers de ces activités, le développement des capacités à chercher, abstraire, raisonner, prouver, amorcé au cycle 2, se poursuit. Pour cela, il est nécessaire de prendre en compte les démarches mises en œuvre par les élèves, les solutions personnelles qu'ils élaborent, leurs erreurs, leurs méthodes de travail, et de les exploiter dans des moments de débat. Au cycle 3, les élèves apprennent progressivement à formuler leurs raisonnements de manière plus rigoureuse, s'essaient à l'argumentation et à l'exercice de la preuve.</td></tr>
<tr><td></td><td>Réinvestissement des connaissances
Certains problèmes sont destinés à permettre l'utilisation « directe » des connaissances acquises. D'autres peuvent nécessiter la mobilisation de plusieurs connaissances mathématiques (problèmes complexes) : situations proches de la vie de l'élève, effectivement vécues par la classe, ou en relation avec d'autres domaines de savoirs.</td></tr>
<tr><td></td><td>Problèmes de recherche
Dès l'école élémentaire, les élèves peuvent être confrontés à de véritables problèmes de recherche, pour lesquels ils ne disposent pas de solution déjà éprouvée et pour lesquels plusieurs démarches de résolution sont possibles.</td></tr>
</table>

Rubriques	Programmes 2002	Programmes 2007
	Solutions personnelles ou expertes Des problèmes relevant des différentes catégories évoquées ci-dessus peuvent être traités très tôt par les élèves. Selon le moment où ils sont proposés, selon les connaissances disponibles chez les élèves, ils seront résolus par des « solutions personnelles » (comme le problème de partage, évoqué ci-dessus, résolu en grande section d'école maternelle par recours au dessin et au dénombrement, puis, à la fin du cycle 2 par l'utilisation de soustractions successives ou d'essais multiplicatifs) ou par une « solution experte » (ce même problème est résolu, à la fin du cycle 3, en utilisant la division).	À travers la pratique des mathématiques, au cycle 3, l'élève est amené à développer particulièrement les attitudes suivantes : • la rigueur et la précision dans les tracés, dans les mesures, dans les calculs ; • le goût du raisonnement ; • le réflexe de contrôler la vraisemblance des résultats ; • la volonté de justesse dans l'expression écrite et orale ; • l'ouverture à la communication, au dialogue, au débat ; • l'envie de prendre des initiatives, d'anticiper ; • la curiosité et la créativité ; • la motivation et la détermination dans la réalisation d'objectifs.

Les différences entres les programmes de 2002 et ceux de 2007 restent minimes.

En 2007, la capacité à calculer un quotient décimal d'un entier par 2, 4 ou 5 devient un objectif du cycle 3 mais ne fait pas partie du socle commun exigible pour tous.
Le calcul à l'aide de procédures expertes (technique opératoire pour maîtriser la division euclidienne de deux entiers) est plus nettement affirmé et une pratique quotidienne du calcul mental est recommandée dans le cadre d'un horaire fixé « à au moins 15 minutes » par les textes officiels.
Si une place centrale est toujours accordée à la résolution de problèmes, la notion « de problèmes pour chercher » disparait et il semble qu'il soit fait plus appel aux situations issues de la vie de la classe ou de la vie courante.

2. Sixième

Extrait du programme de sixième concernant les divisions (2005)

BO spécial n°25 août 2005

2.2 Division, quotient		
Division euclidienne *Programme cycle 3, document d'application : p. 25 à 29*	- Reconnaître les situations qui peuvent être traitées à l'aide d'une division euclidienne et interpréter les résultats obtenus.	L'attention des élèves doit être attirée sur la nécessité d'interpréter les deux résultats fournis (quotient et reste) dans le contexte du problème posé : quotient par défaut ou par excès, reste ou complément du reste au diviseur.
	- Calculer le quotient et le reste d'une division d'un entier par un entier dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté). - Connaître et utiliser le vocabulaire associé (dividende, diviseur, quotient, reste).	Dans ce domaine également, le calcul mental (en particulier approché) constitue l'objectif prioritaire. La mise en place de techniques "expertes" est poursuivie, en se limitant à des diviseurs à un ou deux chiffres. La compréhension des étapes de la division posée en améliore la maîtrise. Dans cette optique, la pose des soustractions intermédiaires et de produits partiels ne doit pas être prohibée. Les élèves utilisent l'écriture de la relation $a=bq+r$ $(r<b)$ pour contrôler le calcul, dans la continuité du travail entrepris à l'école primaire. La forme littérale de la relation est hors programme.
	- Connaître et utiliser les critères de divisibilité par 2, 4, 5, 3 et 9.	La notion de multiple a été introduite à l'école primaire. Elle est rappelée, sur des exemples numériques, en même temps qu'est introduite celle de diviseur. Les différentes significations de ce dernier terme doivent être explicitées. A l'école primaire, les élèves ont appris à reconnaître les multiples de 2 et 5.

Contenus	**Compétences**	**Exemples d'activité, commentaires**
Écriture fractionnaire *Programme cycle 3, document d'application : p. 21 et 22*	- Interpréter $\frac{a}{b}$ comme quotient de l'entier a par l'entier b, c'est-à-dire comme le nombre qui multiplié par b donne a. - Placer le quotient de deux entiers sur une demi-droite graduée dans des cas simples.	A l'école élémentaire, l'écriture fractionnaire est introduite en référence au partage d'une "unité". Les activités en sixième s'articulent autour de trois idées fondamentales : - le quotient $\frac{a}{b}$ est un nombre (solution du problème évoqué au 2.1) ; - le produit de $\frac{a}{b}$ par b est égal à a ; - le nombre $\frac{a}{b}$ peut être approché par un décimal. Par exemple, $\frac{7}{3}$ est un nombre que l'on pourra envisager comme - 7 fois un tiers ; - le tiers de 7 ou le nombre qui multiplié par 3 est égal à 7 ; - un nombre dont une valeur approchée est 2,33. La remarque est faite que tout nombre décimal peut s'écrire sous forme de quotient. Par exemple, $0{,}4 = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. En revanche, certains quotients ne sont pas des nombres décimaux : $\frac{7}{3} \neq 2{,}33$. Le vocabulaire relatif aux écritures fractionnaires est utilisé : numérateur, dénominateur.
	- Multiplier un nombre entier ou décimal par un quotient de deux entiers sans effectuer la division	Il s'agit de "prendre une fraction" d'une quantité. L'utilisation de quotients, sous forme fractionnaire, permet de gérer plus facilement les raisonnements et de repousser la recherche d'une valeur approchée décimale à la fin de la résolution. Le vocabulaire commun, introduit à l'école primaire, est utilisé : double/moitié, triple/tiers, quadruple/quart. Les élèves doivent être entraînés à effectuer mentalement des calculs utilisant ces expressions, sur des nombres entiers ou décimaux simples.
	- Reconnaître dans des cas simples que deux écritures fractionnaires différentes sont celles d'un même nombre.	Le fait qu'un quotient ne change pas quand on multiplie son numérateur et son dénominateur par un même nombre non nul est mis en évidence et utilisé. La connaissance des tables de multiplication est notamment exploitée à cette occasion. La notation $\frac{a}{b}$ peut, à partir de là, être étendue au cas du quotient de deux décimaux et des égalités comme $\frac{5{,}24}{2{,}1} = \frac{524}{210}$ peuvent être utilisées, mais aucune compétence n'est exigible à ce sujet.
Division décimale	- Calculer une valeur approchée décimale du quotient de deux entiers ou d'un décimal par un entier, dans des cas simples (calcul mental, posé, instrumenté).	A l'école élémentaire, les décimaux ont pu intervenir dans des problèmes de division au delà de la virgule (partage d'une longueur par exemple), mais aucune compétence technique n'a été mise en place. La division décimale permet d'obtenir soit la valeur décimale exacte (quand elle existe), soit une valeur décimale approchée du quotient. Ce qui est indiqué concernant l'extension de la notation $\frac{a}{b}$ au cas de deux décimaux permet d'aborder le calcul d'un quotient de deux décimaux, sans qu'aucune compétence ne soit exigible à ce sujet.
	- Diviser par 10, 100,1000 [SVT]	Le lien est fait avec les multiplications par 0,1 ; 0,01...

B. LES AUTEURS DE MANUELS
ANALYSE D'UNE COLLECTION EN USAGE
1. Cycle 3
1.1 CE2

Collection CAP MATHS CE2

Période (par quinzaine)	Titre intitulé	Nombre de séances	Objectif	Situation retenue pour la construction	Sens (typologie de Vergnaud[1])	Données numériques	Procédures envisagées
Période 2 Q6 (séance 5) Livre du maître p 142 Matériel p 62 Fichier p 58	Combien de boîtes de bonbons ? « Menthe et Fraise »	1 40 min	Chercher des stratégies pour résoudre des problèmes de division	**CONSTRUCTION** **1 situation** : par groupes **P1 :** 180 ou 140 combien de paquets de dix ? **P2 :** 72 ou 90 combien de paquets de six ?	**Division quotition** **Contexte cardinal**	Dividende 180 ou 140 Diviseur 10 ou 72, 90, 84, 42 et 6. (Dividendes multiples du diviseur) ***Recherche du quotient euclidien,*** **le reste est nul.**	**P1 :** comptage de 10 en 10, ou addition itérée de 10 ; multiplication par 10 ; **nombre de dizaines dans le nombre donné.** **P2 :** comptage de 6 en 6 ou addition itérée de 6 ; addition itérée de multiples de 6 ; **appui sur 10 boîtes 60 bonbons.**
Période 3 Q8 (séance 3) Livre du maître p 178 Matériel : dicomath Pas de calculatrice Fichier p 58	Combien de paquets de feuilles?	1 40 min	Chercher à comprendre le principe de la multiplication par un nombre à un chiffre Chercher des procédures pour résoudre un problème de « nombre de parts »	**CONSTRUCTION** **1 situation** Par groupes **P1 :** 265 combien de paquets de 53 ? **P2 :** 2760 combien de paquets de 276 ? **P3 :** 3440 par paquets de 430.	**Division quotition** **Contexte cardinal**	**Dividendes multiples du diviseur.** ***Recherche du quotient euclidien,*** **le reste est nul.**	**P1 :** suggestion d'essais de produits 53 x n **P2 :** utilisation de la règle des zéros **P3 :** essais de produits repérés comme plus économique.

[1] Pour des précisions sur la typologie de Vergnaud, le lecteur pourra s'appuyer sur le chapitre II.B : aspects didactiques, la question du sens.

CAP MATHS CE2 (suite)

Période 4 Q10 (séance 1) Livre du maître p 210 Matériel : calculatrice ou non Fichier p 96	« Les neuf tours »	1 25 min	Chercher comment résoudre un problème de partage équitable.	**CONSTRUCTION** **1 situation** Individuel 20 cubes pour 9 tours : à l'oral 75 cubes : à l'écrit	**Division partition** **Contexte : cardinal**	Dividende 75 Diviseur 9 ***Recherche du quotient euclidien,*** **le reste est non nul.**	Toute procédure : - schémas, - additions ou soustractions itérées (distributions de cubes supposée rare) - essais de multiples de 9, espoir utilisation directe de 8 x 9 = 72
Période 5 Q13 (séances 1, 2, 4) Livre du maître p 269, p 271, p 275 Matériel : Bandes Fichier p 126, 127, 128 Fiche différenciation 126 bis Fiche recherche 27 *Séance 8* *INSTITUTIONNALISATION* *Evaluation* *Fichier p 131, 132*	« Encore des rubans… »	3 40 min	Chercher comment résoudre des problèmes de partage équitable, sans utiliser la technique de division (**recherche du nombre de parts**)	**CONSTRUCTION** **1 situation** Par groupes **P1 :** Combien de rubans de 6 cm dans des bandes de 32cm, 67 cm, 248 cm ? **P2 :** Combien de rubans de 15 cm dans des bandes de 37cm, 175 cm, 500 cm ? **P3** : Combien de rubans de 6 cm ou 15 cm dans une bande de 1575 cm ? Autres : rubans de 40 cm, mêmes bandes **ENTRAINEMENT** Décontextualisé Combien de fois 20 dans 64 ? 8 dans 820 ? …	**Division quotition** **Contexte : mesures de longueur**	**P1 :** Dividendes 32, 67, 248 Diviseur 6 puis Dividendes 78, 200 et 312 Diviseur 6 **P2 :** Dividendes 37, 175, 500 Diviseur 15 puis Dividendes 110,754 Diviseur 15 **P3 :** Dividende 1575 Diviseurs 6 et 15 ***Recherche du quotient euclidien,*** **le reste est non nul.**	**P1** - dessin vrai grandeur - schémas, - additions ou soustractions itérées - essais de produits par 6 - appui sur résultats connus et ajout de multiples de 6 (60, 120) **P2** Accent sur : - l'économie de calculs 15 x 10, - revient à chercher : combien de fois il y a 15 dans le nombre proposé ? - l'écriture 500 = (15 x 33) + 5 **P3** Intérêt de produits partiels de 6 et 15 par 10 et 100

CAP MATHS CE2 (suite)

Q14 (séances 1, 2) Livre du maître p 287, p 289 Matériel : Fichier p 134 Fiche différenciation 134 bis Fiche recherche 28	« La cueillette de pommes »	2 40 min	Chercher comment résoudre des problèmes de partage équitable, sans utiliser la technique de division (recherche de la valeur de chaque part)	**CONSTRUCTION** **Séquence1 1 situation** **« La cueillette de pommes »** **P1** : individuel 24 pommes entre 4 combien de pommes ? **P2** : par groupes de 2 352 pommes entre 6 **P3** : par groupes de 2 1652 entre 15 autres : 352 entre 4 et 1652 entre 4	**Division partition** **Contexte cardinal**	**S1** **P1** : Appropriation : petits nombres reste nul sinon ***Recherche du quotient euclidien*, le reste est non nul.**	**S1** **P1** - figuration distribution - schémas, - additions ou soustractions itérées de 4 (états après chaque tour d'une distribution 1 par 1) - de 8 (si 2 pommes par distribution) - essais de produits par 4 - appui sur le fait 6 x 4 = 24 **P2** **Accent sur l'économie de calculs** - appui sur produits par 10 ou 20 (10 pommes à chacun.., cumuls des 60..) - essais de produits (ordre de grandeur) 6 x 20 = 120, 6 x 50 = 300 **P3** **Accent sur l'économie de calculs** **- ordre de grandeur** 1500 et produits par 100 et 10 (1500 et 150)
	« D'autres partages »			**RÉINVESTISSEMENT** **Séquence 2 3 situations** **P1** : individuel 40 cubes pour 5 piles combien par pile? **P2** : individuel 1326 g en 13 boules poids de chaque boule ? **P3** : individuel 2000 bonbons entre 5 combien à chacun ?	**Division partition** **Contexte cardinal** **Contexte de masses** **Contexte cardinal**	***Recherche du quotient euclidien*, le reste est nul.** .	**S2** **P2 et P3** **- Appui sur produits par 10 et 100** - essai de multiples de 15 ou 5

CAP MATHS CE2 (suite)

Q14 (séance 5) Livre du maître p 293 Fichier p 136	Problèmes dictés Partager un nombre en parts égales	1 5 min 15 min	Entretenir la capacité à résoudre mentalement un problème Entretenir la capacité à partager un nombre en parts égales	**ENTRAINEMENT** **A1 :** Individuel Calcul mental Contextualité (Œufs par boites de 6) **A2** Par 2 puis individuel Calculs posés (Contextualisation possible : 100 images entre des enfants)	**Division partition** **Contexte : cardinal** **Division partition ou quotition** **Contexte : cardinal**	Dividende : 17, 25, 37, 54, 45 Diviseur 6 ***Recherche du quotient euclidien,*** **le reste est non nul.**	**A1** Exploiter la table de multiplication par 6 **A2** Décompositions multiplicatives de 100 et de 60 - appui sur résultats connus 2 x 50 =100 **(deux partages possibles)**
Q14 (séance 6) Livre du maître p 296 Fichier p 137 Fiche différenciation 137 bis *Séance 8 Evaluation* *Fichier p 139 p 140*	Calculs dictés Partager un nombre en parts égales	1 5 min 15 min	Entretenir la capacité à résoudre mentalement un problème Entretenir la capacité à partager un nombre en parts égales	**ENTRAINEMENT décontextualisé** **A1** Individuel Calcul mental Combien de fois 5 dans 13 ? …7 dans 17 ? … **A2** Individuel Calculs posés 150 en parts égales	**Division quotition**	Dividende : 13, 36, 52, 48 Diviseur 5 puis Dividende : 17, 22, 40, 57, 75 Diviseur 7 ***Recherche du quotient euclidien,*** **le reste est non nul.**	**A1** Exploiter les tables de multiplication par 5 et 7. **A2** Décompositions multiplicatives de 150 12 solutions possibles

CAP MATHS CE2 (suite)

Q15 Séance 1 Livre du maître p 302 A1 O1 Séance 2 Livre du maître p 304 A1 O1 Séance 3 Livre du maître p 306 A2 O2 Séance 4 Livre du maître p 309 A1 O3 Séance 5 Livre du maître p 306	A1 Calculs dictés A2 Problèmes dictés	5 5 min	O1 Entretenir la connaissance des relations entre 5, 10, 20, 30 et 60 O2 Entretenir la capacité à résoudre mentalement un problème O3 Entretenir la capacité à trouver combien de fois un nombre est contenu dans un nombre donné	**ENTRAÎNEMENT décontextualisé** **S1** individuel Calcul mental Combien de fois 30 dans 60… **S2** individuel Calcul mental Combien de fois 10 dans 60… **S4** individuel Calcul mental Combien de fois 5 dans 47.. **S5** individuel Calcul mental Combien de fois 9 dans 50..	**Division quotition**	Multiples ***Recherche du quotient euclidien***	**S1 et S2** Exploiter les décompositions multiplicatives de 60, 30 et 15 (durées) **S4** Exploiter les tables de multiplication par 5 et 8. **S5** Exploiter les tables de multiplication par 10 et 9.

7

La première situation d'introduction de la division euclidienne est une situation de division quotition dans un contexte cardinal.
Le sens est ensuite étendu à une division de type partition.
Tout au long du travail, le calcul mental est entretenu et nettement favorisé.

Le contexte cardinal est élargi à la grandeur longueur.

Aucune disposition des calculs n'est imposée et l'enseignement d'une disposition canonique ne fait pas l'objet d'un apprentissage.
Seule est favorisée l'utilisation des multiples de dix pour économiser les calculs.

1.2 CM1

Collection CAP MATHS CM1

Période (par quinzaine)	Titre intitulé	Nombre de séances	Objectif	Situation retenue pour la construction	Sens (typologie de Vergnaud)	Données numériques	Procédures envisagées
Période 2 Q4 (séance 6) Livre du maître p 105 Manuel p.48 Pas de calculatrice Rubans, feuille de recherche	« Combien de rubans ? »(I)	1 40 min	Chercher à résoudre des problèmes de partage équitable (recherche du nombre de parts)	**CONSTRUCTION : 3 situations :** par groupes (2 élèves) **P1** : 75, 123, 150 Combien de rubans de 6 cm dans une bande de 75 cm, … **Entraînements : 2 situations.** **P2** : 75, 123, 150 Combien de rubans de 15 cm ? **P3** : 45, 270, 700 Combien de rubans de 50 cm ?	**Division quotition** **Contexte : Mesure de longueurs**	Dividendes 75, 123, 150 Diviseur : 6 *Recherche du quotient euclidien, reste non nul* Dividendes 45, 270, 700. Diviseur : 50	**P1 :** schémas, additions ou soustractions répétées de 6 ou d'un multiple de 6, essais de produits et ajustements, **Nombres permettant de favoriser le calcul mental**
Période 3 Q4 (séance 7) Livre du maître p 106 Matériel : dicomath Calculatrice ou non manuel p. 49	« Combien de rubans ? » (II)	1 40 min	Chercher à résoudre des problèmes de partage équitable (recherche du nombre de parts)	**CONSTRUCTION : 3 situations :** par groupes (2 élèves) **P1** : 210 cm Combien de rubans de 26 cm ? **P2** : 290 cm Combien de rubans de 26 cm ? **P3** : 650 cm Combien de rubans de 26 cm ?	**Division quotition** **Contexte : Mesure de longueurs**	**Dividendes multiples du diviseur.** *Recherche du quotient euclidien,* le reste est nul.	**P1** : **procédures favorisées :** **(26 x q) + r** **26 +26 +…+ 26 + r** (26 répété q fois) autre : **addition** itérée de 26 ou d'un **multiple** simple de 26 **soustraction** itérée de 26 ou d'un multiple simple de 26 **essais de produits** de 26 par des nombres (26 x 4, trop petit ; 26 x 10 : trop grand)

CAP MATHS CM1 (suite)

Période 4 Q9 (séance 4) Livre du maître p 194 Matériel : pas de calculatrice Manuel p.101	Partage de pépites (I)	40 min	Chercher à résoudre des problèmes de partage équitable (recherche de la valeur d'une part)	**CONSTRUCTION :** **2 situations :** **P1** : Par groupes (2 élèves) 185 pépites entre 12 personnes **P2** : Individuel 618 pépites entre 25 personnes	**Division partition** **Contexte : cardinal**	**P1 :** Dividende : 185 Diviseur : 12 **P2** : Dividende : 618 Diviseur : 25 *Recherche du quotient euclidien reste non nul.*	- Simulation de partage : **dessin** des pépites dans la boîte et dans le sac **- Ajouts successifs** de 12 ou de **multiples** de 12 pour s'approcher de 185. **- Retraits successifs** de 12 ou multiples de 12. - Essais de **produits** par 12
Période 4 Q9 (séance 5) Livre du maître p.195 Matériel : feuille de recherche calculatrice Manuel p.101	Partage de pépites (II)	40 min	Chercher des procédures personnelles pour résoudre des problèmes de partage équitable (recherche de la valeur d'une part)	**CONSTRUCTION :** **2 situations :** **P1** : Par groupes (2 élèves) 652 pépites entre 37 personnes **P2** : Individuel 2 435 pépites entre 15 personnes	**Division partition** **Contexte : cardinal**	**P1 :** Dividende : 652 Diviseur : 37 **P2** : Dividende : 2 435 Diviseur : 15 *Recherche du quotient euclidien reste non nul.*	**P1 : procédures favorisées :** **Addition** ou **soustraction** de **multiples** de 37 **Essais de produits** de 37 avec ajustements. Utilisation de la **touche « : »** de la calculatrice (en préciser l'usage) (37 x Q) + r **autres procédures** : idem Q9, séance 4
Période 5 Q13 (séance 1) Livre du maître p.262 / 263 Matériel : feuille de recherche Feuille de recherche Manuel p.146 Manuel p.146 Cahier de maths	Partage de jetons (I)	40 min	Chercher à comprendre la technique et utiliser la technique usuelle de la division posée (recherche de la valeur d'une part)	**CONSTRUCTION :** **Situation1 :** par groupes (2 élèves) **P1** : 572 jetons entre 4 joueurs **Situation 2 :** **P2** : 2 415 points entre 6 joueurs **Exercice** : (individuel) 4 025 points entre 3 joueurs	**Division partition** **Contexte : cardinal**	**P1 :** Dividende : 572 Diviseur : 4 **P2** : Dividende : 2 435 Diviseur : 6 *Recherche du quotient euclidien reste non nul.*	**Procédures favorisées :** Commencer le partage avec les unités de grande valeur (par la gauche)

Période 5 Q13 (séance 2) Livre du maître p.265 / 266 Matériel : pas de calculatrice Feuille de recherche Manuel p.147 Manuel p.148 Cahier de maths	Partage de jetons (II)	40 min	Chercher à comprendre la technique et utiliser la technique usuelle de la division posée *(recherche de la valeur d'une part)*	**CONSTRUCTION :** **1 situation :** Par groupes (2 élèves) **P1** : Partage de 857 points entre 6 joueurs **P2** : 2 378 ponts entre 5 joueurs **P3** : 3 245 points entre 12 joueurs **Exercice** : Individuel 3 184 points entre 15 joueurs	**Division partition** **Contexte : cardinal**	**P1 :** Dividende : 857 Diviseur : 6 **P2** : Dividende : 2 378 Diviseur : 5 **P3** : Dividende : 3 245. Diviseur : 12 *Recherche du quotient euclidien reste non nul.* **Exercices**	**Procédures :** Libres
Période 5 Q13 (séance 3) Livre du maître p.268 Matériel : pas de calculatrice Cahier de brouillon Manuel p.148 Manuel p.148 Cahier de maths	Division avec potence	40 min	Chercher à comprendre la technique et utiliser la technique usuelle de la division posée : LA POTENCE	**CONSTRUCTION :** **1 situation :** par groupes (2 élèves) **P1** : division avec potence : méthode de « Numerix » : 986 divisé par 4 **P2** : 814 divisé par 6 **Exercices**	**Division**	**P1 :** Dividende : 986 Diviseur : 4 **P2** : Dividende : 814 Diviseur : 6 *Recherche du quotient euclidien reste non nul.* **Exercices**	**Procédures favorisées :** Partager les centaines, dizaines, unités. Technique de la potence

La première situation de réintroduction de la division euclidienne est une situation de division quotition dans un contexte de longueurs.
Le sens est ensuite étendu à des divisions de type partition dans un contexte cardinal.

L'enseignement d'une disposition canonique fait l'objet d'un apprentissage (technique dite de la « potence »)
C'est la technique des « partages des groupements de numération » qui est choisie.

1.3 CM2

CAP MATHS CM2

Période	Nbre de séances	Objectif	Situation	Sens	Données numériques	Procédures envisagées
Période 1, U3 Livre du maître P.77, Manuel p.27 Période 1, U3 Livre du maître P.82, Manuel p.30	1 séance de 15 min 1 séance de 15 min	Calculer mentalement un quotient et un reste dans un problème de division. Présenter la solution d'un problème. Chercher des quotients et des restes en utilisant le calcul réfléchi. Introduire l'égalité caractéristique.	S1 Résoudre deux problèmes (revoir) Consolidation - Le jus d'orange - Les calculatrices S3 Calcul (revoir) Entraînement (pas de contexte)	Valeur d'une part Nombre de parts	(29, 8) (60, 15) (47, 5) (50, 12) (32, 3)	Schéma ou dessin, addition ou soustraction itérée de 8, essais de produits, combien de fois, diviser. Chercher mentalement, raisonnements divers, mise en évidence des procédures de résolution.
Période 1, U3 Livre du maître p.85, Manuel p.31	1 séance de 15 min	Division euclidienne : résoudre des problèmes de partages équitables.	S4 Trois problèmes de partages équitables : - Éva. diagnostique - Le fleuriste (tester) - Approche Pas de correction.	1 : valeur d'une part 2 : problème multiplicatif 3 : nombre de parts.	(135, 9) 21 x 9 + 5 (118, 8)	Essais additifs, essais multiplicatifs, multiplication à trous, division posée, division à la calculatrice, addition itérée, soustraction itérée.

CAP MATHS CM2 (suite)

Période	Nbre de séances	Objectif	Situation	Sens	Données numériques	Procédures envisagées
Période 1, U3 Livre du maître p.85, Manuel p.31	1 séance de 25 min	Division euclidienne : résoudre des problèmes de partages équitables	S4 Trois questions de partages équitables : éva. diagnostique « Les tours de piste » (chercher)	1 : valeur d'une part 2 : égalité caractéristique 3 : nombre de parts	(2280, 8) (1750, 285) (7410, 285)	Essais de nombres ajoutés, de produits, division.
Période 1, U3 Livre du maître p.88, Manuel p.32	1 séance de 40 min	Division euclidienne : - calcul réfléchi - décomposition du dividende - égalité caractéristique	S5 Des divisions sans potence ni calculatrice		(340, 5) (2415, 12) (9620, 3)	Décomposer le dividende en multiples simples du diviseur
Période 2, U4 Livre du maître p.100, Manuel p.40	1 séance de 40 min	Division euclidienne : calcul réfléchi	S1 Calcul du Quotient et du reste		(251, 10) (251, 25) (251, 12) (251, 50) (251,100) (251, 60) (5000, 24)	Choix d'une décomposition adaptée du dividende
Période 2, U4 Livre du maître p.110, Manuel p.46/47	1 séance de 40 min	Division euclidienne : Calcul posé Partage par groupements de numération	S6 le partage des plaques	Valeur d'une part	(2625, 7) (1057, 7)	Faire des échanges, calcul réfléchi, division
Période 2, U5 Livre du maître p 120, 121 Manuel p 51	1 séance de 40 min	Comprendre la technique usuelle de la division et savoir l'utiliser	S1 La division avec une potence : division par un nombre à 1 chiffre. (Partage par groupements de numération)	Valeur d'une part	(2739, 4) (4209, 4)…	Comprendre la méthode de calcul

CAP MATHS CM2 (suite)

Période	Nbre de séances	Objectif	Situation	Sens	Données numériques	Procédures envisagées
Période 2, U5 Livre du maître p.122 Manuel p 52	1 séance de 35 min	Comprendre et utiliser la technique usuelle de la division	S2 La division avec une potence : division par un nombre à 1 chiffre. Partage par groupements de numération	Sans contexte	(625, 3) (986, 4) (3250, 8)…	entraînement
Période 2 U5 Livre du maître p.1224 Manuel p 53	1 séance de 40 min	Comprendre et utiliser la technique usuelle de la division	S4 La division avec une potence : division par un nombre à 2 chiffres. Partage par groupements de numération : « le partage des plaques »	Valeur d'une part	(6769, 26) (5809, 47)…	Echanges Essais Vérification Soustractions intermédiaires Produits partiels Etablissement des tables
Période 4, U11 Livre du maître p 225 Manuel p 115	1 séance de 40 min	Comprendre le résultat affiché par une calculatrice ordinaire, dans le cas de la division. Approcher la distinction entre division euclidienne et division décimale.	S1 Division et calculatrice Comprendre le reste de la division euclidienne… et la partie décimale affichée sur la calculatrice.	1 : sans contexte 2 : valeur d'une part (longueur) 3 : nombre de parts	(657, 12) (1000, 45) (300, 24) (92, 8) (320, 25)	Convertir Approximations successives à l'aide de produits
Période 4 U11 Livre du maître p.227 Manuel p 116	1 séance de 40 min	Distinguer division euclidienne et division exacte	S2 Le signe « : » Le moule à calcul. On peut utiliser le signe : quand le résultat est exact	Sans contexte	Cinq calculs dont le résultat est 25 36 : 4 92 : 4	Ecriture fractionnaire Egalité de fractions Nombres à virgule Partager le reste

CAP MATHS CM2 (suite)

Période	Nbre de séances	Objectif	Situation	Sens	Données numériques	Procédures envisagées
Période 4, U11 Livre du maître p.229 Manuel p.117	1 séance de 40 min	Diviser un nombre décimal par 10, 100, 1000.	S3 Comment diviser par 10, 100, 1000		0,5 :10 5 :10 0.5 :100 0.05 :10 500 :10 45.72 :10 …	Calculatrice interdite Chercher une règle Utiliser le vocabulaire exact
Période 5, U15 Livre du maître p.310 Manuel p.161	1 séance de 40 min	Résoudre des problèmes nécessitant l'utilisation d'un quotient décimal.	S5 Le partage du fil Le restaurant Le bloc de papier	Valeur d'une part Valeur d'une part Valeur d'une part (longueur)	(26,4) (225,12) (15,120)	Partage du reste Conversion Poursuivre la division posée essais

En début d'année, des situations d'évaluation diagnostique sont proposées.

Les situations développant la possibilité de calculs réfléchis sont toujours favorisées.
Les premières situations de réintroduction de la division euclidienne sont des situations de division quotition et partition dans des contextes cardinaux.

L'enseignement d'une disposition canonique fait l'objet d'un réapprentissage.
C'est la technique des « partages de groupements de numération » qui est à nouveau choisie.

En fin d'année, la division décimale est introduite en prolongeant la technique enseignée.

2. Sixième

COLLECTION *Transmath* 6ème, Programme 2005 (BO hors série n° 5 du 9 septembre 2004)

	Titre, Intitulé des paragraphes	Durée	Objectif	Situation retenue pour la construction	Sens [construction] (typologie de Vergnaud)	Données numériques	Procédures envisagées
Chap 4 Elève : p 67	Sciences en construction	10 à 15 min	Faire réfléchir à l'évolution des connaissances au cours du temps	« La Pascaline » : première machine à calculer		446 divisé par 87 334 divisé par 68	Soustractions itérées
Chap 4 Division euclidienne Elève : p 67	Différentes situations	15 min	Interpréter les deux résultats fournis par une division euclidienne selon la situation - quotient euclidien - quotient euclidien + 1 - reste - compléments du reste	Trois débuts de problèmes sont donnés, trouver une question et répondre à cette question	**Division quotition, partition** **Contexte : cardinal**	87 divisé par 4 dans les trois problèmes	
	Egalité et division euclidienne	20 min	- Revoir les liens entre dividende, diviseur, quotient et reste - Reconnaître un partage non équitable - Proposer un partage équitable - Ecrire une égalité entre les nombres	Des pirates se partagent des pièces d'or	**Division partition** **Contexte : cardinal**	5070 pièces pour 147 pirates et leur chef	
	De tête	10 min	- Trouver mentalement le quotient euclidien et le reste		**Hors contexte**	13 par 3 57 par 10 15 par 3 317 par 100 5 par 7	

COLLECTION *transmath* 6ème (suite)

	A la main	25 min	- revoir la technique de la division euclidienne	Corriger des divisions : - produits partiels - soustractions	Hors contexte	55 par 7 50 par 7 122 par 3 135 par 12 3 245 par 13	
	Avec la calculatrice	10 min	- savoir lire sur une calculatrice le quotient euclidien et le reste - savoir utiliser une calculatrice	Ecrans de calculatrice donnant le quotient euclidien et le reste	Hors contexte	126 par 4 745 par 54 7 654 par 63 50 463 par 87	Touches diverses suivant les calculatrices utilisées
Chap 4 Division décimale Elève : p 69	Des situations	10 min	Reconnaître la pertinence du choix de la division et utiliser ensuite la calculatrice			32 par 5 70 par 6 138,6 par 4	
	Nombre manquant et calcul mental	10 min		Compléter des multiplications à trous		6 et 18 24 et 24 7 et 0 4 et 10 2 et 1,4	
	A la main	10 min	Donner du sens à la technique de la division décimale		Division partition Contexte prix	59 par 4	
	Valeur exacte et valeur approchée d'un quotient	20 min	Interpréter l'affichage de la calculatrice Valeur exacte ou valeur approchée d'un quotient	Résoudre quatre problèmes utilisant les nombres 700 et 24 et une division	Division euclidienne : a et b, quotition, cardinal Division quotient : c et d Partition, contexte : prix et capacité .	700 par 24	

COLLECTION *transmath* 6ème (suite)

EXERCICES	**Division euclidienne**							
Exercices d'application P 74 et 75	TYPE							
		cardinal	Grandeur : prix	Grandeur : masse	Grandeur : longueur	Grandeur : capacité	Grandeur : durée	Hors contexte
N°	Quotition	1, 4, 7, 8, 9, 10.	6, 19	2	20	3,	5	
	Partition	F						
								11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18.

EXERCICES	**Division décimale**						
Exercices d'application P 76 et 77		cardinal	Grandeur : prix	Grandeur : masse	Grandeur : longueur	Grandeur : aire	Hors contexte
	Partition		40, 44, 46, 47.	39, 45, 47.	38, 41, 42.	43	
	Quotition				48		
							26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37.

Les situations proposées le sont dans différents contextes : les grandeurs en jeu sont variées.
Les procédures mentales sont encouragées et le recours à la calculatrice est pris en charge par l'enseignement.
Le résultat cherché ne porte pas toujours sur le quotient euclidien.

L'enseignement de la technique opératoire est rapidement repris, c'est la disposition traditionnelle qui est adoptée.
Les exercices d'application sont nombreux.
La division décimale fait l'objet d'une leçon particulière.

II. REPÉRAGES DE DIFFICULTÉS NOS CHOIX EN CONSÉQUENCE

A. ASPECTS MATHEMATIQUES

LES DEUX DIVISIONS vocabulaire et symbolisme

L'une des premières difficultés est que les élèves de l'école primaire sont confrontés à l'existence de deux « divisions ».

La Division Euclidienne dans l'ensemble des naturels

$$\begin{array}{|lll} N \times N^* & \longrightarrow & N \times N \\ (a\,;b) & \longmapsto & (q\,;r) \qquad \text{tel que} \quad a = (b \times q) + r \ \text{ avec } r < b \end{array}$$

Exemple : $(22\,;5) \longmapsto (4\,;2)$

Le vocabulaire exact à utiliser est le suivant :

a est le **dividende**, b le **diviseur** (il est non nul)

q est le **quotient euclidien** et r est **le reste**.

Remarque : dans le cas d'un reste nul, $a = b \times q$ et le dividende est alors **multiple du diviseur**.

Les écritures mathématiques qui la caractérisent sont les suivantes :

$a = (b \times q) + r$ avec $r < b$ $\qquad 22 = (5 \times 4) + 2$

ou

$b \times q \leq a < b \times (q+1)$ $\qquad 5 \times 4 < 22 < 5 \times 5$

Le dividende est compris entre deux multiples consécutifs du diviseur.

Cette division n'est pas une opération, car à 2 nombres entiers elle ne fait pas correspondre un seul nombre entier.

Lorsque les élèves rencontrent la division euclidienne ils sont confrontés pour la première fois à l'obtention de deux nombres, ce qui peut leur poser problème.

Il y a deux opérations associées à la division euclidienne :

l'une qui au couple (a ; b) associe le quotient euclidien q

l'autre qui au couple (a ; b) associe le reste r.

Ces deux opérations ne font pas l'objet d'un symbolisme en usage.

La Division dans l'ensemble des rationnels positifs

$$: \begin{array}{|lll} Q^+ \times Q^{+*} & \longrightarrow & Q^+ \\ (a\,;b) & \longmapsto & a : b = \dfrac{a}{b} \end{array}$$

Exemple : $(22,5) \longmapsto 22 : 5 = \dfrac{22}{5}$ avec $\dfrac{22}{5} = 4{,}4$

C'est une opération dont le symbole est « : », a : b est le quotient des deux entiers a et b.

C'est aussi la recherche de la solution unique dans l'ensemble des rationnels de l'équation a = b × x dont la solution est x = a : b ou $x = \frac{a}{b}$.

Prenons le cas où a et b sont des entiers naturels avec b non nul.
Le vocabulaire exact associé est le suivant :

$\frac{a}{b}$ est l'écriture fractionnaire du quotient de a par b. Il est toujours un rationnel.

Dans certains cas, comme dans l'exemple précédent, ce quotient est un décimal non entier et a alors une écriture à virgule.
Ce quotient rationnel peut toujours être approché d'aussi près que l'on veut par un décimal : c'est alors un quotient décimal approché.

<u>Cas particulier où les nombres sont des entiers naturels non nuls et où le quotient est un entier :</u>
C'est la recherche du deuxième facteur d'un produit de deux entiers.

27 : 3 = ? 9 × 3 = 27 d'où 27 : 3 = 9

3 et 7 sont alors deux diviseurs de 27. 27 est multiple de 3 mais aussi de 9.

Vocabulaire et symbolisme utilisés abusivement :
Il faut éviter

- « quotient exact » pour « quotient euclidien » : en mathématiques les résultats sont exacts ou approchés.
- « division exacte » pour « la division euclidienne avec un reste nul » ou parfois » la division » : que signifierait une division inexacte ?
- « quotient entier » : le quotient euclidien est en effet toujours entier, mais cela peut aussi être le cas du quotient de la division.

Le symbolisme de la division euclidienne :
Certains manuels utilisent abusivement le symbolisme « : » comme symbole de la division euclidienne.
Il est fort peu recommandé[2] d'écrire :

22 : 5 = 4 (reste 2) ou 22 : 5 = 4 r 2

L'ouvrage *« J'apprends les maths »* Editions Retz, utilise 22 : 5 ? q = 4 r = 2.
C'est discutable car la notation « : » a alors un double usage.

D'autres ouvrages utilisent le symbole « ÷» symbolisme utilisé par la plupart des calculettes. Ce symbole opératoire donne le quotient décimal approché à 10^{-i} près (i dépendant de la capacité d'affichage de la calculette) et n'a donc pas lieu d'être utilisé pour la division euclidienne. Il ne fournit ni le quotient euclidien ni le quotient de la division dans l'ensemble des rationnels.

Exemple : 22 ÷ 7 = 3,1428571 pour une Galaxy 9 de T.I

La notation de la "potence" ou "béquille" était utilisée dans *« Objectif-calcul »* Editions Hatier, mais les mêmes auteurs l'ont abandonnée dans *« Euro Maths »*.

22 ├ 5 q = 4 et r = 2

Une difficulté de vocabulaire : le mot « diviseur ».
Exemple : 21 = 7 × 3

7et 3 sont des diviseurs de 21 ; 21 est un multiple de 3 ; 21 est un multiple de 7.

---

[2] L'objectif est d'éviter l'erreur courante en sixième :
22 : 5 = 4,2 (au lieu de 22 : 5 = 4,4) l'égalité 22 = (4 × 5) + 2 est licite (2 est alors le reste de la division euclidienne de 22 par 5)
Elle s'explique par l'utilisation abusive de la notation " :" pour la division euclidienne, le r se transformant alors en virgule.

Dans le cas général : a et b entiers.

- il existe un naturel n tel que $a = b \times n$. - a est un multiple de b.
- b est un diviseur de a. - a est divisible par b.

sont quatre phrases de même sens.

Ce sens du mot « diviseur » n'est donc pas lié à la division euclidienne.
Dans la division euclidienne, il signifie « le nombre qui divise le dividende ».
La phrase suivante, extraite de « MOTS[3] 2 », illustre cette double signification source de confusions :
« Dans la division euclidienne, si le diviseur n'est pas un diviseur du dividende, le reste n'est pas nul ».

Les autres « divisions »

La « division décimale » : elle met en jeu des décimaux non entiers dans la division dans l'ensemble des rationnels.

- soit lors de la recherche du quotient, approché par un décimal à 10^{-n} près par défaut, dans la division de deux entiers. Par extension du vocabulaire spécifique à la division euclidienne, le reste décimal est fonction de la précision du quotient approché et est défini par l'égalité caractéristique.

division euclidienne : $22 = (7 \times 3) + 1$ division : $22 : 7 = \frac{22}{7}$

divisions décimales :

$22 = (7 \times 3{,}1) + 0{,}3$ 3,1 est le quotient décimal approché[4] à 10^{-1} près par défaut du quotient de 22 par 7 et 0,3 le reste associé.

$22 = (7 \times 3{,}14) + 0{,}02$ 3,14 est le quotient décimal approché à 10^{-2} près par défaut du quotient de 22 par 7 et 0,02 le reste associé.

- soit lors de la recherche du quotient, approché par un décimal à 10^{-n} près par défaut, dans la division d'un décimal non entier par un entier.

division : $2{,}2 : 7 = ?$ $2{,}2 : 7 = \frac{22}{70}$

divisions décimales :

$2{,}2 = (7 \times 0{,}3) + 0{,}1$ $2{,}2 = (7 \times 0{,}31) + 0{,}03$ $2{,}2 = (7 \times 0{,}314) + 0{,}002$

- soit lors de la recherche du quotient, approché par un décimal à 10^{-n} près par défaut, dans la division de deux décimaux non entiers.

division : $2{,}2 : 0{,}7 = ?$ $2{,}2 : 0{,}7 = \frac{22}{10} : \frac{7}{10}$ $2{,}2 : 0{,}7 = \frac{22}{10} \times \frac{10}{7}$ $2{,}2 : 0{,}7 = \frac{22}{7}$

divisions décimales :

$2{,}2 = (0{,}7 \times 3) + 0{,}1$ $2{,}2 = (0{,}7 \times 3{,}1) + 0{,}03$ $2{,}2 = (0{,}7 \times 3{,}14) + 0{,}002$

Remarque :
On peut également définir la division décimale comme étant une « division euclidienne d'ordre n »

$$\left| \begin{array}{l} D^+ \times D^{+*} \longrightarrow D^+ \times D^+ \\ \\ (a\,;b) \longmapsto (q\,;r) \text{ tel que } q \text{ décimal d'ordre } n \text{ et } a = (b \times q) + r \text{ avec } r < \frac{b}{10^n} \end{array} \right.$$

ordre 0 : $(2{,}2\,;0{,}7) \longmapsto (3\,;0{,}1)$ avec $2{,}2 = (0{,}7 \times 3) + 0{,}1$ avec $0{,}1 < 0{,}7$
ordre 1 : $(2{,}2\,;0{,}7) \longmapsto (3{,}1\,;0{,}03)$ avec $2{,}2 = (0{,}7 \times 3{,}1) + 0{,}03$ avec $0{,}03 < 0{,}7 \times 10^{-1}$
ordre 2 : $(2{,}2\,;0{,}7) \longmapsto (3{,}14\,;0{,}002)$ avec $2{,}2 = (0{,}7 \times 3{,}14) + 0{,}002$ avec $0{,}002 < 0{,}7 \times 10^{-2}$
ordre 3 : $(2{,}2\,;0{,}7) \longmapsto (3{,}142\,;0{,}0006)$ avec $2{,}2 = (0{,}7 \times 3{,}142) + 0{,}0006$ avec $0{,}0006 < 0{,}7 \times 10^{-3}$

[3] APMEP 1975: brochure n° 11 ("MOTS 2").
[4] Ce quotient approché est appelé parfois quotient décimal d'ordre 1 car il possède un chiffre après la virgule.

NOS CHOIX

Nous serons très attentifs au vocabulaire et au symbolisme utilisés.

Pour la division euclidienne :

Nous emploierons le vocabulaire division euclidienne ou **division avec reste[5].**

Le mot quotient euclidien est également retenu dès lors que le mot quotient est envisageable au cycle 3 et retenu comme vocabulaire exigible en la classe de sixième.

En ce qui concerne le symbolisme utilisé, nous **décidons d'utiliser « la potence** ├ » comme symbole caractérisant la division euclidienne. De plus, nous nous efforcerons de toujours écrire l'égalité caractéristique, évoquée dans les instructions officielles, comme l'écriture mathématique traduisant la situation.

ex : 34 ├ 6 $q = 5$ et $r = 4$.

Dans la division avec reste de 34 par 6, le quotient euclidien est 5 et le reste est 4.

On a $34 = (6 \times 5) + 4$ avec $4 < 6$ ou $34 = (5 \times 6) + 4$ avec $4 < 6$.

42 ├ 7 $q = 6$ et $r = 0$.

Dans la division avec reste de 42 par 7, le quotient euclidien est 6 et le reste est 0.

On a $42 = 6 \times 7$ ou $42 = 7 \times 6$.

Pour la division dans l'ensemble des rationnels :

Nous emploierons le vocabulaire division ou **division sans reste.**

Le mot quotient sera utilisé alors à bon escient.

Le symbolisme utilisé est « **les 2 points** » « **:** » avec l'écriture fractionnaire associée.

Exemple 1 : $34 : 6 = \frac{34}{6}$ $q = \frac{34}{6}$ ou $q = \frac{17}{3}$

Dans la division sans reste de 34 par 6, le quotient de 34 par 6 est $\frac{17}{3}$

Remarque : il y a deux lectures possibles de l'écriture fractionnaire $\frac{17}{3}$

« 17 divisé par 3 » ou « 17 tiers ».

Exemple 2 : $42 : 7 = 6$ $q = 6$ $\frac{42}{7} = 6$

Le quotient de 42 par 7 est 6.

42 divisé par 7 est égal à 6.

[5] Dans tous les cas la division euclidienne produit un reste bien que celui-ci puisse être nul. C'est le contexte qui permet de savoir si la situation est modélisée par la division euclidienne ou par l'opération division.

B ASPECTS DIDACTIQUES

1. LA QUESTION DU SENS

Nous nous appuyons essentiellement sur les écrits de G. Vergnaud, en particulier sur sa typologie des structures multiplicatives publiée dans « **Le moniteur de Mathématiques** » Nathan 97.

L'aspect sémantique

Il y a beaucoup plus que deux catégories de situations mais les deux premières catégories suivantes sont prégnantes à l'école élémentaire.

La division dans le cadre d'une proportionnalité simple entre deux grandeurs G1 et G2 :

G1	G2
1	b
C	d

- la **division quotition** : recherche de c
  (Aspect : nombre de parts, de groupements, d'itérations …)
  Exemples : 1) 167 tomates groupées par 36, nombre de groupements?
  2) sauts réguliers de 42 unités de longueur, 226 unités de longueur à parcourir, nombre de sauts?

- la **division partition** : recherche de b
  (Aspect : valeur d'une part, d'un groupement, ...)
  Exemple : 432 objets entre 8, combien d'objets à chacun?

- la recherche du rapport fonctionnel c entre les 2 grandeurs G1 et G2

m_c

G1	G2
a_1	b_1
a_2	b_2
a_3	b_3

  Exemple : 3 friandises à 12 euros, prix à l'unité?

La division dans le cadre d'une comparaison multiplicative au sein d'une même grandeur

- la recherche de c

m_c

G	a	b

  Exemple : Paul a 7 ans, son père Pierre a 35 ans, de combien de fois Pierre est-il plus âgé que son fils ?

La division intervient également dans les cadres de proportionnalité simple composée ou de proportionnalité multiple que nous n'étudierons pas ici.

Les grandeurs en jeu

Le premier sens de la division est souvent lié à celui d'un partage équitable d'une collection ou à son organisation en groupes équipotents.
Les grandeurs en jeu sont alors **des cardinaux**. La division euclidienne modélise dans ces conditions des recherches portant sur le nombre de parts ou la valeur de la part (cas de partages équitables) ou sur la recherche du nombre de groupements ou de la valeur d'un groupement.
Ces cas particuliers sont d'un intérêt évident car ils permettent de simuler aisément les situations mais sont loin de constituer l'essentiel des situations rencontrées dans la vie courante.

Nous devons donc impérativement élargir le champ des situations de référence[6] mettant en jeu **d'autres grandeurs en particulier des longueurs et des prix** car l'une est souvent la première grandeur continue rencontrée par les élèves et l'autre une grandeur discrète liée à la monnaie dont la connaissance est fort utile à tout citoyen.
C'est le contexte qui détermine l'utilisation appropriée de l'une ou l'autre des deux divisions.

Exemples :

- partager 4 chaises entre 3 personnes relève de la division avec reste (division euclidienne)
- partager 9 chaises entre 3 personnes relève de la division avec reste (division euclidienne, reste nul)
- couper 4 m de corde en 3 morceaux de même longueur et trouver la longueur du morceau relève de la division sans reste (chaque morceau aura pour longueur $\frac{4}{3}$ m)
- trouver le nombre de morceaux de 30 cm dans une longueur de 4 m relève de la division avec reste
- chercher le nombre de voyages nécessaires au transport de 4 tonnes de marchandises avec un camion de 3 tonnes de charge utile relève de la division avec reste mais la réponse est le quotient euclidien plus un.

L'aspect du nombre sollicité

Les nombres entiers interviennent comme **cardinaux** d'ensembles finis ou comme **mesures réelles** ou **approchées** exprimées à l'aide des unités choisies dans le cas des grandeurs mesurables.

C'est le contexte qui permet de savoir le type de nombre à utiliser : entier ou rationnel non entier ?

Exemples :

- « 6 m de fil en 4 morceaux, quelle est la longueur l du morceau ? » est modélisé par la division sans reste ($q = \frac{6}{4}$ non entier) mais le résultat est une longueur ayant une mesure entière (150)
$l = 1{,}5$ m ou $l = 150$ cm.
- « 6 tartelettes entre 4 personnes » est modélisé de même par la division sans reste mais le résultat est le rationnel non nul $1 + \frac{1}{2}$
- « 6 euros entre 4 personnes » est modalisé par la division sans reste, mais donne une solution de 1 euro et 50 centimes (écriture complexe utilisant des nombres entiers)
- « 60 euros entre 7 personnes » est modélisé par la division sans reste mais l'on recherche une solution approchée et l'on utilise donc une « division décimale » ($q = 8{,}57$ quotient approché à 10^{-2} près par défaut) ou une division euclidienne ($q = 857$ $r = 1$ soit 85 centimes par personne avec un reste de 5 centimes) .

Les nombres interviennent aussi comme **ordinaux** (cases numérotées, repères sur un segment gradué).
Cet aspect est souvent négligé et pose problème à de nombreux élèves.

---

[6] Ces situations, étudiées en commun, devraient permettre aux élèves de « fonctionner par analogie » pour les autres situations rencontrées.

Exemple : recherche de la case de départ, entre 22 et 27, permettant d'atteindre la case 118 lors de déplacements réguliers en avant de 5 cases.

2. LES PROCÉDURES

Il existe plusieurs niveaux de procédures qui dépendent essentiellement des connaissances des élèves et des variables de la situation.

Niveau 1 : **simulation de l'action** matériel dessins représentations	Niveau 2 : **calculs** additifs soustractifs multiplicatifs mixtes
Niveau 3 : **expert**	
Techniques usuelles **T1** recherche des meilleurs multiples du diviseur à chaque étape du calcul ou **T2** partage des groupements de numération du dividende	Calcul mental Calcul instrumenté

Montrons le rôle de deux variables fondamentales dans la mise en œuvre des procédures de type calculs :

L'aspect sémantique de la situation

- la division-quotition

167 tomates groupées par 36, nombre de groupements?

Tous les types de calculs ont alors du sens.

Les calculs additifs comme $36 + 36 = 72$ pour 2 groupements de 36 tomates.

Les calculs soustractifs comme $167 - 36$ pour 1 groupement, il reste 131 tomates.

Les calculs multiplicatifs comme $36 \times 10 = 360$ pour 10 groupements de 36 tomates.

- la division-partition

432 objets insécables à partager entre 8 personnes, combien d'objets a chacune d'entre-elles?

Il est alors beaucoup plus difficile de donner du sens aux calculs additifs ou soustractifs, l'intervention du maître sera souvent indispensable car l'expérience montre que ces types de calculs seront rarement spontanés.

En effet que signifient[7] $432 - 8$? 432 objets auxquels on retranche 8 personnes ?

$8 + 8$ soient 16 personnes pour rechercher un nombre d'objets par personne ?

Les procédures multiplicatives sont toujours porteuses de sens.

$8 \times 10 = 80$ ou $10 \times 8 = 80$ pour étudier la possibilité de donner 10 objets par personne.

L'aspect quotition favorise donc la multiplicité des procédures en particulier, les procédures additives et soustractives sont plus fréquemment utilisées spontanément par les élèves.

[7] Cette signification est parfois prise en charge par des auteurs de manuels $432 - 8$ revient alors à rechercher combien il reste d'objets après une distribution de 1 objet à chacune des 8 personnes.

Les données numériques en jeu

Dans la situation a divisé par b :

- un diviseur b comme 5, 10, 25, 50, 100 facilite les procédures multiplicatives (combien de fois b dans a?) si les élèves sont conscients de la facilité d'effectuer des multiplications par des puissances de dix et connaissent les relations arithmétiques usuelles (25×4 c'est 100).

- un diviseur à un chiffre dans une situation de division partition peut inciter les élèves à partager successivement centaines, dizaines et unités.

Etudions les deux techniques opératoires usuelles de la division euclidienne.

Il existe deux techniques opératoires posées de la division euclidienne en usage dans notre pays.
Celles-ci utilisent une disposition à l'aide de « la potence ».
Ces deux techniques n'utilisent pas les mêmes principes et ont des avantages et des inconvénients qu'il s'agit de repérer.

L'objectif est de donner du sens à la technique pour permettre aux élèves de bien la comprendre, avant de l'utiliser de manière automatique. Ceci nécessite une contextualisation souvent indispensable.

T1 : « Les meilleurs multiples » du diviseur à chaque étape des calculs.

Cette technique a du sens dans des situations de division quotition (6658 objets, groupements par 27, nombre de groupements ?) comme dans des situations de type partition (6658 objets, 27 groupements, valeur du groupement ?)

Phases du raisonnement :

1) recherche d'un encadrement du quotient euclidien par une puissance de dix.

6658 objets, il y a entre 100 et 1000 groupes de 27 (division quotition)

car 100 groupes utilisent 2700 objets (il y en a 6658) mais 1000 groupes utilisent 27 000 (dans ce cas il n'y a pas assez d'objets).

6658 objets, 27 groupements. Il y a entre 100 et 1000 objets par groupement (division partition).

2) construction des tableaux de multiples, le premier tableau étant éventuellement fourni à l'élève (« table de 27 »).

Les raisonnements devraient utiliser les propriétés de linéarité :

Utilisons un vocabulaire lié à une situation de division quotition, le lecteur pourra aisément l'adapter à une situation de division partition.

- 2 groupements de 27 utilisent 54 objets, 20 groupements de 27 (soit **10 fois plus de groupements)** utiliseront **10 fois plus d'objets.**
- 2 groupements de 27 utilisent 54 objets, 4 groupements de 27 utilisent 108 objets, 6 groupements de 27 utiliseront donc le nombre **d'objets nécessaires à 2 et encore 4 groupements soit la somme de 54 et 108 objets, qui font 162 objets.**

Les tableaux de multiples peuvent être complets ou partiels, un élève de CM2 devrait pouvoir rechercher au fur et à mesure les résultats utiles à ses calculs.

3) calculs avec « poses » des soustractions intermédiaires avec les zéros
4) écriture de l'égalité caractéristique

$6658 = (246 \times 27) + 16$ avec $16 < 27$ ou $6658 = (27\times246) + 16$

Evolution de la technique T1

CM1

100 x 27 < 6658 < 1000 x 27 (un quotient euclidien compris entre 100 et 1000)

6658	27
− 5400	200
1258	+
− 1080	40
178	+
− 162	6
16	246

1	27	10	270	100	2700
2	54	20	540	**200**	**5400**
3	81	30	810	300	
4	108	**40**	**1080**	400	
5	135	50	1350	500	
6	**162**	60	1620	600	
7	189	70	1890	700	
8	216	80	2160	800	
9	243	90	2430	900	

$\boxed{6658 = (27 \times 246) + 16 \text{ avec } 16 < 27}$

CM2

100 x 27 < 6658 < 1000 x 27 (3 chiffres au quotient euclidien)

6 658	27
− 5 400	246
1258	
− 1080	
178	
− 162	
16	

1	27	10	270	100	2700
2	54	20	540	**200**	**5400**
4	108	**40**	**1080**		
6	**162**			1000	27000
3	81				

$\boxed{6658 = (246 \times 27) + 16 \text{ avec } 16 < 27}$

T2 : « Partage des groupements de numération »

Cette deuxième technique se construit plus aisément dans le contexte d'une situation de type division partition.
Le vocabulaire qui peut alors lui être associé est celui relatif à un matériel[8] de numération de type groupement ou de type échange.

Nous nous plaçons dans le cadre d'une utilisation d'un matériel de type échange.
Soit une valeur de 6658 à répartir équitablement entre 27 personnes.
Cette valeur est représentée par 6 plaques de 1000, 6 plaques de 100, 5 plaques de 10 et 8 plaques de 1.

Phases du raisonnement :

1) recherche de nombre de chiffres du quotient euclidien.
Il est impossible de donner 1 plaque de 1000 à chacune des 27 personnes. Nous ne disposons que de 6 plaques de 1000.
Nous devons donc échanger les 6 plaques de 1000 contre 60 plaques de 100 (1 plaque de 1000 contre 10 plaques de 100), nous avons donc à notre disposition 60 + 6 plaques de 100. La répartition des 66 plaques de 100 entre les 27 personnes est maintenant possible.
Le premier type de plaques à distribuer est de type centaine.
Il y a donc 3 chiffres au quotient euclidien.

2) recherche des chiffres successifs du quotient euclidien.

[8] un matériel de type groupement peut être constitué par des sacs transparents : un sac de dix contient 10 objets, un sac de cent contient 10 sacs de dix ; un matériel de type échange peut être constitué de plaques identiques donc la valeur est indiquée, sur chaque plaque, par une trace symbolique : une plaque qui vaut 1, une plaque qui vaut 10, une plaque qui vaut 100.

Le résultat[9] de cette première répartition des plaques de 100 est une distribution de 2 plaques par personne.
On utilise donc $2 \times 27 = 54$ plaques et il reste 12 (66 – 54) plaques.
Le processus d'échanges est à nouveau nécessaire : les 12 plaques de 100 sont échangées contre 120 plaques de 10 auxquelles on ajoute les 5 plaques de 10.

Nous disposerons de 125 plaques de 10 et une nouvelle répartition est à nouveau possible.
125 plaques à répartir entre 27 personnes, combien de plaques par personne ?
Il existe au moins deux procédures différentes pour résoudre ce problème, étudions-les :

- **Le basculement de sens**

Le problème initial est de type division partition, il peut se traiter comme un problème de division quotition.
125 plaques entre 27 personnes : à chaque distribution de 1 plaque par personne, 27 plaques sont utilisées. Rechercher combien de distributions de 1 plaque sont possibles revient donc à rechercher combien de fois il y a 27 plaques dans 125 plaques ou combien de groupements de 27 il y a dans 125, soit **combien de fois 27 dans 125 ?**
Nous avons transformé le problème initial en un problème de division quotition.
Un calcul mental réfléchi nous permet de trouver le résultat. Dans 100, il y a 4 fois 25 ; dans 125, il y a 5 fois 25 donc dans 125 il ne peut pas y avoir 5 fois 27.
Il y a donc 4 fois 27 dans 125.

- **Les essais multiplicatifs**

Choix d'une distribution de 3 plaques par personne, de 4 plaques, et enfin de 5 plaques.
$27 \times 3 = 81$ $27 \times 4 = 108$ $27 \times 5 = 135$ avec $135 > 125$
Chaque personne aura donc 4 plaques de dix.

Chaque personne recevra donc 4 plaques de 10. On utilise ainsi 108 plaques de 10 sur les 125 plaques disponibles et il restera donc 17 plaques de 10.
Les échanges sont à nouveau indispensables.

17 plaques de 10 sont échangées contre 170 plaques de 1 auxquelles on ajoute les 8 plaques de 1.
Nous disposons donc de 178 plaques de 1 à répartir équitablement entre les 27 personnes.

178 entre 27 ou combien de fois 27 dans 178 ?
C'est approximativement la même situation que de rechercher
combien de fois 25 dans 175 ? soit 7
ou
combien de fois 30 dans 180 ?
combien de fois 3 dizaines dans 18 dizaines ? soit 6

$27 \times 6 = 162$ **chaque personne recevra donc 6 plaques de 1 et il restera 16 plaques de 1.**

3) Ecriture de l'égalité caractéristique

$6658 = (246 \times 27) + 16$ avec $16 < 27$ ou $6658 = (27 \times 246) + 16$ avec $16 < 27$

[9] Ce résultat est facile à obtenir à l'aide d'un calcul mental réfléchi et ne nécessite pas d' « essais multiplicatifs posés ».
27 personnes c'est presque 30, on donnant 2 plaques à chaque personne on utiliserait alors 60 plaques.

Evolution de la technique T2

CM1

C	D	U				
3	4	6				3
− 3				C	D	U
0	4			1	1	5
	− 3					
	1	6				
	− 1	5				
		1				

$346 = (115 \times 3) + 1$ avec $1 < 3$

CM2

M	C	D	U				
− 6	6	5	8			2	7
5	4						
− 1	2	5			C	D	U
1	0	8			2	4	6
	− 1	7	8				
	1	6	2				
		1	6				

$6658 = (246 \times 27) + 16$ avec $16 < 27$

Avantages et inconvénients de chacune des 2 techniques.

	Avantages	Inconvénients
T1	A1 L'enseignant peut **s'appuyer sur les procédures multiplicatives spontanées** de ses élèves pour les améliorer en leur suggérant d'utiliser des multiplications du diviseur par des puissances de 10. L'enseignement de la disposition usuelle n'est alors qu'une manière culturelle de présenter les calculs. A2 La compréhension de la technique peut **s'appuyer sur les deux principaux types** de situation : partition et quotition. A3 L'élève est amené à reconstruire les répertoires multiplicatifs en développant **l'utilisation des propriétés de linéarité.**	I1 Cette technique est éloignée de la technique traditionnelle longtemps enseignée en France. I2 Cette technique est plus coûteuse en temps : l'élève devant construire les répertoires multiplicatifs. I3 Cette technique développe moins les raisonnements mentaux.

T2	A1 Cette technique est **proche de la technique française traditionnelle**[10] et déstabilise moins les parents. A2 L'enseignement de cette technique peut avoir pour objectif de **consolider la compréhension de la numération.** A3 Cette technique peut développer l'usage du calcul mental.	I1 Cette technique n'est pas issue des procédures personnelles spontanées des élèves. I2 Cette technique a un sens beaucoup plus difficile à percevoir dans le cadre d'une situation de type division quotition. I3 Le « basculement de sens » n'est pas toujours pris en charge par l'enseignant et la compréhension s'avère alors difficile.

NOS CHOIX

Nous avons décidé d'introduire la division euclidienne, au début de chaque année du cycle 3 et en sixième, dans le cadre d'une situation de type quotition qui favorise la multiplicité des procédures.

Nous serons attentifs à étendre rapidement l'utilisation de la division euclidienne en dehors de son domaine d'introduction, en particulier dans un contexte ordinal et dans le cadre des grandeurs usuelles.

En ce qui concerne les techniques opératoires, nous avons la volonté de partir des procédures spontanées des élèves et nous enseignerons donc la technique T1 « meilleurs multiples » en CM1.

En CM2, les deux techniques pourront coexister, du fait de la prégnance de la technique T2 « partage des groupements de numération » chez les maîtres de l'école primaire. Nous conserverons néanmoins la technique T1 chez les élèves en difficulté et la découverte de la technique T2, plus tard dans l'année, permettra à tous les élèves de travailler encore l'aspect numération.

En sixième, nous laisserons à nouveau les deux techniques coexister mais l'enseignement de T2 sera plus précoce pour nous permettre d'introduire pour facilement les « divisions décimales ».

[10] 2534 diviser par 67 : 4 chiffres par 2 chiffres, on prend les 2 premiers chiffres du dividende « en 25 combien de fois 67 ?, on ne peut pas, on prend un autre chiffre. En 253 combien de fois 67 ou en 25 combien de fois 7 ? il y va 3 fois etc... »

III. NOS IDÉES DIRECTRICES

A Notre conception des apprentissages

1. Une unité [11] d'apprentissage

Nous appelons unité d'apprentissage une succession raisonnée de séquences de classe qui permet aux élèves d'acquérir la maîtrise d'une notion, c'est à dire de construire les connaissances associées avant de les automatiser pour les rendre disponibles dans d'autres contextes. Ces connaissances sont alors maîtrisées avec le degré d'expertise en relation avec le niveau considéré.

Nous définissons en conséquence la typologie[12] suivante des séquences :

- séquence d'**Approche**
- séquence de **Construction**
- séquence de **Consolidation** (entraînement et réinvestissement).

Une séquence constitue un bloc de séances, réunies par un objectif commun. Une séance, quant à elle, est une unité de temps de classe qui a une durée[13] moyenne de 50 minutes.
Les supports papier proposés aux élèves et nécessaires à la bonne compréhension du dispositif sont joints en annexe à titre d'exemples.

La séquence d'**approche** (Annexe 1)

Indispensable, elle a pour objectif de renseigner le maître sur l'état initial des connaissances des élèves sur la notion. Il s'agit donc de proposer aux élèves un travail personnel sur le sujet traité. L'étude attentive des productions de chacun permet alors à l'enseignant de prendre des décisions.
Exemples de décisions : certains élèves ne participeront pas à l'activité, certains élèves serviront de tuteurs dans le cadre d'un travail de groupe, certains élèves faibles bénéficieront dès le départ de l'aide du maître…

La séquence de **construction**

Elle a pour objectif de conduire tous les élèves à acquérir la ou les connaissances visées.
Sa mise en œuvre se déroule selon les quatre phases[14] suivantes :

- une phase de **familiarisation** dont l'objectif est de laisser aux élèves le temps de découvrir la totalité du matériel utilisé.

- une phase d'**appropriation (Annexes 2)** dont l'objectif est pour les élèves de bien intégrer le dispositif utilisé et de réussir la ou les tâches avec leur niveau inférieur de connaissances. Cela permet à chacun de bien comprendre ce que le maître attend de lui et d'être en situation de réussite avant d'être confronté à l'obstacle constituant l'apprentissage visé.
Cette phase d'appropriation comporte en général deux étapes : la première, **l'appropriation collective** consiste, en général, à simuler la totalité des tâches avec un groupe restreint d'élèves choisis par le maître en fonction de leur capacité de compréhension ; la seconde, **l'appropriation individuelle** permet à tous les élèves de vivre à leur tour la totalité du dispositif sans difficultés liées aux tâches proposées.

---

[11] Notion empruntée à la didactique de l'E.P.S.
[12] Cette typologie est celle des documents d'application 2002 mais elle est ici utilisée avec un sens légèrement différent.
[13] Cette durée est impérative au collège mais est modulable au primaire.
[14] Une phase ne constitue pas une séance mais est un moment du déroulement de la séquence.

Dans cette phase la tâche et la structure pédagogique est la même pour tous les élèves.

- une phase d'**apprentissage (Annexes 3 et 4)** dont l'objectif visé est de faire parvenir **tous les élèves** à la construction de la (des) nouvelle(s) connaissance(s).

Les recherches :
Les **recherches se font par groupes de 2 ou 3 élèves** avec les **différenciations indispensables**. Certains groupes bénéficient en particulier de l'apport du maître, ils travaillent sur la même tâche mais avec des paramètres différents (matériel, nombres choisis..). Les groupes en autonomie échangent dans le cadre de **brassages**[15] organisés par l'enseignant.
A la fin de ces moments de recherche, le maître doit impérativement parvenir au fait que **tous les groupes d'élèves** aient trouvé **les bons résultats**.

La mise en commun :
Les recherches sont alors suivies d'une **mise en commun** (ou **synthèse**) regroupant la totalité du groupe classe sous la conduite de l'enseignant.
Pour préparer cette mise en commun dans de bonnes conditions, l'enseignant demande au groupe de rédiger un écrit de communication sur deux supports différents : un transparent de format A4 et une affiche de format A1.
L'intervention de l'enseignant n'est pas neutre : le professeur s'appuie sur deux ou trois productions collectives bien choisies mais ne néglige pas son **apport** qui demeure **indispensable** pour faire progresser les connaissances des élèves.
Souvent la mise en commun se termine par une **trace écrite individuelle** où l'élève consigne dans un dossier l'essentiel de ce qui à été mis en évidence par le maître. Cet écrit doit pouvoir servir à alimenter les recherches ultérieures des élèves.
La mise en commun peut être suivie d'une **évaluation individuelle intermédiaire** destinée à mesurer son impact auprès de chacun des élèves. La situation proposée ne doit pas comporter de difficulté supplémentaire par rapport au problème initialement posé car il ne s'agit ni d'une application ni d'un réinvestissement. Il est donc normal de reprendre le même exercice avec la même tâche et les mêmes paramètres de différenciation.

L'enseignant doit organiser autant de séances d'apprentissages que nécessaire, jusqu'à ce que la plupart[16] les élèves réussissent l'évaluation individuelle. Il peut ensuite passer à la phase suivante.

- une phase d'**institutionnalisation** de la connaissance
Elle fait l'objet d'une **trace écrite dans le cahier outil** individuel de chaque élève. Cette trace fait référence au contexte de la situation d'apprentissage. Elle doit être rédigée par le maître car l'écrit doit expliciter, avec beaucoup de soins, la connaissance acquise que les élèves devront maintenant utiliser.
Cette trace écrite doit être doublée d'un écrit collectif de référence affiché dans la classe autant que de besoin.

[15] Ces brassages seront explicités au chapitre suivant.
[16] Au moins la très grande majorité des élèves : on peut fixer une réussite de 80% des élèves.

Les séquences de **Consolidation**

Elles peuvent être de deux types.

Le type entraînement (Annexe 5) où il s'agit, pour l'élève, d'automatiser la connaissance acquise en lui proposant une situation dans le même contexte que celui de la séquence de construction ou en dehors de tout contexte (par exemple un calcul utilisant la technique apprise au cours de la séquence de construction).

La mise en œuvre retenue est alors la suivante :

- les élèves résolvent individuellement le problème proposé
- après l'obtention d'une solution individuelle, chacun discute avec son voisin et a le droit de proposer une seconde réponse modifiée. Le travail s'effectue donc au sein d'un groupe de 2 élèves.
- Ensuite, l'élève consulte la solution et s'auto-évalue.

Il a le droit d'arrêter son travail dès qu'il a réussi, individuellement, deux problèmes d'affilée avant consultation du voisin. Pendant cette séance, les élèves peuvent consulter la trace écrite élaborée lors de l'institutionnalisation.

Ce dispositif nécessite donc une grande collaboration au sein du binôme de deux élèves et permet au maître de se libérer entièrement pour une action auprès d'élèves qui ont encore besoin de son soutien.

Le type réinvestissement où il s'agit pour le maître de rendre l'élève capable d'utiliser ses connaissances dans d'autres contextes.

La mise en œuvre est alors la même que lors d'une séquence de type construction (familiarisation avec réappropriation du dispositif puis réinvestissement) mais l'importance des mises en commun est minimisée dès lors que les élèves ont déjà construit la ou les connaissance(s) nécessaire(s) à la résolution du problème.

L'utilisation de la connaissance peut être mobilisée par l'intervention du maître lors de phases de rappels collectifs ou par celle d'un camarade au sein d'un travail de groupe (constitué de façon hétérogène) lorsque celle-ci n'est pas encore disponible spontanément.

2. Un dispositif particulier : « les brassages en autonomie »

Celui-ci est fondamental pour une bonne prise en charge des élèves en difficulté : voir annexes 3 et 4.

Ce dispositif est mis en place pour les séquences de construction et les séquences de consolidation de type réinvestissement.

<u>Voici les principales idées qui gouvernent le choix de celui-ci :</u>

- Le **maître doit être libéré** pour s'occuper des **élèves dont il est prévisible qu'ils rencontreront des difficultés** avec la situation. Il faut donc que **les autres élèves puissent travailler en autonomie.** Cela suppose que les élèves soient capables d'une certaine indépendance, mais ce scénario contribue à atteindre cet objectif. Les élèves qui travaillent sans le maître sont mis en groupes, si possible par 3. Nous les appellerons groupes A.
  Des brassages entre groupes A sont régulièrement organisés (un ou deux élèves quittent chaque groupe pour défendre la position commune du nouveau groupe constitué). L'idée fondamentale est de parvenir, après éventuellement deux brassages, à obtenir les bons résultats numériques au sein de chacun des groupes A initiaux sans intervention du professeur qui reste uniquement organisateur des brassages. Il peut ainsi consacrer l'essentiel de son action aux élèves en étayage.
- **Les élèves qui bénéficient du soutien de l'enseignant sont intégrés à l'activité commune :**
  - ils sont structurés, de la même façon, en groupes de 3.

  Nous les appellerons groupes S.
  - ils réalisent les mêmes tâches sur un problème de même structure mais plus facile.

- leurs productions écrites communes sont exploitées en priorité.

  Il semble intéressant que, dans l'organisation des activités, ces élèves ne se sentent pas mis à l'écart. Le fait que leurs réussites soient mises en valeur est perçu comme un élément important de l'action du professeur. L'encouragement affectif de celui-ci, tout au long du travail, est également fondamental.

- Avec les **groupes S, le professeur se donne tous les moyens de leur faire trouver les bons résultats numériques.** Il peut donc utiliser en particulier du matériel (concret pour simuler les actions, calculatrice pour soulager la difficulté des calculs…) et dispenser l'enseignement qu'il juge indispensable.
- Il faut **évaluer individuellement tous les élèves durant le déroulement de l'unité d'apprentissage**. Une évaluation initiale (séquence de type approche) est nécessaire pour permettre à l'enseignant de définir la composition première de ses différents groupes. Durant la séquence de construction, le suivi constant des élèves à travers l'étude de leurs productions individuelles (écrit personnel de recherche qui précède tout travail de groupe) doit lui permettre de réguler son action, en particulier en ce qui concerne la modification éventuelle de la composition des groupes A et S. D'éventuels passages d'élèves des groupes A vers les groupes S et inversement sont donc possibles.
- **Les mises en commun sont fondamentales** : elles permettent au professeur de prendre en charge les groupes A et de faire avancer leurs connaissances en s'appuyant sur 2 ou 3 écrits de communication (solution rédigée par groupe) jugés par l'enseignant comme étant les plus pertinents.

  En effet, bien que les brassages permettent à tous les groupes de produire de bons résultats numériques, cela ne garantit en aucun cas la compréhension effective de chacun des élèves. C'est pour cela qu'une évaluation est réalisée avant l'institutionnalisation, afin de mesurer l'impact des mises en commun.

  Il faut bien distinguer mises en commun et institutionnalisation. Dans ce dispositif, les mises en commun ne sont faites que lorsque tous les résultats numériques par groupes sont corrects (à différencier d'une bonne solution correctement rédigée) et, idéalement, l'institutionnalisation n'est effectuée que lorsque tous les contrôles individuels sont réussis.

  L'organisation est la suivante :

  Les groupes, constitués de trois ou de deux élèves, rédigent au préalable leur écrit de communication sur deux supports (transparent et affiche) qui ont chacun leur utilité. Les transparents permettent au maître de focaliser l'attention de tous les élèves et le format A4 permet éventuellement de numériser la production pour la reproduire si nécessaire. Les affiches de format A1 ou A0 (tableau de papier) permettent d'exposer tous les écrits de communication pour éventuellement les comparer.

  Le travail est réparti au sein de la triplette pour parvenir à un écrit identique sur les deux supports. Par exemple : le secrétaire est responsable de la rédaction mais n'écrit pas, les deux autres élèves ont en charge, chacun, l'écrit sur l'un des deux supports.

  Lors de l'utilisation des écrits de communication d'un groupe, les auteurs se déplacent et font face au groupe classe. Le maître désigne alors le rapporteur, ses camarades peuvent pointer ce qui est dit à la fois sur les deux supports et apporter les compléments utiles.

Tout ceci demande bien entendu de bénéficier de conditions matérielles satisfaisantes qui permettent , en particulier, de modifier la disposition des tables pour les moments de travail en groupe.
Avec ce scénario, **l'évaluation initiale (séquence d'approche) est le point de départ fondamental de l'activité, car elle permet une bonne constitution des groupes initiaux** (les groupes S d'élèves en soutien, qui vont bénéficier d'un fort étayage par le maître et les groupes A d'élèves qui vont travailler en relative autonomie).

<u>Nous décrivons de façon précise l'organisation du travail dans les groupes A.</u>

Les élèves en autonomie ont pour tâches au sein de la triplette de départ :

- de résoudre individuellement le problème
- de comparer leurs solutions à trois (lors de cette comparaison, les élèves changent de couleur de stylo s'ils sont amenés à rectifier leur écrit personnel de recherche) en se mettant d'accord sur une proposition commune écrite sur leur fiche collective de couleur[17] ; cette proposition commune (résultats numériques uniquement) est inscrite dans un tableau dit « secret » car accessible au seul regard du maître
- de proposer au groupe classe, lors de la mise en commun, leur solution commune rédigée (écrit de communication), avec le support d'une affiche et d'un transparent.

Des rôles précis sont attribués aux trois membres des groupes A : **le rôle du secrétaire S** est d'être le garant du respect des consignes de travail, celui **du rapporteur R** est d'inscrire au « tableau secret » la proposition de son groupe et celui **du messager M** de défendre la position commune lors des brassages ultérieurs entre groupes.
Le « tableau secret » a un rôle fondamental : il permet à l'enseignant de suivre l'évolution des groupes en autonomie.
On utilise généralement le rabat d'un tableau mural. Ainsi, il n'est pas visible directement par l'ensemble des élèves mais il doit nécessairement être situé près de la zone de travail des groupes S que le maître a en charge. Le rapporteur de chaque groupe, muni de sa fiche collective, écrit sur ce tableau les résultats numériques trouvés par son groupe, pour que l'enseignant puisse en prendre connaissance.

Le maître, en dehors de la présence des élèves, a le temps matériel de réfléchir au brassage des différents groupes en autonomie : il est organisé de telle sorte qu'au sein des nouveaux groupes constitués la bonne solution au problème soit représentée par un élève.

Les élèves en autonomie ont pour tâches pendant et après chaque brassage :

- d'échanger au sein des nouveaux groupes (ils se munissent de leurs écrits personnels, ils utilisent alors, au cours du premier brassage, la deuxième zone de recherche et éventuellement, au cours d'un second brassage, la troisième zone de recherche)
- de reformer leurs groupes initiaux et de comparer leurs nouvelles propositions issues du brassage (s'ils rectifient leur proposition, issue du brassage, recueillie sur leur fiche individuelle, ils doivent à nouveau changer de couleur de stylo)
- de se mettre d'accord sur une nouvelle proposition en utilisant une nouvelle fiche collective de couleur différente. Cette proposition commune est une nouvelle fois écrite au tableau dit «secret ».

Nous indiquons l'organisation d'un brassage idéal en supposant que les trois groupes aient des réponses divergentes, le groupe G1 ayant les bons résultats numériques :

	Lieu du groupe G1	Lieu du groupe G2	Lieu du groupe G3
Groupes initiaux	**S1 R1 M1**	S2 R2 M2	S3 R3 M3
Groupes brassés	**S1** R2 M3	S2 R3 **M1**	S3 **R1** M2
Retour aux groupes initiaux	**S1 R1 M1**	S2 R2 M2	S3 R3 M3

L'expérience montre qu'un ou deux brassages suffisent en général pour que les groupes initiaux parviennent aux bons résultats.

[17] Le support de couleur permet de bien différencier l'écrit individuel de l'écrit collectif, cet élément est nécessaire et les élèves repèrent ainsi plus facilement les différents documents en leur possession.

B Un exemple de progression-programmation

1 Au cycle 3

LA DIVISION EUCLIDIENNE EN CE2

TYPE D'ACTIVITE	N°	SEQUENCES	Type de problème	Contexte du problème
Approche : évaluation diagnostique **Analyse des résultats**	1	**Problème** : « les madeleines »	quotition	cardinal
Calcul mental		Tables de multiplications	a x b = ?	
Construction 1 : • Familiarisation • Appropriation • Apprentissage • Evaluation 1	2	**Problème** : « les madeleines »	quotition	Cardinal
Calcul mental		Tables de multiplications.	a x ? = b	
Construction 2 : • Appropriation • Apprentissage • Evaluation 2	3	**Problème** : « les billes »	quotition	Cardinal
Institutionnalisation 1				
Calcul mental		**Petits Problèmes hors contexte**	$a \vdash b$	
Consolidation : Entraînement	4	**Problèmes** : les billes (domaine numérique varié)	quotition	Cardinal
Consolidation : Entraînement	5	« combien de fois a dans b ? » N < 1 000		Décontextualisé
Consolidation : Réinvestissement	6	**Problème** : la puce	quotition	Ordinal
Consolidation : Entraînement	7	**Problèmes** : *différents contextes *décontextualisés	Quotition Partition Quotition	Ordinal Cardinal Cardinal

LA DIVISION EUCLIDIENNE EN CM1

TYPE D'ACTIVITE		SEQUENCES	Type de problème	Contexte du problème
Approche : évaluation diagnostique	**SÉANCE n°1**	**Problème** : « les œufs »	quotition	cardinal
Construction 1 : LES OEUFS • Familiarisation • Appropriation • Apprentissage • Évaluation 1	**SÉANCES n°2/3/4**	**Problème** : « les œufs »	quotition	cardinal
Construction 2 : LES OEUFS • Appropriation • Apprentissage • Évaluation 2	**SÉANCES n°5/6**	**Problème** : « les œufs »	quotition	cardinal
Institutionnalisation		Technique T1 de la division		
Consolidation 3 : Entraînement	**SÉANCE n°7**	**Calculs** à **effectuer**	Hors contexte	
Consolidation 4 : LES RUBANS Réinvestissement • Familiarisation • Appropriation • Apprentissage	**SEANCE n°8**	**Problème** : « les rubans »	quotition	Mesures de longueurs
Consolidation 5 : LA SAUTERELLE Réinvestissement	**SEANCE n°9**	**Problème** : « la sauterelle »	quotition	ordinal
Consolidation 6 : Entraînement	**SEANCE n°10**	**Problèmes**	divers	divers
Évaluation terminale	**SEANCE n°11**	**Calculs et Problème**		

CM2

Unité d'apprentissage A

La division euclidienne

Technique « meilleurs multiples »

N°	TYPE D'ACTIVITE	SEANCES	TYPE	CONTEXTE
1	**Approche**	Evaluation diagnostique		
2	**Calcul mental*** :	**Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.**	a = (b x q)+r	Tables, divisions d'un entier inférieur à 100 par un entier inférieur à10
	Construction 1 : • Familiarisation • Appropriation individuelle et collective	**Problème** : Ranger des billes dans des sacs. (1 chiffre au diviseur)	quotition	cardinal
	Calcul mental*	**Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.**	a = (b x q)+r	Tables, divisions par 10, 100, 1000.
	Construction 1 : • Apprentissage	**Problème** : ranger des billes dans des sacs de 12. (501 billes)	quotition	cardinal
	Construction 1 : • Évaluation	**Problème** : Ranger des billes dans des sacs de 12. (567 billes)	quotition	cardinal
3	***Calcul mental***	**Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.**	a = (b x q)+r	Tables, divisions par 10, 100, 1000.
	Construction 2 : • Apprentissage	Problème : ranger des billes dans des sacs de 12. (3 897 billes)	quotition	cardinal
	Construction 2 : • Évaluation	**Problèmes** : ranger des billes dans des sacs de 12. (3 937 billes)	quotition	cardinal
	Institutionnalisation			
4	**Consolidation** : • Entraînement	Technique opératoire (2 chiffres au diviseur)		Sans contexte
	Consolidation : • Réinvestissement	**Problèmes** variés	quotition	Autre contexte

CM2

Unité d'apprentissage B

La division euclidienne

Technique « partage de groupements de numération »

N°	TYPE D'ACTIVITE	SEANCES	TYPE	CONTEXTE
	Approche	Pas d'évaluation diagnostique, elle a été déjà réalisée.		
1	**Calcul mental* :**	**Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.**	a=(b x q)+r	tables, divisions par 10, 100, 1000.
	Construction 1 : • Familiarisation • Appropriation	**Problème** : « le partage des plaques ». (1 chiffre au diviseur)	partition	cardinal
	Calcul mental*	**Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.**	a=(b x q)+r	tables, divisions par 10, 100, 1000.
	Construction 1 : • Apprentissage	**Problème** : « le partage des plaques. (1 chiffre au diviseur)	partition	cardinal
	Construction 1 : • Evaluation	**Problème** : le partage des plaques ». (1 chiffre au diviseur)	partition	cardinal
	Institutionnalisation			
2	***Calcul mental****	**Calculer le quotient et le reste d'une division euclidienne.**	a=(b x q)+r	tables, divisions par 10, 100, 1000.
	Consolidation : • Entraînement	**Problèmes** : le partage des plaques. (1 chiffre au diviseur)	partition	cardinal
	Consolidation : • Entraînement	Technique. (1 chiffre au diviseur)		sans contexte
3	**Construction 2 :** • Apprentissage	Problème : « le partage des plaques ». 2 chiffres au diviseur : « Basculement de sens : dans…combien de fois ? … »	partition	cardinal
	Construction 2 : • Evaluation	**Problèmes** : « le partage des plaques ». (2 chiffres au diviseur)	partition	cardinal
4	**Consolidation :** • Entraînement	Technique (2 chiffres au diviseur)		sans contexte
	Consolidation : • Réinvestissement	**Problèmes**	partition	autres contextes

2 En sixième

LES DIVISIONS EN 6ème

PROPOSITION DE PROGRESSION globale

Nombres et calculs	**Géométrie**	**Grandeurs et mesures**	**Organisation et gestion de données**
Problèmes avec les entiers (+, - , ×)		Durées	Lecture de tableaux , graphiques, diagrammes
	Reproduction, construction et description de figures : points, droites, segments, cercle, milieu d'un segment ; triangles, losange		Proportionnalité (calcul mental)
Quelle division ?			
Division euclidienne			
	Droites perpendiculaires et parallèles		
Division-quotient, écriture fractionnaire			
	Les quadrilatères		
		Périmètre et aire	
			Demi-droite graduée
Fractions décimales, nombres décimaux, addition et soustraction		Périmètre, longueurs	
	Bissectrices	Angles	
Multiplication des décimaux		Aire	
	Médiatrice d'un segment Symétrie axiale		
Quotient d'un décimal par un entier			
		Longueur du cercle	
	Propriétés des figures liées à la symétrie axiale Bissectrice au compas Construction de figures		
Multiplier un nombre par une fraction			
	Pavé droit		
			Appliquer un taux de pourcentage
		Volumes	
			Proportionnalité

LES DIVISIONS EN $6^{ème}$

PROGRESSION détaillée par notion

Les divisions				
	Type d'activités	*Séquences*	*Type de problème*	*Contexte du problème*
1	Approche	Tests diagnostiques de début d'année	Quotition Partition	cardinal ordinal longueur technique opératoire
2	Approche calcul mental	Des activités préparatoires à la division		
3	Construction • Apprentissage • Synthèse • Institutionnalisation	**Quelle division ?** : des petits problèmes à résoudre La division euclidienne et la division		

La division euclidienne				
	Type d'activité	*Séquences*	*Type de problème*	*Contexte du problème*
1	**Construction** • Appropriation • Apprentissage Évaluation Institutionnalisation Consolidation • Entraînement	**Les billes** La technique 1 : T1 Technique 1 : diviseur à 1 ou 2 chiffres	Quotition Groupement, recherche du nombre de groupements	Cardinal Sans contexte
2	**Construction** • Appropriation • Apprentissage Évaluation Institutionnalisation Consolidation • Entraînement • Réinvestissement	**Les plaques** La technique 2 : T2 Technique 2 : un diviseur à 1 ou 2 chiffres Autres problèmes	Partition Partage avec reste, recherche de la valeur d'une part	Cardinal Sans contexte

3	Consolidation • Réinvestissement 1. Appropriation 2. Apprentissage Évaluation Consolidation • Entraînement • Réinvestissement	**La puce et le trésor** La puce et le trésor Autres problèmes	Interprétation du reste Recherche du reste	Ordinal

La division – Ecritures fractionnaires				
	Type d'activité	Séquence	Type de problème	Contexte du problème
	Approche	*Partages équitables*		
	Construction Institutionnalisation Consolidation • Entraînement	**Les baguettes de pain** Synthèse : une fraction est un nombre, partage de l'objet, partage de la totalité, vocabulaire Les baguettes de pain *Les barres de chocolat* (brochure « vers la multiplication »)	Partition Fractions	Résultat d'un partage perçu comme le quotient de deux entiers
	Consolidation • Réinvestissement Institutionnalisation Consolidation • Entraînement	Le partage est-il le même ? *Les étiquettes* (brochure « vers la multiplication ») Synthèse : fractions égales Comparaison à 1 Autres exercices Segments et fractions	Mesure par fractionnement de l'unité	
4	Consolidation • Réinvestissement	**Quelle bande ?**	Mesure par commensuration	La mesure est perçue comme un quotient

IV. LES ACTIVITES

Le détail des activités par niveau scolaire :
- fiches de préparation et annexes
- fiches de travail données aux élèves

Elles sont dans le CD ROM joint.

BIBLIOGRAPHIE

APMEP

Mots 2 (1975) Division.

IREM

Bordeaux (1985) La division à l'école élémentaire, ouvrage collectif.
Rennes (1993) Base de données (remédiation cycle 3-sixième), ouvrage collectif.

INRP

Neyret R. (1984) *« Procédures utilisées par des enfants de cours moyen dans certains problèmes de division. Repérages de quelques difficultés »* in Comment font-ils ? L'écolier et le problème de mathématiques. Rencontres pédagogiques n°4, *INRP Paris.*

ERMEL CE2 (2000) Apprentissages numériques. *Hatier.*
ERMEL CM1 (2000) Apprentissages numériques. *Hatier.*
ERMEL CM2 (2000) Apprentissages numériques. *Hatier.*

DIVERS

Brun J., Conne F. (1993) *« Erreurs systématiques et contrôles sémantiques dans l'effectuation de divisions en colonnes » Journal de l'enseignement primaire 43, Genève.*

OUVRAGES SCOLAIRES

Brégeon J.-L., Dossat L., … LE MONITEUR DE MATHS (2001). *Hatier.*

Brissiaud R., Ouzoulias A., Clerc P. J'APPRENDS LES MATHS CE2 (2003). *Retz.*
Brissiaud R., Ouzoulias A., Clerc P. J'APPRENDS LES MATHS CM1 (2005). *Retz.*
Brissiaud R., Ouzoulias A., Clerc P. J'APPRENDS LES MATHS CM2 (2005). *Retz.*

Charnay R., Combier G., Dussuc M-P. CAP MATHS CE2 (2004). *Hatier.*
Charnay R., Combier G., Dussuc M-P. CAP MATHS CM1 (2004). *Hatier.*
Charnay R., Combier G., Dussuc M-P. CAP MATHS CM2 (2004). *Hatier.*

Malaval J., Courbon D. TRANSMATHS Sixième (2005). *Nathan.*

Peltier M.-L., Briand J., … EURO MATHS CE2 (2004). *Hatier.*
Peltier M.-L., Briand J., … EURO MATHS CM1 (2006). *Hatier.*
Peltier M-L., Briand J., … EURO MATHS CM2 (2006). *Hatier.*

ANNEXES

ANNEXE 1

FICHE INDIVIDUELLE diagnostique **DATE :**

Nom de la situation

Nom :	Prénom :

PROBLEME :

Enoncé…….

Ma recherche et mes explications :

Ma réponse

Consigne :

Utilise un stylo car il ne faut pas gommer mais il est possible de raturer pour rectifier son travail.

FICHE INDIVIDUELLE Appropriation **DATE :**

Nom de la situation

Nom : Prénom :	Rôle (à entourer) Secrétaire Messager Tableau

Consignes :

- *Il faut d'abord écrire la date, son nom et son prénom.*
- *Puis, il faut se répartir les tâches :*

  Le « secrétaire » qui complète la fiche collective.

  Le « tableau » qui à l'aide de la fiche collective écrira la réponse du groupe sur le « tableau secret ».

  Le « messager » qui défendra la proposition de son groupe au cours d'éventuels brassages.

PROBLEME :

Enoncé

Ma recherche et mes explications :

Ma réponse

Consignes :

- *travail individuel : avec un stylo de couleur bleu, il est possible de raturer.*
- *échanges par 2 ou 3 : il est possible de rectifier son écrit de recherche et sa réponse, mais il faut alors changer de couleur de stylo. Prendre, par exemple, un stylo de couleur rouge.*

FICHE Collective verte Appropriation e DATE : ....

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

A découper en suivant le pointillé

FICHE Collective verte Appropriation DATE : ....

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

FICHE INDIVIDUELLE apprentissage DATE :

Nom de la situation

Nom : Prénom :	Rôle Secrétaire Messager Tableau

PROBLEME :
Enoncé …..

Première recherche — fiche collective verte

Ma recherche et mes explications :

Ma réponse

→ L'échange à 2 ou 3 débouche sur une réponse commune à écrire sur ***la fiche collective verte***

Rappel des consignes :

- *travail individuel : avec un stylo de couleur bleu, il est possible de raturer.*
- ***échanges par 2 ou 3 au sein de son groupe** : il est possible de rectifier son écrit de recherche et sa réponse, mais **il faut alors changer de couleur de stylo**. Prendre, par exemple, un stylo de couleur rouge.*

Premier Brassage

J'ai travaillé avec : ……………………….. et ……………………………….

PROBLEME :
Enoncé …(éventuellement remis)..

Deuxième recherche — fiche collective jaune

Ensemble, on a trouvé :

Ma nouvelle réponse

Consignes :

- *au cours du brassage, on doit défendre la proposition de son groupe.*
- *on peut utiliser les apports de ses camarades pour donner de nouvelles explications et éventuellement changer de réponse.*
- *Il faut alors utiliser son stylo bleu et écrire dans les nouveaux cadres.*

→ Après avoir retrouvé son groupe initial l'échange à 2 ou 3 débouche sur une éventuelle réponse commune à écrire sur la ***nouvelle fiche collective jaune.***

Rappel : les échanges par 2 ou 3 au sein de ton groupe initial t'obligent à changer de couleur de stylo si tu veux à nouveau rectifier ton nouvel écrit de recherche et ta nouvelle réponse.

Deuxième Brassage

J'ai travaillé avec : ……………………….. et …………………………………

PROBLEME : Enoncé …..

Troisième recherche Ensemble, on a trouvé :	fiche collective rouge

Ma nouvelle réponse

Consignes :

- au cours du brassage, on doit défendre la proposition de son groupe.
- on peut utiliser les apports de ses camarades pour donner de nouvelles explications et éventuellement changer de réponse.
- il faut alors utiliser son stylo bleu et écrire dans les nouveaux cadres.

→ Après avoir retrouvé son groupe initial l'échange à 2 ou 3 débouche sur une éventuelle réponse commune à écrire sur la **nouvelle fiche collective rouge.**

Rappel : les échanges par 2 ou 3 au sein de ton groupe initial t'obligent à changer de couleur de stylo si tu veux à nouveau rectifier ton nouvel écrit de recherche et ta nouvelle réponse.

Troisième Brassage

J'ai travaillé avec : ……………………….. et …………………………………

PROBLEME : Enoncé …..(éventuellement remis)

Quatrième recherche Ensemble, on a trouvé :	fiche collective bleue

Ma nouvelle réponse

Consignes :

- au cours du brassage, on doit défendre la proposition de son groupe.
- on peut utiliser les apports de ses camarades pour donner de nouvelles explications et éventuellement changer de réponse.
-il faut alors utiliser son stylo bleu et écrire dans les nouveaux cadres.

→ Après avoir retrouvé son groupe initial l'échange à 2 ou 3 débouche sur une éventuelle réponse commune à écrire sur la **nouvelle fiche collective bleue.**

Rappel : les échanges par 2 ou 3 au sein de ton groupe initial t'obligent à changer de couleur de stylo si tu veux à nouveau rectifier ton nouvel écrit de recherche et ta nouvelle réponse.

FICHE Collective verte Apprentissage DATE : ....
Proposition initiale

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

A découper en suivant le pointillé

FICHE Collective verte Apprentissage DATE : ....
Proposition initiale

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

FICHE Collective jaune Apprentissage DATE : ....
Proposition après un premier brassage.

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

A découper en suivant le pointillé

FICHE Collective jaune Apprentissage DATE : ....
Proposition après un premier brassage.

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

FICHE Collective rouge Apprentissage DATE : ....

Proposition après un deuxième brassage.

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

A découper en suivant le pointillé

FICHE Collective rouge Apprentissage DATE : ....

Proposition après un deuxième brassage.

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

FICHE Collective bleue Apprentissage DATE : ....
Proposition après un troisième brassage.

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

A découper en suivant le pointillé

FICHE Collective bleue Apprentissage DATE : ....
Proposition après un troisième brassage.

Nom de la situation

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

PROBLEME : Enoncé....

Notre réponse

FICHE collective sur transparent (support pour la mise en commun)

ECRIT de COMMUNICATION

DATE : ....

Prénoms : - - -	Numéro de groupe Groupe ....

Nos explications

Notre phrase réponse :

FICHE INDIVIDUELLE d'entraînement DATE : ....

Nom de la situation

Entraînement contextualisé EXERCICE n° ...

Nom :	Prénom :

EXERCICE :

Enoncé.......

Ma recherche individuelle

Ma phase réponse :

COMPARAISON AVEC MON VOISIN qui s'appelle : ......

Je dois alors travailler avec une autre couleur pour rectifier, éventuellement, mes erreurs.

Notre nouvelle phase réponse :

AUTOCORRECTION

Ma réponse initiale
REUSSITE ? NON REUSSITE ?

Notre nouvelle réponse
REUSSITE ? NON REUSSITE ?

FICHE INDIVIDUELLE d'entraînement DATE : ....

Entraînement décontextualisé EXERCICE n° …

Nom :	Prénom :

La division de … par … … ⊢ … Combien a-t-il de fois … dans …. ?
Combien reste-t-il ?

Ma recherche individuelle

Mes réponses :
Q = …. R = ….
Preuve de la division : …. = (…. × ….) + ….

COMPARAISON AVEC MON VOISIN qui s'appelle : ……
Je dois alors travailler avec une autre couleur pour rectifier, éventuellement, mes erreurs.

Nos nouvelles réponses :
Q = …. R = ….
Preuve de la division : …. = (…. × ….) + ….

AUTOCORRECTION

Ma réponse initiale
REUSSITE ? NON REUSSITE ?

Notre nouvelle réponse
REUSSITE ? NON REUSSITE ?

Annexe 5 page 4

Entraînement

DATE : ……………………….

FICHE de Résultats

ELEVE N°1 : ………………………………. ELEVE N°2 : ……………………………….				
EXERCICE N°	**FICHE AUTOCORRECTIVE** **Réponses** Quotient Euclidien et reste EGALITE CARACTERISTIQUE	**Résultats du travail** E pour échec, R pour Réussite		
		ELEVE N°1 Réponse initiale	ELEVE N°2 Réponse initiale	GROUPE Notre réponse commune
1	Q = ….. R = ….. …. = (…. × ….) + ….			
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				

Consigne :
Il est possible d'arrêter le travail de l'atelier lorsque chacun des deux élèves a trois réponses individuelles consécutives justes.

Conseil : il faut donc s'entraider pour bien utiliser le cahier outil et les conseils donnés par son camarade de travail.

Annexe 5 page 4

FICHE AUTOCORRECTIVE

Entraînement

FICHE REPONSE DE L'EXERCICE n°..

EXERCICE : Enoncé…….

Conseils :

As – tu pensé à rechercher l'ordre de grandeur du résultat ?
As – tu pensé à établir le tableau de multiples ?
As – tu vérifié tes calculs, en utilisant éventuellement ta calculatrice?

Détails de l'algorithme :

Réponses :

Phrase réponse : Les réponses numériques : Q = …. R = …. Preuve de la division : … = (… × ...) + …

A découper en suivant le pointillé

FICHE AUTOCORRECTIVE

Entraînement

EXERCICES N°	DIVISION	RESULTATS		
		Quotient euclidien	Reste	Egalité caractéristique
1	37 ⊢ 5	Q = 7	R = 2	37 = (7 × 5) + 2
2	129 ⊢ 10	Q = 12	R = 9	129 = (10 × 12) + 9
3	256 ⊢ 12	Q = 21	R = 4	256 = (21 × 12) + 4
4				
5				
6				

FICHE SIGNALETIQUE

Titre : Les divisions liaison cycle 3 – 6ème.

Auteurs :
GAUTIER Françoise, GOUPIL-LEBOT Marie-Thérèse, LE LOUS Annie, LE POCHE Gabriel, PROPHETE Yves, REICHERT Fabrice, ROUX Vianneyte.

Editeur : IREM de Rennes.

Date : 1ère édition : juin 2008
2ème édition : avril 2011

Niveau : Cycle 3 – sixième.

Mots clés :
Spécialité : Division - division euclidienne - division décimale - Algorithmes - techniques opératoires.
Autres : Apprentissage - enseignement - Différenciation - autonomie - soutien - étayage - Liaison cycle 3 / sixième - Formation des enseignants.

Résumé :
Cette brochure présente les travaux d'un groupe de recherche-formation qui s'est intéressé à l'enseignement de la division euclidienne dans le cadre d'une liaison cycle 3 – sixième.
Dans une première partie, le lecteur trouvera une comparaison des instructions officielles de 2002 et de 2007 ainsi qu'une analyse détaillée d'une collection de référence en usage dans les classes.
Dans une deuxième partie, le repérage des difficultés permet de justifier les choix du groupe en ce qui concerne les différents sens de la division, le symbolisme et les techniques retenues.
La dernière partie détaille nos conceptions des apprentissages permettant une prise en charge différenciée des élèves et propose un exemple de progression-programmation du CE2 à la sixième.

Le détail des activités est dans un CD-ROM joint à la brochure.

Format	Nombre de pages	Prix	Tirage
21 x 29,7	**66**	**8 euros**	**100 ex**

ISBN 2-85728-071-8

I.R.E.M de RENNES – Université de RENNES 1