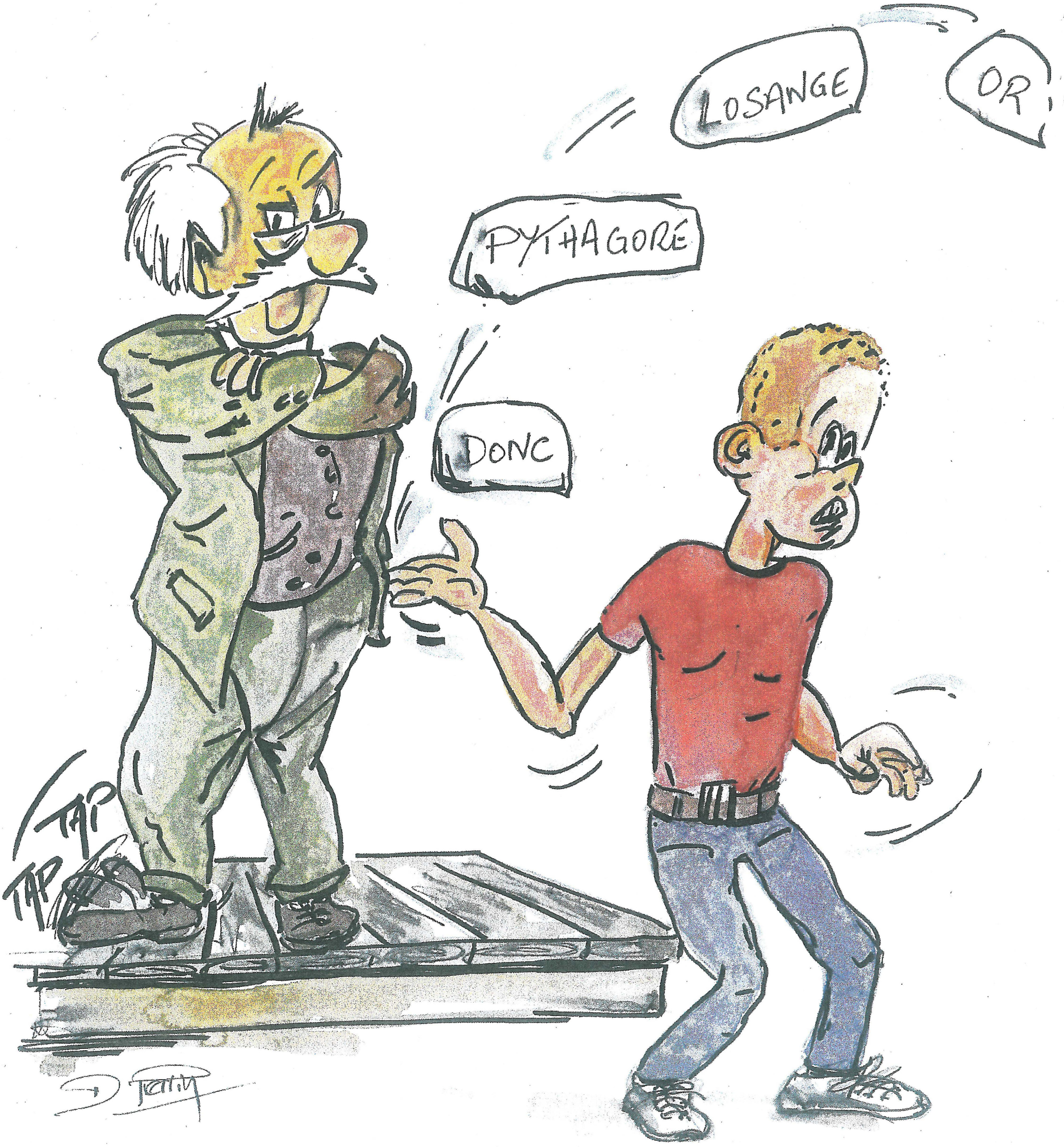
IREM DE RENNES

JANVIER 2006
2ème Edition

La démonstration au collège

Quelles tâches ?
Quels outils ?



La démonstration au collège

Quelles tâches ?

Quels outils ?

Ont participé à la rédaction de ce document

ALAGROUTE Fouad
Collège Camille Guérin ; Saint-Méen-le-Grand

HOUDEBINE Jean
IREM ; Université de Rennes 1

MARY Marie-Noëlle
Collège de Bourgchevreuil ; Cesson-Sévigné

PAUGAM Annette
U.F.R. de Mathématiques ; Université de Rennes 1

Ce groupe a travaillé avec les moyens de l'IREM et de la DESCO

La couverture a été réalisée par Didier Perrin, dessinateur industriel à P.S.A.

SOMMAIRE

L'IDÉE DU GROUPE

I - Introduction

Une difficulté importante de l'apprentissage de la démonstration est l'utilisation dans celle-ci d'une propriété.

Si les démonstrations nécessitant l'utilisation des propriétés du parallélogramme (par exemple) sont en général laborieuses pour le collégien, les démonstrations nécessitant l'emploi du théorème de *Pythagore* ou sa réciproque sont globalement plus abordables pour ces élèves.

Le nombre de propriétés du parallélogramme (diagonales, côtés opposés, angles opposés, etc.) entraîne chez les élèves une grande confusion dans l'utilisation de telle ou telle propriété. Qui n'a pas vu un élève écrire toutes les propriétés, ou presque, du parallélogramme pour démontrer qu'un quadrilatère en est un ! L'élève pense peut-être que son contrat est rempli devant son professeur en récitant ces propriétés *« J'ai appris mes leçons, je n'ai rien à me reprocher »*.

Par contre, l'utilisation de la propriété de *Pythagore* ou de sa réciproque semble être plus aisée, car, d'une part, il n'y a que deux propriétés (directe ou réciproque) et, d'autre part, le côté algébrique qu'offrent ces propriétés rend l'exercice plus facile et surtout motive la recherche, pour calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle ou même pour démontrer qu'un triangle est rectangle.

Cependant, souvent les élèves confondent la propriété directe et la réciproque et s'engagent dans la résolution des problèmes d'une manière mécanique ; l'emploi de la calculatrice favorise d'ailleurs cet enthousiasme dans la recherche et, par suite, l'utilisation de la propriété adéquate passe au second plan.

Et que dire lorsque l'élève est confronté à une situation où il est nécessaire d'utiliser un raisonnement par l'absurde ou une contraposée. Les programmes ne se prononcent pas clairement sur ces deux pratiques dans de telles situations. Le sujet est tabou, pourtant chacun raisonne par l'absurde ou utilise une contraposée sans en parler, comme Monsieur Jourdain « faisait de la prose sans le savoir » !...

Une autre difficulté nous est apparue pour les démonstrations en géométrie, c'est le statut de la figure. Les élèves ont des difficultés à comprendre le rôle fondamental d'un vague schéma sur lequel on a codé soigneusement les hypothèses. Ils préfèrent une figure exacte sur laquelle hypothèses et conclusions sont matériellement vérifiées, mais ils oublient souvent de la coder. Leur figure, non codée, s'avère « inutilisable » pour trouver ou même comprendre une démonstration. Le langage utilisé dans les démonstrations par les élèves est aussi parfois très limité. Ceci entraîne des difficultés de compréhension des mots de liaison et des erreurs sur le statut de chaque proposition dans un texte de démonstration (hypothèse, théorème direct ou réciproque, hypothèse ajoutée pour un raisonnement par l'absurde, etc.).

C'est au travers de ces constatations que nous avons cherché à remédier à ces difficultés. Pour cela, nous avons travaillé sur des activités de démonstrations assez variées afin de montrer aux élèves qu'il n'existe pas de modèle de démonstration que l'on peut reproduire à chaque occasion et de les encourager à avoir des réflexes devant un sujet tel que : une bonne lecture, le tracé d'une figure à main levée, le codage de celle-ci, etc.

II - Objectifs

Notre travail de recherche a été axé particulièrement sur deux pôles :

a) - Un travail de recherche d'activités

Le but de ces activités est de développer :

- La capacité des élèves à comprendre un texte de démonstration et en particulier les mots de liaison peu ou pas utilisés habituellement par nos élèves (en effet, cependant, or, etc.) qui permettent de connaître le statut des différentes propositions (hypothèse, conclusion, théorème, etc.)
- La capacité de suivre l'enchaînement de plusieurs pas de démonstration en fonction des données du problème et des résultats intermédiaires démontrés.
- La maîtrise de la notion de théorème direct et de théorème réciproque, ce qui permet d'observer la manière dont les élèves réagissent par rapport au raisonnement par l'absurde et à la contraposée.
- La maîtrise du vocabulaire mathématique :
    - celui de la démonstration : théorème, hypothèse, considérons, etc.
    - celui de la géométrie : sécante à…, droites orthogonales, etc.

b) - Une recherche concernant les manuels scolaires

Nous examinons la façon dont ils traitent la démonstration en général et le raisonnement par l'absurde en particulier.

III – Thèmes abordés

a) Quelles démonstrations pour quel texte ?

Pour permettre aux élèves de 4$^{\text{ème}}$ de rencontrer, assez tôt dans l'apprentissage, des démonstrations suffisamment complexes, nous voulons leur proposer des activités dans lesquelles ils ne soient pas obligés d'écrire des démonstrations mais seulement, pour une fois, de les lire et de les comprendre. L'idée est de suspendre momentanément, chez une grande partie de nos élèves, ce gros handicap qu'est la rédaction ; ceci permettra une concentration sur le but primordial des activités, qui est avant tout la notion de la démonstration dans toute sa complexité, en particulier, la compréhension de l'articulation entre les données d'un problème, les théorèmes et la conclusion.

b) Autour de Pythagore

Dans la continuité de notre idée sur la démonstration, nous avons travaillé aussi sur des activités permettant à l'élève de reconnaître un théorème et sa réciproque sur l'exemple du théorème de Pythagore. Trois idées nous ont guidés :

- Reconnaître parmi de nombreux énoncés ceux qui veulent dire la même chose.
- Repérer suivant la situation quel est le théorème à utiliser.
- Repérer dans des courtes démonstrations, dont des démonstrations par l'absurde, le théorème utilisé.

QUELLE DÉMONSTRATION POUR QUEL TEXTE ?

I – La conception des fiches

Notre idée est de présenter aux élèves plusieurs énoncés de problèmes et plusieurs démonstrations et de leur demander d'associer chaque démonstration à l'énoncé qui convient (idée déjà expérimentée en $4^{ème}$ et présentée dans « Quelles lectures pour quelles tâches ? », IREM de Rennes).

Nos activités ont pour objet de faire comprendre aux élèves qu'une démonstration n'est pas bonne dans l'absolu : elle peut convenir à un énoncé et ne pas convenir à un autre.

La compréhension du rôle singulier joué dans la démonstration par les données du problème est fondamentale. Dans ce but, il est essentiel de surmonter les difficultés de lecture et, en particulier, celles des mots de liaison. Plus précisément, il s'agit de reconnaître (tâche inhabituelle) qu'une démonstration est fausse si elle contient comme donnée d'un pas une proposition qui ne figure pas dans l'énoncé, qui n'est pas déjà démontrée ou qui ne résulte pas d'une construction d'objets nouveaux faite par celui qui résout le problème.

Les deux activités proposées, « Le losange de Cesson » (Fiche 1, page 11) et « Le parallélogramme de Saint-Méen » (Fiche 2, page 16) n'utilisent que des notions et des propriétés rencontrées en $5^{ème}$. Ces fiches peuvent donc être utilisées à n'importe quel moment en $4^{ème}$. On peut imaginer une situation plus simple sur les mêmes thèmes pour réaliser une activité en fin de $5^{ème}$.

a) Les difficultés de conception

La première difficulté est d'obtenir une lecture qui ne soit pas superficielle. Pour cela nous avons essayé de choisir trois énoncés qui correspondent à la même figure et qui posent la même question ; simplement les données du problème sont différentes. De cette façon les différences entre les démonstrations proviennent uniquement de la nature des propositions utilisées comme données.

Une deuxième difficulté est de présenter aux élèves des démonstrations qui leur donneraient une bonne représentation des contraintes et des libertés d'écriture. Des démonstrations au style stéréotypé seraient moins adaptées pour cet objectif. Des démonstrations qui ne présentent pas « dans l'ordre » les pas de démonstration peuvent faire prendre conscience aux élèves de l'importance des mots de liaison. Dans ce cas, en effet, les mots jouent un rôle essentiel pour comprendre quelles sont les données et la conclusion de chaque pas. Mais il ne faut pas non plus désorienter complètement les élèves par des textes trop éloignés de la pratique habituelle. Nous avons eu de nombreuses discussions pour tendre vers un juste équilibre.

b) Les fiches auxquelles nous avons abouti

Nous avons mis au point deux fiches dans cet esprit : « Le losange de Cesson » et « Le parallélogramme de Saint-Méen ». La première est plus difficile à la fois par la complexité du problème posé (par exemple dans l'énoncé 3 du « Losange de Cesson », la phrase « Soit E un point de (AB) équidistant de B et C » suppose une construction complexe pour faire la figure) et par la longueur des textes de démonstration à étudier (La démonstration B du « Losange de Cesson » qui utilise les angles est particulièrement ardue aux yeux des élèves).

Nous avons expérimenté plusieurs versions de ces fiches ; « Le parallélogramme de Saint-Méen » dans deux $4^{ème}$ du collège de Cesson et trois $4^{ème}$ du collège de Saint-Méen, « Le losange de Cesson », dans une $4^{ème}$ du collège de Cesson, dans une $4^{ème}$ du collège de Saint-Méen, dans une 2^{nde} au lycée Bréquigny de Rennes et dans une 2^{nde} au lycée Jacques

Cartier de Saint-Malo. Ces expérimentations nous ont permis de les mettre au point et de mieux connaître les difficultés des élèves.

Nous avons choisi de mettre sur ces fiches une figure qui convient aux trois énoncés. Cela dégage un temps non négligeable pour se concentrer sur l'essentiel de l'activité. Cependant, dans ces conditions, les élèves ne refont pas eux-mêmes la figure et utilisent rarement un codage pour noter les données sur la figure. C'est pourquoi nous leur proposons trois figures identiques, avec comme consigne de les coder en tenant compte de chacun des énoncés.

La question posée concerne les arguments qui permettent de dire pourquoi une démonstration ne convient pas à un énoncé. Il nous paraît en effet impossible, pour un élève de 4ème, de trouver, et même de comprendre, les arguments qui expliqueraient pourquoi une démonstration convient à un énoncé. Pour que les élèves comprennent bien ce que l'on attend d'eux, nous avons opté pour une fiche-réponse, incitant ainsi les élèves à bien justifier pourquoi telle démonstration ne convient pas à tel énoncé.

Pour le choix des textes de démonstration, nous avons modifié ceux que nous avions initialement choisis. Nous les avons raccourcis et surtout nous avons supprimé certaines tournures inhabituelles ; par exemple : « considérons » remplacé par « soit », « droite menée par » remplacé par « droite passant par ».

Pour « Le parallélogramme de Saint-Méen », nous avons choisi des lettres pour désigner les points qui permettent d'éviter les confusions entre les différents parallélogrammes de la figure.

Fiche 1

Le losange de Cesson

Voici 3 énoncés de problèmes et 4 démonstrations qui correspondent à la même figure avec la même question.

Un enseignant a rédigé pour chacun de ces énoncés une ou deux démonstrations, mais il a oublié d'indiquer l'énoncé correspondant à chacune de ces démonstrations.

Travail demandé :

Après avoir déterminé pour chaque démonstration l'énoncé auquel elle correspond, explique pour chaque démonstration comment tu peux savoir qu'elle ne convient pas à chacun des autres énoncés. Ecris tes réponses sur la fiche.

EXEMPLE DE RÉPONSE :

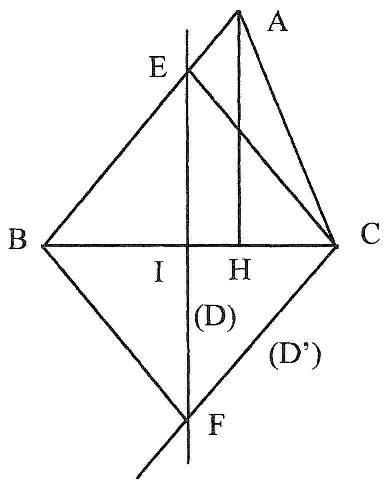
La démonstration B ne convient pas à l'énoncé 1 parce que EB = EC n'est pas une donnée du problème.

Énoncé 1

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].
Soit I le milieu de [BC]. La parallèle (D) à (AH) passant par I coupe (AB) en E.
Placer F pour que I soit le milieu de [EF].
Montrer que CEBF est un losange.

Énoncé 2

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].
Soit (D) la médiatrice de [BC].
(D) coupe (BC) en I et coupe (AB) en E.
On construit, sur la droite (D), un point F différent du point E tel que BE = BF.
Montrer que CEBF est un losange.



Énoncé 3

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].
Soit E un point de (AB) équidistant de B et C.
Soit (D) la parallèle à (AH) passant par E.
Soit (D') la parallèle à (AB) passant par C.
(D) et (D') se coupent en F et (D) coupe (BC) en I.
Montrer que CEBF est un losange.

...\...

Le losange de Cesson (Fiche 1)

Démonstration A

Pour montrer que CEBF est un losange, il suffit de montrer que ses 4 côtés sont égaux.

On sait déjà d'après l'énoncé que EB = FB.

Comme (D) est la médiatrice de [BC] et que E et F sont des points de (D), on a EB = EC et FB = FC. En effet tout point de la médiatrice d'un segment est équidistant des extrémités de ce segment.

Les trois égalités obtenues nous donnent le résultat.

Démonstration B

Les droites (EF) et (AH) étant parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre. Comme (BC) est perpendiculaire à (AH) par hypothèse, (BC) est perpendiculaire à (EF).

Considérons le triangle EBC. Il est isocèle en E puisque EB = EC.

La droite (EF) étant perpendiculaire à (BC), c'est la hauteur issue de E. C'est donc aussi la médiatrice de [BC] et la bissectrice de l'angle $\widehat{BEC}$.

On en déduit d'une part que $\widehat{BEF} = \widehat{FEC}$, et d'autre part que FC = FB, car tous les points de la médiatrice d'un segment sont équidistants des extrémités de ce segment.

Les droites (EB) et (CF) étant parallèles et coupées par la sécante (EF), les angles alternes internes $\widehat{BEF}$ et $\widehat{CFE}$ sont égaux.

On en déduit $\widehat{FEC} = \widehat{CFE}$.

Comme le triangle CEF a ses angles à la base égaux, il est isocèle en C ; donc CE = CF.

On sait déjà que CE = EB et que CF = FB.

Ainsi le quadrilatère CEBF a ses quatre côtés égaux ; c'est donc un losange.

Démonstration C

Pour prouver que CEBF est un losange il suffit de montrer que ses diagonales sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu.

On sait que, si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est également perpendiculaire à l'autre.

Or (IE) parallèle à (AH). De plus (IE) est confondu avec (EF) car I est le milieu de [EF].

Comme, dans le triangle ABC, (AH) est une hauteur, elle est perpendiculaire à (BC). Par conséquent (EF) est perpendiculaire à (BC).

Comme, par hypothèse, I est milieu de [BC] et de [EF], CEBF est un losange.

Démonstration D

(D) est la médiatrice de [BC] et elle coupe [BC] en I ; donc I est milieu de [BC]. Comme les points E et F appartiennent à (D), (EF) et (BC) sont perpendiculaires en I.

Or BE = BF ; le triangle BEF a deux côtés égaux ; il est donc isocèle en B.

Puisque I est sur (BC), (BI) et (EF) sont perpendiculaires ; [BI] est donc la hauteur issue de B dans le triangle BEF.

Dans un triangle isocèle, la hauteur issue du sommet principal est aussi la médiatrice de la base. Donc I est milieu de [EF].

Comme I est aussi le milieu de [BC] et que (BC) est perpendiculaire à (EF), le quadrilatère a ses diagonales qui se coupent perpendiculairement en leur milieu ; c'est donc un losange.

Le losange de Cesson
Fiche de réponses

Groupe : .... Classe : ......
....
....
....

Complète les pointillés par 1, 2 ou 3

La démonstration A convient à l'énoncé .....

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration B convient à l'énoncé .....

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ..... parce que

---

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration C convient à l'énoncé .....

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ... parce que :

La démonstration D convient à l'énoncé .....

La démonstration D ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration D ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

Aide pour le Losange de Cesson

Vous pouvez, si vous le souhaitez, coder ces figures pour mieux comprendre chacun des énoncés.

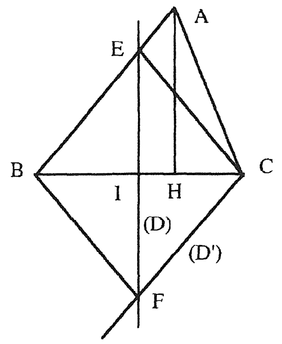
Énoncé 1

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].

Soit I le milieu de [BC]. La parallèle (D) à (AH) passant par I coupe (AB) en E.

Placer F pour que I soit le milieu de [EF].

Montrer que CEBF est un losange.



Énoncé 2

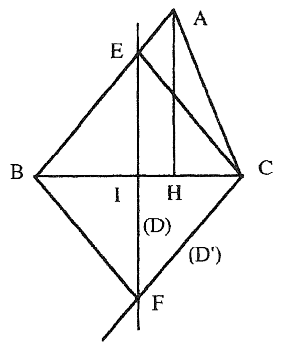
Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].

Soit (D) la médiatrice de [BC].

(D) coupe (BC) en I et coupe (AB) en E.

On construit, sur la droite (D), un point F différent du point E tel que BE = BF.

Montrer que CEBF est un losange.



Énoncé 3

Soit ABC un triangle quelconque de hauteur [AH].

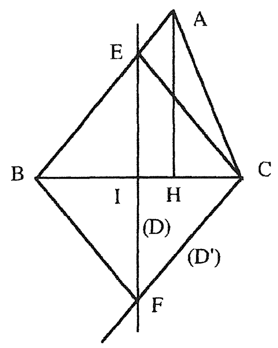
Soit E un point de (AB) équidistant de B et C.

Soit (D) la parallèle à [AH] passant par E.

Soit (D') la parallèle à (AB) passant par C.

(D) et (D') se coupent en F et (D) coupe (BC) en I.

Montrer que CEBF est un losange.



Fiche 2

Le parallélogramme de Saint-Méen

Voici 3 énoncés de problèmes et 3 démonstrations qui correspondent à la même figure avec la même question.

Un enseignant a rédigé pour chacun de ces énoncés une ou deux démonstrations, mais il a oublié d'indiquer l'énoncé correspondant à chacune de ces démonstrations.

Travail demandé :

Après avoir déterminé pour chaque démonstration l'énoncé auquel elle correspond, explique pour chaque démonstration comment tu peux savoir qu'elle ne convient pas à chacun des autres énoncés. Ecris tes réponses sur la fiche.

EXEMPLE DE RÉPONSE :

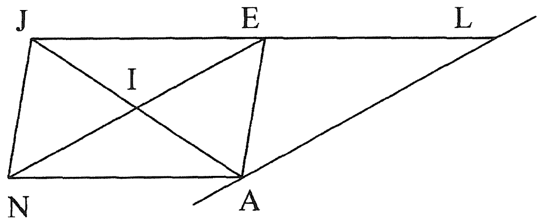
La démonstration C ne convient pas à l'énoncé 1 parce que (AL) // (NE) n'est pas une donnée de l'énoncé 1.

Énoncé 1

Soient les points A, N, J, E, L et I tels que :

- N et E sont symétriques par rapport à I
- J et A sont symétriques par rapport à I
- J et L sont symétriques par rapport à E

Montrer que ELAN est un parallélogramme.



Énoncé 2

Soit NJE un triangle quelconque. Soit I le milieu de [NE] et A le symétrique de J par rapport au point I. On mène par A la parallèle à la droite (NE) ; elle coupe la droite (JE) en L.

Montrer que ELAN est un parallélogramme

Énoncé 3

Soit JEAN un parallélogramme de centre I et soit L le symétrique de J par rapport à E.

Montrer que ELAN est un parallélogramme.

Le parallélogramme de Saint-Méen (Fiche 2)

Démonstration A

JEAN est un parallélogramme, donc (NA) // (JE) et NA = JE. J et L sont symétriques par rapport à E, donc JE = EL et J, E et L sont alignés. D'où NA = EL et (NA) // (EL).

Un quadrilatère ayant deux côtés opposés parallèles et de même longueur est un parallélogramme ; donc ELAN est un parallélogramme.

Démonstration B

En utilisant la symétrie de centre I, on a I milieu de [NE] et I milieu de [JA] ; les segments [NE] et [JA] ont donc même milieu. Or un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu est un parallélogramme. Donc JEAN est un parallélogramme et, par suite, (NA) // (JE) et NA = JE. Comme J et L sont symétriques par rapport à E, alors JE = EL et les droites (JE) et (EL) sont confondues. On en déduit que NA = EL et (NA) // (EL).

ELAN est par conséquent un parallélogramme, car il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur.

Démonstration C

Pour montrer que ELAN est un parallélogramme, il suffit de démontrer que ses côtés opposés sont parallèles deux à deux. On sait déjà que (AL) // (NE). Montrons que (NA) // (EL).

Comme J est le symétrique de A par rapport à I, I est le milieu du segment [JA]. Or I est aussi le milieu de [NE] ; donc le quadrilatère JEAN est un parallélogramme, puisque ses diagonales se coupent en leur milieu. On en déduit que (NA) // (JE).

Comme les droites (JE) et (EL) sont confondues, on a (NA) // (EL), ce qui achève la démonstration.

Le Parallélogramme de Saint-Méen
Fiche de réponses

Groupe : ....
....
....
....

Classe : ......

Complète les pointillés par 1, 2 ou 3

La démonstration A convient à l'énoncé .....

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration B convient à l'énoncé .....

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ..... parce que

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration C convient à l'énoncé .....

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ..... parce que :

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé ... parce que :

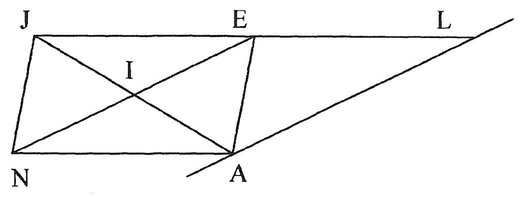
Aide pour le parallélogramme de Saint-Méen

Vous pouvez, si vous le souhaitez, coder ces figures pour mieux comprendre chacun des énoncés.

Énoncé 1

Soient les points A, N, J, E, L et I tels que :
- N et E sont symétriques par rapport à I
- J et A sont symétriques par rapport à I
- J et L sont symétriques par rapport à E

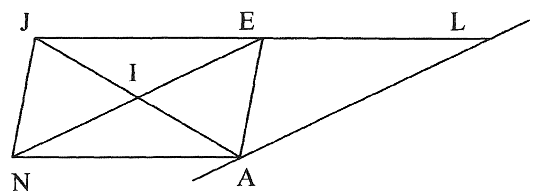
Montrer que ELAN est un parallélogramme.



Énoncé 2

Soit NJE un triangle quelconque. Soit I le milieu de [NE] et A le symétrique de J par rapport au point I. On mène par A la parallèle à la droite (NE) ; elle coupe la droite (JE) en L.

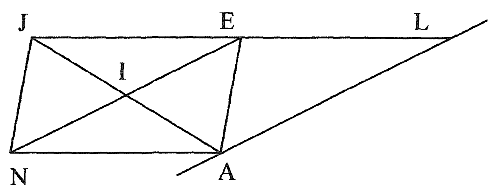
Montrer que ELAN est un parallélogramme.



Énoncé 3

Soit JEAN un parallélogramme de centre I et soit L le symétrique de J par rapport à E.

Montrer que ELAN est un parallélogramme.



II – Bilan des activités

1) Les réponses attendues

Après les expérimentations, notre point de vue a changé sur les réponses que l'on peut attendre et accepter.

Bien sûr, nous attendions, pour expliquer qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé, un argument du type : « telle chose est une donnée dans la démonstration et pas dans l'énoncé ». Il est d'ailleurs plus souvent exprimé plus brièvement : « l'énoncé ne dit pas telle chose ». Nous pensions que, pour cet argument, les élèves choisiraient la première affirmation qui n'est pas une donnée : ça n'a pas été toujours le cas.

Un autre argument consiste à dire : « telle chose est démontrée alors que c'est une donnée de l'énoncé ». Nous n'attendions pas ce type d'argument. Cependant, à la réflexion, il nous paraît recevable.

Enfin, l'argument « tel théorème utilisé dans la démonstration n'est pas utile dans la situation décrite par l'énoncé » est aussi tout à fait recevable.

Voici, pour faciliter la correction des réponses des élèves, deux tableaux donnant les réponses possibles pour « Le losange de Cesson » et pour « Le parallélogramme de Saint-Méen ».

Les réponses possibles pour « Le losange de Cesson »

	Première affirmation qui n'est pas une donnée	Autres affirmations qui ne sont pas des données	Choses démontrées alors qu'elles sont des données	Autre argument
A ne convient pas à 1	EB = FB	D médiatrice de [BC]		
A ne convient pas à 3	EB = FB	D médiatrice de [BC]	EB =EC	
B ne convient pas à 1	EB = EC	(EB) // (CF)		
B ne convient pas à 2	(EF) // (AH)	EB = EC (EB) // (CF)	Médiatrice de [BC]	Théorème parallèle, perpendiculaire à l'envers
C ne convient pas à 2	(IE) // (AH)	I milieu de [EF]	(EF) perpendiculaire à (BC)	
C ne convient pas à 3	I milieu de [EF]	I milieu de [BC]		
D ne convient pas à 1	D médiatrice de [BC]	BE = BF	I milieu de [BC]	
D ne convient pas à 3	D médiatrice de [BC]	BE = BF	I milieu de [EF]	

Les réponses possibles pour « Le parallélogramme de Saint-Méen »			
	Première affirmation qui n'est pas une donnée	Autres affirmations qui ne sont pas des données	Choses démontrées alors qu'elles sont des données
A ne convient pas à 1	JEAN est un parallélogramme		
A ne convient pas à 2	JEAN est un parallélogramme	J et L symétriques par rapport à E	
B ne convient pas à 2	J et L symétriques par rapport à E		
B ne convient pas à 3	On ne sait rien sur la symétrie de centre I		JEAN est un parallélogramme
C ne convient pas à 1	(AL) // (NE)	I milieu de [NE]	
C ne convient pas à 3	J symétrique de A par rapport à I	I milieu de [NE]	JEAN est un parallélogramme

2) L'analyse des copies

L'analyse des copies reste un exercice difficile. Par exemple en discutant de la copie ci-dessous on s'est aperçu qu'on peut avoir sur elle des avis très différents.

UNE COPIE DE 4ÈME POUR « LE PARALLÉLOGRAMME DE SAINT-MÉEN »

La démonstration C correspond à l'énoncé 1

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé 1 parce qu'ils ne parlent pas du Point I dans la démonstration.

La démonstration B ne convient pas à l'énoncé 1 parce qu'ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration mais pas dans l'énoncé.

La démonstration B convient à l'énoncé 2.

La démonstration A ne convient pas à l'énoncé 2 parce qu'ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration mais pas dans l'énoncé.

Pas d'explication pour la démonstration C ne convient pas à l'énoncé 2.

La démonstration A convient à l'énoncé 3 parce qu'on ne sait pas encore que I est le milieu de [JA] et de [NE].

La démonstration C ne convient pas à l'énoncé 3 parce qu'ils disent qu'on sait déjà que (NE) // (AL), mais non ce n'est pas vrai.

Dans une interprétation pessimiste, on peut estimer que l'élève utilise de mauvaises idées pour comparer les informations contenues dans la démonstration et dans l'énoncé. En effet la deuxième réponse, « A ne convient pas à 1 parce qu'ils ne parlent pas du point I dans la démonstration », correspond à la stratégie erronée : « tout ce qui est dans l'énoncé doit être dans la démonstration ». La troisième réponse « ils disent que JEAN est un parallélogramme dans la démonstration B mais pas dans l'énoncé 1 », fait apparaître l'incapacité de distinguer dans la démonstration ce qui est donnée de ce qui est déduit. Enfin, la seule association réussie, la démonstration A avec l'énoncé 3, est peut-être obtenue avec l'argument : « l'énoncé et la démonstration commencent pareil ».

On peut, au contraire, interpréter les erreurs de manière optimiste. La première réponse « C convient à 1 » s'expliquerait parce que l'élève opère par élimination ; il pense avoir trouver que les démonstrations A et B ne conviennent pas à 1 et c'est donc la démonstration C. La deuxième réponse est finalement acceptable car le point I est ici très important dans l'énoncé puisqu'il permet de situer N par rapport à E et J par rapport à A. Pour la troisième, il peut s'agir d'une simple confusion entre les démonstrations A et B. Pour la quatrième réponse, « B convient à 2 », l'élève a pu procéder encore une fois par élimination ; elle constate que la démonstration A ne convient pas à 2 (cinquième réponse correcte) et la démonstration C est déjà prise par I. Le fait qu'il n'y ait rien pour expliquer que la démonstration C ne convient pas à 2 est encourageant puisque C convient à 2. Enfin les trois dernières réponses sont acceptables même si l'argument pour rejeter la démonstration B est un peu faible : bien sûr on sait que JEAN est un parallélogramme, mais il n'est pas écrit que I est milieu de [JA] et [NE]. La copie se terminant mieux qu'elle ne commence, n'y a-t-il pas une certaine progression de l'élève dans la compréhension de ce qu'est une démonstration ?

3) Les difficultés des élèves

a) La lecture

La plupart des élèves n'ont pas de réelles difficultés de lecture. Cependant certains sont découragés par la longueur du texte à lire. Il s'agit plutôt d'un manque de motivation pour la lecture d'un texte long.

On constate aussi que, pour les élèves moyens ou en difficulté, la lecture est souvent un « zapping » du texte. Ils repèrent des propositions, mais, ne voyant pas les mots de liaison, ils ne savent pas s'il s'agit d'une hypothèse ou d'une conclusion intermédiaire ; par exemple, dans la démonstration C du « Losange de Cesson », « (EF) est perpendiculaire à (BC) » est parfois pris pour une donnée.

Quelques difficultés liées à certaines expressions :

- le mot hypothèse prête à discussion, en particulier parce qu'en Sciences de la Vie il est utilisé dans le sens de conjecture,
- le mot orthogonal n'est pas familier,
- l'expression « la parallèle (D) à (AH) » n'est pas comprise et induit la question : « quelle est la parallèle (D) ? »,
- l'expression « un point distinct de E » provoque la question : « qu'est-ce qu'un point distinct ? »

b) Comprendre la consigne

La tâche est nouvelle pour les élèves. La fiche réponse que nous proposons les aide beaucoup à comprendre la consigne.

Cependant, certains cherchent des fautes dans les démonstrations au lieu de chercher à quel énoncé elles conviennent et à quels énoncés elles ne conviennent pas.

Avec les fiches initiales, certains essayaient d'écrire leur propre démonstration. Cette difficulté semble avoir disparu avec la dernière version de nos fiches.

c) La figure

Avant que nous proposions une figure dans l'énoncé, beaucoup d'élèves passaient beaucoup de temps à faire la figure, sans d'ailleurs forcément la réussir. Cette difficulté a pratiquement disparu. Mais comme les élèves n'ont pas à faire la figure, ils ne pensent jamais, pour chacun des énoncés, à coder sur la figure les données et, de ce fait, ont des difficultés à différencier les hypothèses des différents énoncés à la seule lecture du texte. C'est pourquoi nous proposons dans une aide trois figures qui peuvent être codées.

d) Comprendre ce que peut être une démonstration

L'erreur la plus fréquente, pour prouver qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé, est de vérifier, pour une information tirée de l'énoncé, qu'elle n'apparaît pas dans la démonstration. Cette information peut être assez générale comme « *le point I est dans l'énoncé et on n'en parle pas dans la démonstration* » ou une donnée plus précise comme « *AH est la hauteur* » qu'on recherche telle quelle dans la démonstration. Cette erreur s'exprime encore sous la forme : « *il faut utiliser toutes les données de l'énoncé* ».

L'idée qu'une démonstration peut être bonne pour un énoncé et fausse pour un autre a du mal à faire son chemin.

Quand dans une démonstration les élèves rencontrent une affirmation non démontrée, il est fréquent que leur première réaction soit de chercher une démonstration. Ce n'est que dans un deuxième temps qu'ils se disent implicitement qu'il ne peut y avoir un long morceau de démonstration sous-entendu.

On rencontre aussi des fautes parfois grossières sur les résultats mathématiques sous-jacents ; par exemple un groupe de 2nde dit : *« 4 côtés égaux cela fera un carré. Il faut quelque chose en plus pour un losange ».*

Au cours des discussions entre les élèves, on voit apparaître leurs fausses représentations de ce que peut être un texte de démonstration ; par exemple un groupe d'élèves dit à propos du mot « *considérons* » : « *si on mettait ça dans un texte on nous mettrait zéro* ».

e) Le rôle des sous-entendus

Dans plusieurs cas, la donnée de l'énoncé qui est utilisée dans la démonstration est *reformulée*. Par exemple dans la démonstration B du « Losange de Cesson », il est écrit « (EF) et (AH) étant parallèles », alors que les données de l'énoncé 3 s'expriment sous la forme : « (D) est la parallèle à (AH) passant par E. (D) et (D') se coupent en F ».

Souvent les élèves ne voient pas ces données cachées parce qu'ils recherchent dans l'énoncé une proposition identique à celle de la démonstration. Par exemple ils ne voient pas que « E et F sont sur la droite (D) » est une donnée de l'énoncé alors que celui-ci contient les phrases : « soit (D) la parallèle à (AH) passant par E »… « (D) et (D') se coupent en F ».

Mais, même quand ils reconnaissent cette donnée cachée, ils estiment parfois qu'il manque une explication dans la démonstration. Par exemple ils affirment : *« La démonstration D ne convient pas à l'énoncé 3 parce que dans la démonstration D on dit que I est sur (BC) et dans l'énoncé 3, (D) coupe (BC) en I ».*

Ces difficultés, liées aux sous-entendus, restent souvent implicites en 4ème, alors qu'elles provoquent des discussions en 2nde.

4) L'utilisation de ces fiches

a) Niveau

Ces deux fiches n'utilisent que des connaissances de $5^{ème}$. « Le parallélogramme de Saint-Méen » convient parfaitement à la $4^{ème}$ assez tôt dans l'année, peut-être même en fin de $5^{ème}$ (nous n'avons pas fait d'expérience de ce type). « Le losange de Cesson » nécessite d'avoir déjà une certaine pratique de la démonstration. Elle est donc plus abordable en milieu d'année de $4^{ème}$ (de préférence avant les derniers conseils de classe) et éventuellement après « Le parallélogramme de Saint-Méen ».

Ces deux fiches, mais surtout la deuxième, peuvent être utilisées avec profit en $3^{ème}$ ou en 2^{nde}. La figure qui est sur la fiche des énoncés est indispensable dans tous les cas, car pour ces activités il est plus intéressant que les élèves consacrent plus de temps à une réflexion sur la démonstration qu'à la construction de figures. En revanche, en 2^{nde}, il n'est sans doute pas nécessaire de donner la fiche avec des figures à coder.

b) Préparation

Il n'est pas nécessaire de faire une préparation spécifique à ces fiches. En revanche, il est utile que les élèves aient pris l'habitude, devant un énoncé, de coder sur la figure les données du problème, et qu'ils aient eu l'occasion de rencontrer des textes de démonstration de styles variés s'écartant de stéréotypes comme : « je sais que : *hypothèses* or : *propriété* donc : *conclusion* ». Pour « Le losange de Cesson », la démonstration avec des angles semblant décourager certains élèves, cette activité peut être l'occasion de proposer un ou deux exercices de révision sur les angles dans les semaines qui précèdent ou dans la semaine qui suit.

c) Mode d'emploi

Pour une meilleure efficacité, il est préférable d'organiser le travail par groupes de trois ou quatre. Chaque élève remplit une fiche réponse pour lui-même et le groupe remplit une fiche réponse pour la rendre à l'enseignant. C'est cette dernière fiche qui sert lors de l'exploitation. Chaque activité représente environ une heure de travail en $4^{ème}$.

d) Exploitation

Malgré les difficultés, un nombre important d'élèves expriment à un moment ou à un autre des idées pertinentes. Mais ces idées restent fugitives. Il est donc absolument nécessaire de consacrer une séance à consolider les connaissances entrevues. Au cours de cette séance on pourra proposer à la classe des réponses d'élèves judicieusement choisies. L'expérience montre que la classe saura rejeter les réponses fausses. La séance peut se conclure par quelques institutionnalisations s'appuyant sur les formulations des élèves.

D'une part, on explicite « qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé :

- si elle contient des affirmations qui ne sont pas démontrées et qui ne sont pas des données de l'énoncé,
- si on y démontre des propositions qui sont des données de l'énoncé,
- si on utilise un théorème inadapté ».

D'autre part on peut discuter sur la question des sous-entendus, sur la grande diversité des mots de liaison, sur le sens précis de ces mots, sur la liberté dans l'ordre d'écriture d'une démonstration, etc.

III – Synthèse

Le but des activités « Le losange de Cesson » et « Le parallélogramme de Saint-Méen » est, comme nous l'avons déjà souligné, de faire mieux comprendre à nos élèves le rôle des données du problème dans la démonstration. De ce point de vue, les expériences réalisées sont convaincantes. En 4ème, avec les dernières versions qui comportent une figure et une fiche réponse, tous les groupes comprennent la consigne et la plupart trouvent les bonnes associations entre les énoncés et les démonstrations. On trouve environ 30 % d'erreurs sur les raisons qui permettent d'affirmer qu'une démonstration ne convient pas à un énoncé. Mais le débat en classe permet de surmonter ces erreurs. Lors de ce débat, les élèves ont pu constater que l'utilisation d'une proposition qui n'est pas une donnée du problème ne peut être admise dans une démonstration que si elle est justifiée, contrairement à l'utilisation d'une donnée du problème, et qu'il n'est pas toujours nécessaire d'utiliser toutes les données d'un problème pour qu'une démonstration soit cohérente. La discussion a permis de faire « un état des lieux » sur les expressions qu'on rencontre dans des manuels scolaires : on sait que, par hypothèse, d'après l'énoncé, etc. Elle a été l'occasion de faire sentir que rédiger une démonstration comporte certaines libertés et qu'il n'est pas obligatoire de s'exprimer à la virgule près comme le fait le livre ou le professeur. À la suite de ces activités, les élèves semblent mieux comprendre ce qu'on attend d'eux dans une démonstration, surtout en ce qui concerne le rôle des données du problème.

En 2nde, pour « Le Losange de Cesson », les élèves font peu de fautes. Cette fiche est une très bonne manière de relancer l'activité de démonstration dans cette classe.

AUTOUR DE PYTHAGORE

I – La conception des fiches

Le groupe a travaillé sur le thème « théorème et réciproque » ; nous avons mis au point trois activités autour du théorème de Pythagore :

- « Propriété directe ou propriété réciproque ? »
- « Est-ce le même théorème ? »
- « Triangle es-tu rectangle ? ».

Le but principal de ces activités est d'amener les élèves à faire la distinction entre la propriété directe et sa réciproque. Nous savons que le théorème de Pythagore donne lieu à 4 types d'énoncés : le théorème direct, le théorème réciproque, la contraposée du théorème direct et la contraposée du théorème réciproque, appelés respectivement P1, P2, P3 et P4 dans l'activité « Propriété directe ou propriété réciproque ? ».

Au cours de la réalisation de la première activité : « Propriété directe ou propriété réciproque ? », la question s'est posée d'introduire un triangle qui n'est pas rectangle, ce qui nécessite l'utilisation d'un raisonnement par l'absurde ou de la contraposée. Les programmes ne parlent pas de ces pratiques, les manuels ont une attitude très ambiguë sur le sujet ; il n'est pas toujours facile de s'y retrouver, comme on peut le voir dans l'encadré de la page suivante. Certains d'entre eux institutionnalisent la propriété « *s'il n'y a pas l'égalité entre le carré du côté le plus long et la somme des carrés des autres côtés, alors le triangle n'est pas rectangle...* », sous divers titres : activités, méthodes ou exercices corrigés. D'autres proposent des rédactions par l'absurde : « *si* $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ *le triangle n'est pas rectangle, car dans un triangle rectangle ...* ». D'autres encore mettent des triangles ne vérifiant pas la relation de Pythagore en exercice sans donner d'énoncé ni de méthode claire pour les résoudre (cf. page suivante et pour plus de détails sur les manuels se reporter au chapitre : Les manuels scolaires : parlons-en !).

C'est pourquoi nous avons tenu à énoncer le théorème appelé P3 :

« *Dans un triangle ABC, si* $AB^2+AC^2 \neq BC^2$, *[BC] étant le côté le plus long, alors le triangle ABC n'est pas rectangle* »

et ceci pour aider les élèves à mieux cerner le problème.

Quant au théorème appelé P4 :

« *Si un triangle ABC n'est pas rectangle en A, alors* $AB^2+AC^2 \neq BC^2$»

nous l'avons mis pour que les deux contraposées soient présentes et aussi pour que les élèves comprennent que c'est toujours sa réciproque P3 qui sert. Il est vrai que dans la pratique le théorème P4 ne se rencontre jamais ; on n'a pas vraiment envie de montrer une conclusion comme celle de cet énoncé.

Dans la deuxième activité : « Est-ce le même théorème ? » nous avons voulu tester la compréhension des différents énoncés que l'on peut donner de Pythagore et de sa réciproque et voir si les élèves allaient classer la contraposée du théorème direct avec le théorème direct, avec sa réciproque ou à part.

Notre idée est donc de centrer le travail sur la lecture des énoncés en leur faisant regrouper ceux qui veulent dire la même chose. Les énoncés doivent, pour ce type de travail, être le plus variés possible, mais pour rester près des usages, ils ont été extraits de manuels scolaires plus ou moins récents.

LES TRIANGLES NON RECTANGLES DANS LES LIVRES

Certains livres donnent un modèle de correction par l'absurde, sous le titre justifié de méthode. Cette démonstration utilise le théorème direct énoncé dans le cours.

EXTRAIT DU LIVRE BORDAS
« Méthodes »
Si le triangle était rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore, on aurait $AB^2 + AC^2 = BC^2$. *Or* $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, *donc le triangle n'est pas rectangle.*

Dans d'autres, l'attitude est beaucoup moins claire puisque, « pour chercher », on peut raisonner par l'absurde, mais au moment de rédiger on utilise la contraposée qui n'est pas un énoncé du cours. Ainsi, dans l'exemple suivant, le texte sous le titre « je cherche la solution » est une rédaction tout à fait satisfaisante, alors que le texte sous le titre « je rédige » n'est en fait pas rédigé et s'appuie sur la contraposée du théorème direct qui n'est pas un énoncé du cours. De plus, ceci n'a rien à voir avec le théorème réciproque, comme peut le laisser penser le commentaire pour le professeur, puisque c'est la contraposée du théorème direct.

EXTRAIT D'UN LIVRE BELIN
« Activités préparatoires »
Trois exemples numériques sont proposés suivis de la question :
« Dans chacun des cas, calculer $AB^2 + AC^2$ *et* BC^2, *puis mesurer l'angle BAC ».*
Dans la marge un commentaire pour le professeur :
Point de départ pour aborder la réciproque de la propriété de Pythagore. Formulation à l'initiative du professeur.
Puis plus loin le livre propose un exercice résolu :
« Je cherche la solution »
- Si $RT^2 \neq RS^2 + ST^2$, *le triangle n'est pas rectangle en S car, dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.*
« Je rédige »
$RT^2 \neq RS^2 + ST^2$, *le triangle RST n'est pas rectangle.*

D'autres manuels, enfin, préfèrent présenter la contraposée comme une méthode, sans expliciter le lien avec les énoncés direct et réciproque. Mais sur une copie d'élève un enseignant se contentera-t-il de cette rédaction en termes de méthode ou exigera-t-il l'énoncé du théorème correspondant : la contraposée du théorème direct.

EXTRAIT DU LIVRE CINQ SUR CINQ
Exercice résolu
Deux exemples numériques ; calculs présentés en tableau
1) on calcule le carré de la longueur du plus long côté
2) on calcule la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés
3) on compare les résultats $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$
4) on conclut : La relation de Pythagore n'est pas vérifiée, donc le triangle n'est pas rectangle
A la suite de cela, cet énoncé est institutionnalisé comme :
« Si ce n'est pas le cas, le triangle n'est pas rectangle ».

Pour la troisième activité « Triangle es-tu rectangle ? », il s'agit cette fois d'associer chacune de ces propriétés aux situations auxquelles elles s'appliquent. Pour cela la situation est réduite à l'expression la plus simple possible et les énoncés choisis pour les propriétés sont ceux qui sont les plus familiers aux élèves. Dans ce contexte l'énoncé de la contraposée nous paraît avoir sa place, notre souci étant d'essayer de faire sentir aux élèves que la contraposée est un énoncé équivalent au théorème direct, pour cela on leur propose de constater que ces deux théorèmes sont utilisés dans le même problème (celui de Guillaume et Bastien), mais l'un avec une démonstration directe et l'autre avec une démonstration par l'absurde. Le théorème réciproque en revanche ne convient pas à ce problème.

Fiche 3

Propriété directe ou propriété réciproque ?

TRAVAIL DEMANDÉ :

Compléter le tableau : La propriété utilisée sera notée : P1, P2, P3 ou P4

P1 est : Si un triangle est rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit.

P2 est : Si, dans un triangle ABC, on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A.

P3 est : Dans un triangle ABC, si $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$, BC étant le côté le plus long, alors le triangle ABC n'est pas rectangle.

P4 est : Si un triangle ABC n'est pas rectangle en A, alors $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$

Triangle	Mesures des Côtés	Le carré des mesures des côtés	Nature du triangle	Propriété utilisée
DEF	DE = 4 DF = 3 EF =	DE^2 = DF^2 = EF^2 =	Rectangle en D	
EFG	EF = 8 EG = 10 FG = 6	EF^2 = EG^2 = FG^2 =		
RST	RS = 15 RT = 9 ST = 12	RS^2 = RT^2 = ST^2 =		
UVW	UV = VW = 8 UW = 10	UV^2 = VW^2 = UW^2 =	Rectangle en V	
DKM	DK = 0,5 KM = 1,2 DM = 1,3	DK^2 = KM^2 = DM^2 =		
JIL	JI = 4 IL = 5 JL = 6	JI^2 = IL^2 = JL^2 =		
ABC	AC = 5 BC = AB = 13	AC^2 = BC^2 = AB^2 = 1	Rectangle en C	

Fiche 4

Est-ce le même théorème ?

TRAVAIL DEMANDÉ :
Regroupez les théorèmes qui vous paraissent vouloir dire la même chose, en coloriant de la même couleur les petits carrés des théorèmes qui vont ensemble.

1 Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

2 Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la longueur du troisième côté, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce troisième côté.

3 Si on sait que MNP est un triangle tel que $MP^2 + MN^2 = PN^2$ alors on peut dire que MNP est un triangle rectangle en M.

4 Si l'on constate que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

5 Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égal au carré de l'hypoténuse.

6 Dans un triangle MNP rectangle en M et d'hypoténuse [PN], on a $MP^2 + MN^2 = PN^2$. Ce résultat est l'énoncé de Pythagore.

7 Si un triangle ABC vérifie $AB^2 + AC^2 = BC^2$ alors il est rectangle en A.

8 Dans un triangle rectangle, dont la longueur de l'hypoténuse est a et dont les longueurs des autres côtés sont b et c, on a l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$.

9 Dans un triangle rectangle ABC où $AB^2 + AC^2 = BC^2$, les deux côtés [AB] et [AC] sont perpendiculaires.

10 Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.

11 Dans un triangle ABC tel que $AB^2 + AC^2 = BC^2$, l'angle $\widehat{BAC}$ est droit.

12 Si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle n'est pas rectangle.

Fiche 5

Triangle, es-tu rectangle ?

Guillaume, Noémie et Bastien ont rédigé des démonstrations pour des problèmes que le professeur leur a donnés. Celui-ci, au moment de la correction, leur reproche de ne pas avoir indiqué dans leur démonstration le théorème qu'ils utilisent. Guillaume, Bastien et Noémie en consultant leur livre et leur cahier trouvent les énoncés de théorèmes qui sont dans le tableau.

Peux-tu les aider à compléter leurs démonstrations en indiquant, pour chaque énoncé de théorème, la démonstration dans laquelle il peut servir.

PROBLÈME DE GUILLAUME ET DE BASTIEN

Un triangle ABC a des côtés de longueur : AB = 3, AC = 5 et BC = 6. Ce triangle est-il rectangle en A ?

DÉMONSTRATION DE GUILLAUME

Calculons $AB^2 + BC^2$ et BC^2.

On obtient : $AB^2 + AC^2 = 9 + 25 = 34$ et $BC^2 = 36$.

On constate que $AB^2 + AC^2 \neq BC^2$. Donc le triangle n'est pas rectangle en A.

DÉMONSTRATION DE BASTIEN

Supposons que le triangle ABC soit rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on aurait $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Or $AB^2 + AC^2 = 9 + 25 = 34$ et $BC^2 = 36$. Il y a donc une contradiction. On en déduit que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

PROBLÈME DE NOÉMIE

Un triangle ABC a des côtés de longueur : AB = 65, AC = 72 et BC = 97. Ce triangle est-il rectangle en A ?

DÉMONSTRATION DE NOÉMIE

Calculons $AB^2 + BC^2$ et BC^2.

On obtient : $AB^2 + BC^2 = 65^2 + 72^2 = 4225 + 5184 = 9409$ et $BC^2 = 9409$.

On constate que $AB^2 + AC^2 = BC^2$. Donc le triangle est rectangle en A.

Triangle, es-tu rectangle ?
Fiche de réponses

	Énoncés de théorème	**A qui peut servir ce théorème ?**
1	Si on sait que MNP est un triangle tel que $MP^2 + MN^2 = PN^2$ alors on peut dire que MNP est triangle rectangle en M.	***à Noémie***
2	Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la longueur du troisième côté, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce troisième côté.	
3	Si un triangle ABC est rectangle en A alors $AB^2 + AC^2 = BC^2$.	
4	Si l'on constate que $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.	
5	Si un triangle est rectangle alors la somme des carrés des côtés de l'angle droit est égale au carré de l'hypoténuse.	
6	Dans un triangle MNP, rectangle en M et d'hypoténuse [PN], on a $MP^2 + MN^2 = PN^2$. Ce résultat est l'énoncé de Pythagore.	
7	Dans un triangle rectangle, dont l'hypoténuse est de longueur a et dont les autres côtés sont de longueur b et c, on a l'égalité : $a^2 = b^2 + c^2$.	
8	Dans un triangle GAZ où $GA^2 + GZ^2 = AZ^2$, les deux côtés [GA] et [GZ] sont perpendiculaires.	
9	Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.	
10	Dans un triangle EAU tel que $EA^2 + EU^2 = AU^2$, l'angle $\widehat{AEU}$ est droit.	
11	Si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.	

II – Difficultés des élèves

a) Lecture

Dans la confusion entre théorème direct et théorème réciproque, le premier obstacle vient souvent de la lecture trop superficielle, faite par les élèves, des énoncés des théorèmes qu'on leur propose. Par exemple pour le théorème de Pythagore, ils savent que l'idée importante c'est qu'il y a équivalence ; ils repèrent alors simplement, dans un énoncé de théorème, qu'il y a bien un triangle rectangle et l'égalité de Pythagore, et souvent ils ne prêtent pas attention aux mots qui lient ces deux propositions.

Nous avons aussi observé des difficultés autour de certains mots ou expressions qui ont posé problème. Le mot « *vérifie* » n'est pas compris dans l'expression : « *si un triangle ABC vérifie...* ». De même le mot « *perpendiculaire* » semble à certains sans lien direct avec le fait qu'un triangle soit rectangle. Le mot « *propriété* » semble plus familier aux élèves que « *théorème* » puisque certains ont fait immédiatement la traduction de cette manière. L'énoncé où les longueurs des côtés ont été désignés par des lettres a, b, c n'a pas été compris par une majorité des élèves, peut-être à cause de la malencontreuse expression « *a pour longueur a* » qui figurait dans les premières versions de nos fiches.

Dans « Triangle es-tu rectangle ? » la place de la question lors de notre première version avait posé un problème, car la question était mise après les textes d'élèves et de ce fait, certains avaient tendance à chercher d'abord si les démonstrations étaient bonnes.

b) Prépondérance des calculs sur les mots.

Souvent devant un exercice sur Pythagore les élèves cherchent d'abord à faire des calculs (attrait de la calculatrice) sans se soucier de la propriété à utiliser ; certains élèves ne s'intéressent qu'à la formule, ils ne différencient les textes que par l'écriture

« $AB^2 + BC^2 \neq AC^2$ » ou « $AB^2 + BC^2 = AC^2$ »

sans lire le texte qui l'entoure. Nous avons entendu par exemple dans la fiche « Triangle es-tu rectangle ? » : « Ils ont tous utilisé ça + ça = ça ». De ce fait il y a souvent confusion entre les textes de Bastien et Noémie alors que les textes de Noémie et Guillaume ne sont jamais confondus.

c) Et si on supposait !

En général les élèves ont du mal à faire la démarche de « supposer » pour commencer un raisonnement par l'absurde ; on a observé le dialogue suivant entre deux élèves : « *Cela pourrait être Bastien car il suppose que le triangle est rectangle* ». « *Oui, il suppose mais il ne sait pas* ». Le deuxième élève ne semble pas mûr pour accepter un raisonnement par l'absurde qui nécessite justement de supposer.

L'énoncé 5 qui commence par : « *si un triangle est rectangle…* » paraît pour certains ne convenir à aucune copie puisque « *personne ne dit cela* ». « *Personne au début ne dit qu'il est rectangle* ». Là encore le lien n'est pas fait avec le « *supposons que le triangle soit rectangle* » du raisonnement par l'absurde. Cette difficulté n'en est pas une pour les autres élèves : « *C'est Bastien, car il a dit tout suite qu'il est rectangle* ».

Par contre certains « *supposent* » à tort ce qu'ils cherchent à démontrer. « *On va dire que le triangle est rectangle, on va faire les calculs et on va voir qu'il est bien rectangle* ».

d) Contraposée

La difficulté vient de la présence de deux négations dans la contraposée, ce qui conduit certains élèves à mettre cet énoncé à part et à regrouper le théorème direct et sa réciproque ensemble. Certains élèves trouvent que la contraposée va mieux avec le théorème réciproque qu'avec le théorème direct, car, dans les deux cas, on part de la longueur des côtés.

D'autres élèves présentent un lien entre contraposée et théorème direct.

Pour l'énoncé 4 (contraposée) on a observé la discussion : « *Pourquoi mettre Guillaume à la 4 et pas Bastien. Guillaume fait d'abord les calculs alors que Bastien fait en général. Je trouve que ça correspond mieux* ».

Autre observation sur ce lien : « *Bastien et Guillaume disent que c'est pas vrai* (faisant allusion au fait que le triangle est rectangle), *Noémie, elle dit que c'est vrai* ». « *Pour le 2, c'est rectangle, c'est Noémie* ».

Il n'est pas étonnant qu'en 4ème les élèves ne fassent pas le rapport entre la contraposée et le théorème direct. Bien entendu il n'est pas question d'employer le mot « contraposée » avec les élèves et de démontrer l'équivalence avec le théorème direct au collège ni même au lycée.

III – Bilan des activités

1) Compte rendu des expérimentations

Quelques mois après la leçon sur Pythagore (sans révisions particulières) nous avons testé ces activités dans plusieurs classes de 4ème. Voici le bilan de quelques-unes de nos expérimentations :

- Pour l'activité « Propriété directe ou propriété réciproque ? », présentée dans une classe d'un niveau moyen de vingt-six élèves, le résultat est plutôt positif, six élèves avaient parfaitement réussi et treize élèves avaient au plus deux fautes. Dans l'ensemble les élèves comprennent bien la consigne et ne sont pas déroutés par ce type d'exercices.
- Pour l'activité « Est-ce le même théorème », présentée dans une classe de vingt quatre élèves comme une tâche de classement, les élèves sont un peu déroutés par ce genre de travail peu habituel. Un seul élève a réparti les théorèmes sans faute en deux groupes : théorème direct et contraposée d'une part, théorème réciproque, d'autre part, mais il n'a pas réussi à expliquer pourquoi. Sept élèves ont réparti sans faute les théorèmes en trois groupes : théorème direct, réciproque et contraposée. Sept élèves ont réparti les théorèmes en deux groupes, mais en mettant la contraposée avec le théorème réciproque. Ces élèves n'étaient pas du tout convaincus que la contraposée puisse aller avec le théorème direct. Pour les autres élèves on note que : deux élèves ont réparti les théorèmes en deux groupes : théorème direct et réciproque d'une part et contraposée d'autre part ; ils sont convaincus que leur classement est « possible ». Huit élèves ont bien regroupé les deux contraposées du théorème direct. Les deux dernières copies nous ont paru inexploitables.

Une discussion a été faite en classe, à l'aide d'un transparent de la fiche, en coloriant celui-ci, avec des couleurs effaçables, selon les réponses des élèves. Les copies n'étaient pas rendues au moment de la discussion. Au cours de cette discussion, la majorité des élèves a classé les deux contraposées ensemble. Peut être simplement parce que ce sont les seuls énoncés contenant une forme négative. Aussi, après discussion, l'ensemble des élèves pense qu'il vaut mieux faire 3 groupes : théorème direct, théorème réciproque et contraposée.

Pour l'activité « Triangle es-tu rectangle ? » il est rassurant de constater que le théorème direct est souvent associé de manière correcte à la démonstration par l'absurde de Bastien. Sur six groupes, pour les cinq énoncés du théorème direct on a les réponses suivantes :

	Bastien	Guillaume	Noémie	Personne	Tous
Énoncé 3	4	1	1	0	0
Énoncé 5	3	0	2	1	0
Énoncé 6	2	1	2	1	0
Énoncé 7	2	1	2	0	1
Énoncé 9	5	0	1	0	0

Ce qui donne globalement une majorité pour le théorème direct. Les réponses les moins réussies correspondent aux énoncés, où, soit les lettres sont différentes (énoncé 6), soit il y a une difficulté particulière de lecture (énoncé 6 le « *si un triangle…* » et 7 forme inhabituelle pour eux). L'association de la démonstration de Guillaume avec le dernier énoncé de la contraposée a été mieux perçue par les élèves. Ceci s'explique par le fait qu'il faisait partie de la boîte à outils donnée par le professeur de la classe.

2) Utilisation des fiches

a) Niveau

Ces trois fiches conviennent parfaitement au niveau 4ème. Il nous semble préférable de présenter les deux premières fiches « Propriété directe ou propriété réciproque ? » et « Est-ce le même théorème ? » quelques mois après le cours sur Pythagore, en fin de deuxième trimestre ou au début du troisième trimestre en 4ème. La deuxième fiche, « Est-ce le même théorème ? » permet de s'habituer à différentes expressions des énoncés.

Quelques semaines plus tard la fiche « Triangle es-tu rectangle ? » permet une bonne révision de Pythagore.

Ces fiches conviennent aussi très bien en 3ème ou en 2nde à titre de révision lorsque l'on travaille sur les démonstrations en géométrie. Elles peuvent être utilisées pour réactiver les idées sur ce qu'est un théorème et la réciproque d'un théorème, par exemple, lorsqu'on aborde le théorème des milieux ou plus généralement Thalès. On pourrait en concevoir dans le même style sur ces chapitres.

b) Temps

« Propriété directe ou propriété réciproque ? » et « Est-ce le même théorème ? » sont des activités assez courtes : une demi-heure.

Pour « Triangle es-tu rectangle ? » Il faut compter une heure dans une classe de 4ème de niveau moyen, car il faut le temps de bien comprendre la consigne et de lire avec soin et plusieurs fois les différentes démonstrations et les énoncés.

c) Mode d'emploi

Les activités « Propriété directe ou propriété réciproque ? » et « Est-ce le même théorème ? » sont plutôt individuelles.

On peut présenter « Triangle es-tu rectangle ? » sur format A3 pour que les élèves aient sous les yeux simultanément, copies d'élèves et théorèmes.

Pour bien observer l'activité, on peut organiser la classe par groupes de trois ou quatre, faire désigner un secrétaire par groupe, distribuer une fiche de réponses pour le groupe en plus de la fiche individuelle de réponses figurant sur le format A3 qui sert de brouillon. Ensuite, on peut laisser les élèves chercher sans intervenir, en écoutant les discussions, sauf si la discipline le nécessite. Il faut laisser le temps aux élèves de comprendre la consigne par eux-mêmes et aussi de se tromper avant d'aboutir à un résultat. Les réponses à leurs questions seront données, pour l'essentiel, dans une séance suivante lors de l'exploitation de la fiche. Cette séance d'exploitation peut prendre la forme d'un débat, en utilisant un rétroprojecteur montrant les fiches, sur lesquelles chaque groupe vient proposer sa réponse en la commentant.

Pour « Triangle es-tu rectangle ? », on peut compléter l'activité en demandant de regrouper les théorèmes qui veulent dire la même chose. C'est un moyen de faire mieux percevoir le rapport entre théorème et démonstration. De plus, cela favorise le débat sur le lien entre le théorème, sa contraposée et le problème à résoudre.

IV- Synthèse

Ces trois fiches ont permis de faire une bonne révision du théorème direct et du théorème réciproque de Pythagore ; on a pu refaire le point et consolider ainsi les connaissances des élèves.

Il nous paraît important de pratiquer très librement la contraposée et le raisonnement par l'absurde et en particulier de donner un énoncé de la contraposée comme théorème du cours, car le statut des propositions doit être clair quand on débute dans la démonstration. De plus, cela permet aux élèves de travailler en harmonie avec les différents manuels ou enseignants. En revanche, il est trop difficile de convaincre hors contexte que la contraposée est équivalente au théorème direct. La fiche « Triangle es-tu rectangle ? » peut être le moyen d'engager une discussion sur ce sujet.

Pour le raisonnement par l'absurde, le mieux serait que les élèves le trouvent naturellement. On peut les y aider en leur disant d'essayer de voir ce qui pourrait arriver si le triangle était rectangle....

LES MANUELS SCOLAIRES :

PARLONS-EN !

I – Introduction

Comme nous nous intéressions au début de l'apprentissage, nous avons choisi d'analyser un livre de 5ème et un livre de 4ème. Pour le livre de 5ème, nous avons retenu, pour cette analyse, le manuel « Triangle » parce qu'à notre connaissance il est le seul à contenir un chapitre spécifique sur « l'initiation au raisonnement déductif ». Pour le manuel de 4ème, le choix s'est porté sur le manuel « Cinq sur cinq » qui est le manuel utilisé par les participants à notre groupe.

a) Démontrer ou raisonner

Au cours de cette analyse nous serons amenés à distinguer entre « apprendre à raisonner » et « apprendre à démontrer ». Expliquons cette distinction[1].

Raisonner c'est « produire des inférences » c'est-à-dire élaborer, à partir des informations que l'on possède déjà sur une certaine situation, des informations nouvelles. Par exemple si je vois des gros nuages noirs en train de s'accumuler j'en infère qu'il va pleuvoir.

Démontrer c'est écrire un texte qui suit des règles particulières.

Bien sûr l'écriture d'une démonstration s'accompagne d'un raisonnement. Mais ce raisonnement peut contenir des étapes que la démonstration ne reflétera pas (par exemple les observations faites sur la figure). D'autre part on peut raisonner sans produire de texte ou en produisant un texte qui ne soit pas une démonstration : utilisation de figures, de schémas, d'analogies, de calculs.

Dans l'activité de raisonnement interviennent des connaissances particulières ; ainsi pour faire des inférences en géométrie on s'aide de dessins mais aussi des règles de la démonstration. On voit que ces connaissances dépendent du domaine et donc que notre façon de raisonner dépend de la situation. Plusieurs recherches montrent même qu'il suffit de modifier certains détails en apparence insignifiants d'une situation pour modifier les raisonnements des personnes confrontées à cette situation. Ainsi raisonner en mathématiques ce n'est pas la même chose que raisonner dans d'autres domaines. Il semble même que les progrès que l'on peut faire sur la capacité de raisonner dans un domaine aient très peu d'effet sur notre manière de raisonner dans un autre domaine.

b) Enseigner la démonstration

Pourquoi choisir d'enseigner la démonstration, de préférence à d'autres modes de raisonnement ? La première raison est la place qu'elle tient dans le travail du mathématicien. Une deuxième raison est le rôle essentiel joué par l'écriture dans tout apprentissage. Une troisième est que la démonstration est un moyen pour les élèves d'expliciter les inférences qu'il fait ; trop souvent ces inférences restent pour l'essentiel implicites et donc les élèves ont, sur elles, peu de moyens de contrôle. Enfin la démonstration est un moyen privilégié de produire de nouvelles inférences ; il n'est pas rare que l'écriture d'un début de démonstration soit un moyen de découvrir de nouvelles idées pour résoudre un problème.

---

[1] On pourra trouver plus de détails sur ce sujet dans le paragraphe « Démonstration et raisonnement » dans *La démonstration ; écrire des mathématiques au collège et au lycée*, Édition Hachette Éducation, Paris, 1998.

II - Le manuel « Triangle » de $5^{ème}$ (Éditions Hatier, 1998)

a) Un chapitre sur la démonstration

Ce manuel présente un chapitre explicitement consacré à ce sujet. Les idées « qu'un contre-exemple suffit pour prouver qu'un énoncé est faux », que « des exemples, même nombreux, ne suffisent pas à prouver qu'un énoncé est vrai » et « qu'il ne suffit pas de mesurer sur la figure » sont mises en avant de manière très convaincantes, avec des exercices bien adaptés. Souligner dès le départ l'idée que l'on peut raisonner sur les nombres aussi bien que sur les figures nous parait très judicieux ; mais peut-être ne faudrait-il pas illustrer cette idée par un seul type d'exercices (page 124, § 8 ; page 128, exemple ; page 130, exercice 14 b)).

Tous les exercices concernant des raisonnements sur les nombres sont du type de l'exercice ci-contre.	**Exercice 14 b, page 130** Choisir un nombre, ajouter 7, multiplier le résultat par 4, retrancher 28 puis le triple du nombre de départ (c'est-à-dire le nombre multiplié par 3). Que remarquez-vous ? Est-ce toujours vrai ?

Cependant nous nous sommes interrogés sur plusieurs points :

b) Écrire la réciproque

Est-ce un objectif de $5^{ème}$ de savoir écrire la réciproque d'un énoncé ? Dans cette classe, l'objectif n'est-il pas plutôt de comprendre qu'un énoncé et sa réciproque sont deux énoncés différents et d'être capable dans une situation donnée de savoir de quel énoncé on a besoin pour obtenir le résultat ? Ne serait-il pas préférable, en conséquence, de proposer moins d'exercices dont l'objet soit d'écrire la réciproque d'un énoncé (voir page 123, § 5 ; page 125, § 3 ; page 129, exercices 6 et 7 ; page 130, exercice 13 ; page 131, exercice 19) et d'éviter des questions très difficiles du type « compléter un énoncé pour qu'il soit vrai et que sa réciproque soit fausse » (page 132, exercices 24 et 25) ? On pourrait aussi s'appuyer sur d'autres formulations que le si alors dans des exercices dont le but soit de classer ensemble des énoncés qui veulent dire la même chose.

Voici un exemple d'exercice dont la tâche est d'écrire des réciproques.	**Exercice 13, page 130** Écrire la réciproque de ces énoncés. **a/** Quel que soit le nombre choisi, s'il est inférieur à 29 alors il est inférieur à 27. **b/** Quel que soit le point M choisi, s'il est sur un cercle de centre K et de rayon 2 cm alors KM = 2 cm.

c) La vérité en mathématique

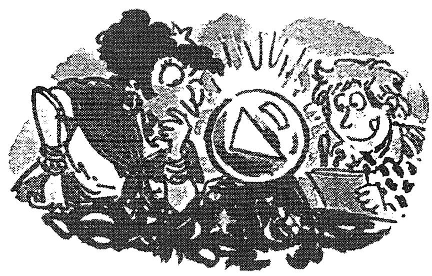
La prise de conscience qu'un énoncé peut sembler vrai alors qu'il est faux ou faux alors qu'il est vrai est a priori bien antérieure à l'acquisition de la capacité de prouver par un raisonnement déductif. Pour tenir compte de cette idée, ne pourrait-on pas proposer presque dès le début de l'année un chapitre sur la vérité en Mathématiques (comprenant des choses comme : page 123 § 1, 2 et 3, page 125 § 1 ; cf. ci-dessous) et nettement plus tard un chapitre sur les raisonnements.

Voici des éléments du livre qui pourraient servir à un chapitre sur la vérité en mathématiques (page 123 paragraphe 1)

Règles du débat

1. Existe ou n'existe pas ?

Existe-t-il un triangle dont les côtés mesurent 9 cm, 5 cm et 4 cm ?



2. Ça ne manque pas d'aire !

Tracer un rectangle ABCD tel que AB = 8 cm et BC = 5 cm. Placer un point E sur [AC] tel que AE = 3 cm.
Tracer la parallèle à (AD) qui passe par E ; elle coupe [AB] en N et [DC] en L.
Tracer la parallèle à (AB) qui passe par E ; elle coupe [AD] en M et [BC] en K.
Parmi les deux rectangles EMDL et ENBK, quel est celui qui a la plus grande aire ? Justifier la réponse.

3. Des nombres qui n'ont que deux diviseurs

Dans l'expression $n \times n - n + 11$, si on remplace n par n'importe quel entier naturel, obtient-on toujours un nombre qui a exactement deux diviseurs ?

La recherche d'erreurs dans une démonstration est a priori une tâche intéressante. Mais il ne faut pas que la réponse puisse être ambiguë. Par exemple dans l'exercice 9 a de la page 130, il n'y a pas vraiment d'erreur ; il y a simplement trop d'informations ; il est normal qu'un enseignant encourage ses élèves à ne pas commettre ce type de maladresse, mais cela ne peut être qualifié de faute de raisonnement. (notons que l'exercice 9 b est identique à l'exercice 23 a)

Une phrase inutile n'est pas une erreur de raisonnement.	**Exercice 9 a, page 130** Dans certains de ces raisonnements il y a des erreurs. Les repérer. a/ Je sais que ABCD est un carré. Si un quadrilatère est un carré alors il a quatre angles droits et quatre côtés de même longueur. Donc AB = BC = CD = AD.

d) Éviter de raisonner sur des situations trop simples

Pour un élève qui commence à essayer de faire des raisonnements par écrit, les situations trop évidentes ont-elles réellement une signification ? Ainsi les situations où il y a une droite et deux perpendiculaires nous semblent trop pauvres pour que l'élève comprenne le besoin d'un minimum de précision dans le texte qu'il va écrire, et cela d'autant plus que les énoncés des théorèmes correspondants sont particulièrement indigestes quand ils sont écrits sans lettre (page 124 § 6 et 7). Ne vaudrait-il pas mieux, dans ces conditions, choisir dès le départ des situations suffisamment complexes pour que l'écriture d'un texte ait un réel intérêt (la situation de l'exercice 30 page 132 est peut-être bien adaptée ; cf. ci-dessous).

Une situation qui pourrait servir de point de départ pour l'écriture d'une première démonstration.	**Exercice 30, page 132** ABCD est un rectangle de centre O. La perpendiculaire à (BD) qui passe par O coupe (AB) en K. Prouver que KD est toujours égal à KB, en utilisant certains énoncés ci-dessous : (1) Si un quadrilatère a ses diagonales qui se coupent en leur milieu et ont même longueur alors ce quadrilatère est un rectangle. (2) Si un quadrilatère est un rectangle alors ses diagonales se coupent en leur milieu. (3) Si une droite est la médiatrice d'un segment alors elle est perpendiculaire à ce segment et passe par son milieu. (4) Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par le milieu de ce segment alors c'est la médiatrice de ce segment. (5) Si un point est sur la médiatrice d'un segment alors il est équidistant des extrémités de ce segment.

De la même façon, nous nous demandons si les pas de démonstration isolés ont assez de signification pour un élève qui débute dans l'art de rédiger une démonstration (page 124, § 7). Ne serait-il donc pas plus intéressant de choisir, au moins au début, des activités qui correspondent à la rédaction d'un texte sur une situation qui soit un vrai problème aux yeux des élèves. Compléter un texte de démonstration dans ce cadre serait sans doute aussi facile que de compléter un pas isolé et aurait beaucoup plus d'intérêt pour les élèves.

e) Pas de textes stéréotypés

Présenter des pas de démonstrations sous une forme stéréotypée est sans doute une tentation forte pour les enseignants. Ainsi dans ce livre les exercices 8, 9, 21, 22 et 23 présentent des démonstrations très stéréotypées du type : je sais que..., si ... alors ..., donc ... Les résultats immédiats sont souvent flatteurs car les élèves se montrent capables d'imiter les exemples proposés par l'enseignant. Mais pour les élèves en difficulté c'est presque sûrement ôter toute signification à l'écriture de ces textes ; il s'agit d'imiter le modèle donné et non de convaincre ou de raisonner. La seule manière de vaincre cet obstacle majeur est de les aider à écrire eux-mêmes des textes qui leur paraissent convaincants et pour cela ils ont besoin d'un certaine liberté. C'est en leur proposant en exemple des textes fortement structurés, mais de style varié qu'on a le plus de chance de leur apporter une aide. La « preuve » en haut de la page 128 va dans ce sens ; cependant dans ce texte les mots de liaison employés pourraient être plus riches, ou encore ce texte pourrait avoir un style plus libre et contenir quelques indications heuristiques (cf. l'encadré ci-contre).

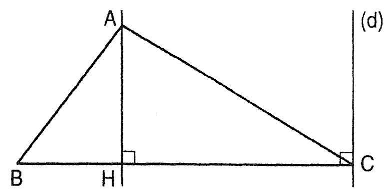
Parmi les textes produits par les élèves, il n'est pas rare de rencontrer des textes bien structurés et originaux ; il n'y a que des avantages à les proposer en exemple à toute la classe.

Des textes variés

A propos de l'exercice suivant proposé dans ce livre, on aimerait que des textes variés de démonstrations soient accessibles aux élèves.

Exercice proposé page 127

Exemple : ABC est un triangle. Tracer la hauteur issue de A, elle coupe (BC) en H. Tracer la droite (d) perpendiculaire à (BC) et qui passe par C.
Prouver que (AH) et (d) sont parallèles.



Rédaction proposée page 128

Preuve :
(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC *(Donnée du problème)*
donc (AH) est perpendiculaire à (BC) *(Définition de la hauteur d'un triangle).*
(d) est perpendiculaire à (BC) *(Donnée du problème).*
Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième
alors elles sont parallèles *(Propriété).*
Donc (AH) et (d) sont parallèles.

Voici un texte dont les mots de liaison sont plus nombreux et plus variés :

On sait que (AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC. D'après la définition de la hauteur, on en déduit que (AH) est perpendiculaire à (BC).

Comme (d) est perpendiculaire à (BC), (d) et (AH) sont perpendiculaires à la même droite (BC). Or si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième elles sont parallèles. Donc (AH) est parallèle à (d).

Voici un texte dont le style est plus libre et qui contient quelques indications heuristiques :

Pour démontrer que (d) et (AH) sont parallèles, l'idée essentielle est d'utiliser le théorème : « si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième elles sont parallèles entre elles » Prouvons pour cela que les deux droites (d) et (AH) sont perpendiculaires à la droite (BC).

L'énoncé précise déjà que (d) est perpendiculaire à (BC). Il indique aussi que (AH) a été tracé comme hauteur issue de A du triangle ABC. D'après la définition de la hauteur, on peut en déduire que (AH) est bien perpendiculaire à (BC).

f) Présenter une liste de « propriétés »

Il nous semble tout à fait satisfaisant que, dans un manuel, une liste des propriétés de géométrie que l'on considère comme utilisables dans les démonstrations soit, à un moment donné, proposée aux élèves (cf. ci-dessous). Cependant, dans cette liste *officielle,* n'est-il pas nécessaire de prendre quelques précautions :

- faut-il garder des énoncés où les hypothèses sont trop nombreuses, comme dans l'énoncé : *« Si un quadrilatère à quatre angles droits alors c'est un rectangle »*, alors que trois angles droits sont suffisants ? (la question ne se poserait pas s'il s'agissait d'une définition du type « *Un rectangle est un quadrilatère qui a quatre angles droits.* » Mais ici il s'agit d'une liste de propriétés) ;

- l'énoncé doit être facile à comprendre ; par exemple on sait que l'énoncé : « *Si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième alors elles sont parallèles entre elles* » est difficile. Il faut sans doute faciliter sa lecture en introduisant des lettres : « *Si deux droites (D) et (D') sont perpendiculaires à une droite (D"), alors (D) est parallèle à (D').* »
- Sans doute faudrait-il mettre en valeur, dans la liste, les énoncés qui sont un peu moins évidents, c'est-à-dire ceux qui correspondent à un véritable résultat mathématique comme : « *Si un point est sur la médiatrice d'un segment, il est à égale distance des extrémités de ce segment* » ou « *Un parallélogramme qui à un angle droit est un rectangle* » ou « *Les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leur milieu* » ou le théorème de Pythagore.

Extrait de la page 126 qui présente une liste de propriétés

4 Propriétés de géométrie à connaître

Droites :

- **Si** deux droites sont parallèles à une même troisième **alors** elles sont parallèles entre elles.
- **Si** deux droites sont perpendiculaires à une même troisième **alors** elles sont parallèles entre elles.
- **Si** deux droites sont parallèles et si une troisième est perpendiculaire à l'une **alors** elle est perpendiculaire à l'autre.

Cercle :

- **Si** un point M est sur un cercle de centre O et de rayon r **alors** OM = r.

Médiatrice :

- **Si** une droite est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de [AB] **alors** c'est la médiatrice de [AB].
- **Si** une droite est la médiatrice d'un segment [AB] **alors** elle est perpendiculaire à (AB) et passe par le milieu de [AB].

Rectangle :

- **Si** un quadrilatère a quatre angles droits **alors** c'est un rectangle.
- **Si** un quadrilatère est un rectangle **alors** il a quatre angles droits.

g) Les quantificateurs sous-entendus

L'un des obstacles majeurs dans la compréhension des énoncés de propriété est la présence plus ou moins sous-entendue du quantificateur *quel que soit.* De ce point de vue l'exercice 4 de la page 129 nous semble problématique ; ou bien l'auteur sous-entend un quel que soit x dans les formules qu'ils proposent, mais alors beaucoup d'élèves ne sauront pas le rétablir ; ou bien il n'y a rien de sous-entendu, mais ces phrases seront tantôt vraies, tantôt fausses contrairement à ce qui est dit page 125 : « Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux. » (Notons que le développement de (a+b)(c+d), qui semble utile pour analyser l'égalité 4 b, n'est pas au programme).

Dans cet exercice on ne sait pas si la propriété doit être vraie pour toutes valeurs de x ou seulement pour une valeur particulière.	Exercice 4, page 129. **Vrai ou faux ?** Préciser si les égalités ci-dessous sont vraies ou fausses : **a**/ $3x - x = 3$. **b**/ $(x + 7)(2x + 8) = 2x \times x + 56$. **c**/ $3(x - 11) = 3x - 33$.

III - Le manuel « Cinq sur cinq » de 4ème (Éditions Hachette, 1997)

Ce manuel est utilisé par les deux enseignants de 4ème du groupe. Il est apprécié en particulier parce qu'il contient des exercices variés et intéressants.

a) Apprendre à raisonner

L'impression générale est que les auteurs de ce manuel n'ont pas pour objectif l'apprentissage de la démonstration, mais un objectif plus général d'apprentissage du raisonnement (cf. le début du chapitre). Le livre propose en effet de multiples façons de raisonner à propos d'un problème, mais très peu d'éléments permettent au lecteur de savoir ce qu'est précisément une démonstration. Notons en particulier qu'on ne trouve pas de chapitre spécifique sur la démonstration, que le mot démonstration n'apparaît pas dans le sommaire et qu'il n'est pas davantage dans l'index alors que le mot conjecture y apparaît. Il n'est pas surprenant que, dans cette optique, ce livre adopte l'attitude qui fut longtemps celle des enseignants : la démonstration est une manière d'écrire des mathématiques que l'on acquiert spontanément en faisant des mathématiques. Il nous semble que les recherches récentes sur la démonstration montrent au contraire que l'un des moyens privilégiés d'apprendre à raisonner en mathématiques est de faire des démonstrations, et que l'apprentissage de la démonstration n'a toute son efficacité que s'il permet d'acquérir une compréhension claire de la structure spécifique de ces textes.

De nombreux exercices de type « répondre par vrai ou par faux » peuvent contribuer à clarifier pour les élèves l'idée du vrai et du faux en mathématiques, et ceci d'autant plus que certaines des affirmations contiennent des quantificateurs exprimés par exemple par le mot « toujours ». Cependant, l'idée de contre-exemple n'est pas mise en valeur, car toutes les affirmations proposées avant le chapitre sur la géométrie sont, soit toujours vraies, soit toujours fausses.

b) Qu'est-ce qu'une démonstration ?

C'est à la troisième page du chapitre sur la géométrie, page 137 (voir encadré), que l'on rencontre l'idée de démonstration pour la première fois ; la première page de ce chapitre contient un QCM du type « indiquer la réponse exacte » et pour la première fois l'un des items peut être l'occasion de proposer des contre-exemples.

Cette page 137 a dans le titre « petites démonstrations » ; mais le texte de la page ne dit pas où sont les démonstrations ; la présentation de la première démonstration est d'ailleurs un peu ambiguë car elle mélange, au texte de démonstration proprement dit, des commentaires (données ou hypothèses, résultats ou conclusion, voir la définition à la page 140) et un conseil (ne pas oublier de coder sur la figure les informations contenues dans l'énoncé). En bas de la page, il est demandé de prouver sans qu'il soit dit que c'est la même chose que de démontrer.

Voici les deux pages du manuel « Cinq sur cinq » de $4^{ème}$ où l'on rencontre pour la première fois l'idée de démonstration.

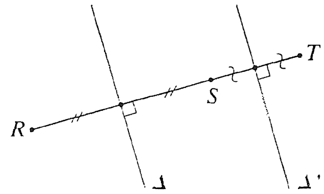
Revoir...

Médiatrice d'un segment : petites démonstrations

Exemple

Énoncé

Marquer trois points alignés R, S et T. Construire ensuite la médiatrice Δ du segment $[RS]$ et la médiatrice Δ' du segment $[ST]$.
Prouver que les droites Δ et Δ' sont parallèles.



Solution

Conseil : Ne pas oublier de coder sur la figure les informations contenues dans l'énoncé.

(données ou hypothèses)		*(résultats ou conclusions)*	
Δ est la médiatrice du segment $[RS]$,	donc	$\Delta \perp (RS)$	(voir la définition
Δ' est la médiatrice du segment $[RS]$,	donc	$\Delta' \perp (ST)$	à la page 140)

Les points R, S et T étant *alignés*, les droites (RS) et (ST) sont confondues.
Or, **si deux droites sont perpendiculaires à une même troisième, alors elles sont parallèles**. Par conséquent : $\Delta \,//\, \Delta'$.

Activité 4 À compléter

1 Placer deux points A et B distants de 8 cm. Tracer le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 3 cm, puis le cercle $\mathscr{C}'$ de centre B et de rayon 6 cm. Soit M et N les points d'intersection de ces deux cercles.

2 Recopier et compléter :
$AM = AN$, car M et N sont sur le ... $\mathscr{C}$ de ... A. $BM = BN$, car ... .
Les deux points A et B sont donc équidistants des points M et N :
la droite (AB) est par conséquent la ... du segment $[MN]$.

Activité 5 Sans aide

1 Placer quatre points A, B, C et D de façon que :
- le triangle ABC soit équilatéral ;
- et le triangle BCD soit isocèle en D.

Prouver que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires.

2 Démontrer les deux résultats encadrés ci-contre (faire deux dessins).

Retenir

① La médiatrice d'une corde d'un cercle passe par le centre du cercle.

② Dans un triangle isocèle, la médiatrice de la base, la hauteur et la médiane* issues du sommet principal sont confondues.

* Voir la page 264.

8. TRIANGLE RECTANGLE ET CERCLE CIRCONSCRIT 137

chapitre 8 ... et découvrir

Cercle circonscrit à un triangle

Activité 6 Triangle inscrit

Note

On dit qu'un triangle est *inscrit dans un cercle* lorsque les trois sommets du triangle sont sur le cercle.

1 Tracer un cercle de centre I et de rayon 4 cm, puis un triangle ABC *inscrit* dans ce cercle (voir l'encadré ci-contre).

2 *a*) Quelle est la nature du triangle IAB ? A-t-il un axe de symétrie ? Justifier.

b) Mêmes questions avec les triangles IBC et IAC.

3 Vrai ou faux ? Les médiatrices des côtés du triangle ABC passent par le centre du cercle.

Activité 7 Réciproquement : du triangle au cercle

1 Marquer trois points R, S et T non alignés. Tracer les droites $\mathscr{D}$ et Δ, médiatrices respectives des segments $[RS]$ et $[ST]$: soit I leur point d'intersection.

2 Voici un « déductogramme » à recopier et à compléter :

① *I est sur la médiatrice du segment $[RS]$, donc* $IR = IS$	→ *d'où* $IR = IS = IT$ ③
② *I est sur la médiatrice du segment $[ST]$, donc* $I\bullet = \bullet T$	

a) Dans la phrase ①, indiquer l'*hypothèse*, puis la *conclusion*.
Citer la propriété de la page 140 qui justifie l'utilisation de la conjonction *donc*.

b) Mêmes consignes avec la phrase ②, que l'on complétera.

3 *D'après la double égalité ③, on a : $IR = IT$, c'est-à-dire I est équidistant des deux points R et T.*
Cette nouvelle information est désormais une hypothèse, une donnée que l'on peut utiliser (on l'a prouvée à la question 2).

Citer la propriété de la page 140 qui permet d'affirmer la *conclusion* suivante :

le point I est sur la médiatrice du segment $[RT]$.

4 Que se passerait-il si les points R, S et T de la première question étaient alignés ? (Voir l'exemple, page 137.)

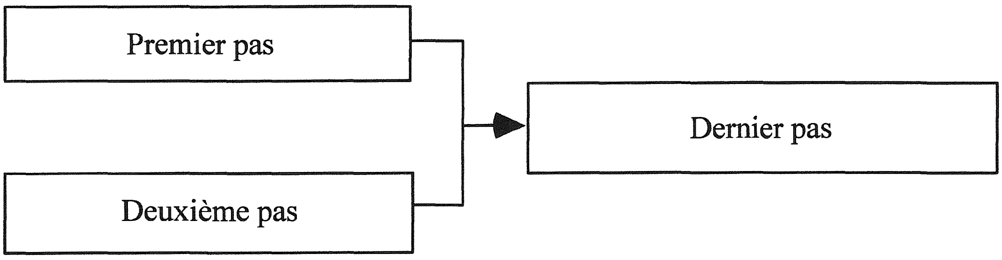
Commentaire !

Le raisonnement précédent est valable pour n'importe quel triangle (non aplati).
Nous venons, en fait, de *démontrer* que les médiatrices des côtés de tout triangle sont *concourantes* en un point qui est *équidistant* des trois sommets : ce point est donc le *centre d'un cercle* passant par les *trois sommets* du triangle. C'est le *cercle circonscrit* au triangle.

138

Dans la page suivante on demande de justifier ; ce mot a déjà été utilisé dans le manuel, bien avant ces pages ; est-ce une démonstration qui est attendue ? le mot réciproquement dans le titre : « Réciproquement : du triangle au cercle » est employé sans rapport compréhensible avec la réciproque d'un théorème. Enfin en bas de page il est écrit : « nous venons de démontrer que les médiatrices des côtés de tout triangle sont concourantes », sans que dans la même page on puisse identifier clairement un texte qui en soit la démonstration puisque le texte est en fait un mélange de la démonstration, d'un commentaire de la démonstration et de questions.

Dans cette page et dans la page suivante apparaissent des schémas que l'auteur appelle des « déductogrammes ». Dans les deux cas il s'agit de démonstrations composées de trois pas ; les deux premiers permettent d'obtenir deux résultats qui sont utilisés comme hypothèses pour le troisième. Le texte de la démonstration est simplement découpé en pas (en gardant tous les mots d'articulation) et disposé comme suit :



Il n'y a aucune indication sur le statut de cette décomposition : est-ce ce type de schéma que l'élève devra produire ? Faut-il reconstituer le texte qui a été découpé ? Tous les textes de démonstrations peuvent-ils se décomposer de cette manière ? Notons que ce type de « déductogramme » met en évidence l'articulation entre les pas et non l'organisation de chaque pas. Ce n'est que bien plus tard (page 237) que l'on rencontre un « déductogramme » traditionnel et que celui-ci est associé explicitement à l'idée d'un texte de démonstration.

Le mot preuve apparaît page 139 (voir l'encadré ci-dessous), mais en fait il introduit un paragraphe qui est un énoncé de problème. Cet énoncé suggère une démonstration, mais celle-ci est surprenante puisque pour passer de « IA = IB = IC » à « A, B et C sont sur le cercle de centre I » on utilise des médiatrices. On se demande d'ailleurs de quelle conjecture parle l'énoncé.

Est ce vraiment une preuve (page 139)

Une preuve

1° Tracer un triangle ABC, rectangle en A. Marquer le milieu I de $[BC]$, puis le symétrique D du point A par rapport au point I.

2° *a*) Préciser, en justifiant, la nature du quadrilatère $ABDC$.

b) En déduire que :

- $IA = IB = IC = \dfrac{BC}{2}$;
- les médiatrices de $[AB]$ et de $[AC]$ passent par le point I.

c) La conjecture précédente est-elle vraie ?

L'activité suivante contient dans le titre « théorème réciproque » ; la situation traitée correspond bien à la réciproque du théorème de Pythagore mais aucun énoncé de cette réciproque n'est proposé. Dans cette page on sous-entend des résultats non évidents sur le rectangle ou sur la symétrie qui ne sont rappelés nulle part.

Ce n'est qu'à partir de la page 140 que les choses deviennent un peu plus claires. Les pages 140 et 141 présentent de manière performante les énoncés des théorèmes : on y voit à la fois des énoncés explicites, des figures qui illustrent chaque énoncé et des éléments qui lient l'énoncé et la figure. Cependant il n'y a aucun élément qui explique au lecteur pourquoi les énoncés ont des dénominations différentes : propriété caractéristique, théorème, théorème direct, théorème réciproque.

La page 142 contient enfin une démonstration clairement présentée, mais elle s'appelle « solution » ; dans la page suivante le même mot solution sera mis devant un texte de programme de construction.

Le mot méthode apparaît deux fois dans la page 143 : la première fois il introduit un procédé pour construire un angle droit, la deuxième il introduit l'énoncé d'un théorème.

Les pages suivantes contiennent de nombreux exercices intéressants et variés. Cependant la tâche nouvelle qui consiste à rédiger une démonstration n'est pas du tout mise en valeur. Elle apparaît pour la première fois dans l'exercice 5, introduite par le mot prouver, après quatre exercices de construction et sans qu'il n'y ait aucun indice soulignant la nouveauté de la tâche.

Les deux premiers exercices concernant la démonstration.	**Exercice 5, page 144** Tracer un cercle de centre O, puis une corde $[AB]$. Soit M le milieu de $[AB]$. Prouver que les droites (OM) et (AB) sont perpendiculaires. **Exercice 7, page 144** **1°** Tracer un cercle de centre I et un de ses diamètres $[AB]$. Placer un point M du segment $[AB]$. Tracer la perpendiculaire à (AB) passant par M : elle coupe le cercle en D et E. **2°** Prouver que M est le milieu du segment $[DE]$.

L'exercice 7 est le deuxième exercice de ce type. [DE] est une corde d'un cercle qui coupe en M un diamètre perpendiculaire. On demande de prouver que M est le milieu de [DE]. La démarche naturelle pourrait être :

O étant le centre du cercle, il est à égale distance de E et de D ; le triangle OED est donc isocèle en O. La hauteur (OM) de ce triangle est donc aussi sa médiatrice et donc M est le milieu de [ED].

Cependant le théorème utilisé ici n'est nullement cité dans la page 140 où sont rappelés les résultats sur la médiatrice vus en $5^{ème}$. D'autre part les côtés [OE] et [OD] ne sont pas a priori tracés sur la figure. Cela peut conduire l'élève qui cherche cet exercice et qui croit qu'on ne peut s'appuyer pour les démonstrations que sur ce qui est explicitement écrit, à exploiter l'idée suivante :

O étant sur la médiatrice de [DE] et (OM) étant perpendiculaire à (DE), (OM) est la médiatrice de [DE].

Mais, comme on ne dispose pas du théorème : « Si une droite est perpendiculaire à un segment et passe par un point équidistant des deux extrémités de ce segment, c'est la médiatrice de ce segment », la démonstration de ce résultat n'est pas simple. Elle pourrait être par exemple :

On appelle (Δ) la médiatrice du segment [DE]. Comme O est le centre du cercle, il est équidistant de E et de D ; il est donc sur (Δ). Les droites (Δ) et (OM) sont confondues puisqu'elles ont un point en commun et qu'elles sont perpendiculaires à (DE). Donc M est le milieu de [DE].

Ce type de démonstration est particulièrement difficile pour des débutants, car elle distingue deux objets, les droites (Δ) et (OM), qui sont identiques sur la figure (élément dédoublé). Il est très probable que la plupart des élèves soient incapables de produire un texte de ce genre.

La suite du manuel contient très peu d'éléments pour éclairer la situation, si ce n'est une bonne définition du mot conjecture page 148.

On ne voit pas comment dans ces conditions les élèves en difficulté pourraient répondre au 1° de l'exercice 85 page 167 (cf. 1° b ci-contre). On lui propose en effet de corriger le texte suivant, destiné à prouver que le triangle de côtés 6, 8 et 10 est rectangle :

$ST^2 = RS^2 + RT^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$, $ST = \sqrt{100} = 10$, *donc le triangle RST est bien rectangle en R.*

Or ce texte est tout à fait acceptable si on le considère comme décrivant la démarche de résolution de problème. Il est inacceptable à nos yeux parce qu'il ne correspond pas aux normes de la démonstration, mais ces normes ne sont nullement décrites dans ce manuel, implicitement ou explicitement.

Le 2° de cet exercice ne peut qu'amplifier la perplexité des élèves sceptiques puisque l'erreur qu'on lui propose de corriger est ici d'une toute autre nature : confusion entre périmètre et aire. Et en plus l'exercice 87 de la même page parle d'erreur de raisonnement pour une erreur d'arrondi.

En résumé, ce manuel contient très peu d'éléments indiquant au lecteur la spécificité de la démonstration. Aucun indice ne lève les ambiguïtés entre prouver, calculer, construire. Rien ne permet de repérer les différences entre les erreurs mathématiques et les erreurs de rédaction. Rien n'explique qu'il y a des liens entre déductogramme et démonstration. Rien ne met en valeur les mots d'articulation (par exemple les textes à trous ne portent pas sur ces mots).

Il va de soi que rien n'empêche un enseignant qui utilise ce livre d'apporter tous les éléments nécessaires à l'apprentissage de la démonstration. Mais on peut se demander si, pour faire de ce manuel un meilleur outil pour les élèves et un meilleur point d'appui pour les enseignants, en ce qui concerne la démonstration, quelques modifications mineures ne seraient pas utiles. Par exemple, ne pourrait-on pas :

- Donner dès le départ quelques exemples consistants de démonstration, en les désignant explicitement par ce mot. Les commentaires du type : ceci est une donnée, cela est une conclusion, tel théorème est ici utilisé, pourraient être écrits après, au lieu d'être mêlés au texte de démonstration.
- Si l'on introduit les déductogrammes, faire un lien explicite avec un texte de démonstration au sens usuel, soit en partant d'un texte usuel et en construisant un déductogramme pour mettre en évidence sa structure, soit en proposant un déductogramme et en demandant d'écrire la démonstration qu'il suggère. Présenter

des déductogrammes correspondant à des structures diverses. Bien expliciter que le vrai objectif est l'écriture de démonstrations, le déductogramme n'étant qu'un outil au service de cet objectif.

- Bien indiquer que les mots prouver, justifier, démontrer veulent le plus souvent dire la même chose.
- Proposer dans un premier temps des exercices de démonstration isolés des autres exercices avec une petite introduction indiquant bien que la tâche est nouvelle : écriture de textes respectant certaines règles (il ne s'agit pas bien sûr d'expliciter ces règles mais de montrer suffisamment d'exemples pour les faire entrevoir).
- Ne pas proposer des exercices où la démonstration comporte des éléments dédoublés. Plus généralement proposer, dans un premier temps, des exercices où la démonstration est consistante, mais ne comporte pas de subtilités et n'utilise que des théorèmes explicitement énoncés dans le manuel.
- Ne pas hésiter, en tout cas pour les premiers chapitres de géométrie, à énoncer tous les théorèmes utiles à la résolution agréable des problèmes de démonstration.

<table>
<tr>
<td>Trois erreurs de nature différente.</td>
<td>
Exercice 85, page 167
1° a) Tracer un triangle RST tel que :
$RS = 6$ cm, $RT = 8$ cm et $ST = 10$ cm.
b) Voici ce qu'a écrit Jim pour prouver que le triangle RST est rectangle :
non mal présenté
$ST^2 = RS^2 + RT^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$,
$ST = \sqrt{100} = 10$, donc le triangle RST
est bien rectangle en R.
Rédiger correctement la réponse.
2° Rectifier l'erreur de Laureline à qui l'on avait demandé de calculer l'aire du triangle RST.
L'aire du triangle RST est
Résultat correct
24 cm² car 6 + 8 + 10 = 24.
non ! tu confonds aire et...
Exercice 87,2° a, page 167
Chercher l'erreur dans ce raisonnement :
$RS^2 + RC^2 = 4{,}24^2 + 7{,}07^2 = 67{,}9625$
Or, $SC^2 = 68$ et $67{,}9625 \neq 68$.
Le triangle RST n'est donc
pas rectangle.
</td>
</tr>
</table>

IV - Synthèse

Pour l'avenir il nous semble souhaitable que les manuels soient mieux adaptés à l'apprentissage de la démonstration. Pour atteindre cet objectif, il n'est sans doute pas essentiel qu'il y ait un chapitre spécifique sur ce sujet. En revanche il nous semble que la plupart des manuels ne sont pas assez explicites sur ce qu'est une démonstration et ne montrent pas assez aux élèves les libertés et les contraintes auxquelles sont soumises ce type de texte. Ils n'expliquent pas non plus la nouveauté de la tâche : écriture d'un texte de structure spécifique. Ils ne proposent guère de tâches spécifiques à cet apprentissage autre que le traditionnel « démontrer que ».

CONCLUSION

Le travail de notre groupe a considérablement changé nos pratiques sur la manière d'aborder la démonstration en 4ème. Nous savons que les élèves n'aiment pas lire les textes longs ; ils « zappent » pour aller droit à ce qu'ils croient être l'information, sans toujours prêter attention aux mots de liaison qui ont pourtant un rôle primordial dans un texte de démonstration. Ils se trouvent souvent « bloqués » par l'écriture du texte qu'ils doivent produire ; ils ne comprennent pas toujours ce que l'on attend d'eux. L'utilisation de nos fiches nous a permis de mieux surmonter ces obstacles.

Les fiches du type « Quelle démonstration pour quel texte ? » sont efficaces pour apprendre ce qu'est une démonstration en début de 4ème. On ne propose pas de démonstrations modèles ; Les élèves, au lieu d'imiter le professeur, comprennent vraiment la tâche qu'on leur propose. Le travail d'écriture est supprimé dans un premier temps et les élèves peuvent se concentrer sur la compréhension du fonctionnement de la démonstration.

Les résultats de nos expérimentations sont encourageants :

- Les élèves comprennent ce qu'est une démonstration, quel est l'objectif recherché et comment utiliser les hypothèses, les théorèmes et les définitions pour aboutir à une conclusion.
- Ils lisent les énoncés et sont obligés de les comprendre ; ils savent reconnaître les mots qui indiquent une hypothèse ou la conclusion à laquelle il faut aboutir.
- Ils voient que l'essentiel de l'apprentissage est dans la signification des mots plutôt que dans l'apprentissage d'un modèle standard.
- Plus tard ils se lancent plus facilement dans l'écriture et manifestent un esprit plus critique par rapport à leur écriture, car ils ont compris pourquoi telle ou telle démonstration ne convenait pas.

Les activités autour de « Pythagore » permettent de travailler la distinction entre un théorème et sa réciproque. C'est aussi l'occasion d'introduire le raisonnement par l'absurde. Il semble que les élèves ne soient pas tous à l'aise avec ce raisonnement en 4ème, notamment parce qu'il nécessite de « supposer ». Nous espérons qu'une fiche comme « Triangle es-tu rectangle ? » est un bon moyen d'apprivoiser ce type de raisonnement.

Nous pensons toutefois qu'il n'est pas raisonnable d'attendre des élèves de collège qu'ils maîtrisent la contraposée. Il nous semble impossible de parler de son équivalence avec le théorème direct et nous cherchons simplement à mettre en évidence que la contraposée sert dans les mêmes circonstances que le théorème direct. Nous pensons que la contraposée doit rester, en 4ème et même au lycée, un énoncé à part entière, à côté du théorème direct et de sa réciproque.

Pour ce qui est des manuels, notre contribution peut permettre à l'enseignant de les utiliser avec un regard critique, car il est important que les élèves s'habituent à utiliser les manuels avec leurs défauts le plus tôt possible. Il pourrait être intéressant d'avoir un dialogue constructif avec des auteurs pour améliorer le statut de l'apprentissage de la démonstration dans ces manuels, surtout en 4ème au moment où les connaissances sur ce domaine en sont au tout début.

Il serait important pour l'avenir de continuer ce travail au niveau du lycée ou de la première année d'Université, car les difficultés en matière de démonstration existent toujours à ces niveaux et les travaux de recherche didactique sur ce sujet sont encore trop rares.

Index des fiches

Bibliographie

HOUDEBINE J., GIORGIUTTI I., HILT D. , JUHEL M.-A., JULO J., MOURAUD G., *La démonstration : écrire des mathématiques au lycée et au collège*, Hachette, Paris, 1998.

BARBIN E., DUVAL R., GIORGIUTTI I ., HOUDEBINE J., LABORDE C., *Produire et lire des textes de démonstration*, Ellipses, Paris, 2001.

DUVAL R., EGRET M.-A., « Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif », *Repères IREM, N°12*, Topiques éditions, 1993.

DUVAL R., EGRET M.-A., « Comment une classe de Quatrième a pris connaissance de ce qu'est une démarche de démonstration », *Annales de didactique et de sciences cognitives*, N°2, IREM de Strasbourg, 1989.

ARSAC G.,CHAPIRON G., COLONNA A., GERMAIN G., GUICHARD Y. MANTE M., *Initiation au raisonnement déductif au collège*, Presses universitaires de Lyon, 1992.

BERGUE et AL, *De la figure vers la démonstration,* Petit X N°27, Grenoble, 1991.

Repères IREM N°12, Topiques éditions, 1993.

Je, tu, ils, elles... argumentent, IREM de Rennes, 1988.

Lire et écrire des textes mathématiques : vers la rédaction de démonstrations, IREM de Rennes, 1992.

Aides à la résolution de problème : mise au point et expérimentation de quelques séquences avec utilisation de l'informatique, IREM de Rennes, 1988.

La démonstration en seconde, IREM de Rennes, 1995.

Quelles lectures pour quelles tâches ?, IREM de Rennes, 1996.

Edité
Par l'I.R.E.M. de Rennes
Dépôt Légal : premier trimestre 2004
N° de publication : 04-01

I.R.E.M. de RENNES 1 – U.F.R. de Mathématiques
Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu – 35042 RENNES CEDEX
Secrétariat : Tél : 02 23 23 51 74
Mail : sec-irem@univ-rennes1.fr
Site WEB : http://www.irem.univ-rennes1.fr

Imprimerie de l' Université de RENNES 1

FICHE DUBLIREM

TITRE : LA DEMONSTRATION AU COLLEGE : Quelles tâches ? Quels outils ?

AUTEURS : Fouad ALAGROUTE, Jean HOUDEBINE, Marie-Noëlle MARY,
Annette PAUGAM

DATE : Première Edition : Janvier 2004 – Deuxième Edition : Janvier 2006

NIVEAU : Cinquième, Quatrième, Seconde

MOTS CLES :

- Démonstration
- Théorème réciproque
- Raisonnement par l'absurde
- Manuels scolaires
- Contraposée
- Pythagore
- Parallélogramme
- Losange
- Géométrie
- Données
- Énoncé
- Fiches de travail élève
- Textes mathématiques

RESUME

Partant de l'idée que la démonstration est un texte, des activités ont été conçues avec comme objectifs, d'une part, la capacité des élèves à reconnaître les statuts des propositions dans un texte de démonstration (hypothèse, conclusion, théorème, résultat déjà démontré, etc.), d'autre part, la maîtrise de la notion de théorème réciproque et ses liens avec le raisonnement par l'absurde et la contraposée.
Une deuxième partie propose une analyse de la façon dont les manuels scolaires traitent l'apprentissage de la démonstration.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 × 29,7	61	6 €	100 Ex.

ISBN 2-85728-063-7