UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

IFSIC

INSTITUT DE FORMATION SUPERIEURE en INFORMATIQUE et COMMUNICATION

Projet pluridisciplinaire en DEUG 2ème année
Etude du mouvement des 4 principaux satellites de Jupiter

Mai 2003

Manuel Buisson, Arnaud Delannay, Yann Le Grand, Annie Morin, Laurence Pasquereau , Dominique Py, Patrice Quinton
et avec la participation d'Anne-Claire Fortin pour le traitement des évaluations

Table de matières

Projet pluridisciplinaire en DEUG $2^{ème}$ année
Etude du mouvement des 4 principaux satellites de Jupiter

Manuel Buisson, Arnaud Delannay, Anne-Claire Fortin, Yann Le Grand, Annie Morin,
Laurence Pasquereau, Dominique Py, Patrice Quinton

1- Introduction

Dans le cadre de la rénovation pédagogique en Deug, un groupe assez large de réflexion a été mis en place à l'initiative d'Annie Morin (dir. IREM) et de Patrice Quinton (dir. IFSIC) pour une approche de TP-Projets d'informatique (en Deug SM 170 étudiants) en expérimentant une attitude pluridisciplinaire**.**

On a voulu offrir aux étudiants de seconde année du Deug Sciences, mention Sciences de la Matière (SM), la possibilité de réaliser un projet impliquant plusieurs disciplines scientifiques. Ce projet avait été défini par un groupe Irem en 2000 et s'était fixé les objectifs suivants :

- associer diverses disciplines et lutter contre la "compartimentation ".
-amener l'étudiant à réfléchir sur le caractère propre de chaque discipline et les relations entre elles.

Initialement, ce projet consistait à calculer la position de la Terre et de la Lune en utilisant différentes méthodes – analytique, numérique – afin de comparer ces méthodes. L'arrivée d'un astronome (Yann Le Grand) dans notre groupe a permis en 2001 de modifier les objectifs du projet afin d'y introduire une composante observation. En définitive, c'est l'observation des satellites de Jupiter qui est devenu le thème central. Toutefois, du point de vue conceptuel, on verra dans la suite que c'est bien le mouvement de deux corps en interaction gravitationnelle qui est au cœur du sujet.

Les contributions et intérêts attendus pour chaque discipline étaient :

1)pour la physique:

- l'occasion pour l'étudiant de se pencher sur l'histoire des études du mouvement des planètes.
- consulter les documents de cours, les ouvrages et sites web pour se procurer des données numériques.
- ouverture sur l'astronomie.

2) pour les mathématiques:

- l'étude analytique exacte (Pb 2 corps) fait appel à la résolution d'une équation différentielle linéaire du second degré à coefficients constants.

- l'étude numérique utilise la formule du développement de Taylor d'une fonction réelle à une variable réelle et permet de proposer très simplement, à titre d'initiation, la construction d'un algorithme d'intégration numérique explicite de l'équation différentielle (découverte d'un schéma d'approximation pour la simulation, comparaison avec l'étude analytique, notion d'erreur numérique, rôle du pas de simulation, importance des conditions initiales...).

- via le logiciel Mathematica disponible à l'IFSIC et initialement crée pour le domaine de l'ingénierie, découvrir de façon conviviale l'utilisation conjointe du calcul formel et du calcul numérique.

3) pour la mécanique:

- utilisation des connaissances en mécanique du point acquises en Deug.

- perfectionner la connaissance sur la notion de problème à 2 corps avec masse réduite et découvrir la problématique du système à 3 corps.

- adopter la démarche propre du mécanicien en associant la physique du problème et sa modélisation pour finalement valider ou critiquer la simulation en la comparant avec l'observation expérimentale.

4)pour l'informatique:

- utilisation des notions de fonction, type des objets, schémas itératifs.

- construire le programme issu de la modélisation, en dégager la structure la plus efficace possible (ce problème se prête bien à la notion de récursivité) pouvant s'adapter facilement à d'autres mouvement de planètes.

- utiliser le logiciel au mieux de ses capacités de programmation, de calculs et de sorties graphiques (dessins animés).

On présente d'abord le problème posé, sa solution, l'organisation de l'enseignement et les résultats issus d'une première évaluation auprès des étudiants. On trouvera en annexe les documents distribués aux étudiants ainsi que les réponses aux questions ouvertes de l'évaluation.

2- Présentation du problème

Par l'observation et la photographie au télescope, il est aisé de déterminer l'élongation des 4 principaux satellites de Jupiter, à savoir Io (I), Europe (II), Ganymède (III) et Callisto (IV) (cités par ordre de distances croissantes par rapport au primaire qu'est Jupiter), c'est-à-dire leur distance (que l'on pourra exprimer en unité de rayons de Jupiter) par rapport à Jupiter projetée sur le plan du ciel. La figure 2 présente une telle observation.

Le projet proposé aux étudiants est de prévoir ce que sera une observation des satellites de Jupiter faite à partir de la Terre à une date donnée.

Pour simplifier la mise en équation du problème et réduire le nombre de paramètres à prendre en compte, on fait les hypothèses (justifiées à posteriori) suivantes :

- on suppose les orbites de la Terre et de Jupiter coplanaires, le plan orbital de Jupiter n'est en effet incliné que de 1,18° par rapport au plan de l'écliptique (plan orbital de la Terre), ce qui conduit à une erreur relative de l'ordre de 2.10^{-4} sur les longitude et distance héliocentriques,
- on néglige l'excentricité des orbites des 4 satellites, ce qui entraîne une erreur maximale de 1° environ sur la position angulaire des satellites,
- on néglige l'inclinaison des plans orbitaux des satellites (0,5° au plus) par rapport au plan équatorial de Jupiter,
- on néglige l'inclinaison du plan équatorial de Jupiter sur le plan de l'écliptique,
- on néglige les perturbations des orbites des satellites, essentiellement produites par les interactions mutuelles.

Par contre il faut tenir compte de l'excentricité de l'orbite de la Terre (eT=0,0167) et surtout celle de Jupiter (eJ=0,0485).

C'est donc au niveau des trajectoires des planètes (Terre et Jupiter) et non de celles des satellites de Jupiter qu'il sera intéressant de résoudre numériquement les équations du mouvement.

3- Calcul

Compte-tenu des hypothèses précédentes, les orbites de la Terre, de Jupiter et de ses 4 principaux satellites sont supposées coplanaires, leur plan commun étant le plan de l'écliptique.

Dans ce plan, les angles, qu'on appelle longitudes écliptiques, ont pour référence le point γ (gamma). Ce point situé à l'infini, qu'on suppose représenter une direction fixe par rapport aux étoiles du fond du ciel (référentiel galiléen), correspond à l'une des 2 intersections du cercle écliptique et de l'équateur céleste, tous deux de rayons indéfinis. C'est aussi la direction du Soleil, vu depuis la Terre, à l'équinoxe de printemps.

Pour déterminer l'élongation s d'un satellite à l'instant t, on peut simplement considérer le triangle formé par le Soleil, la Terre et Jupiter (voir Fig. 1).

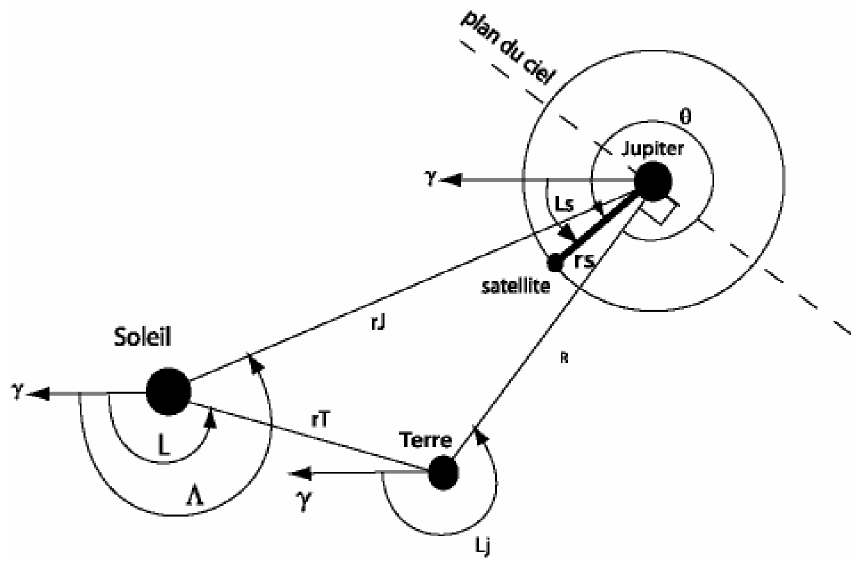


Fig. 1 : représentation co-planaire du Soleil, de la Terre, de Jupiter et d'un de ses satellites.

On introduit d'abord 2 angles : la longitude planétocentrique du satellite notée Ls(t) et la longitude géocentrique de Jupiter notée Lj (t). L'élongation d'un satellite dont l'orbite a un rayon rs considéré ici constant est alors donnée par $s(t)= rs \sin\theta(t)$, où $\theta(t)$, l'angle de phase, exprimé en degrés, s'écrit $\theta(t) = Ls(t) - Lj(t) + 180°$.

Si l'on connaît Ls(t) et Lj(t), il est possible de trouver la position observée du satellite à un moment donné.

Le calcul de Ls(t) peut être déterminé à partir de la période orbitale du satellite donnée par le Bureau des Longitudes, ainsi que la position du satellite à une date de référence. Il faut toutefois tenir compte du temps nécessaire à la lumière pour venir de Jupiter à la Terre, car il est supérieur à 30 mn, ce qui n'est pas négligeable. Il faut donc connaître la distance R entre la Terre et Jupiter, et par conséquent, la position de la Terre et celle de Jupiter. En effet, sur la figure, R est donné par

$R = [rT^2 + rJ^2 - 2\, rT.rJ.\cos(\Lambda - L)]^{1/2}$.

Les 4 quantités rT, rJ, Λ et L peuvent être calculées si on connaît les conditions initiales et les paramètres orbitaux des planètes (longitude du périhélie, demi grand-axe, excentricité). C’est ce calcul qui fera l’objet de la simulation numérique.

De même que pour R, il suffit de connaître rT, rJ, L et Λ pour déterminer Lj(t), la longitude géocentrique de Jupiter.

Si on compare les élongations calculées à partir de ce petit modèle coplanaire aux élongations données par le Bureau des Longitudes (Observatoire de Paris), on trouve un très bon accord (l’erreur ne dépasse pas 2,5% pour Io et est inférieure au % pour les autres satellites) en valeur relative, ce qui montre à posteriori la validité du modèle et des approximations faites.

4- Organisation du projet

Le projet a été intégré dans un cours d’informatique ayant lieu dans la deuxième partie du second semestre de la seconde année du Deug mention SM. Ce cours, appelé IS2 (Informatique Scientifique 2), est la seconde partie d’une initiation à la programmation et à l’algorithmique commencée lors du premier semestre du Deug. Le cours IS2 comprend 12 heures de cours magistral (en amphithéatre), 12 heures de travaux dirigés, et 12 heures de travaux pratiques, qui se déroulent sur 6 semaines, à raison de 2 heures de CM, 2 heures de TD et 2h de TP par semaine. IS2 est suivi par 170 étudiants. Le programme comporte essentiellement la notion de liste, de structure, et les calculs itératifs : l’objectif est que les étudiants aient abordé ces notions, afin de posséder les bases qui leur permettront ultérieurement d’utiliser, voire de créer, des programmes élémentaires utilisés dans les métiers scientifiques et techniques. Ces notions sont introduites dans le cadre du logiciel Mathematica qui inclut un langage de programmation assez performant, et permet à la fois du calcul formel, la visualisation de données, et l’élaboration de programmes. Les TP sont effectués sur des PC sous Linux.

Le cours IS2 comporte traditionnellement un petit projet final renouvelé chaque année. L'un des projets proposé dans le passé portait sur le mouvement de deux corps en interaction gravitationnelle, et c'est du reste de ce projet que l'équipe Irem est partie. L'ampleur du projet pluridisciplinaire a toutefois conduit à une organisation nouvelle que nous décrivons plus loin.

Le contrôle de connaissance de IS2 combine une note d'épreuve écrite, comptant pour 4/5, et une note de TP, comptant pour 1/5, donnée à partir du TP final rendu par les étudiants en fin de cours.

Après un premier cours d'informatique, le second cours a été consacré à la présentation du projet par les enseignants non informaticiens, afin d'en décrire les aspects astronomiques, mécaniques, physiques et mathématiques. En même temps, un document détaillé comportant une présentation du projet a été remis aux étudiants. Ce document, relativement touffu, visait à mettre les étudiants devant la situation, commune dans un métier scientifique et technique, où les informations nécessaires à résoudre un problème doivent être recherchées et mises en relation avant de pouvoir être utilisées. Les notions informatiques étaient quant à elles présentées normalement durant les autres cours.

Les deux premiers TD et TP ont été modifiés afin que les notions utilisées soient illustrées par un exemple portant sur les planètes. Les TD et TP 3 et 4 comportaient la réalisation de programmes Mathematica nécessaires à la réalisation du projet. La partie essentielle était de calculer la trajectoire de la Terre et de Jupiter, d'abord de façon analytique à partir des paramètres de l'ellipse, puis de façon numérique, en appliquant un développement de Taylor de l'équation différentielle caractérisant le mouvement de deux corps, et en résolvant de façon numérique ce calcul.

Les deux derniers TD et TP ont consisté à intégrer ces programmes, et à l'aide d'un paquetage de programmes fournis par les enseignants, à les utiliser pour prévoir la position des satellites de Jupiter à une date donnée. Le texte du projet a été donné aux étudiants à la fin de la semaine 3 (nonobstant quelques difficultés dues aux nombreux «accidents » d'emploi du temps qui émaillent la fin d'un second semestre normal, comme le jeudi du sport, le lundi de Pâques, le 1er mai, le 8 mai, et l'ascension…). Ce texte comportait deux photos d'observations, dont une présentée par la figure 2. L'objectif du projet était de calculer la position prédite par le modèle, et de la comparer à ce que montre la photo.

Pour accompagner le projet, deux manifestations avaient été prévues. La première était une conférence d'André Brahic, professeur à l'Université Paris 7, et astrophysicien de renommée mondiale. Cette conférence, remarquable, n'a que très peu été suivie par les étudiants (voir plus loin). En outre, il était prévu que le « meilleurs binôme » aient la possibilité d'effectuer une observation avec l'un des enseignants, mais seuls, deux étudiants étaient disponibles lorsque les conditions météorologiques ont été favorables.

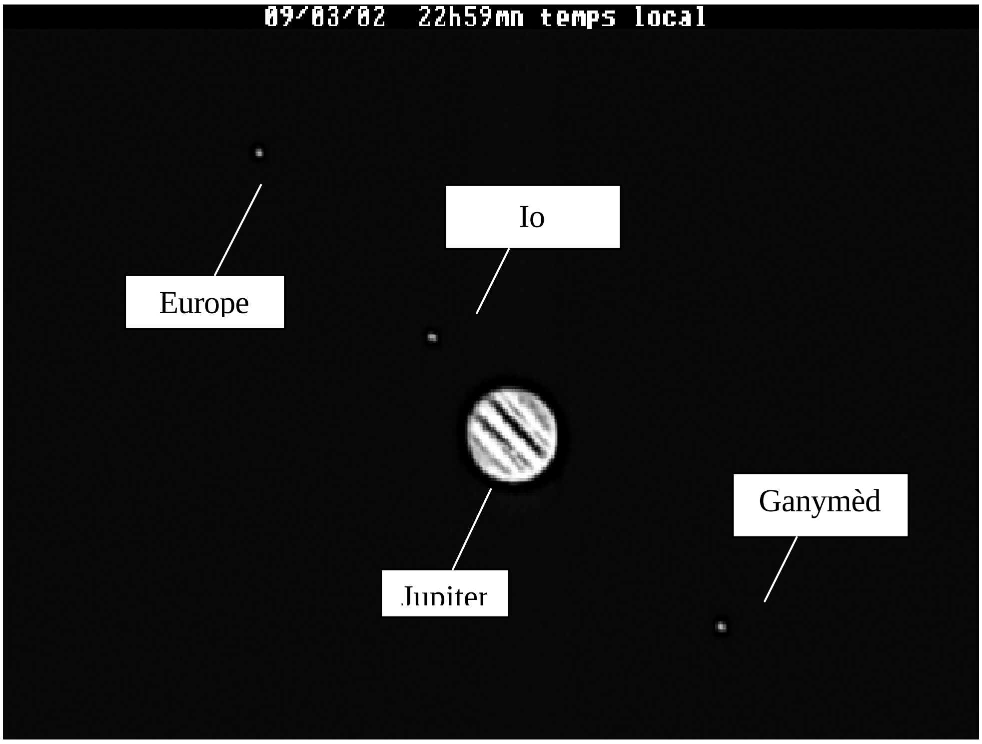


Fig. 2 : photo d'une observation de Jupiter.

5- Evaluation

Un questionnaire a été distribué aux étudiants avant la remise du dernier TP afin d'évaluer à la fois le cours, et les conditions nouvelles créées par l'introduction de ce projet.

D'abord, il faut noter que l'introduction du projet n'a pas perturbé fondamentalement l'enseignement d'informatique, si l'on en juge par les résultats à l'examen écrit dont le contenu et la difficulté étaient similaires à ceux des années précédentes. Ceci mérite d'être souligné, car il n'était pas question de réduire le peu d'enseignement de cette discipline en Deug SM pour faire la place à un tel projet.

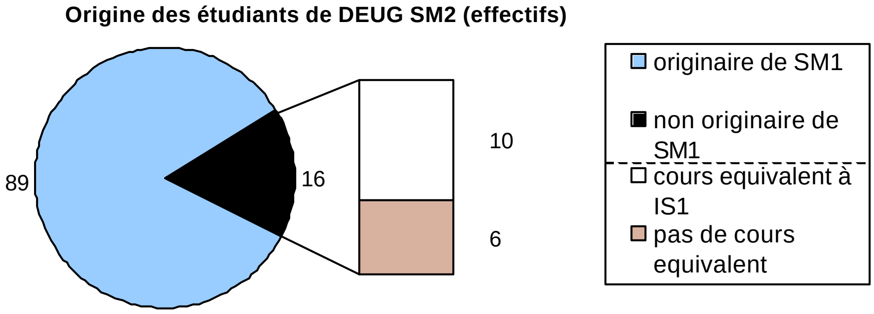
Ensuite, malgré des conditions d'emploi du temps relativement chaotiques, le projet a pu être mené à bien par la plupart des binômes. Beaucoup y ont investi du temps, ce qui est la règle chaque année pour le TP final. (Les étudiants se plaignent chaque année que le coefficient donné à la note de TP n'est pas en relation avec l'effort fourni. La raison est d'une part, qu'il est impossible de noter la part de chaque étudiant d'un binôme de TP, et que par ailleurs, certains TP doivent plus à la «rumeur publique » qu'à la réflexion propre de leurs auteurs supposés…)

L'évaluation était anonyme. 105 étudiants ont répondu.

5-1 Les étudiants : leurs cursus et leurs comportements

Avant d'aborder l'évaluation propre du cours d'IS2, des questions sur leur origine et leur assiduité ont été posés aux étudiants.

- Seulement 16 des 105 répondants n'ont pas suivi la première année de DEUG SM à Rennes I. 6 d'entre eux n'ont jamais suivi de cours d'initiation à l'algorithmique et à la programmation. Pourtant, ceux qui n'étaient pas inscrits en DEUG SM1 présentent des profils similaires à ceux des inscrits, si bien que nous n'avons pas traité leurs réponses séparément. Leurs avis diffèrent de manière significative seulement sur la question des points forts de cet enseignement.

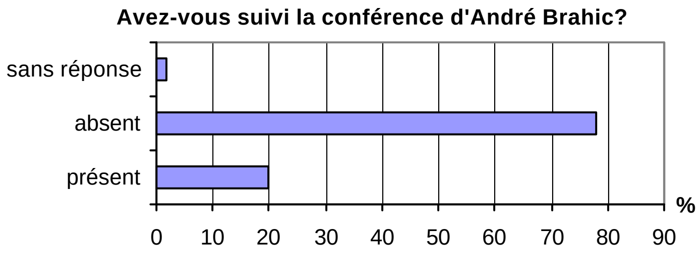


- L'assiduité semble, quant à elle, représenter un véritable problème ; les réponses données par les étudiants figurent dans le tableau suivant :

Avez-vous suivi :	les cours en amphi ?	les TD ?
pas suivi	25,7 %	2,9 %
irrégulièrement	35,2 %	7,6 %
plutôt régulièrement	15,2 %	9,5 %
très régulièrement	**23,8 %**	**80,0 %**
Total	100,0 %	100,0 %

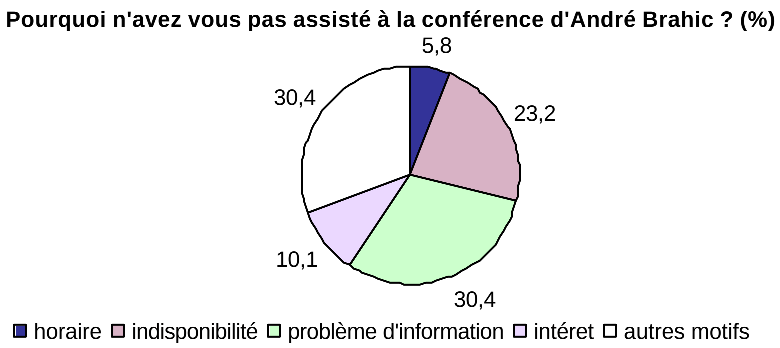
Il est à noter que la présence est obligatoire en TP, nous n'avons donc pas cherché à étudier leur assiduité.

De plus, on remarque qu‘il n’y a pas de relation observable entre assiduité en cours et en TD.



78 % des étudiants n’ont pas assisté à la conférence donnée par André Brahic : nous avons donc cherché à comprendre ce fort taux d’absentéisme. 69 parmi les 82 absents nous ont donné des explications.

Les raisons majeures à ces absences semblent être le problème d’information, l’indisponibilité des étudiants, ainsi que le manque d’intérêt pour l’astrophysique ; près de 6% affirment également ne pas être venu en raison de l’horaire tardif.



<u>NB :</u> les pourcentages indiqués sont le nombre d’individus divisé par le nombre d’étudiants ayant répondu à cette question, soit 69.

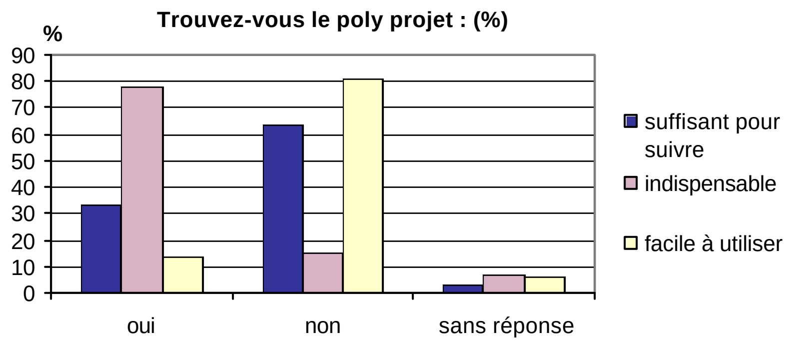
5-2 Les polycopiés

- Le polycopié de cours semble être relativement bien adapté aux besoins des étudiants.

le poly de cours est :	suffisant pour suivre	insuffisant pour suivre	indispensable	pas indispensable	facile à utiliser	difficile à utiliser
Effectifs	83	21	96	8	88	14
% du Total	**79%**	20%	**91,40%**	7,60%	**83,80%**	13,30%

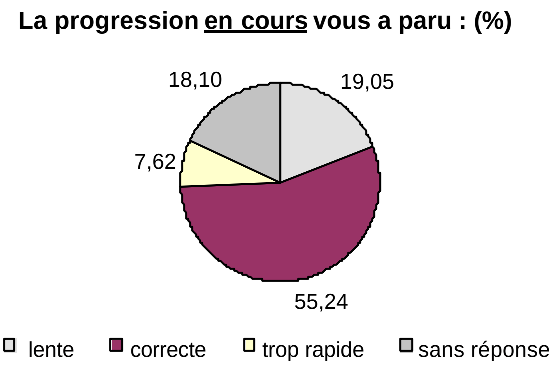
En effet 66 étudiants, soit 62% des sondés, trouvent le polycopié de cours à la fois suffisant pour suivre, indispensable et facile à utiliser. On constate que parmi ces 66 étudiants, 47 ne suivent pas ou irrégulièrement les cours en amphi (d'où un intérêt plus grand pour le polycopié).

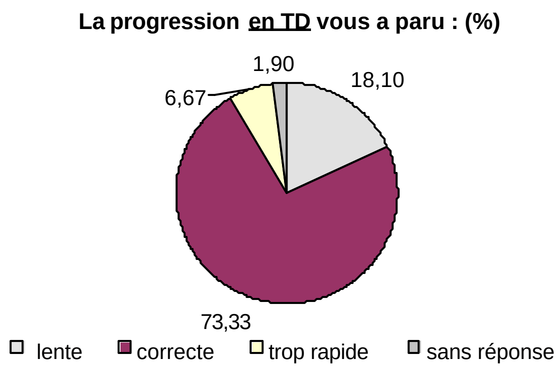
- Les opinions sur le polycopié projet sont, quant à elles, plus mitigées : 78.1% des étudiants l'estiment indispensable, et pourtant, pour une majorité d'entre eux, il n'apparaît pas suffisant pour suivre, et semble surtout difficile à utiliser.

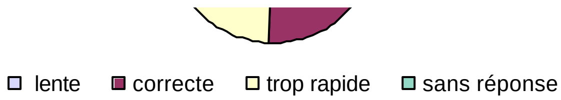


5-3 Progression des enseignements et Préparation au TP final

- Nous avons ensuite demandé aux étudiants quel était leur avis sur la progression des enseignements. Bien que seulement 23 des 105 étudiant(e)s qui ont répondu à l'enquête suivent à la fois très régulièrement cours et TD, nombreux sont ceux qui ont quand même







Les étudiants estimant les cours et les TD trop rapides sont largement minoritaires, par contre près de la moitié trouvent les TP trop rapides.

Par ailleurs, environ 20 % pensent que la progression des cours ainsi que celle des TD est trop lente. Il est intéressant d'analyser l'assiduité des étudiants aux enseignements avec l'évaluation de leur progression.

progression cours / assiduité cours	lente	correcte	trop rapide	sans réponse	TOTAL
pas suivi ou irrégulièrement	**15**	28	2	19	64
plutôt régulièrement	2	12	2	0	16
très régulièrement	3	18	4	0	25
TOTAL	**20**	58	8	19	105

progression TD / assiduité TD	lente	correcte	trop rapide	sans réponse	TOTAL
pas suivi ou irrégulièrement	2	7	1	1	11
plutôt régulièrement	2	6	2	0	10
très régulièrement	**15**	64	4	1	84
TOTAL	**19**	77	7	2	105

On constate que parmi les 20 étudiants estimant la progression des cours lente, 15 ne suivent pas ou irrégulièrement les cours ; au contraire, pour les TD, 79 % de ceux qui estiment la progression lente vont très régulièrement en TD.

▪ La préparation au TP final à travers les enseignements se révèle une question importante, comme on peut le voir à travers le tableau suivant.

préparation au TP final en :	**cours**	**TD**	**TP**
bien préparé	**20,0 %**	**35,3 %**	**38,0 %**
pas assez	24,8 %	50,5 %	41,0 %
pas du tout	35,2 %	12,3 %	21,0 %
sans réponse	20,0 %	1,9 %	0,0 %
Total	100,0 %	100,0 %	100,0 %

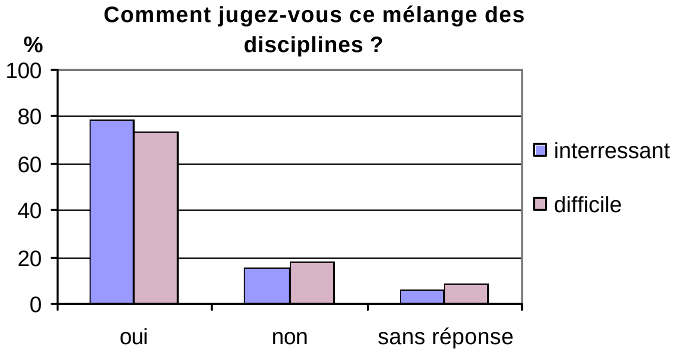
Il apparaît que la préparation au TP final semble insuffisante aux étudiants que ce soit en cours, en TD, ou bien même en TP.

On remarque que la moitié de ceux, qui juge la préparation au TP final en cours insuffisante, n'ont pas ou irrégulièrement suivi les cours !

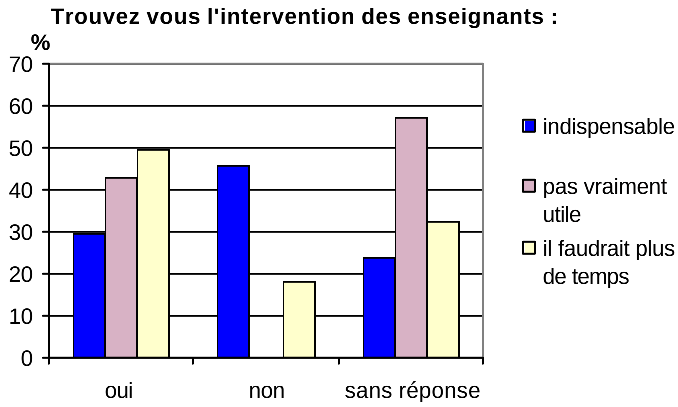
préparation au TP en cours / assiduité en cours	**bien préparé**	**pas ou pas assez préparé**	**sans réponse**	**TOTAL**
pas suivi	6	**8**	13	27
irrégulièrement	6	**23**	8	37
plutôt régulièrement	3	12	0	16
très régulièrement	6	19	0	25
TOTAL	21	62	21	105

5-4 Aspect pluridisciplinaire du projet

- On constate que pour les étudiants le mélange des disciplines est intéressant, mais en même temps difficile.



- Les opinions sur l'intervention des enseignants semblent se contredire : 23 étudiants trouvent cette intervention à la fois indispensable et pas vraiment utile !

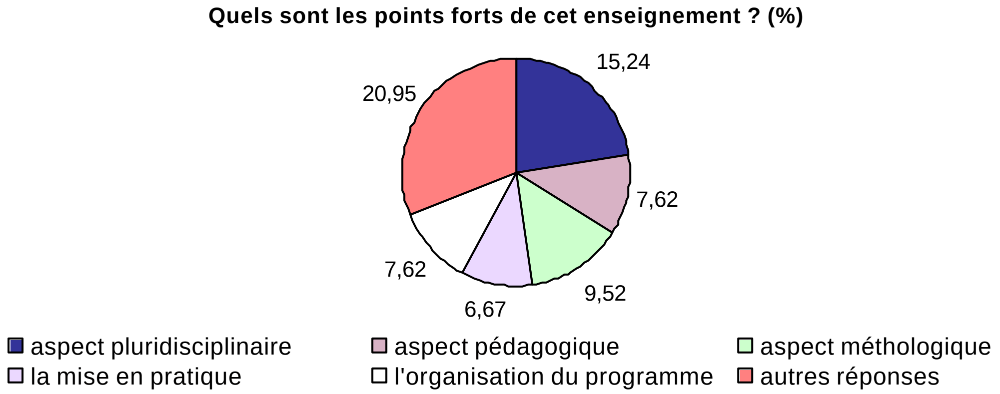


- A la question « Est-ce que le TP final vous a permis de mieux comprendre chaque discipline et son rôle propre ? », près de 67 % des étudiants s'accordent à dire que le TP final n'a pas permis de comprendre l'interdépendance des disciplines.

	Effectif	% du Total
oui	34	32,4 %
non	70	**66,7 %**
sans réponse	1	0,9 %
Total	105	100,0 %

En effet certains étudiants ont souligné, dans la question des améliorations que nous verrons plus tard, le fait qu'il n'avait pas forcément été nécessaire, pour eux, de comprendre les différentes matières pour réaliser le TP final. Ceci peut être une des explications possibles aux réponses présentées dans le tableau précédent.

- 71 étudiants sur les 105 ayant rendu le questionnaire, nous ont ensuite indiqué quels étaient, selon eux, les points forts de cet enseignement.



Bien qu'il soit majoritairement jugé difficile, l'aspect pluridisciplinaire est mis en avant comme un des points forts de cet enseignement.
Se distinguent à travers les réponses d'autres points forts, comme l'aspect méthodologique, la mise en pratique des diverses matières, l'aspect pédagogique (les enseignants et leur implication dans cet enseignement) et l'organisation du programme (le déroulement de l'enseignement).

- On remarque que le parcours universitaire précédent joue un rôle dans le choix des points forts.

	étudiants originaires de SM1		étudiants non-inscrits en SM1	
Points forts de l'enseignement	Effectif	%	Effectif	%
aspect pluridisciplinaire	14	**24,1**	2	15,4
aspect pédagogique	6	10,3	2	15,4
aspect méthodologique	6	10,3	4	**30,8**
la mise en pratique	6	10,3	1	7,7
l'organisation du programme	6	10,3	2	15,4
autres réponses	20	34,5	2	15,4
TOTAL	58	100,0	13	100,0

NB : les non-réponses à la question des points forts du cours IS2 n'apparaissent pas dans le tableau.

Pour les individus n'ayant pas suivis la première année de DEUG SM, le principal point fort est l'aspect méthodologique, tandis que pour les inscrits en DEUG SM1 c'est de loin l'aspect pluridisciplinaire. Selon leur origine, les étudiants ne semblent donc pas mettre en avant les mêmes points forts.

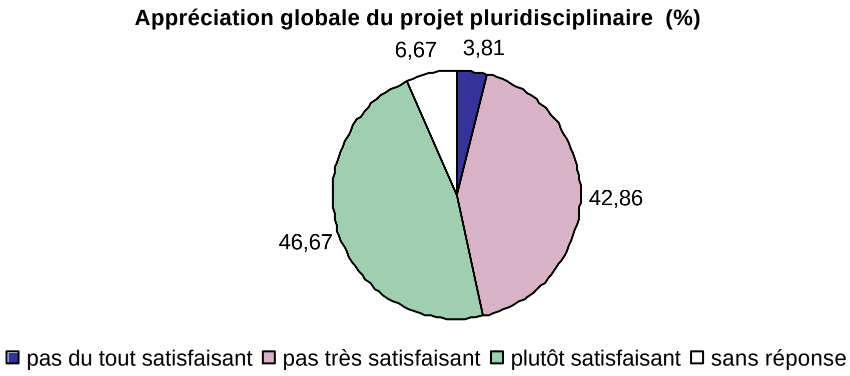
- 18 étudiants seulement n'ont pas répondu à la question des améliorations possibles de cet enseignement.

Nous avons inventorié les principales améliorations énoncées dans le tableau suivant.

Améliorations Suggérées	Effectifs
o utilisation d'un autre logiciel de programmation que Mathematica	13
o TD et TP plus espacés dans la semaine	11
o plus de présence de la part des enseignants de mécanique, de maths et d'informatique pour répondre aux questions (par exemple des présences en TP...)	10
o poly projet plus structuré, plus clair	10
o énoncés des TP plus clairs, plus de détails sur les fonctions à programmer	9
o TP plus court et/ou plus valorisés (ex : augmenter la pondération de l'informatique dans l'UE)	9
o plus d'enseignants durant les séances de TP	8
o une semaine d'avance des TD sur les TP (et des énoncés de TP)	7
o plus de séances de TD	6
o cours plus illustré d'exemples	5
o modules IS1 et IS2 plus rapprochés dans le temps (moins d'1an1/2)	5
o amélioration de la qualité du matériel informatique	4
o davantage d'explications sur les manipulations de la version actualisée de Mathematica	4
o accroître l'intérêt des autres disciplines trop limité dans le projet	3
o résultats d'applications numériques omis dans le poly	3
o accès plus fréquent en libre service surveillé	3
o progression plus lente en TD	3
o proposé cet enseignement de manière optionnelle	2

- Après nous avoir énuméré points forts et améliorations du cours IS2, les étudiants ont eu à formuler une appréciation globale de ce projet.

On observe une opposition entre « les pas très satisfaits » et « les plutôt satisfaits », la modalité « pas du tout satisfaisant » ne regroupant que 3.81% des 105 étudiants, soit uniquement 4 étudiants.



6- Conclusion et perspectives

Le projet a été jugé difficile, ce qui n'est pas surprenant, puisqu'il l'était en effet. Globalement, il semble qu'une majorité d'étudiants n'ont pas vu l'intérêt de faire un projet pluridisciplinaire, soit parce que le thème choisi ne les intéressait pas, soit parce qu'ils n'ont pas vu en quoi ce projet permettait de découvrir des choses nouvelles. Une analyse plus détaillée des raisons de cette perception reste à faire, d'autant plus que les réponses à des questions ouvertes font apparaître des contradictions sur ce point.

La participation aux activités annexes, la conférence d'André Brahic, et observation pour certains étudiants, a été très faible. En ce qui concerne la conférence d'André Brahic, les raisons (évoquées) sont multiples : information insuffisante, heure inappropriée mais en Deug, aucune heure n'est vraiment appropriée à quoi que ce soit !.

Du point de vue des enseignants, plusieurs points devraient être améliorés pour tirer pleinement parti d'un tel projet.

Le point essentiel serait de trouver un cadre permettant une intervention plus importante des enseignants non informaticiens, afin que les étudiants puissent trouver une aide sur les aspects physique, astronomique, mécanique et mathématique du projet. Ce problème n'est pas résolu, car cela suppose une organisation difficile à mettre en place dans le cadre du Deug tel qu'il est aujourd'hui.

Par ailleurs, le projet gagnerait à être effectué sur un temps plus long, permettant une exploration plus importante de la part des étudiants.

Quelques mots sur le choix du sujet. Il est sûrement possible de travailler de façon interdisciplinaire sur n'importe quel type de thème, mais les conditions de réussite ne sont pas garanties. Il faut en effet trouver un thème motivant – de ce point de vue, l'astronomie est certainement une bonne discipline candidate –, s'assurer que les notions essentielles ont déjà été acquises (ou au moins rencontrées…) par les étudiants, et donner une place significative à plusieurs disciplines, faute de quoi, l'objectif principal est raté. De ce point de vue, le sujet choisi par le groupe s'est avéré très intéressant, et il constitue une « mine d'idées » à explorer dans l'avenir. Du point de vue de la physique et de la mécanique, les lois de Képler sont au cœur du sujet, et constituent une notion fondamentale qui doit être acquise au cours du premier cycle des études supérieures, à la fois au niveau des concepts, mais aussi sur un plan « culturel ». L'astronomie est un sujet qui motive beaucoup les étudiants, comme en témoigne leur participation forte au cours optionnel de première année mis en place en Deug SM. Sur le plan mathématique, le projet permet une exploitation des notions liées aux développements limités, aux équations différentielles et aux coniques. Par ailleurs, et bien que nous n'ayons pas pu l'exploiter en profondeur faute de temps, ce projet est idéal pour montrer les rapports entre la résolution analytique et numérique des problèmes. En ce qui concerne l'informatique, le thème choisi illustre bien le concept de calcul itératif qui constitue la base de l'initiation à l'algorithmique. En outre, l'ampleur du projet a forcé les étudiants à se confronter aux problèmes classiques de gestion d'un projet informatique conséquent, les forçant ainsi à mettre en pratique des méthodes de conception de programmes présentées en cours et en TD sous peine d'aboutir à brève échéance, à des situations inextricables.

Introduire la pluridisciplinarité dans l'enseignement (supérieur ou non) est certainement une idée intéressante, et le projet que nous avons mené sera poursuivi, sous une forme ou une autre, dans les années qui viennent. L'investissement réalisé par le groupe Irem est en effet très important, et il doit être exploité sur plusieurs années afin d'en tirer des conclusions définitives. L'expérience montre en effet que la perception (positive ou négative) que les étudiants ont d'un changement s'établit sur plusieurs années, comme si une sorte de « transmission orale » se faisait entre les générations successives !

Aucun questionnaire n'a été donné aux membres du groupe pour connaître leur opinion sur ce travail commun, mais les discussions ont fait apparaître des échanges passionnants entre disciplines, et ce n'est certainement pas le moindre des bénéfices de ce travail.

Remerciements

Les auteurs tiennent à remercier les enseignants d'informatique, Elise Arnaud, Laurent Perraudeau, Hélène Richy et Stéphane Riedweg, qui se sont trouvés impliqués malgré eux dans ce projet, puisque ce sont eux qui ont assuré les TD et TP de l'enseignement IS2. Leur rôle a été déterminant pour la réussite de ce travail.

Ils tiennent aussi à remercier André Brahic, qui en dépit d'un emploi du temps invraisemblable, nous a fait l'honneur de venir à Rennes faire une conférence éblouissante, avec une disponibilité et un enthousiasme dont les auditeurs (pour l'essentiel, non étudiants) se souviendront longtemps !

Auteurs : Manuel Buisson, maître de conférences, UFR de maths, Université de Rennes 1, Arnaud Delannay, professeur, UFR SPM, Université de Rennes 1, Anne-Claire Fortin, stagiaire, IRISA/IREM, Université de Rennes 1, chargée du traitement statistique, Yann Le Grand, maître de conférences, UFR SPM, Université de Rennes 1, Annie Morin, maître de conférences, Ifsic, Université de Rennes 1, Laurence Pasquereau, PRAG, Ifsic, Université de Rennes 1, Dominique Py, maître de conférences, Ifsic, Université de Rennes 1, Patrice Quinton, professeur, Ifsic, Université de Rennes 1

Annexe 1

Documents distribués aux étudiants avant le TP et questionnaire

DEUG SM

Evaluation du cours de IS2

Dans le cours IS2 de cette année , vous deviez réaliser un projet interdisciplinaire. Pour faire un bilan, tenir compte de vos remarques et améliorer le projet, nous vous demandons une évaluation de l'ensemble du cours, c'est-à- dire du cours magistral, des TD, des TP et du projet final. Cette évaluation est anonyme ; vous la remettrez à votre enseignant en même temps que votre TP final. Nous vous demandons de remplir une fiche par personne (et non pas par binôme) .

Merci de prendre du temps pour la remplir soigneusement. De vos réponses dépend l'évolution du cours de l'an prochain

I.

Votre origine : Etiez-vous inscrit en DEUG SM1 à Rennes l'an dernier ou l'année précédente (entourez la réponse) ? .

oui non

Si la réponse précédente est non, aviez-vous suivi , avant cette année, un cours équivalent au cours IS1, c'est-à-dire une initiation à l'algorithmique et à la programmation (entourez la réponse) ?

oui non

Assiduité : comment avez-vous avez suivi ce module de formation en IS2?

Comment avez-vous suivi **le cours en amphi** cette année (entourez la réponse) ?

Pas suivi Assez irrégulièrement Plutôt régulièrement Très régulièrement

Comment avez-vous suivi **les TD** (entourez la réponse) ?

Pas suivi Assez irrégulièrement Plutôt régulièrement Très régulièrement

Avez-vous suivi **la conférence d'André Brahic** (entourez la réponse) ?

Oui Non

Si la réponse est non, pouvez-vous nous dire pourquoi ?

Documents distribués :

Vous trouvez le poly du cours (entourez les réponses) ?

Suffisant pour suivre oui non	Indispensable oui non	Facile à utiliser oui non

Vous trouvez le poly de présentation du projet (entourez les réponses) ?

Suffisant pour suivre oui non	Indispensable oui non	Facile à utiliser oui non

Contenu et progression des TD et des TP :

La progression en cours, TD et TP vous a paru (mettez une croix dans la case qui vous convient)

progression	trop lente	correcte	trop rapide
en cours			
en TD			
en TP			

Pour la réalisation du TP final, vous estimez avoir été bien préparé (explication, développement de modules etc..) (entourez la réponse) ?

en cours en amphi	oui	pas assez	non
en TD pour le TP final	oui	pas assez	non
en TP pour le TP final	oui	pas assez	non

Aspect pluridisciplinaire :

Le mélange des disciplines , informatique, astronomie, mécanique, mathématiques, (entourez les réponses ; il peut y en avoir plusieurs) ?

Est intéressant Oui non	Est difficile Oui non	On n'a jamais fait ça avant : oui non

L'intervention des enseignants de plusieurs disciplines en amphi (entourez les réponses) ?

Est indispensable Oui non	N'est pas vraiment utile	Il faudrait plus de temps oui non

Est-ce que ce TP final vous a permis de mieux comprendre chaque discipline et son rôle propre ?

oui non

A votre avis, quels sont les points forts de cet enseignement ?

Quels sont les points de cet enseignement que l'on peut améliorer, quelles sont vos suggestions (organisation, contenu, horaires des cours et des TD, etc.)?

Appréciation globale : entourez la réponse.

Pas du tout satisfait Pas très satisfait Plutôt satisfait Très satisfait

Annexe 2

Réponses aux questions ouvertes

Deux questions ouvertes leur permettaient de donner les points forts de ce cours et de suggérer des améliorations.
En ce qui concerne les points forts (le 1 indique un début de réponse) :

```
	points forts
1	le poly
1	projet pluridisciplinaire, notions de programmation pouvant être utiles plus tard même si mathematica n'est peut-être pas le langage le plus approprié
1	projet pluridisciplinaire, application concrète des disciplines qu'on voit d'habitude en théorie
1	cet enseignement permet de comprendre l'intérêt de chaque discipline les unes par rapport aux autres. Cette expérience était intéressante mais ne doit absolument pas se restreindre à un TP d'informatique et devrait s'étendre plus largement  à l'ensemble de l'enseignement de SM qui reste très cloisonné
1	essayer de mettre plusieurs disciplines ensemble était une très bonne idée
1	les td sont absolument nécessaires et les tp sont intéressants pour la mise en pratique des enseignements. Le projet pluridisciplinaire est plutôt motivant sur le fond...
1	le fait de pouvoir découvrir l'utilité de la programmation avec mathematica
1	le concept du projet est intéressant
1	projet pluridisciplinaire
1	le projet était intéressant
1	savoir se servir de ce qui devient indispensable : l'informatique; relation tp-td intéressante
1	trois points : aspect culturel fort, connaissance de l'astronomie: aspect humain, réaliser un projet; aspect relationnel, projet en binôme

1	comprendre l'évolution des planètes dans le système solaire m'a permis de réaliser que toutes les matières qu'on étudie peuvent se rassembler
1	sa sympathie; pour le moral, c'est plutôt bon (pédagogie psychologie) l'informatique est divertissante c'est la physique le problème
1	donne un aperçu du travail de recherche permet une approche moins austère de l'informatique
1	beaucoup de pratique, permet de mieux comprendre le mélange des matières
1	la conférence d'André Brahic
1	la conférence d'André Brahic
1
1	il a permis de mettre en commun des connaissances; il est un exemple d'application de celles-ci
1
1
1	aspect autre de l'informatique,initiation à la programmation,le projet pluridisciplinaire
1
1	les exemples en cours , le fait de pouvoir parler des problèmes rencontrés pendant le cours, l'intérêt que porte l'enseignant à l'enseignement
1
1	une première approche de la logique de la programmation
1
```

1 l'organisation du programme notamment le Tp final, le déroulement de l'enseignement jusqu'au TP final
1
1 les tp, les poly
1 en ce qui concerne le cours d'astrophysique c'est très intéressant; je pense que si je comprenais quelque chose à la programmation informatique, ce serait très intéressant car le sujet en lui-même l'est beaucoup; je n'ai personnellement jamais travaillé sur mathematica; mon binôme m'a expliqué beaucoup de choses sur la programmation mais ça m'est très difficile à comprendre. J'ai utilisé Maple mais sans programmer, utilisation en tant que calculatrice pour la résolution d'exercice"
1 le côté programmation et le mélange des disciplines, les TP
1 cours simple, td adaptés
1 aucun, je le trouve inutile
1
1 je ne vois pas à part peut-être la logique
1 comprendre le langage informatique; savoir utiliser un PC; le côté ludique de l'informatique par rapport aux autres matières qui le rend plus intéressant
1
1
1 volonté d'aide à la réalisation des TP par les TD; disponibilité des enseignants, pluridisciplinarité
1 avoir essayé de rendre l'informatique plus concret avec un projet pluridisciplinaire
1 enseignants abordables cours et td sympathiques on a envie d'y aller
1 initiation à une certaine forme de logique; réflexion et décomposition des problèmes en plusieurs parties pour la résolution
1 comprendre les rouages d'un langage qui s'autosatisfait avec ses propres règles
1 le raisonnement scientifique
1 permet de se rendre compte des applications possibles de l'informatique
1 pas de points forts
1 aucun
1 il traite d'un sujet intéressant; il permet de mieux connaître mathematica
1 l'implication des enseignants dans le cours me motive je porte donc plus d'intérêt à l'informatique
1 une approche différente des problèmes ça nous change des autres matières
1 projet interdisciplinaire intéressant amenant beaucoup d'implication et d'application de la part de l'étudiant; enrichissement et logique grandissante d'un tp à l'autre
1 cela nous donne une méthodologie pour programmer et avoir les bonnes démarches
1 nous apprend à programmer, les quelques notions de programmation nous serviront sans doute pour l'avenir
1 apprendre à programmer et confondre plusieurs matières dans un but
1 aspect pluridisciplinaire
1 le libre accès aux ordinateurs
1 aucun pour l'instant j'en vois aucune utilité dans la vie professionnelle et pour la suite des études
1 approche d'une nouvelle matière
1 premier pas en informatique
1
1
1 apprentissage d'une certaine autonomie; les bases informatiques sont acquises pour la programmation; tenter de relier plusieurs matières entre elles

1 on apprend à s'organiser; les profs de td et de cours abordent la matière de façon intéressante

1 l'application

1 côté pluridisciplinaire : mécanique et math appliqués pour l'info

1

1 comprendre les bases de l'informatique

1

1 il nous permet d'appréhender le langage et donc la mnière de penser informatique appliquée aux sciences

1

1

1

1

1 on a pu apprendre à se servir de mathematica pour avoir une meilleure compréhension du chapitre sur les fonctions à plusieurs variables en maths

1

1

1 acquérir des notions de programmation mais spécifiques à un logiciel seul

1 les td

1

1 projet pluridiciplinaire

1

1 réalisation d'un projet avec différentes disciplines , approche d'un logiciel informatique; réflexion sur la programmation

1 le projet est passionnant et intéressant ; le prof est très impliqué car il a pris en compte les remarques des étudiants ; les tp nous ont permis d'avoir une application directe du cours sur un projet autre que des maths

1 la recherche des fonctions

1 réalisation d'un projet; aspect pluridisciplinaire

1

1

1 développement d'un esprit logique

1 son originalité

1 les tp sont moins contraignants que dans les autres matières; les td sont très utiles pour appréhender les tps

1 si on avait pas tout oublié de l'an dernier, on aurait pu commencer à faire des choses intéressantes sur mathematica ou en tout cas, on nous a donné les outils pour

1 professeurs agréables

1 les td et les tp sont les points forts de cet enseignement

Les améliorations suggérées :

1 plus de description sur les fonctions à programmer
1 les fonctions en TP sont très difficiles à trouver car le petit poly est compliqué. On devrait plutôt passer une épreuve d'examen final, ce serait plus juste et plus régulier.
1 La réalisation du TP final nécessite un travail de recherche important. On ne maîtrise pas suffisamment l'astronomie et les calculs qui s'y rapportent pour réaliser un bout de TP.
1 TP trop longs, il faudrait des enseignants capables de mieux nous aider en physique
1 TP un peu trop long dans l'ensemble,profs qui ne s'y connaissent pas assez en physique, ne peuvent pas nous aider en TP, mathematica qui n'est sans doute pas le logiciel le plus utilisé en programmation
1 mathematica n'est pas un logiciel très utile pour notre avenir, cette année j'avais cours, td et tp la même journée, c'est pas super
1 plus de TP,une semaine d'avance des td par rapport aux tp, augmenter l'attrait des étudiants pour cette expérience (notes, ..., carotte), avoir un enseignement d'informatique au premier semestre pour ne pas être trop bloqué par les outils informatiques dans notre progression dans cet enseignement
1 sauf que le projet n'a pas permis de comprendre certaines notions dans les autres disciplines
1 mais dans la forme, ce projet ne répond pas aux attentes. En effet, l'intérêt des autres disciplines (cf document) est très limité par le fait qu'il n'y a pas besoin de comprendre les formules et les aspects physiques nécessaires pour rédiger le TP final. De plus, comme l'année précédente, le cours en amphi est seulement une lecture du poly ce qui est dommage pour une fois qu'on a un prof intéressant! je suis restée sur ma faim
1 pour moi, cet enseignement devrait être optionnel car pour les étudiants qui se destinent à une carrière dans l'enseignement ce genre de matières ne nous sert en rien pour la poursuite d'étude
1 il aurait fallu que les professeurs de mécanique, d'astronomie ou de mathématiques mais surtout d'astronomie soient présents lors des séances de TP en plus des professeurs d'informatique; de plus, les td auraient dû avoir lieu quelques jours avant la séance de TP et non pas le jour même comme pour un groupe
1 horaires : on avait le mercredi td, tp et cours, énoncés des questions de TP peu clairs, ce module devrait être optionnel
1 pour mener à bien le projet, il aurait fallu avoir des professeurs compétents en mécanique et en astronomie . Car ce n'est pas l'informatique qui nous a posé problème mais les problèmes physiques à traiter. On peut proposer des séances en amphi avec ces professeurs pour pouvoir poser des questions, une présence de temps en temps en TP; mais surtout un polycopié plus clair. Les sujets donnés chaque semaine au cours de td ne permettent pas la préparation des Tp à l'avance surtout pour le groupe qui a td et tp le mercredi
1 pas uniquement mathematica , varier plus les td, tp et pourquoi pas internet; pas sous linux mais sous windows, tp trop difficiles
1 augmenter le volume horaire des td au détriment de celui du cours à proprement parler serait nécessaire quant à l'assimilation du contenu d'IS2
1 le projet pluridisciplinaire devrait changer de matière chaque année; de plus l'astronomie ne concerne que le 1/5 des élèves de seconde année; avoir les td au moins un jour avant les tp et non avoir les tp quinze minutes après les td.
1

1 ne pas mettre les tp juste après la séance de td car on n'arrive pas à comprendre et à préparer les tp; td plus courts
1 le projet pluridisciplinaire est très lourd surtout pour des gens qui ont des problèmes en informatique C'est à la fois intéressant pour ceux qui aiment l'astronomie mais c'est aussi très ennuyeux quand on ne comprend pas la partie physique Les fonctions à réaliser n'étaient pas toujours bien décrites, soit dans la formulation de la question (la remarque de position périhélie par exemple) soit dans le poly de physique
1 se mettre pour les enseignants dans la position où on ne connaît rien à l'astronomie et que les rappels de mécanique et de maths ne sont pas tout à fait des rappels mais quasiment vu pour la première fois, étant donné qu'on n'a pas forcément bien acquis tout cela en Deug; le micro utilisé en cours magistral ou bien est-ce la voix du prof est bien endormant et peu vivant
1 les cours en amphi sont assez endormants
1 un poly pluridisciplinaire plus clair serait mieux; des td de 1h30 au lieu de 2h
1 pas deux heures de suite de cours et de td, 1h30 serait suffisant le poly sur le projet pluridisciplinaire n'est pas très compréhensible
1
1 je n'ai aucune suggestion; le cours ne me semble pas indispensable compte tenu des td et du polycopié
1
1
1 en TP, les étudiants trop dépendants des salles de TP (horaires, jours fériés, aléas mécaniques) Manque d'aide en TP : une personne pour 10 binômes en deux heures, programme trop strict à la virgule près, on passe plus de temps à chercher la majuscule ou l'accent indiscernable qu'à utiliser le programme; inégalités : certains peuvent avancer chez eux alors que d'autres n'ont pas d'ordinateur personnel
1 td plus explicites, la compréhension n'est pas simple, progression plus lente serait peut-être nécessaire en td
1 peut-être revoir le sujet du TP final
1
1 en TP, une plus grande disponibilité des enseignants; revoir le temps que demande la réalisation du projet à la baisse
1
1
1
1 horaire de cours de 2 fois 1h30 mieux que 2h; td idem trop de temps passé sur les fonctions en TP
1 il m'est difficile de donner un avis intéressant et auquel il faudrait tenir compte car comme je n'ai pas de base en programmation, mon opinion ne pourrait être que subjective; je vous dirais bien de faire quelques cours de rattrapage avec les personnes qui seraient dans mon cas en début d'IS2 mais je sais que vous n'auriez pas les TP; alors je n'ai pas de solution à proposer, quel dommage pour nous. Je ne suis pas très satisfait juste parce que je ne comprends pas grand chose; le côté mécanique, astrophysique je comprends alors que le côté programmation je ne comprends pas du tout
1 une meilleure description du projet d'astrophysique; les questions sont parfois ambigües entre le côté mécanique et informatique; la programmation sous mathematica qui reste très limitée et l'utilisation d'outils qui ne sont pas forcément les bienvenus. Pourquoi faire simple quand on peut faire compliqué?
1
1 faire des groupes de niveau et prendre en compte les étudiants n'ayant pas fait IS1
le

1 le remplacer par une autre matière utile celel-là; ce cours n'est pas une initiation à l'informatique ; on utilise un langage de programmation inutilisé
1 arrêter avec les projets pluridisciplinaires!!!les tp de première année étaient mieux par leur côté plus ludique, un cours plus basé sur les exemples que sur un cours théorique qui suit mot pour mot le poly (montrer comment marchent les fonctions), apprendre à utiliser le PC avec des logiciels qui vont réellement nous servir dans l'avenir (voire même peut-être une intro à la programmation en C ou C++)
1
1
1 plus de temps entre les td et les tp; plus de cours (trop rapide)
1 il faudrait que les professeurs en TP nous aident un peu plus car quand on ne sait pas on peut vraiment pas avancer; en général, ce n'est pas la programmation qui pose problème mais ce sont les autres disciplines, maths, physique
1 je serais très satisfaite si il n'y avait pas un problème avec le tp. les TP sont difficilement abordables non pas à cause de la programmation mais à cause des équations que nous n'arrivons pas à poser. c'est un problème mathématique ou de résolution d'énoncés et pas d'informatique
1 trop de programmation, trop peu d'initiation à l'informatique grand public ; sur le contenu, quelle utilité de connaître mathematica pour la suite de nos études, la vie courante etc... il serait intéressant de favoriser le sujet : comment on se sert d'un ordinateur, qu'est ce qu'un programme DOS etc.. argument : tout le monde n'a pas un ordinateur chez soi ni même ne sait à l'avance s'en servir; sur les horaires de cours , Td et TP : penser aux étudiants salariés quant aux dispenses d'assiduité (inexistantes à ce jour), les TP sont obligatoires et trop tôt le matin.
1 on peut passer énormément de temps sur des fonctions qui n'ont juste qu'une erreur de syntaxe et on n'avance pas dans le raisonnement; remarque sur le poly du projet : on a l'impression d'un coupé collé de plusieurs cours ce qui rend sa navigation laborieuse
1 TP trop longs par rapport à ce que ça nous rapporte; l'informatique ets moins important pour nous que certaines matières et on doit y passer un temps considérable par rapport à celles-ci
1 les sujets de tp sont inégaux en quantité de travail
1 utilisation d'un autre langage plus utile; utilisation de 3DMax ou autre logiciel de 3D mais pas mathematica
1 utilisation d'un autre langage qui serait plus utile C++ html ou utilisation de logiciel 3D genre 3DMax4
1 améliorer la connaissance des profs d'informatique en mécanique, en astronomie, en maths pour qu'ils puissent nous aider et pas simplement nous dire qu'ils n'y comprennent rien! améliorer la qualité des souris d'ordinateur; mettre plus de profs en tp car un prof pour deux salles c'est déjà pas évident mais quand en plus, il passe une heure sur un groupe, c'est pas génial pour les autres
1
1 au niveau de l'organisation, il serait préférable de recevoir les sujets de TP plus tôt pour avoir le temps de les préparer
1 arrêter le projet interdisciplinaire j'aimais bien l'informatique car cela permettait de voir quelque chose de différent des autres matières donc le projet interdisciplinaire ne m'a pas franchement plu je suis plutôt satisfait pour les td pas très satisfait pour les tp
1 si possible plus d'heures de libre-service surveillé pour les conseils et aussi éviter qu'une cellule ait Td, tp et cours dans la même journée pour éviter l'overdose; réaliser sur papier un listing des commandes sous fenêtre K-term qui manque cruellement
1 en tp, pas assez d'encadrants surtout qu'ils sont souvent d'une aide précieuse, les problèmes liés au logiciel empêchent d'enregistrer parfois (ex tp2 perdu 6 fois),on n'a pas assez été formé à toutes ces nombreuses manipulations pour ouvrir, fermer, enregistrer; poly projet trop

compliqué, inaccessible; la notation, au total pour boucler le tp final quinze heures ont été nécessaires et ce, en ayant réussi à faire tous les autres tp dans les temps! et pour la part donnée à ce tp dans la notation, elle n'est pas du tout proportionnelle au temps passé
1 tp: le logiciel mathematica a été réaclualisé et étant redoublante nous trouvons que l'utilisation de ce logiciel est moins facile. IL ya trop de manipulations à faire, rien que pour ouvrir un fichier ainsi que pour l'enregistrer. Nous avons recommencé 6 fois le tp2 à cause de ce nouveau logiciel, impossibilité d'enregistrer directement sur disquette juste par "save" ; poly du projet, il manque quelques données il aurait fallu une page spéciale que pour les données pour c,g etc... On est obligé de feuilleter tout le polycopié rien que pour trouver une valeur!!!;TP final nous prend beaucoup de temps et pourtant cette note ne compte que pour 1/5 de la note finale. Pour tout le temps passé dessus, il serait bien d'augmenter le coefficient du TP et mettre le même coefficient que pour l'examen final (plus de quinze heures)
1 longueur des tp trop longue on ne peut jamais finir en deux heures
1 organisation
1 cours : au lieu de reprendre le poly faire un cours uniquement sur des exemples d'application qui ne figurent pas sur le poly; utiliser un autre logiciel que mathematica on ne s'en sert que dans le cadre des enseignements d'is2 il est presque inconnu en dehors
1 changer de logiciel, mathematica n'est pas intéressant
1 moins nombreux en TP plus de suivi des profs, trop de problèmes en tp
1 ne pas séparer is1 et is2 par un break de 12 mois; plus de temps pour les tp
1 j'ai eu l'impression de faire de l'astronomie et pas de l'informatique
1
1 l'énoncé des tp devrait être distribué une semaine avant et les séances de td doivent être plusieurs jours avant les tp
1 plus d'explications en tp; plus détailler le chapitre sur les structures
1 td et cours en même temps et plus de temps en tp; après tout l'informatique se fait sur un ordinateur
1 il serait positif que les intervenants en td et tp reçoivent une formation de quelques jours sur le sujet afin qu'ils puissent nous répondre de manière précise et nous aider en cas de plantage. C'est à mon avis le point faible de ce tp final; les intervenants sont sympathiques et performants sur le côté informatique mais montrent des limites sur les autres aspects, mécanique, maths...De plus mathematica est trop sensible sur les détails qu'il devrait corriger lui-même comme une correction d'accent par exemple qui pose une grosse perte de temps !
1 un poly pour le projet un peu moins complet
1 je pense qu'on travaille sur un logiciel courant et que l'on peut avoir chez soi, mathematica trop cher, serait plus utile en informatique
1
1 plus de préparation de tp en td la proximité dans le temps de ces deux types d'enseignement nuisait à une bonne assimilation des notions
1 les td
1 plus d'aide pour trouver les aspects physiques
1 le poly est illisible Il semble fait pour perdre les élèves Il manque un lexique à la fin pour le vocabulaire astronomique Pour la plupart des élèves, le tp final consiste en des copier-coller Pourquoi pas un tp noté en un temps défini comme les tp des autres matières Il manquait des résultats d'application numérique pour vérifier notre travail
1 le polycopié du projet final était trop complexe. Il nous a pas servi car on n'arrivait pas à en tirer l'essentiel. Cela ne m'a spécialement aidé concernant les autres matières et en fin de compte on n'en connaît pas plus sur le côté astronomique entre Jupiter et la terre; pas mal de problèmes sur les ordinateurs aussi

1 on avait les td et les tp le même jour, c'est vraiment pas pratique; manque de préparation pour les tp ce qui nous ralentit, le problème cette année c'est qu'il s'est écoulé un an et demi entre les modules d'is1 et d'is2, d'où perte des bases car mathematica n'est pas utilisé à l'extérieur des enseignements d'informatique
1 plus de td et un cours avec de vrais exemples
1 on avait les td juste avant les tp correspondants ce qui posait des problèmes pour la préparation des tp; le but du tp final est trop abstrait
1
1 supprimer le cours inutile; plus de td, acheter des pc qui fonctionnent
1
1 avec les td suffisamment en avance pour qu'on puisse préparer le tp; intéressant mais trop rapide du coup on a survolé des notions difficiles à comprendre comme périhélie devant lesquelles on s'est trouvé un peu perplexe
1 le langage mathematica est déjà assez compliqué pourquoi y rajouter de nouvelles notions de mécanique et d'astronomie notamment. Cela devient alors très difficile à comprendre. Projet difficile; certaines fonctions marchent une fois sur deux
1 certaines fonctions des TP étaient difficiles à comprendre et à programmer : davantage les expliquer; trop de temps entre is1 et is2; plus de td en lien avec le tp; des heures proposées pour poser des questions aux professeurs et pas seulement dans le domaine informatique; davantage de td; davantage d'explications pour éviter de perdre son travail sur ordinateur
1 les tp m'ont demandé énormément de travail personnel. une élève très sérieuse qui travaille son cours et ses td mais a des lacunes en maths, mécanique et en astronomie ne peut pas s'en sortir sans la compréhension du problème; les notions d'informatique ne servent à rien . Or à la base c'est quand même de l'info que l'on doit travailler. J'ai bien compris le programme d'info cours-td , la seule gêne était la difficulté des tp du fait de toutes les notions de méca, maths qui entrent en leu et le temps supplémentaire qu'ont pris les tp trop longs. je ne réponds pas à la question d'appréciation globale car je pourrais être satisfaite si mes notes obtenues récompensent le travail que j'ai fourni. Je ne peux pas répondre maintenant. Suggestions : plus de temps pour les tp, ou plus grosse pondération de l'info dans l'ue vu le temps de travail perso que ça demande
1 poly projet indigeste
1 plus d'aide pendant les tp; il faut plus de temps pour préparer les tp
1 pas assez de temps pour préparer le tp; pas assez de td; cours is1 et is2 beaucoup trop éloignés dans le temps

Sur les 82 étudiants qui n’ont pas assisté à la conférence d’André Brahic, 69 nous ont donné des explications :

1 je n'aime pas l'astronomie
1 je n'étais pas disponible
1 information trop tardive
1 l'information a été affichée trop tard
1 ça ne m'intéressait pas
1 obligations personnelles ce soir là
1 parce que j'avais des activités personnelles ce soir là et que je
l'ai appris tard
1 absent ce jour là
1 fatigué ce soir là
1 non informé!
1 c'est qui ?
1 c'est tard le soir et rentrer en bus à cette heure est difficile
1 ne savais pas
1 pas intéressé
1 indisponibilité
1 examen TP ce jour là
1 pas au courant
1 l'horaire de la conférence n'était pas satisfaisant malgré l'envie
d'y aller
1 emploi du temps chargé même si c'était le soir
1 emploi du temps chargé
1 l'astrophysique n'est pas ma matière de prédilection
1 trop tard le soir trois heures d'attente avant la conférence
1 pas au courant
1 ligue des champions!
1 je n'ai pas eu le temps
1 pas intéressé, pas disponible
1 pas au courant de la conférence
1 pas au courant et manque d'intérêt
1 rendez-vous ce soir là prévu depuis longtemps de plus j'ai été
informé la veille
1 je n'étais pas au courant
1 on avait examen de TP de thermo le vendredi
1 pas au courant
1 décalage d'une semaine
1 j'avais entraînement de foot
1 trop tard
1 parce que l'astronomie ne m'intéresse pas
1 horaire tardif et entraînement sportif sur cet horaire
1 pas au courant
1 je n'étais pas au courant de cette conférence; et étant inscrite à
2 cheval également en licence, je ne peux suivre tous les cours de
deug sm2
1 pas au courant
1 non disponible à cette heure là
1 pas disponible
1 pas le temps
1 pas intéressée
1 empêchement
1 j'étais fatigué
1 problème de transport
1 n'a pas su qu'il y avait une conférence
1 ne connaissait pas l'existence de son existence
1 je n'étais pas au courant
1 pas au courant de cette conférence manque d'information

1 dans la même semaine il y avait des examens de tp
1 obligation personnelle
1 ma motivation pour suivre une conférence après 8 heures de cours n'était pas assez grande
1 pas au courant
1 je voulais y aller mais j'avais prêté ma voiture et je devais attendre qu'on me la rende et bien sûr on me l'a rendue trop tard
1 sport
1 car j'avais une autre réunion à cette heure-là
1 j'avais d'autres priorités ce soir-là; tp de chimie à préparer
1 n'avais pu être présente ce jour là
1 TP de chimie ce jour-là
1 je n'étais pas intéressée par le sujet
1 je n'étais pas libre à ce moment-là
1 pas libre
1 je n'étais pas au courant
1 je faisais autre chose ce jour-là
1 autre chose de plus important
1 pas eu connaissance de cette conférence
1 j'avais cours

le tp; des heures pour pouvoir poser des questions aux profs et pas seulement en info ; trop de tavail personnel
1 pas assez d'enseignant en tp pour nous aider
1 les cours en amphi ne me semblent pas très utiles; on pourrait donc les remplacer par plus de td
1 les cours devraient avoir un aspect plus pratique; les sujets de tp étaient difficiles et longs; il faudrait peut-être plus de td
1 tp trop longs à préparer surtout au début
1 le polycopié du projet pluridisciplinaire est beaucoup trop dense et une partie de son contenu semble superflue. En revanche, une illustration plus lente et plus précise de ce projet, en cours, serait utile
1 plus de professeurs en tp car quand on a un problème on attend assez longtemps donc on perd beaucoup de temps
1 ne pas considérer que tout ce qu'on a fait en première année est acquis, il y a plus d'un an entre les deux modules d'enseignement
1 trop nombreux en tp
1 le cours est à améliorer : illustrer plus le contenu du cours; cours trop long

Projet pluridisciplinaire en DEUG SM
Document 3 : présentation d'un modèle mécanique approché.

Manuel Buisson, Université de Rennes 1

Mars 2002

1 Le modèle en quelques mots

On s'intéresse au mouvement apparent d'une planète-satellite s autour d'une planète-mère (ou d'un astre) $\mathcal{P}$ de notre système (voir Fig. 1); ici, pratiquement, on envisage $\mathcal{P}$ = Soleil et s = Jupiter ou bien encore comme autre exemple $\mathcal{P}$ = Jupiter et s = Io et il est possible de trouver plein d'informations sur les 9 planètes du système solaire sur site web :
`http://www.cosmos99.com/`

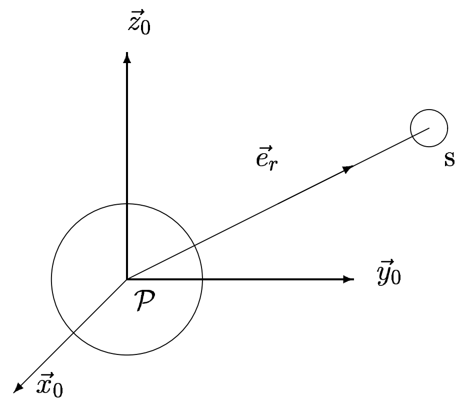


FIG. 1 – *Problème à deux corps*

On souhaite construire pour ce projet un modèle; la limite à notre proposition modélisatrice est de s'imposer aussi comme objectif que la simulation qui en sera déduite sera confrontée avec l'observation expérimentale astronomique qui reste le juge sans appel du modèle : c'est elle qui validera en dernière instance notre modélisation ou indiquera ses limites d'emploi.

On suppose que s ne *voit* que $\mathcal{P}$, la masse et la proximité de cette dernière étant telles que s ne ressent quasiment pas (ou, du moins, de façon négligeable devant celle de $\mathcal{P}$) l'action des autres objets célestes. C'est une première hypothèse avec laquelle nous nous permettons en plus, pour simplifier, de nous affranchir de l'utilisation de la notion de masse réduite.

Précisons tout de même :

- d'une part, le système Terre-Lune constitue déjà un contre-exemple (voir aussi le paragraphe application numérique 7) à cette hypothèse et, par conséquent, un projet futur relatif au

système Terre-Lune devrait utiliser en complément la notion de masse réduite vue en cours de Deug ;
- d'autre part, pour le mouvement apparent de Io autour de Jupiter, on n'a pas regardé les interactions mutuelles entre les satellites de Jupiter (voir à ce sujet les corrections que propose l'astronome).

Pendant la durée d'observation, le mouvement de s par rapport à $\mathcal{P}$ est assimilé à un mouvement par rapport à un repère galiléen [1] et le système formé par $\mathcal{P}$ et son satellite sera considéré comme isolé : c'est un deuxième ensemble d'hypothèses simplificatrices. Le modèle est approché en ce sens qu'on se restreint à un problème à 2 corps $(\mathcal{P},s)$ avec $\mathcal{P}$ assimilé à un repère galiléen approché.

2 Les notations et le repère d'observation

Assimilons $\mathcal{P}$ (resp. le satellite s) à un point matériel P (resp. s) de masse M_P (resp. m_s). Définissons le repère orthonormé direct $R_P(P,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ comme repère de référence galiléen (les directions fixes de la base orthonormée directe $B_0(\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ peuvent être choisies en visant dans la voûte céleste des étoiles infiniment éloignées en apparente fixité).

C'est le seul repère de référence de ce modèle, il n'y aura donc pas d'ambiguïté dans les définitions :

- $\vec{r}$ désigne le vecteur position $\overrightarrow{Ps}$, donc $\vec{r} = x\vec{x_0} + y\vec{y_0} + z\vec{z_0}$;
- r est la norme du vecteur $\vec{r}$, $r = \| \vec{r} \| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$;
- on introduit le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ tel que : $\vec{r} = r\vec{e}_r$ (voir Fig. 1) ;
- $\frac{d}{dt}$ définit la dérivée en temps pour R_P fixe : $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}_{R_P}$;
- $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse de s vu de R_P :

$$\vec{v} = \vec{V}(s/R_P) = \frac{d}{dt}_{R_P}\left(\overrightarrow{Ps}\right) = \frac{d}{dt}\vec{r} \quad ; \tag{1}$$

- $\vec{p}$ est le vecteur quantité de mouvement de s vu de R_P : $\vec{p} = m_s\vec{v}$;
- $\vec{L}$ est le vecteur moment cinétique de s dans son mouvement dans R_P et calculé au point P :

$$\vec{L} = \overrightarrow{Ps} \wedge \vec{p} = m_s\vec{r} \wedge \vec{v} = m_s\vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\vec{r} \quad ; \tag{2}$$

- $\vec{a}$ désigne le vecteur accélération de s vue de R_P :

$$\vec{a} = \vec{a}(s/R_P) = \frac{d}{dt}_{R_P}[\vec{V}(s/R_P)] = \frac{d}{dt}\vec{v} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad . \tag{3}$$

3 Formalisation

Le système $\{P,s\}$ étant supposé isolé, s n'est soumis qu'à la force de gravitation exercée par $\mathcal{P}$. L'application du théorème de la résultante dynamique pour le point s dans le repère galiléen R_P s'écrit :

$$m_s\vec{a} = m_s\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-Gm_sM_P}{r^3}\vec{r} \tag{4}$$

1. La trajectoire de $\mathcal{P}$ peut être observée depuis le repère héliocentrique de Copernic, ce repère étant généralement admis comme repère galiléen approché pour une bonne partie des objets célestes de notre système dans le cadre de la mécanique classique. Pour l'observation du mouvement apparent de s autour de $\mathcal{P}$, considérer que $\mathcal{P}$ est galiléen revient, en première approximation, à négliger l'effet d'inertie d'entraînement sur s lié à la courbure de la trajectoire héliocentrique de $\mathcal{P}$ devant la force de gravitation qu'exerce $\mathcal{P}$ sur s. Dans le paragraphe *application numérique: l'approximation galiléenne*, les ordres de grandeurs de ces termes sont indiqués

où G est la constante universelle de la gravitation.

On voit donc que $\vec{a}$ et $\vec{r}$ sont colinéaires ce qui fait que la dérivée $\frac{d}{dt}$ du moment cinétique $\vec{L}$ est nulle. En effet :

$$\frac{d}{dt}\vec{L} = \frac{d}{dt}[m_s\vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\vec{r}] = m_s\frac{d}{dt}\vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\vec{r} + m_s\vec{r} \wedge \vec{a} = \vec{0} \quad . \tag{5}$$

On montre ainsi que le moment cinétique $\vec{L}$ est constant [2]

$$m_s\vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{C}^{te} \quad . \tag{6}$$

Le problème d'identifier la trajectoire du satellite consiste alors à trouver pour chaque instant t le vecteur position $\vec{r}(t)$ vérifiant (4) et (6)

Nous proposerons respectivement une résolution analytique et une résolution numérique.

4 Résolution par méthode analytique

Cherchons d'abord une solution analytique, elle nous donne les équations scalaires qui permettent de résoudre le problème. La méthode est issue des ouvrages [2, 3, 1], c'est une variante complémentaire de celle donnée par le document 1 qui décrit les lois de Kepler : elle est plus longue, mais fait appel à la résolution analytique d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (le lecteur pressé peut passer à la section suivante !).

Cette section comporte plusieurs parties. Dans la première, on trouve l'équation différentielle à laquelle doit satisfaire le mouvement. On résout cette équation dans la seconde partie. Ensuite, on décrit une façon de placer les repères qui simplifie les calculs puis un bilan résume le tout.

4.1 Obtention d'une équation différentielle

L'expression $m_s\vec{r} \wedge \frac{d}{dt}\vec{r} = \vec{C}^{te}$ qui signifie que le moment cinétique est constant assure ainsi que le mouvement se passe dans un plan. Appelons Π ce plan : on peut en fait le définir par le triplet initial $(P,\vec{r}(0),\vec{v}(0))$. Dès lors, on peut ajuster la définition de B_0 de sorte que $\vec{z}_0 = \vec{e}_z$ où $\vec{e}_z$ est le vecteur normal unitaire à ce plan (voir Fig. 2). Introduisons le vecteur unitaire $\vec{e}_\theta$ tel que $(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$ soit une base orthonormée directe ; de là, dans Π, s peut être repéré par les coordonnées polaires r et θ telles que :

$$\overrightarrow{Ps} = \vec{r} = r\vec{e}_r \tag{7}$$

avec :

$$\vec{e}_r = cos(\theta)\vec{x}_0 + \sin(\theta)\vec{y}_0 \quad . \tag{8}$$

Dans la suite, on remplacera la notation $\frac{dg}{dt}$ par $\dot{g}$, et $\frac{d^2g}{dt^2}$ par $\ddot{g}$, pour toute grandeur g scalaire ou vectorielle.

La vitesse en coordonnées polaires devient :

$$\vec{V}(s/R_P) = \frac{d}{dt}_{R_P}\left(\overrightarrow{Ps}\right) = \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \quad . \tag{9}$$

2. on peut aussi le constater par la dynamique: le moment $\vec{\mathcal{M}}_P$ en P de la force de gravitation est nul ($\vec{\mathcal{M}}_P = \overrightarrow{Ps} \wedge \frac{-Gm_sM_P}{r^3}\vec{r} = \frac{-Gm_sM_P}{r^3}\vec{r} \wedge \vec{r} = \vec{0}$) et par l'application du théorème du moment dynamique pour le point s dans le mouvement dans R_P et calculé au point P qui rend égal la dérivée du moment cinétique au moment de la force de gravitation nous sommes bien conduits à constater que ce moment cinétique est constant

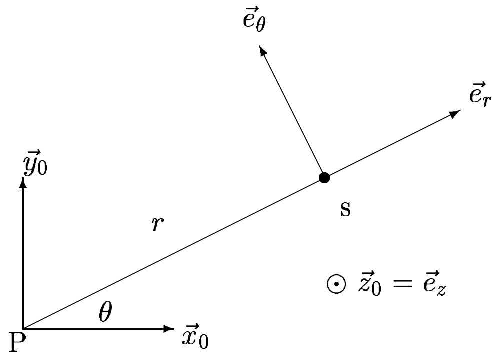


FIG. 2 – *Le plan* Π

Notons :

$$\left\{\begin{array}{rl} \omega \equiv \dot{\theta} & \text{(c'est une vitesse de rotation)} \\ K = Gm_sM_P & \text{(c'est une constante)} \end{array}\right. \tag{10}$$

le moment cinétique $\vec{r} \wedge m_s\dot{\vec{r}}$ devient $m_sr^2\omega\vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta$ c'est-à-dire $m_sr^2\omega\vec{e}_z$.
Sa constance impose que :

$$r^2(t)\omega(t) = C^{te} = r^2(0)\omega(0) \quad . \tag{11}$$

En se souvenant de l'expression des coordonnées cylindriques d'une accélération (sinon, revoir son cours !), l'égalité issue du théorème de la résultante dynamique

$$m_s\ddot{\vec{r}} = -K\frac{\vec{r}}{r^3} \tag{12}$$

projetée sur $\vec{e}_r$ donne :

$$m_s\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right) = -K\frac{1}{r^2} \tag{13}$$

d'où l'équation différentielle

$$m_s\ddot{r} = -K\frac{1}{r^2} + m_sr\omega^2 \tag{14}$$

et si on pose

$$L = m_sr^2\omega \quad \text{(constant)} \tag{15}$$

on écrira :

$$m_s\ddot{r} = -K\frac{1}{r^2} + \frac{L^2}{m_sr^3} \tag{16}$$

et, dans la suite, on utilisera aussi la relation :

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{L}{m_sr^2} \quad . \tag{17}$$

Nous obtenons ainsi par (16) une équation différentielle non linéaire du deuxième ordre sur $r(t)$ où la fonction inconnue est r, et la variable est le temps t. Pour la résoudre, nous allons transformer cette équation en une équation différentielle linéaire de deuxième ordre sur une fonction inconnue intermédiaire W dont la variable est θ.

4.2 Résolution analytique de l'équation différentielle

Si nous explicitons r comme une fonction de l'angle θ puis θ lui-même fonction du temps t, c'est-à-dire $r[\theta(t)]$, alors, par composée de dérivées :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} \tag{18}$$

que nous notons (attention, r' désigne la dérivée de r par rapport à θ et $\dot{g}$ celle de g par rapport au temps) :

$$\dot{r} = r'\dot{\theta} = r'\omega = r'\,\frac{L}{m_s r^2} \quad . \tag{19}$$

Donc, pour la dérivée seconde en temps de r :

$$\begin{aligned}\ddot{r} &= \overset{\bullet}{\overline{(r'\dot{\theta})}} \\ &= \overset{\bullet}{(r')}\,\dot{\theta} + r'\ddot{\theta} \\ &= \left[(r')'\dot{\theta}\right]\dot{\theta} + r'\ddot{\theta}\end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\ddot{r} = r''\,\omega^2 + r'\,\ddot{\theta} \quad . \tag{20}$$

Et pour celle de θ :

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &= \overset{\bullet}{\overline{\left(\frac{L}{m_s r^2}\right)}} \\ &= \frac{L}{m_s}\overset{\bullet}{\overline{\left(\frac{1}{r^2}\right)}} \\ &= \frac{L}{m_s}\left(\frac{1}{r^2}\right)'\,\dot{\theta} \\ &= \frac{-2L}{m_s}\frac{r'}{r^3}\dot{\theta} \\ &= \frac{-2L}{m_s}\frac{r'}{r^3}\,\frac{L}{m_s r^2} \\ &= \frac{-2L^2\,r'}{{m_s}^2\,r^5} \quad .\end{aligned}$$

En reportant cette expression de $\ddot{\theta}$ dans celle de $\ddot{r}$:

$$\ddot{r} = r''\,\omega^2 + r'\left(\frac{-2L^2\,r'}{{m_s}^2\,r^5}\right) \tag{21}$$

$$= \frac{r''L^2}{{m_s}^2\,r^4} - \frac{2L^2\,(r'\,)^2}{m_s r^5} \tag{22}$$

$$= \frac{L^2}{{m_s}^2\,r^4}\left[r'' - \frac{2\,(r'\,)^2}{r}\right] \quad . \tag{23}$$

On s'exprime donc à présent en terme de dérivations par rapport à la variable θ. Nous introduisons dans la suite une inconnue intermédiaire pour obtenir l'équation différentielle linéaire plus facile à intégrer. Cette petite astuce est décrite, notamment, dans [2, 1]. Posons :

$$W(\theta) = \frac{1}{r(\theta)} \tag{24}$$

de là :

$$\begin{aligned} W' &= -\frac{r'}{r^2} && (25)\\ W'' &= -\frac{r''}{r^2} + \frac{2(r')^2}{r^3} && (26) \end{aligned}$$

et pour l'expression de $\ddot{r}$:

$$\begin{aligned} \ddot{r} &= \frac{-L^2}{{m_s}^2\, r^4}\left[-r'' + \frac{2\,(r'\,)^2}{r}\right] && (27)\\ &= -\left(\frac{L}{m_s}\right)^2 \frac{W''}{r^2} && (28) \end{aligned}$$

L'équation différentielle non linéaire (16) devient :

$$-m_s\left(\frac{L}{m_s}\right)^2 \frac{W''}{r^2} = -K\frac{1}{r^2} + \frac{L^2}{m_s r^3} \quad , \tag{29}$$

c'est-à-dire :

$$-\frac{L^2}{m_s} W'' W^2 = -K W^2 + \frac{L^2}{m_s} W^3 \quad . \tag{30}$$

Nous obtenons ainsi une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :

$$W'' + W = m_s \frac{K}{L^2} \tag{31}$$

que nous résolvons comme suit.

L'équation différentielle homogène associée $W'' = -W$ a pour solution générale :

$$W(\theta) = \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta \quad . \tag{32}$$

Une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre est $m_s\frac{K}{L^2}$. La solution générale avec second membre va pouvoir s'écrire :

$$\begin{aligned} W(\theta) &= \frac{1}{r\,[\theta(t)]}\\ &= \alpha\cos\theta + \beta\sin\theta + m_s\frac{K}{L^2} \quad . && (33) \end{aligned}$$

4.3 Positionnement des repères

Les deux constantes α et β sont déterminées en se donnant des conditions initiales sur θ et $r(\theta)$ ce qui revient à définir le positionnement des repères. Un choix simple revient à placer l'axe $\vec{x}_0$ (c'est-à-dire là où $\theta = 0$) à l'instant où le point s est muni d'une R_P-vitesse purement tangentielle (c'est-à-dire parallèle à $\vec{e}_{\theta=0}$; on suppose l'occurence d'un tel cas, c'est, par exemple, le périgée pour une trajectoire elliptique) :

$$\theta\text{-choix}: \theta = 0 \rightarrow \dot{r}_{\theta=0} = 0 \quad , \quad \vec{v}(\theta = 0) \parallel \vec{y}_0 \tag{34}$$

Ce choix simplifie les choses, mais les calculs où on placerait l'axe $\theta = 0$ en un point quelconque de la trajectoire sont tout à fait abordables ($\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$) d'autant qu'il ne faut pas oublier qu'une durée non négligeable peut s'écouler entre le passage en $\dot{r} = 0$ du satellite et le point d'observation du mouvement apparent de s ; de fait, la trajectoire héliocentrique cumulée de P peut être fortement courbée et il faudra donc vérifier à posteriori le bien-fondé de l'hypothèse de P-référentiel galiléen approché (voir aussi le paragraphe application numérique 7).

Dans notre cas, on a $\beta = 0$. En effet, nous inversons (33) :

$$r(\theta) = \frac{1}{\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + m_s \frac{K}{L^2}} \quad . \tag{35}$$

Dérivons par rapport au temps :

$$\dot{r}(\theta) = \frac{\alpha\dot{\theta}\sin\theta - \beta\dot{\theta}\cos\theta}{\left(\alpha \cos\theta + \beta \sin\theta + m_s \frac{K}{L^2}\right)^2} \tag{36}$$

alors la condition θ-initiale $\dot{r} = 0$ en $\theta = 0$ nous permet de déduire $\beta = 0$. Et, finalement, l'équation polaire de la trajectoire s'écrit :

$$r(\theta) = \frac{1}{\alpha \cos\theta + \frac{m_s K}{L^2}} \quad . \tag{37}$$

4.4 Bilan

On obtient ainsi la description θ-paramétrique de la trajectoire plane de s en coordonnées (P,x,y)-cartésiennes :

$$\begin{cases} x(\theta) & = & r(\theta)\cos\theta \\ y(\theta) & = & r(\theta)\sin\theta \end{cases} \tag{38}$$

avec

$$r(\theta) = \frac{1}{\alpha \cos\theta + \frac{m_s K}{L^2}} \tag{39}$$

et α est conditionné par le choix (34) :

$$\alpha = \frac{1}{r_{\theta=0,\dot{r}=0}} - \frac{m_s K}{L^2} \tag{40}$$

où $K = G m_s M_P$ et où le calcul de L est précisé au paragraphe 6 (conditions initiales).

On peut constater, par cette méthode basée plus sur une résolution analytique d'une équation différentielle scalaire, que la trajectoire plane s'écrit bien finalement sous la forme d'une conique (voir Fig. 3)

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos\theta} \tag{41}$$

avec

$$p = \frac{L^2}{m_s K} \quad \text{et} \quad e = p\alpha \tag{42}$$

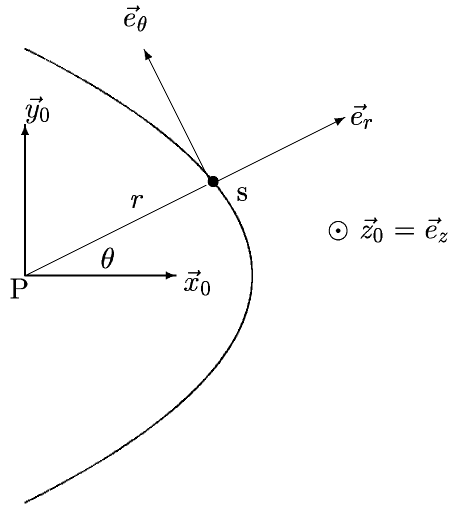


FIG. 3 – *Une conique: P est un foyer et, en $\theta = 0$, on a $\dot{r} = 0$*

On propose dans la suite d'employer également une méthode numérique (on prévoit des cas où on ne dispose pas de solutions analytiques, les ordinateurs sont alors bien utiles).

5 Proposition d'un schéma numérique

Cette méthode numérique est choisie d'après une construction simple basée sur le développement de Taylor. En voici l'idée générale. Nous connaissons le développement de Taylor d'une fonction f :

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \frac{h^2}{2}f''(t) + O(h^3) \quad . \tag{43}$$

De même :

$$f(t-h) = f(t) - hf'(t) + \frac{h^2}{2}f''(t) + O(h^3) \quad , \tag{44}$$

et par sommation :

$$f(t+h) + f(t-h) = h^2 f''(t) + 2f(t) + O(h^3) \quad , \tag{45}$$

soit :

$$f(t+h) = h^2 f''(t) + 2f(t) - f(t-h) + O(h^3) \quad . \tag{46}$$

et en décalant :

$$f(t) = h^2 f''(t-h) + 2f(t-h) - f(t-2h) + O(h^3) \quad . \tag{47}$$

Ce schéma nous permet de déduire ce qui se passe à l'instant t connaissant les deux valeurs précédentes aux instants $t-h$ et $t-2h$, h désignant le pas de temps, à condition de négliger le terme $0(h^3)$. Le projet nous permettra de voir si ceci est valide ou non.

Il peut être effectivement appliqué à l'équation différentielle vectorielle :

$$m_s \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{-Gm_sM_P}{r^3}\vec{r} \tag{48}$$

d'où :

$$\vec{r}(t) = h^2(\frac{-GM_P}{r^3(t-h)})\vec{r}(t-h) + 2\vec{r}(t-h) - \vec{r}(t-2h) + O(h^3) \tag{49}$$

Ce schéma de calcul sera lancé en se donnant les 2 vecteurs-positions initiaux $\vec{r}(t=0)$ et $\vec{r}(t=h)$.

6 Conditions initiales

Plaçons nous dans le cas où la trajectoire observée par l'astronome (que nous remercions par la même occasion pour ne pas imiter l'exemple de Newton vis-à-vis de Robert Hooke !) est une ellipse. Pour fixer les idées, prenons l'exemple de Jupiter ($s \to J$) autour du soleil ($P \to S$) et donnons nous comme origine du temps ($t=0$) la date d'observation du 31 décembre 2001 à 0h00.

Pour cet exemple, l'axe $\vec{x}_0$ (c'est-à-dire là où $\theta = 0$ et $\dot{r} = 0$) correspond à l'axe apogée→périgée de la trajectoire héliocentrique de Jupiter (ellipse dont le soleil est un foyer).

La position initiale s_0 du satellite (Jupiter pour notre exemple) par rapport à sa planète-mère (le soleil pour notre exemple) est *donnée* par :

$$\overrightarrow{Ps_0} = x_0\vec{x}_0 + y_0\vec{y}_0 \tag{50}$$

avec, selon les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x_0 = r_0\cos(\theta_0) \quad \text{avec } r_0 = r(t=0) \text{ et } \theta_0 = \theta(t=0) \\ y_0 = r_0\sin(\theta_0) \end{cases} \tag{51}$$

Il faut en effet bien prendre en compte que la position de l'axe $\vec{x}_0$ (c'est-à-dire encore là où $\theta = 0$ et $\dot{r} = 0$) ne correspond pas obligatoirement à l'origine du temps $t = 0$ (ici, la date du 31 décembre 2001 à 0h00).

Ainsi θ_0 représente la longitude héliocentrique de Jupiter par rapport à la direction de son périhélie.

Pour pouvoir lancer le programme numérique, il faut définir la deuxième position s_1 à l'instant h (le programme sera scandé par le pas de temps h petit) c'est à dire :

$$\overrightarrow{Ps_1} = x_1\vec{x}_0 + y_1\vec{y}_0 \text{ avec } \begin{cases} x_1 = r_1\cos(\theta_1) \quad \text{avec } r_1 = r(t=h) \text{ et } \theta_1 = \theta(t=h) \\ y_1 = r_1\sin(\theta_1) \end{cases} \tag{52}$$

<u>La question est maintenant: comment trouver r_1 et θ_1 ?</u>
Cherchons tout d'abord θ_1 . Si on note $\delta\eta$ l'angle en P balayé par le satellite en décrivant l'arc d'ellipse pendant la durée h, on a évidemment: $\theta_1 = \theta_0 + \delta\eta$ et pour calculer $\delta\eta$ nous utilisons la notion de vitesse aréolaire.

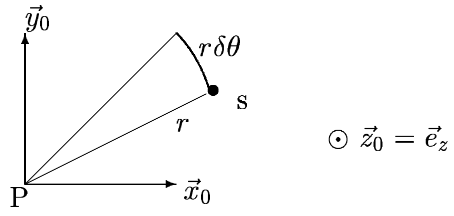


FIG. 4 – *L'aire balayée $\simeq$ demi-rectangle*

La masse m_s et la norme $L = m_s r^2 \omega$ du moment cinétique étant constantes, le terme $r^2\omega/2$ s'écrit aussi $r.(r.\frac{d\theta}{dt})/2$ et représente alors approximativement la surface $r.(r.d\theta)/2$ du secteur de sommet P balayé par le rayon vecteur $\vec{r}$ pendant la durée dt (voir Fig. 4).

On définit ainsi la vitesse aréolaire *constante* $\mathcal{V}$ par

$$\mathcal{V} = r.(r.\frac{d\theta}{dt})/2 \tag{53}$$

Donc, si on connait $\mathcal{V}$, on peut déduire $\delta\eta$ balayé pendant la durée h par :

$$\mathcal{V} = r_0.(r_0\frac{\delta\eta}{h})/2 \tag{54}$$

On relie naturellement cette vitesse aréolaire $\mathcal{V}$ à la période T de rotation du satellite autour de P en disant simplement que le satellite décrit l'ellipse de surface $\pi.a.b$ (a et b sont les deux demi-axes) pendant le temps T d'où la formule :

$$\mathcal{V} = \frac{\pi.a.b}{T} \quad . \tag{55}$$

On peut en déduire le moment cinétique ($L = m_s r^2 \omega$) :

$$L = 2m_s\mathcal{V} \quad . \tag{56}$$

Exemple[3 4] **:** donnons nous (toujours pour une observation d'ellipse) respectivement la constante de gravitation G, les masses m_s et M_P, le demi-grand axe a et l'excentricité e, la longitude θ_0 et la distance r_0. Alors :

– Via (10) on trouve K.

3. Il appartient au lecteur de composer lui-même sa procédure de recherche en fonction des paramètres clés dont il dispose, s'ils suffisent.

4. Pour une ellipse, le paramètre p (voir (42)) s'écrit

$$p = b^2/a \tag{57}$$

- De la relation utile[5] $p = a(1 - e^2)$ on déduit p puis de (57) on déduit le demi-petit axe b.
- Connaissant, à ce stade, les paramètres p,e,r_0,θ_0 on peut tester leur cohérence avec (41) qui n'a pas encore été utilisée.
- De (58) on déduit la période T et de (55) la vitesse aréolaire $\mathcal{V}$.
- Ensuite de (54) on obtient $\delta\eta$ en se fixant un pas de temps h ce qui nous donne enfin $\theta_1 = \theta_0 + \delta\eta$.
- On accède alors à $r_1 = r(\theta_1)$ via (41).

7 Application numérique, repère galiléen approché, problème à deux corps

Considérons le satellite s soumis à l'action de P et à l'action du Soleil (cela fait un problème à trois corps!)[6] et utilisons la formule de compositions des accélérations:

$$\vec{a}(s/R_S) = \vec{a}(s/R_P) + \vec{a}_e(s) + \vec{a}_c(s) \tag{59}$$

avec:

- $\vec{a}(s/R_S)$ accélération de s par rapport au repère *galiléen approché* héliocentrique de Copernic $R_S(S,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et dite encore accélération absolue.
- $\vec{a}(s/R_P)$ accélération de s par rapport au repère $R_P(P,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ et dite encore accélération relative.
- $\vec{a}_e(s)$ accélération d'entraînement de s par le mouvement héliocentrique de P
- $\vec{a}_c(s)$ accélération de Coriolis, elle est nulle du fait que les repères absolu et relatif ont la même orientation.

Appliquons le principe fondamental de la dynamique à s dans son mouvement par rapport à R_S :

$$m_s\vec{a}(s/R_S) = \vec{F}_{\text{grav}}(S \to s) + \vec{F}_{\text{grav}}(P \to s) + \cdots! \tag{60}$$

où

- $\vec{F}_{\text{grav}}(S \to s)$ est l'attraction gravitationnelle de S sur s
- $\vec{F}_{\text{grav}}(P \to s)$ celle de P sur s
- $\cdots!$ représente d'autres objets célestes plus ou moins perturbateurs du mouvement de s et dont la prise en compte simultanée nous amène à des calculs mathématiques difficiles (travaux du mathématicien Poincaré, notamment, sur les problèmes à trois corps) et qui sont abordés de nos jours par des méthodes numériques et algébriques sur ordinateurs.

Alors, si nous combinons (59) et (60), nous obtenons le principe de la dynamique dans le référentiel relatif R_P

$$m_s\vec{a}(s/R_P) = m_s\vec{a} = m_s\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{\text{grav}}(P \to s) + \vec{F}_{\text{grav}}(S \to s) - m_s\vec{a}_e(s) + \cdots! \tag{61}$$

ce qui fait que si nous combinons les formules (55), (56) et (42) nous retrouvons bien la formule de Kepler reliant la période de révolution T au demi-grand axe a de l'ellipse :

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G.M_P}{4\pi^2} \tag{58}$$

5. Voir les éléments de mathématique sur la géométrie de l'ellipse.
6. en toute rigueur, il faudrait aussi examiner les actions des autres objets célestes ! Vu la complexité sous-jacente, une assistance par ordinateur serait fort utile.

où $-m_s\vec{a}_e(s)$ tient lieu de force d'inertie d'entraînement.

En prenant comme valeurs numériques celles extraites de la référence [3] et du site web
`http://www.neufplanetes.org`
et en considèrant comme jeux d'essais les couples (P,s) suivants:
(Jupiter, Io), (Jupiter, Sinope), (Terre, Lune), nous avons évalué le rapport:

$$\frac{\text{action gravitationnelle du soleil sur le satellite}}{\text{action gravitationnelle de } P \text{ sur le satellite}} = \frac{\| \vec{F}_{\text{grav}}(S \rightarrow s) \|}{\| \vec{F}_{\text{grav}}(P \rightarrow s) \|} \tag{62}$$

et en notant :

- M_S la masse du soleil,
- D_{SP} la distance de P au Soleil (on peut prendre un rayon moyen de trajectoire voire l'apogée)
- D_{Ps} la distance du satellite étudié à P.

ce rapport peut se présenter suivant (on prend le cas le plus favorable pour le soleil, voir Fig. 5) :

$$\frac{\frac{m_s M_S}{(D_{SP}-D_{Ps})^2}}{\frac{m_s M_P}{D_{Ps}^2}} \tag{63}$$

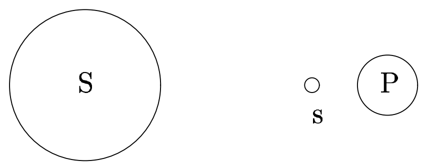


FIG. 5 – *Distances*

On trouve approximativement les ordres de grandeurs:

- (Jupiter, Io): 0,0003
- (Jupiter, Sinope): 1
- (Terre, Lune): 2

De même, pour tenir compte de la courbure de la trajectoire héliocentrique de la planète mère P nous avons évalué le rapport

$$\frac{\text{force d'inertie d'entraînement}}{\text{action gravitationnelle de } P \text{ sur le satellite}} = \frac{\| -m_s\vec{a}_e(s) \|}{\| \vec{F}_{\text{grav}}(P \rightarrow s) \|} = \frac{D_{SP}\left(\frac{2\Pi}{T_{PS}}\right)^2}{\frac{G.M_P}{D_{Ps}^2}} \tag{64}$$

où T_{PS} représente la période de rotation de P autour du Soleil.
On trouve les ordres de grandeurs:

- (Jupiter, Io): 0,0003

– (Jupiter, Sinope): 1
– (Terre, Lune): 2

et, par conséquent, pour une première étude, Jupiter pourra représenter le principal attracteur gravitationnel de Io et l'hypothèse d'un système isolé ($\{$Jupiter, Io$\}$ $\rightarrow$ problème à 2 corps) avec Jupiter comme référentiel galiléen approché semble raisonnable (sous réserve d'évaluer l'influence des interactions mutuelles avec les autres satellites de Jupiter).
Le lecteur pourra, de même, tester si cette approximation via un problème à 2 corps convient également pour le couple (Soleil, Jupiter) ou le couple (Soleil, Terre). Il n'en va par contre pas de même pour l'étude, par exemple, du couple Jupiter-Sinope ou pour le couple Terre-Lune; pour ce dernier, il est clair que l'utilisation de la notion de masse réduite est nécessaire. La solution exacte analytique d'un problème à trois corps reste une question ouverte.

Références

[1] R. Annequin and L. Boutigny. *Cours de sciences physiques – Mécanique I.* Librairie Vuibert, 1972.

[2] C. Kittel, W. D. Knight, and M.A. Ruderman. *Berkeley. Cours de physique. Mécanique. Volume 1.* Librairie A. Colin, 1972.

[3] J.-P. Pérez. *Mécanique. Fondements et applications.* Masson, xx.

Projet pluridisciplinaire en DEUG 2ème année
Mars 2002
Document 1
LOIS DE KEPLER ET HISTOIRE DE NOTRE VISION DU MONDE

Du géocentrisme …

Dans la vision antique, le monde céleste, parfait et immuable, s'oppose au monde terrestre, complexe, corrompu et perturbé. Cette vision, issue de l'école de Pythagore de Samos (580 – 500 av. J. C.) introduit dans le monde une symétrie sphérique destinée à assurer une harmonie parfaite. Pour les pythagoriciens, la Terre est une sphère, chacun des 7 astres alors connus (Lune, Mercure, Venus, Soleil, Mars, Jupiter, Saturne) est attaché à une sphère entourant la Terre, ainsi que les étoiles qui sont toutes regroupées sur une sphère entourant toutes les autres sphères. Pour rendre compte des observations, le modèle a été progressivement raffiné pour aboutir à l'invention d'une théorie explicative nouvelle, dite des épicycles et des excentriques, élaborée par l'école d'Alexandrie, introduite par Appolonius (à qui l'on doit la théorie des coniques mais qui n'a pas songé, ironie de l'histoire, à l'appliquer au mouvement des planètes), développée par Hipparque et Ptolémée. Cette théorie a régné sur le monde jusqu'à Copernic et même longtemps au-delà.

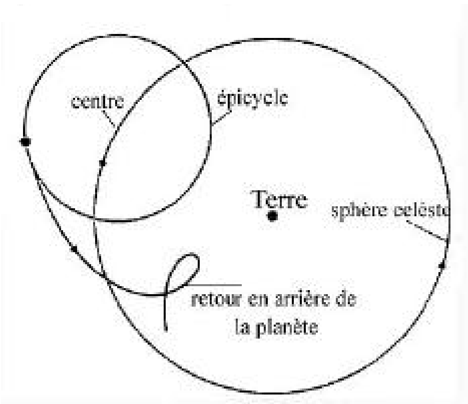


Figure 1

Le principe en est simple : considérons un premier cercle (appelé *déférent*), et faisons se mouvoir sur ce cercle non pas la planète, mais le centre d'un petit cercle (appelé *épicycle*) sur lequel se déplace la planète avec une période plus petite que la période du cercle principal. Vu du centre du déférent, la planète semble se déplacer en moyenne dans la même direction que le centre de l'épicycle, mais en effectuant des boucles. Un couple déférent-épicycle est défini par deux rayons et deux vitesses de rotation (de même signe ou pas), ainsi que par l'angle d'inclinaison du plan de l'épicycle relativement au plan du déférent. On peut ajuster ces paramètres afin d'obtenir le meilleur accord avec l'observation, ce qui offre déjà une grande souplesse, mais il est également possible de mettre plusieurs cercles les uns sur les autres, on arrive alors à construire pratiquement n'importe quelle courbe, même si cela nécessite parfois un nombre considérable d'épicycles. La théorie des épicycles est un outil théorique extrêmement puissant analogue à l'analyse de Fourier.
La science dont l'Occident va hériter d'Alexandrie est donc un produit remarquable, les mathématiques maîtrisent toute la complexité du ciel : l'astrométrie permet la construction d'un catalogue stellaire contenant les coordonnées d'un millier d'étoiles, les éclipses et conjonctions sont prévues correctement. Les résultats de 4 siècles de travail sont publiés sous la forme d'une grande synthèse qui sera la référence pendant un millénaire et demi : l'*Amalgeste* de Ptolémée.

…à l'héliocentrisme.

Dès le XVe siècle, le philosophe Nicolas de Cues met sur le même plan la terre et les cieux. Il ouvre la voie à Copernic (1473 – 1543) qui identifie la structure de la terre à celle des astres stellaires en les dotant tous d'un même mouvement circulaire, et réalise la 1ère étape de l'identification (au sens de rendre identique) de la matière composant l'Univers et donc de la destruction de la structure hiérarchique du Cosmos. Pourquoi une telle remise en question à cette époque alors que la technique n'a guère évolué depuis Ptolémée ?

D'abord, il y a du recul : les observations astronomiques s'étendent sur un millénaire et demi, les petits effets systématiques, imperceptibles sur une centaine d'années, ont eu tout le temps de se manifester (par exemple sur le calendrier, ce qui a nécessité la réforme grégorienne au 16ème siècle). De plus, les techniques de calcul de Ptolémée ont été triturées dans tous les sens, en modifiant les paramètres et le nombre de cercles sans parvenir à un accord satisfaisant avec l'observation. Enfin et surtout, le climat intellectuel était propice. Il convient de signaler cependant que Copernic conserve un Monde fini, enfermé dans une sphère portant les étoiles fixes et contenant des sphères concentriques porteuses des planètes (simplement elles ne tournent plus autour de la Terre). Ce modèle ne s'accorde cependant pas avec les observations détaillées (les trajectoires des planètes ne sont pas circulaires), ce qui conduit Copernic à ajuster le mouvement à l'aide d'épicycles, de plus il est contraint « d'excentrer » le soleil (aucun centre de déférent ne coïncide avec le soleil). Pour rendre compte des mouvements de la lune, du soleil et des planètes il a besoin de 34 cercles différents ! L'ouvrage de Copernic, intitulé « *De revolutionibus Orbium coelestum* » est un monument de détails mathématiques. Pendant le siècle qui suivit sa publication, rares seront les individus qui pénétreront ces calculs ardus.

Kepler (1571-1628) avait senti l'incongruité du système de Copernic selon lequel les planètes ne tournaient pas autour du soleil, mais autour d'un point où il n'y a rien. Le soleil est, dans ce contexte, une simple source de lumière, et le pivot du Monde est vide. Pour Kepler, le soleil doit jouer un rôle fondamental dans le système planétaire.

Le système de Copernic permet de trouver, à partir des observations, les distances entre les planètes et le soleil, Kepler s'est interrogé sur le mécanisme à l'origine des valeurs obtenues. D'autre part il veut rendre compte proprement du mouvement des planètes, en particulier de celui de Mars qui a toujours posé un problème (c'est la planète dont l'orbite est la plus excentrique)[1]. Le travail de Kepler était inspiré par deux idées : le mouvement des planètes doit être régi par des lois simples (et donc être exprimé par des relations géométriques simples), et le soleil doit être à l'origine de ce mouvement.

Pour aller plus loin Kepler a besoin de données précises qui lui seront fournies par les observations exceptionnelles de Tycho Brahé réalisées entre 1576 et 1588 à l'observatoire de l'île Hven au Danemark. Le travail d'analyse des données, réalisé par Kepler, fut de très longue haleine : une dizaine d'années. Après maintes tentatives infructueuses, Kepler se convainc qu'aucune superposition « raisonnable » de cercles ne convient. Il cherche donc d'autres manières de caractériser les trajectoires.

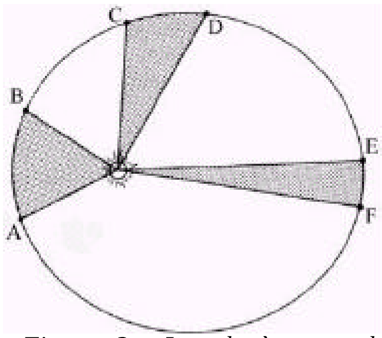


Figure 2 : La planète met le même temps pour aller de A à B, de C à D et de E à F, les zones grisées ont la même surface.

Il dégage d'abord ce que nous appelons habituellement (et bêtement puisque c'est chronologiquement faux !) la deuxième loi de Kepler : le rayon vecteur qui joint le soleil à une planète balaie des aires égales en des temps égaux.

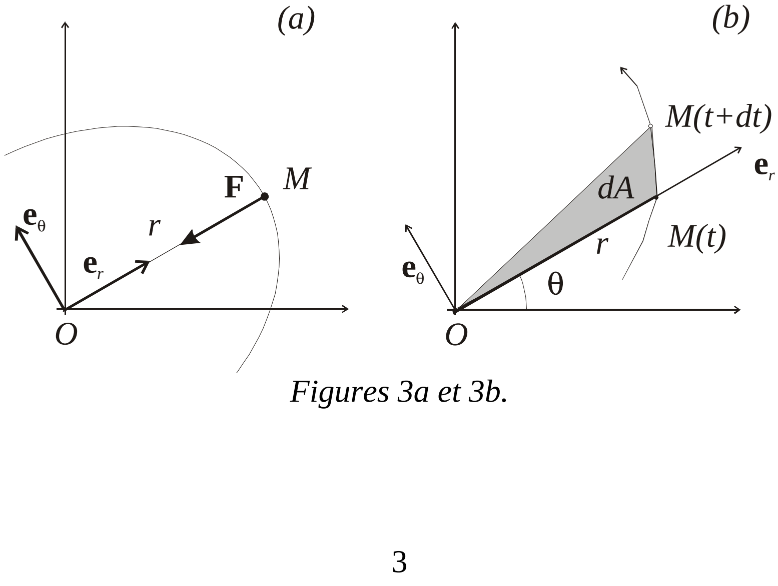
Après des échecs répétés, Kepler observe que certaines des formules empiriques qui apparaissent dans ses calculs sont la représentation algébrique d'ellipses, dont un des foyers est occupé par le soleil. Ce que nous appelons aujourd'hui la 1ère loi de Kepler donne une description très simple du système planétaire en comparaison avec les modèles précédents. De plus le rôle fondamental du soleil est mis en évidence.

[1] Une approximation de l'orbite de Mars à l'aide de cercles nécessite un grand nombre d'épicycles et donc des calculs hors de portée des moyens disponibles à l'époque, il est d'ailleurs heureux que les ordinateurs n'aient pas existé car les progrès conceptuels en astronomie auraient probablement été largement retardés. . .

Enfin Kepler découvre une troisième loi : pour l'ensemble des planètes, le carré de la période est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse. Cette loi suggère que le mouvement de toutes les planètes est régi par un seul principe physique. Il n'y a pas de différence essentielle entre la Terre et les autres planètes.
L'idée d'une force centrale responsable de la déflexion du mouvement inertiel des planètes, et d'une explication de leur trajectoire courbe comme résultant de cette unique force variant en proportion inverse du carré de la distance, est due à Robert Hooke, de même que l'identité de cette force à la gravité terrestre. Robert Hooke était probablement le premier expérimentateur de son temps, mais ses talents mathématiques étaient loin d'égaler ceux de Newton. La mésentente et la jalousie qui régnait entre ces deux hommes ne les empêchait pas d'échanger une correspondance fournie, même si Newton a toujours refusé la collaboration que sollicitait Hooke. C'est par l'intermédiaire de cette correspondance que l'information fut diffusée à Newton qui l'utilisa pour mener à bien ses calculs. Il put montrer qu'une force centrale permettait de retrouver la loi des aires (le rayon vecteur balaie des aires égales en des temps égaux), et qu'une force centrale en $1/r^2$ permet d'obtenir comme trajectoire une conique (dont l'ellipse est un cas particulier). La force, dans le cas de l'ellipse, est dirigée vers un des foyers.
Montrons qu'une force centrale conduit bien à la loi des aires : notons M un point matériel de masse m soumis uniquement à une force ayant pour origine le point O, fixe dans le référentiel (R). On suppose que l'intensité de cette force ne dépend que de la distance $r = OM$: $\vec{F} = F(r)\overrightarrow{e_r}$ ($F(r)$ peut être positif ou négatif). Comme la force est toujours colinéaire au vecteur radial, le produit vectoriel : $\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$, que l'on appelle le *moment de la force* $\vec{F}$ par rapport au point O, est toujours nul.
Le principe fondamental s'écrit ici : $m\vec{a}(M) = \vec{F} = F(r)\overrightarrow{e_r}$. Si on fait le produit vectoriel par $\overrightarrow{OM}$ de chaque coté on voit que $\vec{0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}(M)$, ou encore puisque :

$$\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M)\right) = \vec{V}(M) \wedge m\vec{V}(M) + \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{a}(M) = \vec{0}$$

Le *moment cinétique en O* : $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{V}(M)$ est constant. On voit que les vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{V}(M)$ sont à tout instant dans le plan vectoriel orthogonal à $\vec{L}$. Le point M évolue dans un plan contenant O. Si on se place dans ce plan, en coordonnées polaires $\vec{V}(M) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, $\vec{L} = r\overrightarrow{e_r} \wedge (\dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}) = r^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_z}$, les coordonnées (r,θ) satisfont l'équation différentielle du 1er ordre : $r^2\dot{\theta} = cste$. Notons que $\dot{\theta}$ est de signe constant, le point tourne toujours dans le même sens autours de *O*. Par ailleurs, à part si $\vec{L}$ est nul (auquel cas il est facile de voir que le mouvement est rectiligne), le point *M* ne peut passer en *O*.



Figures 3a et 3b.

On voit sur la figure (b) la position du point M à deux instants espacés de dt. L'aire dA balayée par $\overrightarrow{OM}$ pendant le temps dt correspond au 1er ordre à la surface du triangle $(O, M(t), M(t+dt))$, or :

$$d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+dt) - \overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{M(t)M(t+dt)} = \vec{V}(M)dt$$

L'aire du triangle est égale à la base multipliée par la hauteur et divisée par 2. La base est $OM(t+dt)$, la hauteur : $\overrightarrow{M(t)M(t+dt)} \cdot \overrightarrow{e_\theta} = \vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{e_\theta} dt$. On peut donc approcher la base par r au 1er ordre, et la hauteur s'exprime en remplaçant la vitesse par son expression en polaires : $\vec{V}(M) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$. On obtient alors pour l'aire balayée : $dA = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}\, dt$.

On a vu que $r^2\dot{\theta}$ est constante donc $dA/dt = cste$, l'aire balayée par le rayon vecteur pendant une certaine durée est proportionnelle à cette durée, et ne dépend que de cette durée (et non du moment considéré).

Nous allons maintenant examiner les deux autres lois de Képler.

La première affirme que la trajectoire des planètes est une conique dont un foyer est occupé par le soleil. L'équation d'une conique en coordonnées polaires (pôle : O, axe : O$\mathbf{i}_0$) s'écrit : $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\theta}$, où p est le paramètre, O est le foyer, (Δ) la directrice, $e = \dfrac{OM}{HM}$ est l'excentricité de la conique, $\left\| OH_0 \right\| = \dfrac{p}{e}$ (cf. annexe sur les coniques à la fin de ce document).

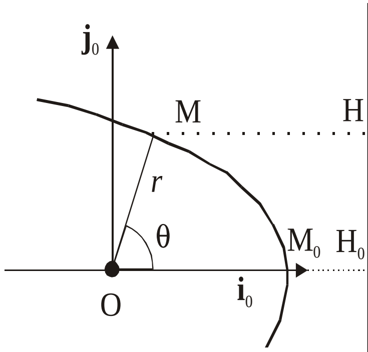


Figure 4

On considère l'attraction newtonienne exercée par le Soleil de centre O et de masse m_s, sur une planète de centre M et de masse m_p : $\vec{F} = -\dfrac{Gm_p m_S}{r^3}\vec{r} = -\dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ (en notant $r = \left\| \overrightarrow{OM} \right\|$ et $K = Gm_p m_S$). Le principe fondamental s'écrit ici : $m_p \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\dfrac{K}{r^2}\overrightarrow{e_r}$, et on a vu que d'après la loi des aires : $r^2\dot{\theta} = C$ où $C = \dfrac{L}{m_p}$ est la constante des aires. En supposant que C est non nulle (sinon trajectoire rectiligne : cas dégénéré), on a : $r^2 = \dfrac{C}{\dot{\theta}}$

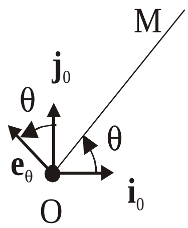


Figure 5

donc : $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -\dfrac{K}{m_p C}\dot{\theta}\overrightarrow{e_r}$, mais on sait que : $\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{d\theta} = -\overrightarrow{e_r}$, soit : $-\dot{\theta}\overrightarrow{e_r} = \dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$, si bien que, par intégration, $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \dfrac{K}{m_p C}\overrightarrow{e_\theta} + \overrightarrow{cste} = \dfrac{K}{m_p C}\left(\overrightarrow{e_\theta} + \vec{c}\right)$. On utilise les coordonnées polaires (pôle O, axe polaire O$\mathbf{i}_0$) avec $\overrightarrow{j_0} = \dfrac{\vec{c}}{\left\|\vec{c}\right\|}$; la vitesse s'écrit : $\vec{V}(M) = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$, donc $\vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{e_\theta} = r\dot{\theta} = \dfrac{C}{r}$, or : $\vec{V}(M) \cdot \overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{K}{m_p C}\left(\overrightarrow{e_\theta} + \vec{c}\right) \cdot \overrightarrow{e_\theta} = \dfrac{K}{m_p C}\left(1 + \vec{c} \cdot \overrightarrow{e_\theta}\right)$.

Comme $\vec{c}\cdot\overrightarrow{e_q}=\|\vec{c}\|\overrightarrow{j_0}\cdot\overrightarrow{e_q}=\|\vec{c}\|\cos(q)$, on a : $\dfrac{C}{r}=\dfrac{K}{m_pC}\left(1+\|\vec{c}\|\cos q\right)$, soit :

$$r=\frac{m_pC^2}{K}\frac{1}{1+\|\vec{c}\|\cos q}$$

équation d'une conique d'excentricité $\|\vec{c}\|$, et de paramètre : $p=\dfrac{m_pC^2}{K}=\dfrac{L^2}{m_pK}$. Il est facile de voir sur la figure 4, que le choix de la condition initiale (constante $\vec{c}$) correspond au point M_0 de la figure, qui s'appelle le périhélie (point de l'ellipse le plus proche de *O*). On a donc :

$$r=\frac{L^2}{m_pK}\frac{1}{1+\|\vec{c}\|\cos q}=\frac{1}{a\cos q+\frac{m_pK}{L^2}}$$

avec : $a=\left(\dfrac{1}{r_0}-\dfrac{m_pK}{L^2}\right)$ où $r_0=r(0)$ est la distance OM_0 séparant le Soleil du périhélie. L'excentricité de la conique est alors : $e=\|\vec{c}\|=\left(\dfrac{L^2}{m_pKr_0}-1\right)$.

3ème loi de Képler : le carré de la période est proportionnel au cube du grand axe de l'ellipse. Plus précisément on va montrer que si *a* est le demi grand axe de l'ellipse,

$$\frac{a^3}{T^2}=\frac{G}{4p^2}m_S$$

La surface de l'ellipse est $p\,ab$, elle est balayée en une période *T*. La loi des aires ($\dfrac{dA}{dt}=\dfrac{C}{2}$) montre alors que $2p\,ab=CT$, la constante des aires est liée au paramètre de l'ellipse par la relation : $p=\dfrac{L^2}{m_pK}=\dfrac{m_pC^2}{K}=\dfrac{C^2}{Gm_S}$, d'autre part on a : $p=\dfrac{b^2}{a}$ où *a* et *b* sont respectivement le demi grand axe et le demi petit axe de l'ellipse (cf. annexe), soit : $C^2=m_SG\dfrac{b^2}{a}$, donc $4p^2a^2b^2=C^2T^2=m_SG\dfrac{b^2}{a}T^2$, on en tire de suite : $\dfrac{a^3}{T^2}=\dfrac{G}{4p^2}m_S$. Tous les calculs que nous avons fait sont en fait des approximations obtenues en négligeant la masse de la planète devant celle du Soleil, ce qui correspond à confondre le centre de gravité du système Soleil-planète avec le centre du Soleil. Ces résultats restent valables pour tout système à deux corps mais il faut en principe écrire le principe fondamental au centre de gravité du système, ce qui conduit à des expressions analogues avec (m_S+m_p) à la place de m_S. C'est ce qu'on est obligé de faire pour des étoiles doubles : les étoiles sont de masses comparables.

Projet pluridisciplinaire en DEUG 2ème année
Mars 2002
Document 2 : Etude du mouvement des 4 principaux satellites de Jupiter
Yann Le Grand – GMCM – UFR " SPM "

1- Position du problème et hypothèses simplificatrices

Par l'observation et la photographie (argentique ou numérique) au télescope, il est aisé de déterminer l'élongation des 4 principaux satellites de Jupiter, à savoir Io (I), Europe (II), Ganymède (III) et Callisto (IV) (cités par ordre de distances croissantes par rapport au primaire qu'est Jupiter), c'est-à-dire leur distance (que l'on pourra exprimer en unité de rayons de Jupiter) par rapport à Jupiter projetée sur le plan du ciel.

Le but de ce qui suit est d'introduire les différents paramètres et expressions utiles au calcul des élongations de ces 4 satellites.

Pour simplifier la mise en équation du problème et réduire le nombre de paramètres à prendre en compte, on fait les hypothèses (justifiées à posteriori) suivantes :

- on suppose les orbites de la Terre et de Jupiter coplanaires, le plan orbital de Jupiter n'est en effet incliné que de 1,18° par rapport au plan de l'écliptique (plan orbital de la Terre), ce qui conduit à une erreur relative de l'ordre de 2.10^{-4} sur les longitude et distance héliocentriques,
- on néglige l'excentricité des orbites des 4 satellites (eI=0,004, eII=0,009, eIII=0,002 et eIV=0,007), ce qui entraine une erreur maximale de 1° environ sur la position angulaire de II, plus faible encore pour les autres,
- on néglige l'inclinaison des plans orbitaux de I, II, III et IV par rapport au plan équatorial de Jupiter (max de 0,5° pour II),
- on néglige l'inclinaison du plan équatorial de Jupiter sur le plan de l'écliptique (3,12°), car ici on s'intéresse uniquement à l'élongation (distance projetée sur le plan du ciel dans la direction du plan équatorial de Jupiter) ; on pourra éventuellement en tenir compte si on décide de prévoir les coordonnées rectangulaires (Xi,Yi) des satellites. En fait, on négligeant l'inclinaison, on annule la composante Yi,
- on néglige les perturbations des orbites des satellites, essentiellement produites par les interactions mutuelles. Ces interactions peuvent être prises en compte sous forme de fonctions périodiques de périodes égales aux périodes synodiques des satellites (périodes d'alignement), et ne sont donc pas cumulatives (en outre elles modifient de moins de 1% le rayon des orbites).

Par contre il faut tenir compte de l'excentricité de l'orbite de la Terre (eT=0,0167) et surtout celle de Jupiter (eJ=0,0485), sous peine de commettre une erreur sur la longitude écliptique égale à la différence maximale entre l'anomalie vraie V (angle du mouvement vrai, elliptique) et l'anomalie moyenne M (angle du mouvement moyen, circulaire). Cette erreur, exprimée en degrés, est de l'ordre de $360.e/\pi$. Elle est supérieure à 5° pour Jupiter, et se répercute directement sur l'élongation qui, comme on le montre dans la suite, dépend de la longitude des planètes.

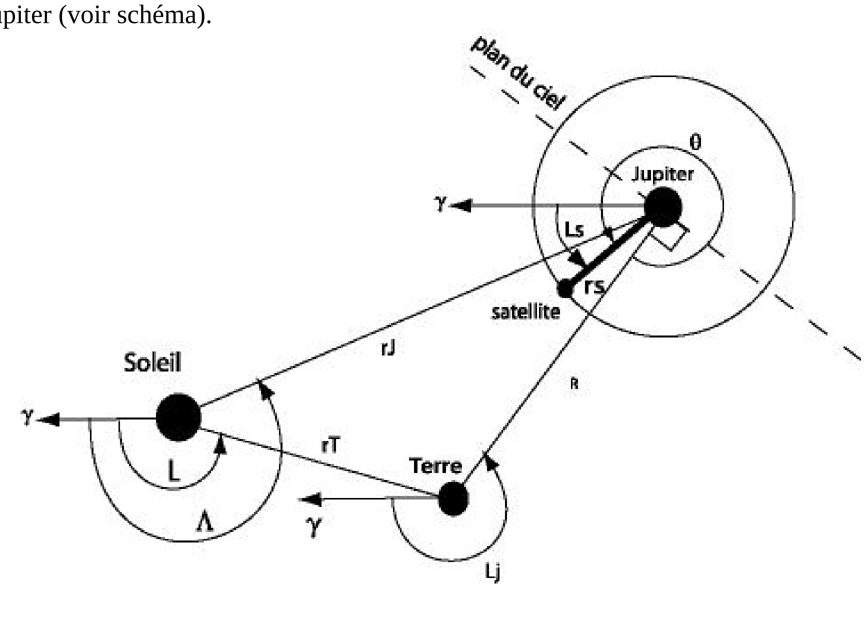
C'est donc au niveau des trajectoires des planètes (Terre et Jupiter) et non de celles des satellites de Jupiter qu'il pourra être intéressant de résoudre numériquement les équations du mouvement.

2- Calcul de l'élongation

Compte-tenu des hypothèses précédentes, les orbites de la Terre, de Jupiter et de ses 4 principaux satellites seront supposées coplanaires, leur plan commun étant le plan de l'écliptique.

Dans ce plan, les angles, qu'on appelle longitudes écliptiques, ont pour référence le point γ (gamma). Ce point situé à l'infini, qu'on suppose représenter une direction fixe (sur une échelle de temps courte, c'est-à-dire inférieure à la période de précession des équinoxes d'environ 26000 ans) par rapport aux étoiles du fond du ciel (référentiel galiléen), correspond à l'une des 2 intersections du cercle écliptique et de l'équateur céleste, tous deux de rayons indéfinis. C'est aussi la direction du Soleil, vu depuis la Terre, à l'équinoxe de printemps.

Pour déterminer l'élongation s d'un satellite à l'instant t, on peut simplement considérer le triangle formé par le Soleil, la Terre et Jupiter (voir schéma).



On introduit d'abord 2 angles : la longitude planétocentrique du satellite notée Ls(t) et la longitude géocentrique de Jupiter notée Lj (t). L'élongation d'un satellite dont l'orbite a un rayon rs considéré ici constant est alors donnée par :

$$s(t)= rs \sin\theta(t),$$

où $\theta(t)$, l'angle de phase, exprimé en degrés, s'écrit :

$$\theta(t) = Ls(t) - Lj\,(t) + 180°.$$

a- calcul de Ls(t)

Le mouvement du satellite autour de Jupiter étant considéré uniforme, Ls(t) est une fonction linéaire du temps (mouvement circulaire) :

$$Ls(t) = 360\, t/Ps + Ls^o(t),$$

où Ps est la période orbitale du satellite et $Ls^o(t)$ sa longitude planétocentrique à une date référence. On donne les périodes orbitales (par rapport au point γ) des satellites I, II, III et IV, exprimées en jours de 24h (données du Bureau des Longitudes):

PI= 1,769138 ; PII= 3,551181, PIII= 7,154553 et PIV= 16,689018.

Il est important d'avoir une grande précision sur ces périodes si on dispose des conditions initiales $Ls^o(t)$ à une date référence éloignée de la date du calcul (par exemple 100 ans), sous peine de trouver n'importe quoi !

Les éléments des orbites des satellites I, II, III et IV recalculés pour une date de référence proche de la notre (N = 0 le 00 janv. 2002 à 0hTU = 31 déc. 2001 à 0hTU) peuvent s'écrire :

LI = 203,48893 (N – R/173) + 140,996 et rI = 5,9059 RJ *
LII = 101,37473 (N – R/173) + 4,283 et rII = 9,3969 RJ
LIII= 50,31761 (N – R/173) + 205,404 et rIII = 14,989 RJ
LIV = 21,57107 (N – R/173) + 333,906 et rIV = 26,3641RJ
* RJ = 1 rayon équatorial de Jupiter = 71447 km

Dans ces expressions, N représente le temps écoulé, exprimé en jours de 24h, entre la date référence et l'instant de l'observation, et R/173 le temps mis par la lumière pour parvenir du système de Jupiter, situé à la distance R, exprimée en unité astronomique (1 u.a.= 149,6 millions de km) . En effet, à la date N on observe le système tel qu'il était à la date N – R/173. Compte-tenu des distances en jeu et de la période des satellites, ce délai ne peut pas être négligé. La distance R , qui dépend du temps, peut être calculée si connaît les 4 quantités suivantes à la date du calcul:

rT, rJ: respectivement les distance s héliocentriques de la Terre et de Jupiter,

L et Λ : respectivement les longitudes écliptiques héliocentriques de la Terre et de Jupiter.

Dans le triangle Soleil, Terre, Jupiter (STJ), R est simplement donné par :

$$R= [rT^2+ rJ^2- 2\, rT.rJ.\cos(\Lambda - L)]^{1/2}$$

Ces 4 quantités peuvent être calculées si on connaît les conditions initiales et les paramètres orbitaux des planètes (longitude du périhélie, demi grand-axe, excentricité). C'est ce calcul qui fera l'objet de la simulation numérique.

b- calcul de Lj(t)

De même que pour R, il suffit de connaître rT, rJ, L et Λ pour déterminer Lj(t), la longitude géocentrique de Jupiter. Dans le triangle STJ, on a :

$$Lj = \arctan[\{rT.\sin(\Lambda - L)\}/\{rJ - rT.\cos(\Lambda - L)\}] + \Lambda$$

Comme on néglige l'inclinaison du plan orbital de Jupiter, on a, aussi bien pour la Terre que pour Jupiter :

$$L(t), \Lambda(t) = V_{T,J}(t) + \underline{\omega}_{T,J},$$

où $V_{T,J}(t)$ représente l'anomalie vraie de la Terre et de Jupiter respectivement (ici équivalente à une longitude héliocentrique repérée par rapport aux directions des périhélies) et où $\underline{\omega}_{T,J}$ est ici la longitude héliocentrique du périhélie de la Terre et de Jupiter respectivement (quantités constantes sur une échelle de temps courte et comptées à partir de la direction du point γ, origine des longitudes).

Pour pouvoir calculer L(t) et $\Lambda(t)$ à une date quelconque, il faut donc connaître d'une part l'anomalie vraie $V^o_{T,J}$ de la Terre et de Jupiter à une date référence et d'autre part $\underline{\omega}_{T,J}$.

Compte-tenu de la date référence choisie ici (00 janv. 2002 à 0hTU = 31 déc. 2001 à 0hTU), on a, au bout du temps N exprimé en jours (N représente l'instant de l'observation sur Terre):

$$L, \Lambda = V_{T,J}(N-R/173) + V^o_{T,J} + \underline{\omega}_{T,J},$$

où, pour la Terre : V^o_T= 356,44°, $\underline{\omega}_T$= 102,77° et pour Jupiter : V^o_J= 86,74°, $\underline{\omega}_J$= 14,17°.

Si on est capable de calculer $V_{T,J}$, rT et rJ (objet du projet informatique) à la date N-R/173 (pour simuler l'observation à la date N), on peut en déduire L , Λ et R (<u>*remarque*</u> *: pour calculer R il faut connaître L et L et vice versa, mais comme L et L varient peu pendant l'intervalle de temps R/173, on peut, pour calculer R, utiliser les valeurs de L et L calculées en négligeant ce délai, c'est bien suffisant, puis recalculer plus précisément L et L en tenant compte cette fois de ce délai*) puis finalement Lj (t= N-R/173), c'est-à-dire Lj à la date N de l'observation.

Connaissant Lj (N-R/173) et Ls (N-R/173) pour les 4 satellites, on peut alors en déduire leur élongation apparente (car différée du temps R/173) à la date d'observation N. On rappelle que :

s(N)= rs sin [Ls (N-R/173) - Lj (N-R/173) + 180°].

3- Mise à l'épreuve du modèle sur un exemple

On peut facilement vérifié la véracité du modèle en se plaçant à la date d'observation N = R/173, car les valeurs de Ls, L et Λ à cette date correspondent aux conditions initiales, il n'y a donc aucun calcul (numérique) supplémentaire à faire dans ce cas. A cette date, les valeurs de longitudes planétocentriques des satellites Ls sont donc:

LI = 140,996° (rI = 5,9059 RJ),
LII = 4,283° (rII = 9,3969 RJ),
LIII= 205,404° (rIII = 14,989 RJ),
LIV = 333,906° (rIV = 26,3641RJ).

De même pour les longitudes héliocentriques de la Terre et de Jupiter à la date N = R/173 :

$L= V^o_T+ \underline{\omega}_T= 356{,}44°+102{,}77°= 99{,}21°$,
$\Lambda= V^o_J+ \underline{\omega}_J= 86{,}74°+14{,}17°= 100{,}91°$.

La seule concession à faire à ce niveau du calcul est d'utiliser l'équation de la trajectoire (elliptique) en coordonnées polaires pour déterminer rT et rJ à la date N = R/173 (normalement c'est la résolution numérique qui donne ces valeurs) :

$r = a\,(1-e^2) / [1+e.\cos V]$.

Ici, V prend la valeur V^o, c'est-à-dire pour la Terre V^o_T = 356,44° et pour Jupiter V^o_J = 86,74°. Comme les demi grand-axes a des orbites de la Terre et de Jupiter valent respectivement 1 u.a. et 5,202 u.a. et les excentricités 0,0167 et 0,0485, on trouve :

rT= 0,98332 u.a. et rJ=5,1755 u.a.,

Ces valeurs et celle de (Λ – L) = 1,7° permettent alors de calculer la distance Terre-Jupiter, ici :

$R= [rT^2+ rJ^2- 2\, rT.rJ.\cos(\Lambda - L)]^{1/2}= 4{,}1927$ u.a..

Dès lors, la longitude géocentrique de Jupiter peut être calculée :

$Lj = \arctan[\{rT.\sin(\Lambda - L)\}/\{rJ - rT.\cos(\Lambda - L)\}] + \Lambda = 101{,}31°$.

On en déduit finalement l'élongation s (N=R/173) des 4 satellites galiléens à la date d'observation N=R/173, c'est-à-dire le 31 déc.2001 à (R/173)hTU, où encore comme R= 4,1927 u.a, à 00h35mn TU environ, soit 01h35mn temps local (heure d'hiver = heure TU+1).

Nom et n° du satellite de Jupiter	Longitude planéto-centriqueLs (°)	rayon de l'orbite : rs (en RJ)	angle de phase : θ (°)	**élongation s calculée** (en RJ)	Position / Jupiter	**élongation s " exacte "** : *bureau des longitudes*	**élongation s " exacte "** : *bureau des longitudes à N+1h*
Io (I)	140,996	5,9059	219,68	**-3,8**	EST	**-3.9**	-4.5
Europe (II)	4,283	9,3969	82,97	**9,3**	OUEST	**9.2**	9.3
Ganymède (III)	205,404°	14,989	284,09	**-14,5**	EST	**-14.4**	-14.2
Callisto (IV)	333,906°	26,3641	52,91	**21,0**	OUEST	**21.0**	21.2

Si on compare les élongations calculées à partir de ce petit modèle coplanaire aux élongations données par le Bureau des Longitudes (Observatoire de Paris), on trouve un très bon accord (l'erreur ne dépasse pas 2,5% pour Io et est inférieure au % pour les autres satellites) en valeur relative, ce qui montre à posteriori la validité du modèle et des approximations faites. Les élongations données par le Bureau des Longitudes pour une date située 1 heure après l'observation sont aussi reportées (dernière colonne). En 1 heure, on constate que c'est l'élongation de Io(I) qui a changé le plus significativement (c'est normal car c'est le satellite à plus courte période !), ce qui donne une idée de la précision du modèle et montre en outre qu'il ne faut pas négliger le temps de propagation de la lumière (terme en R/173 ~ 35 à 50 mn selon les positions relatives de la Terre et de Jupiter) dans les simulations, et ce d'autant plus que le satellite possède une plus courte période.

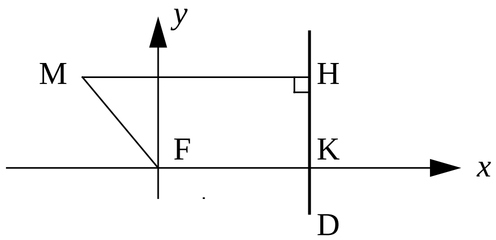
Quelques éléments sur les coniques

1. Définition

Étant donnés une droite *D*, un point *F* n'appartenant pas à *D*, et un réel *e>0*, on appelle *conique* l'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à *F* et à *D* est égal à *e*.

Cette conique est :

- une ellipse si *e<1*
- une parabole si *e=1*
- une hyperbole si *e>1*



$$\frac{MF}{MH} = e$$

F est appelé *foyer*, *D* est la *directrice* associée à *F*, et *e* est l'*excentricité* de la conique

2. Equation cartésienne

Notons $\lambda = FK$ (distance de *F* à la droite *D*), et $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ les coordonnées d'un point *M* de la conique dans le repère $(F, \overrightarrow{Fx}, \overrightarrow{Fy})$.

On a : $\frac{MF}{MH} = e \quad \Leftrightarrow \quad MF^2 - e^2MH^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - e^2(\lambda - x)^2 = 0 \qquad (1)$

<u>NB</u> : les points de la conique situés sur l'axe (Fy) (ie $x = 0$) ont une ordonnée qui vérifie $y^2 = e^2\lambda^2$, c'est-à-dire $y = \pm e\lambda$. On pose $p = e\lambda$, c'est le *paramètre* de la conique.

Ainsi (1) devient : $x^2 + y^2 - e^2\left(\frac{p}{e} - x\right)^2 = 0$

c'est-à-dire $x^2(1 - e^2) + y^2 + 2epx - p^2 = 0 \qquad (2)$

Ceci est l'équation générale d'une conique dans le repère représenté ci-dessus.

Cas particulier de l'ellipse (*e* < 1) :

On cherche à amener le centre du repère au centre de symétrie de l'ellipse.

L'équation (2) est visiblement symétrique en y (invariante si on change y en -y).

Posons $X = x + c$, et cherchons c pour que la transformation $X \to -X$ laisse invariante l'équation (2) :

On a : $(X - c)^2(1 - e^2) + y^2 + 2ep(X - c) - p^2 = 0$

d'où $X^2(1 - e^2) + y^2 + 2X(ep - c(1 - e^2)) + c^2(1 - e^2) - 2epc - p^2 = 0$

Il faut donc que $ep - c(1 - e^2) = 0$, c'est-à-dire $c = \frac{ep}{1 - e^2}$.

En notant O le centre de l'ellipse ($\overline{OF} = c$) et $Y = y$, on a finalement dans le repère $(O, \overrightarrow{OX}, \overrightarrow{OY})$:

$$X^2(1-e^2) + Y^2 + \frac{e^2p^2}{(1-e^2)^2}(1-e^2) - 2ep \cdot \frac{ep}{1-e^2} - p^2 = 0$$

d'où $$X^2 \cdot \frac{(1-e^2)^2}{p^2} + Y^2 \cdot \frac{(1-e^2)}{p^2} - 1 = 0$$

ie $$\frac{X^2}{\frac{p^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{p^2}{1-e^2}} = 1$$

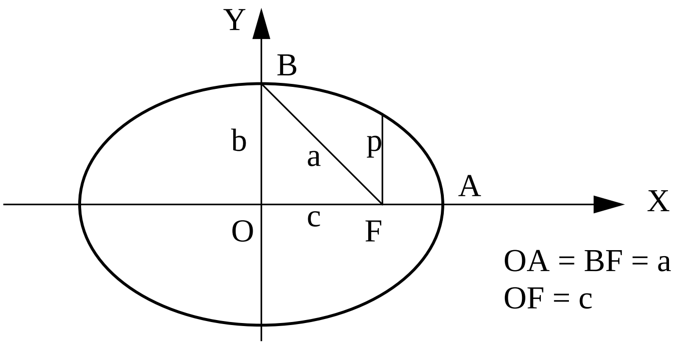
ou encore $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, formule que vous devez déjà connaître ...

NB : on a ici $a = \frac{p}{1-e^2}$ (demi grand axe), $b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}}$ (demi petit axe), et (rappel) $c = \frac{ep}{1-e^2}$

d'où également $a^2 = b^2 + c^2$, et aussi $p = \frac{b^2}{a}$, ainsi que $e = \frac{c}{a}$

On remarque d'autre part que $-a \le X \le a$ et $-b \le Y \le b$, ce qui indique (si besoin était !) que l'ellipse n'a pas de branche infinie.

Représentation des paramètres :



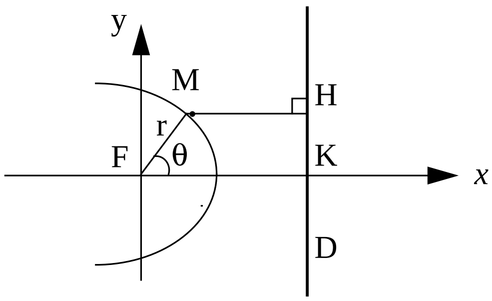
3. Equation polaire

On replace ici le centre du repère (appelé *pôle*) au foyer F

On note $r = FM$, et θ l'angle $(\overrightarrow{Fx}, \overrightarrow{FM})$

On a $MH = FK - r\cos\theta$

$$= \frac{p}{e} - r\cos\theta$$



et donc $\frac{MF}{MH} = e \Leftrightarrow MF = eMH$

$$\Leftrightarrow r = e\left(\frac{p}{e} - r\cos\theta\right)$$

$$\Leftrightarrow r(1 + e\cos\theta) = p$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$, qui est une ellipse ssi $e < 1$