UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

Algèbre linéaire

Du Lycée à la Fac

IREM DE RENNES

MAI 1999

UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

Algèbre linéaire

Du Lycée à la Fac

IREM DE RENNES

MAI 1999

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, une ou plusieurs pages blanches). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

ISBN 2-85-728-045-9

Ont participé à la rédaction de ce document :

CHARTIER Ghislaine
UFR de Mathématiques - RENNES

CHAUVET Françoise
Lycée Sévigné – CESSON SEVIGNE

DAGMAN Morched
Lycée Henri Avril - LAMBALLE

GARNIER Gilbert
Lycée Ile de France - RENNES

GUIDEVAY Gérard
UFR de Mathématiques - RENNES

VIALLARD Michel
UFR de Mathématiques – RENNES

WILLAIME Germaine
Lycée Sévigné – CESSON SEVIGNE

Cette recherche a été menée avec des moyens de l'IREM et de la DAFI.

La saisie et la mise en page ont été assurées par Danièle QUENTIN.
La reprographie par Françoise LE BESCOND.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

PREMIERE PARTIE **PREREQUIS :**

A - LOGIQUE 5

B - SOMMATIONS 11

C - ENSEMBLE (Vocabulaire de base) 17

D - LES PARAMETRES 23

DEUXIEME PARTIE **ALGEBRE LINEAIRE :**

A - DECOMPOSITION DE VECTEURS 33

B - ACTIVITE D'APPROCHE DES NOTIONS D'ALGEBRE LINEAIRE 39

POLYNOMES Première Partie 41

Deuxième Partie 43

C - EQUATIONS FONCTIONNELLES 45

D - ACTIVITES SUR L'UTILISATION DE LA LINEARISATION 49

E - SUITES 53

BIBLIOGRAPHIE 59

INTRODUCTION

Le thème de ce groupe IREM concerne à la fois la fin de l'enseignement secondaire (première, terminale) et la première année d'Université.

Le mot linéaire est employé depuis la troisième jusqu'à la terminale, sans jamais trop préciser ce qu'il recouvre : fonctions linéaires, systèmes linéaires, équations différentielles linéaires... D'autre part, il y a des situations linéaires et des situations non linéaires en analyse (suites récurrentes, fonctions trigonométriques) et en géométrie.

On constate, par ailleurs, qu'il est de plus en plus difficile d'enseigner et de faire assimiler l'algèbre linéaire en première année d'université.

Comme il ne peut être question d'alourdir les programmes de terminale scientifique nous avons simplement voulu préparer, par des activités adéquates, le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire, et mettre en évidence, dès la classe de Terminale, les situations linéaires rencontrées. Ces activités sont celles développées dans la première partie pour l'assimilation de quelques prérequis, et dans la deuxième partie pour la mise en évidence, sans formalisme paralysant, de situations linéaires.

PREMIERE PARTIE

PREREQUIS

A - LOGIQUE

La logique mathématique (qui n'est plus guère enseignée au lycée) est une importante source de difficultés pour les élèves. Il nous a paru utile de concevoir quelques activités destinées en particulier à familiariser les élèves avec les différentes formulations d'un même énoncé et à reconnaître si un énoncé est vrai ou faux.

Test n° 1

(Classe de terminale S)

On constate chez les élèves de terminale ainsi que chez les étudiants de première année d'université des difficultés de compréhension des notions de *condition nécessaire*, de *condition suffisante* et de *condition nécessaire et suffisante* .
Il nous a paru utile de mettre au point un test concernant les différentes formulations couramment utilisées dans les textes mathématiques .

Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant x_0 .

On considère les 9 propositions suivantes :

Répondez par V ou F

1) Pour que f soit continue en x_0, il suffit qu'elle soit dérivable en x_0 . ... ☐

2) Pour que f soit continue en x_0, il faut qu'elle soit dérivable en x_0 .... ☐

3) Pour que f soit dérivable en x_0, il suffit qu'elle soit continue en x_0 .... ☐

4) Pour que f soit dérivable en x_0, il faut qu'elle soit continue en x_0 .... ☐

5) La dérivabilité en x_0 est une condition nécessaire pour que f soit continue en x_0 .... ☐

6) La dérivabilité en x_0 est une condition suffisante pour que f soit continue en x_0 .... ☐

7) La continuité de f en x_0 est une condition suffisante pour que f soit dérivable en x_0 .... ☐

8) La continuité de f en x_0 est une condition nécessaire pour que f soit dérivable en x_0 .... ☐

9) La continuité de f en x_0 est une condition nécessaire et suffisante pour que f soit dérivable en x_0 : .... ☐

Cet exemple n'avait pas pour but d'apprendre aux élèves cette propriété : en effet, cette classe était d'un bon niveau et tout à fait convaincue qu'une fonction continue en x_0 n'est pas nécessairement dérivable en ce point. La formulation du type "si ... alors" est assez bien manipulée par les élèves. En proposant d'autres formulations notre objectif était d'une part de faire manipuler différentes formulations et d'autre part, faire comprendre les différences qui peuvent exister entre le sens mathématique d'une proposition et le sens qui lui est souvent attribué dans la vie courante. Les élèves ont assez bien réussi les questions 1), 3), 9), 7) et 8). Les autres questions ont été moins bien réussies et surtout la 6) puisque 8 élèves sur 32 seulement ont répondu par "vrai".

Test n° 2

(Classe de terminale S – Durée 20 minutes)

Pour ce second test, on n'utilise que des propositions avec le signe $\Rightarrow$.
On s'intéresse à la valeur de vérité des propositions et surtout on demande aux élèves de donner des formulations équivalentes.

On considère les énoncés suivants :

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow AB = CD$, où A, B, C, D sont quatre points du plan.
b) f dérivable $\Rightarrow$ f continue, où f est une fonction de I dans $\mathbb{R}$, avec $I \subset \mathbb{R}$.
c) $|z| = |z'| \Rightarrow z = z'$, où z et z' sont deux nombres complexes.
d) $\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

1) Ces énoncés sont-ils vrais ?

2) Pour l'énoncé a), donner toutes les formulations possibles en utilisant les expressions :
Si ... alors.
Pour que ... il faut que.
Pour que ... il est nécessaire que.
Pour que ... il suffit que.

(On pourra utiliser d'autres formulations du même type).

Il nous a paru lors de la distribution de ce test que le symbole $\Rightarrow$ ne pose aucun problème aux élèves.

Dans la question 1) les élèves ont très bien réussi les propositions a), b) et c) ; par contre 25 % de la classe ont mal répondu à la question d), mais nous avons compris par la suite que c'était la trigonométrie qui les gênait et non pas le symbole $\Rightarrow$.

Dans la question 2) tous les élèves ont réussi le a) (si ... alors) ; par contre b), c) et d) ont été moins bien réussis et les élèves n'ont pas donné d'autres formulations que celles qui étaient proposées.

Ce test semble montrer que l'utilisation du symbole $\Rightarrow$ ne pose pas de problème ainsi que la formulation du type "si ... alors".

Ceci semble être un argument en faveur de l'utilisation du symbole $\Rightarrow$.

Malheureusement il est utilisé d'une façon différente dans d'autres disciplines (abréviation, signe sténographique), si bien que les élèves ont des difficultés à le manipuler avec rigueur dans un texte mathématique.

Test n° 3

(Classe de terminale S)

I) Ecrire les réciproques des énoncés suivants :

1. Pour que $x^2 + x - 2 = 0$, il faut que $x = 1$.

2. Pour que $x^2 + x - 2 = 0$, il suffit que $x = 1$.

3. Si z est un nombre réel alors $z = \bar{z}$.

4. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln(x)$.

5. Pour que ABCD soit un parallélogramme, il suffit que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

II) Dire pour chacun de ces énoncés et de leurs réciproques s'ils sont vrais ou faux .

III) Ecrire les cinq énoncés en utilisant le symbole " $\Rightarrow$ ".

Ce test à été fait dans une classe de terminale S de 29 élèves.

Les réponses à la question I) montrent que les élèves ont plus de difficultés à écrire la réciproque d'un énoncé avec "il ... suffit" qu'avec "si ... alors". On peut donc penser que la structure "il ... suffit" est moins bien appréhendée que la structure "si ...alors". Par contre, dans la question II) consacrée aux valeurs de vérité d'énoncés, cette différence est moins perceptible. L'énoncé II) - 5 a été bien réussi, mais sans doute à cause du contenu géométrique de cet énoncé et du fait qu'en réalité il s'agit d'une équivalence.

En conclusion même sur des énoncés choisis de telle sorte que les élèves reconnaissent bien s'ils sont vrais ou faux, ils ont des difficultés à appréhender pleinement le sens d'un énoncé et à le manipuler.

Test n° 4

(Sujet A)

Soient deux nombres réels a et b.
Pour chacun des énoncés ci-dessous, indiquer par une croix s'il est VRAI ou FAUX.

n°		VRAI	FAUX	Je ne sais pas
1	si $a^2 = b^2$, alors $a = b$			
2	pour que $a^2 = b^2$, il faut que $a = b$			
3	pour que $a = b$, il suffit que $a^2 = b^2$			
4	$a = b$ si $a^2 = b^2$			
5	il est nécessaire que $a = b$ pour que $a^2 = b^2$			
6	$a = b$ lorsque $a^2 = b^2$			
7	$a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$			
8	$a = b$ car $a^2 = b^2$			
9	puisque $a^2 = b^2$, on a $a = b$			

Ce test confirme que les élèves reconnaissent assez bien si un énoncé simple est vrai ou faux (ici ils étaient tous faux, ce qui ne fut sans doute pas un bon choix).

Test n° 4

(Sujet B)

Soient deux nombres réels a et b .

Dans la liste ci-dessous, faire la liste des énoncés qui ont le même sens que le n° 1 .

1 si $a^2 = b^2$, alors $a = b$.
2 pour que $a^2 = b^2$, il faut que $a = b$.
3 pour que $a = b$, il suffit que $a^2 = b^2$.
4 $a = b$ si $a^2 = b^2$.
5 il est nécessaire que $a = b$ pour que $a^2 = b^2$.
6 $a = b$ lorsque $a^2 = b^2$.
7 $a^2 = b^2 \Rightarrow a = b$.
8 $a = b$ car $a^2 = b^2$.
9 puisque $a^2 = b^2$, on a $a = b$.

La principale observation de ce test est la mauvaise compréhension de la notion de condition nécessaire formulée avec "il faut" ou avec "il est nécessaire que". Ceci est peut être en relation avec le fait que dans le langage courant ces termes sont souvent utilisés dans un sens différent.

B - SOMMATIONS

La lecture de cours d'algèbre linéaire de première année de DEUG a montré que le symbole $\sum$ était très utilisé sans préparation spécifique à ce niveau.

C'est ce qui nous a conduits à mettre au point les activités ci-dessous avec les idées suivantes :

- *relier l'écriture « en pointillés » et l'utilisation de $\sum$;*
- *apprendre à scinder ou regrouper des sommations ;*
- *utiliser des changements simples d'indice.*

Exercice 1

1) La suite u_n est définie pour tout entier n par :

$$u_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{3^i}$$

Ecrire u_n sous forme développée.

2) En transformant $\left(1 - \frac{1}{3}\right) u_n$ donner une forme simplifiée de u_n et calculer la limite de u_n.

Exercice 2

1) Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{18} 2^{k+5} - \sum_{k=9}^{26} 2^{k-3} \qquad \left(\text{ou } \sum_{p=0}^{17} 3^{p+7} - \sum_{i=10}^{26} 3^{i-2}\right)$$

Exercice 3

1) Simplifier :

$$\sum_{i=1}^{n} a^i - \sum_{i=1}^{n-1} (a^i - 1) \qquad \left(\text{ou } \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} (a_k - 1)\right)$$

Exercice 4

1) Trouver a et b tels que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$$

2) Ecrire $S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)}$ à l'aide du symbole Σ.

3) Simplifier S_n et en déduire la limite de S_n.

Exercice 5

On pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1) Calculer $u_{42} - u_7$ à l'aide du symbole Σ.

2) Calculer $u_{2n} - u_n$ à l'aide du symbole Σ.

3) Montrer que $u_{2n} - u_n \geq \frac{1}{2}$.

Exercice 6

En utilisant une démonstration par récurrence, démontrer que :

a) $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

b) $\left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

Exercice 7

A-t-on : $\sum_{i=1}^{n} (a_i)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$?

Exercice 8

1) Développer : $(a_1 + a_2 + a_3)^2$

2) Ecrire en utilisant deux indices i et j : $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2$

Exercice 9

1) Donner la forme développée de : $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2 + k}}$

En déduire un encadrement de u_n: $\frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$

puis la limite de u_n.

Exercice 10

1) Simplifier $\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right)$

2) Simplifier $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$

Exercice 11

1) Donner la forme développée de : $u_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{i+j}}$

2) Donner la forme développée de : $\sum_{i=1}^{n} u_i$

COMMENTAIRES

Exercice 4 (testé en TS)

La question 2) a été très bien réussie par tous les élèves, alors que seulement 30% ont réussi la question 3). Ce qui permet de penser que l'écriture avec Σ ne pose aucun problème, contrairement à l'utilisation de Σ pour effectuer des calculs. Pour beaucoup d'élèves, ni l'écriture détaillée, ni l'utilisation de Σ n'ont permis d'aboutir.

Exercice 5 (testé en TS)

Les questions 1) et 2) de même nature ont été réussies de manière inégale (80% pour 1) et 60% pour 2). C'est sans doute le passage à « n » qui explique cette différence. En revanche, la question 3) n'a été faite par aucun élève.

Exercice 10 (testé en TS)

Nous avons proposé ce texte dans une classe de terminale S de 23 élèves (spécialité mathématiques).

En donnant ce texte, notre objectif était de familiariser les élèves à manipuler le symbole Σ sur des objets mathématiques simples et qui leurs sont connus. Ils ont très bien réussi la question 1) et nous avons pu constater lors de la correction des copies que la plupart d'entre eux ont procédé à une écriture en cascade ; il faut bien dire que les élèves de terminale ont l'habitude d'utiliser cette disposition et cela les aide dans beaucoup de situations. La question 2) a été traitée par tous mais aucun élève n'est arrivé au bon résultat, on peut donc penser que la difficulté provient de l'écriture $\ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$ et on aurait peut-être pu obtenir de meilleurs résultats à cette question avec l'écriture $\ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right)$.

C – ENSEMBLE
(Vocabulaire de base)

Il semble utile d'avoir des idées précises sur la notion d'ensemble (indispensable en probabilité) dès le début de la terminale (et même en première).

La liste d'exercices a pour but de manipuler des ensembles dans des domaines variés des mathématiques rencontrés au lycée. On s'est limité aux notions d'appartenance, inclusion, réunion, intersection, complémentaire, mais aussi aux applications (image d'un ensemble par une application). Ces notions sont d'ailleurs présentes dans la pratique usuelle : ensembles - solutions d'équations et inéquations, recherche d'ensembles de points en géométrie ou dans le cadre des nombres complexes, probabilités... On a voulu insister et systématiser.

Exercice 1

On considère les ensembles suivants : $A =]0;1]$; $B = [2;3]$; $C = [1;2,5[$.

1) Ecrire le plus simplement possible les ensembles : $A \cap C$ $A \cup C$ $A \cap B$ $A \cup B$ $B \cap C$ $B \cup C$.

2) Compléter s'il y a lieu à l'aide des symboles : $\subset$ ou $\in$.

$\frac{1}{2}......A$, $\frac{1}{2}......A \cup B$, $\frac{1}{2}......A \cap B$, $\frac{3}{2}......A \cap B$, $\frac{3}{2}......A \cup B$, $\{2;3\}.....B$, $\{0;1\}....A$,
$\{1;2\}....A \cup B$, $\{1;2\}....A \cap B$, $\left\{\frac{3}{4}\right\}.....A$, $\{0\}....A$, $\{1\}.....A \cap C$, $\{1;2;3\}.....A \cup B \cup C$, $A \cap C.....\{1\}$,
$\left[0;\frac{1}{2}\right]......A$, $\left[2;\frac{5}{2}\right].....B$, $]2,2;2,4]....B \cap C$, $2,5.....B \cap C$, $2,5.....B \cup C$, $2,5...B$; $2,5.....C$.

Exercice 2

Dans l'ensemble $\mathbb{R}$ on considère les parties suivantes : $A =]0;+\infty[$; $B = [-1;+1]$; $C =]-2;3]$. Déterminer les ensembles suivants (on note $\overline{X}$ le complémentaire de X dans $\mathbb{R}$) :

$$\begin{array}{cccc} A \cup B & A \cap B & \overline{A} & \overline{B} \\ A \cap \overline{B} & A - B & (A \cup B) \cap C & (A \cap C) \cup (B \cap C) \\ (A \cap B) \cup C & (A \cup C) \cap (B \cup C) & \overline{A} \cup \overline{B} & \overline{A} \cap \overline{B} \end{array}$$

Quels sont les complémentaires de $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$?

Exercice 3

Donner une écriture simplifiée des ensembles suivants :

$$\bigcup_{n \in N} [-n;n] \ ; \ \bigcap_{n \in N^*} \left]-\frac{1}{n};\frac{1}{n}\right[\ ; \ \bigcup_{n \in N^*}]-n;n[\ ; \ \bigcap_{n \in N} [-n;n] \ ; \ \bigcap_{n \in N} [-2n;n] \ .$$

Exercice 4

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ suivants :
A est l'ensemble des diviseurs de 24 , B est l'ensemble des diviseurs de 36.
Déterminer A , B , $A \cup B$, $A \cap B$.

Exercice 5

1. On se place dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs. On note A le sous-ensemble des entiers pairs et B le sous-ensemble des multiples de 3. Déterminer $A \cap B$.

2. Si on note A = 2 $\mathbb{Z}$ et B = 3 $\mathbb{Z}$, comment peut-on noter $A \cap B$?

3. Avec ces notations, que vaut (2 $\mathbb{Z}$) $\cap$ (4 $\mathbb{Z}$) ?

Exercice 6

1) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, représenter les ensembles suivants :

Δ : ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x+y=1$;

Δ' : ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x+y=\sqrt{2}$;

C : ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2=1$;

D : ensemble des points $M(x,y)$ tels que $x^2+y^2\leq 1$;

P : ensemble des points $M(x,y)$ tels que $y\leq x^2$;

A : ensemble des points $M(x,y)$ tels que $(x-1)^2+y^2\geq 1$.

1) Représenter les ensembles : $D \cap P$; $D \cap A$; $D \cap \Delta$; $C \cap \Delta$; $C \cap \Delta'$.

3) Parmi ces cinq intersections, lesquelles sont finies ? Préciser alors leurs éléments.

Exercice 7

1. a) On considère les parties de IR : $P=[0;1]$, $Q=[-1;+\infty[$. Trouver tous les sous-ensembles X de IR vérifiant successivement :

   $X\cup P=Q$ $\qquad$ $X\cap P=Q$ $\qquad$ $X\cup Q=P$ $\qquad$ $X\cap Q=P$.

   b) Même question avec $P=[0;2]$ et $Q=[-1;1]$.

2. Soit E un ensemble, P et Q sont des parties de E.

   a) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour qu'il existe une partie X de E telle que $X\cup P=Q$. Cette condition étant réalisée, expliciter toutes les solutions.

   b) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur P et Q pour qu'il existe une partie X de E telle que $X\cap P=Q$. Cette condition étant réalisée, expliciter toutes les solutions.

   c) Supposons que $P\subset Q$, $Card(P)=p$ et $Card(Q)=q$. Dénombrer les solutions de l'équation $X\cup P=Q$.

$\boxed{\textbf{Exercice 8}}$

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. On suppose que $A \cup B \subset A \cup C$ et $A \cap B \subset A \cap C$. Montrer que $B \subset C$.

$\boxed{\textbf{Exercice 9}}$

1) On considère les intervalles I = [1 ; 3] et J = [-1 ; 2] et la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^2$.

   Déterminer f(I) ; f(J) ; $f(I \cap J)$; $f(I \cup J)$; $f(I) \cap f(J)$; $f(I) \cup f(J)$. Quelles observations peut-on faire ?

2) Même question avec les intervalles I' = [-2; 0] et J' = [0; 3].

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, on considère le cercle (C) d'équation $x^2 + (y-5)^2 = 9$. Soit M le point de (C) d'abscisse positive tel que (OM) est tangente à (C). On note p la projection orthogonale sur l'axe des abscisses. Déterminer les ensembles suivants :

   a) p(C)   b) p([OM])   c) p((C) $\cap$[OM])   d) p((C) $\cup$ [OM])   e) p(C) $\cap$ p([OM])   f) p(C) $\cup$ p([OM]).

   Quelles observations peut-on faire ?

4) E et F sont deux ensembles, A et B deux parties de E, A' une partie de A, et f est une application de E dans F.

   Montrer que $f(A') \subset f(A)$

   $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

   $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$

COMMENTAIRE

Seuls les exercices 1, 2, 4, 5 ont été faits en classe de terminale S en tout début d'année après un court exposé initial (durée : 2 heures). Nous n'avons pas noté de difficultés chez les élèves pour traiter ces exercices. On a constaté chez ces élèves pendant l'année une utilisation plus fréquente et plus opportune du vocabulaire. Certains élèves ont utilisé spontanément des notions ensemblistes dans leurs rédactions.

Parmi les exercices non traités, seuls les n° 3 et n° 8 requièrent des qualités d'abstraction particulières. Tous les autres sont à la portée d'un élève moyen de T.S.

D – LES PARAMETRES

Dans la formation reçue au lycée, les élèves ne sont pas accoutumés à la manipulation de paramètres.

Dès l'entrée à l'université, de nouveaux exercices conduisent à l'utilisation de ceux-ci ; c'est particulièrement le cas en algèbre linéaire.

Citons, à titre d'exemple, la partie algèbre linéaire du sujet du partiel de novembre 1996, première année, de l'université de Rennes 1 :

Exercice 2 : (4 points)

Discuter et résoudre suivant les valeurs du paramètre réel λ le système suivant :

$$\begin{cases} x + y + (2\lambda - 1)z = 1 \\ \lambda x + y + z = 1 \\ x + \lambda y + z = 3(\lambda + 1) \end{cases}$$

Notre objectif a été d'élaborer des exercices que l'on peut proposer au lycée en devoir à la maison pour susciter un travail de réflexion, ou à l'entrée à l'université pour ménager une progression.

Activité 1

FONCTION POLYNOME ET PARAMETRE

Soit m un réel <u>strictement positif</u>.

On définit la fonction f_m sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_m(x) = 4x^3 - 3m^2x - 1$$

A) Etude des fonctions f_m

1 - Etudier la fonction f_m (limites, sens de variation, tableau de variation).

2 - Soit C_m la courbe représentative de f_m dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que toutes les courbes C_m passent par un même point dont on déterminera les coordonnées.

3 - Montrer que le point I (0 ; -1) est centre de symétrie de la courbe C_m.

4 - Construire dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $C_{\frac{2}{3}}$ et $C_{\frac{3}{2}}$ (unités : 2 cm en abscisses, 1 cm en ordonnées).

B) Etude des points d'intersection de C_m avec l'axe des abscisses

1 - Montrer que, pour toute valeur de m, il existe un unique point d'intersection, d'abscisse positive, avec l'axe des abscisses.

2 - a) Quel est le maximum λ_m de f_m sur $]-\infty ; 0]$?
b) Etudier le signe de λ_m.
c) Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection, d'abscisse négative, de C_m avec l'axe des abscisses.

Activité 2

Test A :

On définit pour tout x réel :

$f(x) = (m - 1)\,x - 2$

où m est un nombre réel.

Résoudre $f(x) > 0$.

Test B :

On donne les droites :

$D_1 : m\,x + 3\,y - 4 = 0$

$D_2 : 12\,x + m\,y - 8 = 0$

où m est un réel.

Etudier la position relative des droites D_1 et D_2.

Ces exercices peuvent facilement être intégrés dans un sujet de devoir à la maison dès la classe de première.

Nous avons choisi de soumettre les tests A et B à des élèves de première S en classe (15-20 mn), en fin d'année.

Test A

Ce type d'exercice n'est pas familier aux élèves ; les inéquations rencontrées en première portent plutôt sur des expressions de degré 2.

Nous avons recueilli 30 réponses ; celles-ci peuvent se répartir en 4 catégories :

1 : La discussion est menée correctement (6 copies).

2 : Elèves qui ne pensent pas au signe (5 copies).

3 : Elèves qui confondent m et x (7 copies).

Ce genre de confusion est crucial en algèbre linéaire, par exemple lorsqu'il faut identifier $ax+ b(x-1)$ comme combinaison linéaire de polynômes.

4 : Incompréhension totale (12 copies).

Extrait de copie

$f(x) = (m-1)x - 2$

on cherche pour quelles valeurs de m et x $f(x)>0$

$f(x) = mx - x - 2$
$= (m-1)x - 2$ } ça ne sert à rien

$f(x) > 0$ quand $(m-1)x > 2$ $m-1$ est le coefficient directeur

$A(0\,;-2)$ est un point de $f(x)$ } ça ne sert à rien

$m-1>0$ quand $m>1$
mais il faut que $(m-1)x>2$
donc $m-1>3$ pour que $f(x)>0$
et $x>1$ pour que $f(x)>0$ } c'est faux

$f(x)$ est une fonction affine de forme $y = ax+b$
$m-1$ est le coefficient directeur et il existe un point
A de coordonnées $(0; b)$

$0 = (m-1)\underset{0}{x} - 2$ ça ne sert à rien

$f(x) = mx - x - 2$
on cherche à résoudre
$mx - x - 2 = 0$

je multiplie par x
$mx^2 - x^2 - 2x = 0$
$(m-1)x^2 - 2x = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$
$= 4$

$x_1 = \frac{4}{2m-2} = \frac{2}{m-2}$

$x_2 = 0$

Test B

La question posée (position relative des droites D_1 et D_2) entraînait selon nous, de manière immédiate, une réponse du type :

Pour certaines valeurs de m, les droites sont parallèles (en utilisant le déterminant, ou le coefficient directeur).

Le problème a été interprété tout autrement par les élèves, comme étude de la position relative de deux courbes : C_1 représentant f, avec $f(x) = (mx-4)/3$, et C_2 représentant g, avec $g(x) = (12x-8)/m$; cette étude les a conduits à déterminer le signe de f-g, en se lançant dans des calculs inextricables.

Seules 4 copies sur 35 présentaient des raisonnements en termes de parallélisme.

Activité 3

REPRESENTATIONS PARAMETRIQUES DE DROITES

1 - Le plan est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
A est le point de coordonnées (2,3).

$\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (2,-2).

Un point M(x,y) appartient à la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$ si et seulement si il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Exprimer les coordonnées x et y de M en fonction de t. Le système obtenu est une représentation paramétrique de la droite D.

2 - On considère l'ensemble (E) des points M de coordonnées x et y tels que :

$$\begin{cases} x = 5t + 2 \\ y = -3t + 1 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer et construire (E).
b) Déterminer une équation cartésienne de (E).

3 - Soit (D) la droite d'équation $2x - 5y - 1 = 0$.

a) Donner une représentation paramétrique de (D).
b) Compléter :

$$\begin{cases} x = t \\ y = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

pour que ce système soit une autre représentation paramétrique de (D).

Ces exercices ont été traités en début de première année d'université ; les étudiants les ont bien réussis. Ils servaient plus particulièrement dans ce cadre d'introduction à des exercices de géométrie dans l'espace.

Ils pourraient également être donnés au lycée en introduction à l'étude des courbes paramétrées prévue par le programme de Terminale S pour l'année 1998/1999.

DEUXIEME PARTIE

ALGEBRE LINEAIRE

A – DECOMPOSITION DE VECTEURS

Les activités suivantes peuvent être proposées en Terminale S ou en première année de DEUG.

Leur objectif est d'introduire la notion de combinaison linéaire et d'étudier l'unicité éventuelle d'une décomposition.

Exercice 1

On considère un parallélogramme OACB, et le point M défini par $\overrightarrow{AM} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$ où α est un nombre réel.

1. Compléter de trois manières différentes chacune des égalités suivantes : $\overrightarrow{AB} = \ldots\overrightarrow{OA} + \ldots\overrightarrow{OB} + \ldots\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OM} = \ldots\overrightarrow{OA} + \ldots\overrightarrow{OB} + \ldots\overrightarrow{OC}$.
2. Exprimer $\overrightarrow{OC}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$. En déduire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$.
3. On considère les points P, Q, R définis par $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$; $\overrightarrow{CR} = a\,\overrightarrow{CA}$ où a est un réel non nul.
   a) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{QR}$ dans la base $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
   b) Peut-on choisir a pour que P, Q, R soient alignés ?

Exercice 2

Dans l'espace rapporté au repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les plans P et P' d'équations respectives $x + y + z = 1$ et $x - y\sqrt{2} + 3z = 3$.

1. Soient $A(0, a, b)$ et $B(c, d, 0)$ deux points de l'espace. Calculer a, b, c, d pour que A et B soient communs aux deux plans P et P'.
2. On donne les vecteurs $\vec{u}(1,-1,0)$, $\vec{v}(1,0,-1)$, $\vec{u}'(3,0,-1)$, et $\vec{v}'\left(\sqrt{2},1,0\right)$. Montrer que $(\vec{u},\vec{v})$ est un couple de vecteurs directeurs de P et que $(\vec{u}',\vec{v}')$ est un couple de vecteurs directeurs de P'.
3. Exprimer $\overrightarrow{AB}$ dans la base $(\vec{u},\vec{v})$ de P et dans la base $(\vec{u}',\vec{v}')$ de P'.
4. Soit $M(1,1,-1)$ dans P et soit $M'(\sqrt{2},1,1)$ dans P'. En remarquant que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AM}$ et que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BM'} - \overrightarrow{BM}$, exprimer $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'$ de deux manières différentes.
5. Montrer que $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right)$ est une base de P et que $\left(\vec{u}', \overrightarrow{AB}\right)$ est une base de P'. Montrer que $\vec{u}, \vec{u}', \overrightarrow{AB}$ sont non coplanaires. Ecrire $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de ces trois vecteurs. Y a-t-il plusieurs écritures possibles ?

Cette activité a été donnée en classe de terminale S ; les élèves, répartis en groupes de 4, disposaient de deux heures.

Les élèves ont résolu sans difficulté l'exercice 1.

En revanche, ils sont totalement passés à côté de l'objectif visé : ils utilisaient très naturellement l'unicité de la décomposition à la question 2, alors qu'ils venaient de voir en 1) que dans certains cas la décomposition n'était pas unique.

En réponse à des questions directes sur la définition de base, les élèves répondaient qu'il s'agissait d'un repère.

D'autre part, l'outil qu'ils ont le plus utilisé ici, c'est-à-dire *la Relation de Chasles*, ne peut pas être réinvesti en algèbre linéaire théorique.

L'unicité est une propriété difficile, qui ne leur est pas familière. Une activité centrée sur ce thème suscite donc peu de questions spontanées.

Bien que connaissant la différence entre un vecteur et son représentant (les élèves n'hésitent pas à "déplacer" un vecteur), les élèves restent attachés aux points : l'amalgame base-repère est caractéristique de cette confusion.

Dans l'exercice 2, les élèves étaient bloqués sur la question 2) : ils ne savaient pas comment prouver qu'un couple de vecteurs est une base d'un plan. La méthode utilisant le vecteur normal n'avait pas encore été abordée en cours (on peut aussi noter que cette méthode ne peut pas être réinvestie en algèbre linéaire).

Leur première réaction était de regarder si les coordonnées des vecteurs donnés vérifient l'équation du plan (le vecteur est-il dans le plan ?) ; puisque ce n'était pas le cas, ils étaient bloqués.

Un groupe a pensé à choisir pour chacun des vecteurs un représentant dans le plan, et à regarder ensuite si l'extrémité restait dans le plan ; cette procédure s'est ensuite rapidement répandue. Plusieurs élèves l'ont rédigée comme : montrons que l'image de A par la translation de vecteur $\vec{u}$ est dans le plan P.

Tous les élèves ont pensé à dire que les deux vecteurs n'étaient pas colinéaires.

Les termes manipulés ici sont connus, ils apparaissent dans tous les manuels. Mais ils ne sont presque jamais l'objet d'exercices : montrer que deux vecteurs forment une base d'un plan est pour eux une tâche nouvelle. Il est intéressant de noter l'apparition spontanée de l'idée de translation.

On retrouve des confusions observées dans l'exercice 1 entre un vecteur et son représentant : les coordonnées d'un vecteur directeur d'un plan doivent-elles vérifier l'équation de celui-ci ?

Exercice 3

Soit F l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On note I le sous-ensemble de F des fonctions impaires et P le sous-ensemble de F des fonctions paires.

1. Dire pour chacune des fonctions suivantes si elles appartiennent à I ou à P ou à aucun des deux :

$$f_1(x) = x^2 + \cos x; \quad f_2(x) = x + \sin x; \quad f_3(x) = \frac{x+1}{x^2+1}.$$

2. Déterminer l'intersection de I et P.
3. A-t-on $I \cup P = F$? Justifier.
4. Soit f un élément de F. Etudier la parité des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = f(x) + f(-x)$$
$$h(x) = f(x) - f(-x)$$

   En déduire que tout élément de F est somme d'un élément de I et d'un élément de P.
5. Montrer que la somme de deux fonctions paires est une fonction paire, ainsi que le produit d'une fonction paire par un réel. Qu'en est-il pour les fonctions impaires ?
6. Montrer que cette décomposition est unique. (On pourra supposer que $f = u + v = u_1 + v_1$ avec u et u_1 dans I et v et v_1 dans P, et utiliser le résultat de 2)).
7. Décomposer les fonctions suivantes : $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \quad g(x) = (x-1)^2$.

Cet exercice a été donné comme travail supplémentaire dans un devoir en temps libre. La lecture des copies a permis de faire les remarques suivantes :

- Les questions 1, 2, 3 n'ont pas posé de problème particulier si ce n'est sur la notion de fonction : confusion entre f et f(x), mais aussi entre la fonction et sa courbe représentative. Ainsi pour la question 2 : intersection de I et P, 12 élèves sur 19 ont répondu correctement ; 5 disent qu'il s'agit de l'axe des abscisses "car il est symétrique par rapport à Oy et à O", et deux que l'intersection est vide.

- Dans la question 4, la première partie, plus technique, ne pose pas de problème.
  En revanche, seuls 9 élèves parviennent à exploiter le résultat obtenu.

- La question 6 était difficile : question portant sur l'unicité, et nécessitant la manipulation d'égalités de fonctions. 8 élèves ont répondu correctement, avec même parfois une argumentation très précise (voir copie ci-après) ; 7 n'ont pas abordé la question, et 4 ont échoué.

Extrait de copie

~~d'une fonction impaire par un nombre réel est une fonction impaire~~

6 - $u+v = u_1+v_1 = f$ (u et $u_1 \in I$ et v et $v_1 \in P$

$\Rightarrow [(u+v)-(u_1+v_1)](x) = 0$

$\Leftrightarrow [(u-u_1)+(v-v_1)](x) = 0$

$\Leftrightarrow (u-u_1)(x) = -(v-v_1)(x)$

or u et u_1 étant paires on a $u-u_1$ qui est paire et v et v_1 étant impaires on a $v-v_1$ qui est impaire. De plus d'après la question 2, seul la fonction $f(x)=0$ est paire et impaire

$\Rightarrow (u-u_1)(x) = 0$ $\qquad -(v-v_1)(x) = 0$

$\Rightarrow u(x) = u_1(x)$ $\qquad v(x) = v_1(x)$

donc la décomposition de f est unique

- Peu d'élèves ont abordé la question 7 ; seuls 5 proposent des décompositions correctes, souvent trouvées "à la main" sans utiliser les questions précédentes.

Par la suite, un corrigé a été fait en classe mettant en évidence le lien entre la dernière question et les précédentes. Puis quelque temps plus tard, nous avons demandé aux élèves d'écrire les trois fonctions suivantes comme sommes d'une fonction paire et d'une fonction impaire :

$f(x) = x + \cos x$

$g(x) = e^x$

$h(x) = \sqrt{|x+1|}$

Ce test s'est traduit par un échec total ...

B – ACTIVITES D'APPROCHE DES NOTIONS D'ALGEBRE LINEAIRE

POLYNÔMES
Première partie

On suppose connus les fonctions polynômes définies sur $\mathbb{R}$, la somme de deux telles fonctions et le produit d'une fonction polynôme par un réel. On note F l'ensemble de ces fonctions polynômes.

Exercice 1

1. On pose $F_1 = \{f \in F \,/\, f(1) = 0\}$

   a) Montrer que si $f \in F_1$ et $g \in F_1$, alors $f + g \in F_1$.
   b) Montrer que si $f \in F_1$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in F_1$.

   On dit qu'un sous-ensemble de F est stable par combinaison linéaire s'il vérifie les propriétés a) et b) et on l'appelle un sous-espace vectoriel de F.

2. On pose $F_2 = \{f \in F \,/\, f(1) = 1\}$
   F_2 est-il stable par combinaison linéaire ?

3. Trouver d'autres sous-ensembles de F stables par combinaison linéaire.

Exercice 2

1. Soit $p(x) = 2x^2 - 3x + 1$ un élément de F.
   Peut-on écrire p sous l'une des formes suivantes où a, b, c sont des réels ?
   (Les égalités doivent être vérifiées pour tout x réel).
   a) $p(x) = a(x-1) + bx(x-1)$
   b) $p(x) = ax + b(x-1) + cx(x-1)$
   c) $p(x) = a(x-2) + bx(x-2)$
   d) $p(x) = ax + b(x-2) + cx(x-2)$
   Lorsque c'est possible, déterminer les coefficients a, b, c qui conviennent. Y a-t-il plusieurs choix possibles ?

2. On pose $G = \{p \in F \,/\, \deg p \leq 2,\ p(1) = 0\}$
   a) Montrer que tout élément p de G peut s'écrire sous la forme :
   $p(x) = a(x-1) + bx(x-1)$
   (Cette égalité devant être vérifiée pour tout x réel).
   b) Pour quelle(s) valeur(s) du couple (a,b) obtient-on la fonction nulle ?
   c) Déduire de ce qui précède que pour tout p de G, il existe un unique couple (a,b) tel que pour tout x de R : $p(x) = a(x-1) + b\,x(x-1)$
   On dit alors que le couple $((x-1),\ x(x-1))$ est une base de G ; a et b sont appelées les coordonnées de p dans cette base.

Exercice 3

On note F_n l'ensemble des fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à n. (F_n est un sous-espace vectoriel de F).

On considère une famille $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ de fonctions polynômes telle que $p_0(x) = 1$ et que pour tout k, $1 \leq k \leq n$:

$$p_k(x) = x^k + q_k(x) \quad \text{où} \quad q_k \text{ est une fonction polynôme de degré } k-1.$$

1. Montrer par récurrence sur n que si $a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n = 0$ (0 est la fonction polynôme nulle) alors $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.
   On dit alors que la famille $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ est libre.

2. Montrer par récurrence sur n, que toute fonction polynôme p de degré inférieur ou égal à n s'écrit sous la forme $p(x) = a_0 p_0 + a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n$.
   On dit alors que p est combinaison linéaire de $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$. Comme tout polynôme de F_n vérifie cette propriété, on dit que $(p_0, p_1, \ldots, p_n)$ est une famille génératrice de F_n.
   Une famille d'éléments d'un sous-espace vectoriel qui est libre génératrice est appelée une base de ce sous-espace.

3. Montrer que dans la question 2), il y a unicité des coefficients a_i.

4. Donner une base de F_j pour $j \in \{1, 2, 3, 4\}$.

POLYNÔMES
Deuxième partie

L'objectif des activités ci-dessous est de montrer que la résolution d'un problème peut être simplifiée par le choix d'une base adaptée.

On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Exercice 1

1. Trouver les polynômes P de degré ≤ 2 qui vérifient :
   $P(X+1) - P(X) = X$. (On notera cette équation E_2).

2. Même question avec des polynômes de degré 6. (On notera l'équation correspondante E_6).

3. On considère l'application u de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par :

$$u(P)(X) = P(X+1) - P(X).$$

   Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, et λ et μ deux réels.
   Calculer $u(\lambda P + \mu Q)$ en fonction de $u(P)$ et $u(Q)$.

Exercice 2

On définit les polynômes P_0, P_1, P_2, par : $P_0(X) = 1$, $P_1(X) = X$, $P_2(X) = \frac{1}{2}X(X-1)$.

1. Calculer $u(P_i)$, où u est l'application ci-dessus.

2. Montrer que tout polynôme P à coefficients réels de degré inférieur ou égal à deux peut s'écrire sous la forme :

$$P = a_0P_0 + a_1P_1 + a_2P_2, \text{ où les } a_i \text{ sont des réels.}$$

3. Résoudre l'équation E_2 en utilisant les résultats ci-dessus.

Exercice 3

On définit le polynôme P_k par : $P_k(X) = \frac{1}{k!}X(X-1)\ ...\ (X-k+1)$.

1. Montrer que la famille $\{P_0, P_1, \ ...\ P_n\}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ (on utilisera les résultats établis dans la feuille précédente).

2. Soit P un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$; si P s'écrit $P = a_0P_0 + a_1P_1 + \ ...\ + a_nP_n$, exprimer $u(P)$ dans la base $\{P_0, P_1, \ ...\ P_n\}$.

3. L'équation (E_6) admet-elle des solutions ?

C – EQUATIONS FONCTIONNELLES

On a voulu proposer aux élèves de Terminale scientifique dans le cadre du programme, des situations « isomorphes » :

I – Exercice classique et incontournable sur les équations différentielles.
II – Exercice sur les suites parfois proposé comme exercice de réflexion.
III – Exercice simple mais beaucoup plus rare sur une équation aux différences.
IV – Exercice classique sur les équations différentielles du second ordre.
L'exercice V a été conçu comme exercice de contrôle.

Par manque de temps, ces activités n'ont pu être expérimentées dans les classes. Il nous semble qu'il serait intéressant de proposer, sous forme de devoir libre, les quatre premiers exercices dès le début de la résolution des équations différentielles. Avant que des automatismes trop réducteurs soient installés, les élèves auraient ainsi une chance de découvrir (et peut être de retenir) une méthode générale liée à la linéarité.

Exercice 1

On cherche les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout x, on ait :

$$(E) \quad f'(x) + f(x) = 2 + x$$

1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit une solution de (E).

2) On pose $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, h est solution de :

$$(E') \quad h'(x) + h(x) = 0$$

3) Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 2

On cherche les suites (u_n) telles que, pour tout n élément de $\mathbb{N}$, on ait :

$$(E) \ u_{n+1} = 2\,u_n + 2 + n$$

1) Déterminer les réels a et b tels que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = a\,n + b$ soit une solution de (E).

2) Soit (u_n) une suite vérifiant (E).
On pose $w_n = u_n - v_n$ pour tout n élément de $\mathbb{N}$.
Déterminer une relation entre w_{n+1} et w_n. Quelle est la nature de la suite (w_n) ? Exprimer w_n en fonction de w_0 et de n.

3) En déduire le terme général des suites (u_n) solutions de (E).

Exercice 3

On cherche les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout x, on ait :

$$(E) \quad f(x + 1) - f(x) = 2 + x$$

1) Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\,x^2 + b\,x$ soit une solution de (E).

2) On pose $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, h est solution de :
$$(E') \quad h(x + 1) - h(x) = 0$$

3) Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 4

On cherche les fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout x, on ait :

$$(E)\ f''(x) + f(x) = x^2$$

où f est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

1) Déterminer les réels a, b et c tels que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ soit une solution de (E).

2) On pose $h = f - g$. Démontrer que f est solution de (E) si, et seulement si, h est solution de :

$$(E')\quad h''(x) + h(x) = 0.$$

3) Résoudre l'équation (E') et en déduire les solutions de (E).

Exercice 5

Trouver les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, telles que, pour tout x, on ait :

$$(E)\quad f'(x) - 2f(x) = 3\,x + 2$$

D – ACTIVITES SUR L'UTILISATION DE LA LINEARISATION

Exercice 1

Dérivation

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \cos x$

Pour tout entier naturel non nul n, on note $f^{(n)}$ la dérivée énième de f.

1) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$f^{(n)}(x) = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \text{ pour tout x réel.}$$

2) En déduire :

a) la dérivée énième de la fonction : $x \mapsto \cos 2x$
b) la dérivée énième de la fonction : $x \mapsto \sin^2 x$

Exercice 2

Intégration : Calcul de $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \, dx$

1) Combien valent les intégrales :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 6x \, dx \quad \text{et} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 8x \, dx \quad ?$$

2) Donner les valeurs des coefficients de la formule du binôme $(a + b)^8$.

3) En utilisant la formule d'Euler, et les questions précédentes, donner avec le minimum de calculs la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^8 x \, dx$.

Seul l'exercice 1 a été proposé, à des élèves de Terminale Scientifique spécialité Mathématiques et a été très mal réussi.

E - SUITES

Le domaine des suites permet également d'aborder les premières notions d'algèbre linéaire.

Nous avons voulu nous appuyer sur des situations courantes, pour lesquelles l'algèbre linéaire peut constituer un outil performant.

Notre intention n'était pas de définir des concepts d'algèbre linéaire, mais de les utiliser sans introduire le vocabulaire correspondant, pour que les élèves voient progressivement se dégager la structure sous-jacente.

L'activité ci-dessous peut être soumise à des élèves de Terminale S, elle n'a pas été testée.

I - Etude de l'ensemble E des suites (u_n) vérifiant pour tout n la relation : $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. a) Soit (u_n) un élément de E tel que $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$. Calculer u_2, u_3, u_4.

2. a) Soit (w_n) la suite définie par : $w_n = u_n + v_n$ pour tout n. Calculer w_0, w_1, w_2, w_3, w_4.
   A-t-on $(w_n) \in E$?
   b) Soit α un réel fixé, et soit (t_n) la suite définie par $t_n = \alpha u_n$ pour tout n.
   Calculer t_0, t_1, t_2, t_3, t_4. A-t-on $(t_n) \in E$?

3. Y a-t-il des suites arithmétiques dans E ?

4. Y a-t-il des suites géométriques dans E ?

4. Montrer que E contient exactement deux suites géométriques (a_n) et (b_n) telles que $a_0 = b_0 = 1$.

6. ***On se propose d'utiliser ces deux suites (a_n) et (b_n) pour trouver d'autres suites de E, et en particulier des suites convergentes.***
   Soient α et β deux réels. Montrer que la suite (c_n) définie par $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ pour tout n appartient à E. (On pourrait prouver que toute suite de E est de cette forme)
   En déduire que E contient une infinité de suites convergentes non nulles.

II - Etude de l'ensemble F des suites (u_n) vérifiant pour tout n la relation : $u_{n+2} = u_{n+1}u_n$.

1. a) Soit (u_n) un élément de F tel que $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{2}$. Calculer u_2, u_3, u_4. Montrer que pour tout n , $0 \le u_n \le 1$ et que la suite (u_n) est décroissante. Montrer que pour $n \ge 5$, $u_n \le \frac{1}{2^n}$.
   Conclure sur la convergence de (u_n).
   b) Soit (v_n) un élément de F tel que $v_0 = 1$ et $v_1 = 3$. Calculer v_2, v_3, v_4.
   Montrer que pour tout n , $v_n \ge 3^n$.

2. Vérifier que les suites $(u_n + v_n)$ et $(\alpha . u_n)$ n'appartiennent pas à F.
   On peut remarquer que la méthode utilisée dans la partie I - ne permet pas d'expliciter les suites de F.
   Question subsidiaire : trouver les suites de F en posant $v_n = \ln(u_n)$.

III - Etude de l'ensemble G des suites (u_n) vérifiant pour tout n la relation :

$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 2$.

En première année de DEUG, dans le cadre du module de second semestre destiné aux étudiants en difficulté, nous avons consacré une séance de TD aux suites de Fibonacci, avant d'aborder l'algèbre linéaire.

Puis, après le cours d'algèbre linéaire, nous avons demandé aux étudiants dans un devoir à la maison de reformuler leurs résultats avec le vocabulaire de l'algèbre linéaire, et, afin de ne pas se limiter à un simple exercice de traduction, nous leur proposions un exercice semblable sur des fonctions.

Méthodologie des mathématiques
Devoir libre 2

A rendre pour la semaine du 16 au 20 mars

1) L'activité faite en travaux dirigés à propos des suites récurrentes consistait à résoudre le problème suivant :

« Parmi les suites de réels qui vérifient la relation de récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (E_1)$$

trouver toutes celles qui convergent ».

En vous appuyant sur ce qui a été vu en TD, rédigez une solution complète de ce problème (on notera $a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, et $b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

Vous présenterez vos résultats en utilisant, chaque fois que cela sera possible, le vocabulaire de l'algèbre linéaire : combinaisons linéaires, sous-espaces vectoriels, bases, dimension…

2) On se propose maintenant de résoudre le problème suivant :

« Parmi les fonctions deux fois dérivables sur IR qui vérifient l'équation différentielle :

$$f'' = f' + f \quad (E_2),$$

trouver toutes celles qui admettent une limite finie en $+\infty$ ».

On admettra qu'une fonction f qui vérifie (E_2) est entièrement déterminée par la donnée de $f(0)$ et $f'(0)$.

En vous inspirant de la démarche vue dans la première partie, résoudre de même ce problème, en utilisant le vocabulaire de l'algèbre linéaire.

(Indication et rappel de terminale : vous pourrez chercher des solutions sous la forme $x \to e^{rx}$).

Méthodologie des mathématiques.
Devoir libre n°2.

I * On veut trouver parmi les suites de réels celles qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad (E_1)$.
En fait, on cherche une famille de c_n qui soit libre, et génératrice de l'espace vectoriel (E_1) (les solutions de (E_1)).

→ Parmi les suites de réels, on distingue trois "catégories" de suites :
- les suites constantes : $u_0 = u_1 = 0$ donc $u_{n+2} = 0$ et u_{n+2} vérifie (E_1)
- les suites arithmétiques : soit (u_n) tel que $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + r \\ u_{n+2} = u_{n+1} + r = u_n + 2r \end{cases}$

si (u_n) vérifie (E_1), on a $u_n + 2r = u_n + r + u_n$
$\iff r = u_n$ donc (u_n) est une suite constante quelque soit r.

- les suites géométriques : soit (u_n) tel que $\begin{cases} u_n = u_0 \times q^n \\ u_{n+1} = u_n \times q \end{cases}$

Ainsi, $u_{n+2} = u_{n+1} \times q = u_n \times q^2$.
si (u_n) vérifie (E_1), on a $u_n \times q^2 = u_n \times q + u_n$
$\iff q^2 - q - 1 = 0$, $\Delta = 5$ donc
les solutions de cette équation sont : $\underline{a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$ et $\underline{b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

Donc les suites $\underline{c_n = a^n \text{ et } d_n = b^n \text{ vérifient } (E_1)}$.

→ On veut maintenant savoir si $E_1 = \operatorname{vect}\{(c_n),(d_n)\}$, et si $\{(c_n),(d_n)\}$ est une famille libre.

- Cela revient à montrer que les suites $z_n = \lambda c_n + \mu d_n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, vérifient (E_1), c'est-à-dire que (z_n) est combinaison linéaire des suites $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suites géométriques de raisons respectives a et b.
→ si $z_n = \lambda c_n + \mu d_n \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors
$z_{n+1} = \lambda c_{n+1} + \mu d_{n+1}$ et $z_{n+2} = \lambda c_{n+2} + \mu d_{n+2}$.

or $z_{n+1} + z_n = \lambda(c_{n+1} + c_n) + \mu(d_{n+1} + d_n)$
$= \lambda c_{n+2} + \mu d_{n+2}$ car (c_n) et (d_n) vérifie (E_1).
$= z_{n+2}$.
Donc on a bien montré que $\underline{E_1 = \operatorname{vect}\{(c_n),(d_n)\}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Maintenant, il faut montrer l'unicité de la relation, c'est-à-dire que $\{(c_n),(d_n)\}$ est une famille libre de E_1.
C'est une famille libre si et seulement si
$\lambda c_n + \mu d_n = 0 \iff \lambda a^n + \mu b^n = 0$
or $a^n \neq 0$ et $b^n \neq 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc pour avoir cette égalité, il faut $\lambda = \mu = 0$. $\{(c_n),(d_n)\}$ est une famille libre.

⇒ $\{(c_n),(d_n)\}$ est une famille libre et génératrice de E_1. C'est donc une base de E_1 qui est alors de dimension 2.

* Il faut maintenant trouver parmi les suites de réels vérifiant (E_1) toutes celles qui convergent.
En fait, il faut chercher dans la famille libre les suites qui souscrivent à cette condition supplémentaire.
Or on sait que q^n converge si $q \in]-1, 1[$.

et $a \simeq 1,6$ et $b \simeq -0,6$, donc la suite $d_n = b^n$ converge, mais pas la suite $c_n = a^n$.

57

BIBLIOGRAPHIE

Les débuts de l'algèbre linéaire en DEUG A.
BARDY Ph. – LE BELLAC D. – LE ROUX R. – MEMIN J. – SABY D. (1993)
IREM de Rennes

Contribution à l'étude de l'enseignement à l'université des premiers concepts d'algèbre linéaire. Approches historique et didactique.
DORIER J.L. (1990)
Thèse de Doctorat de l'Université J. Fourier – Grenoble 1

L'enseignement de l'algèbre linéaire en question.
DORIER J.L. et al. (1997)
La pensée sauvage Editions – Grenoble

Linear algebra through applications.
FLETCHER T.J. (1972)
Reinhold
London : Van Nostrand

Contribution à l'enseignement de l'algèbre linéaire en première année d'Université.
OUSMAN R. (1996)
Thèse de Doctorat de l'Université de Rennes 1

De la géométrie à l'algèbre linéaire.
ROBERT A. – ROBINET J. – TENAUD I. (1987)
Brochure 72 – IREM de Paris VII

Pourquoi un tel échec de l'enseignement de l'algèbre linéaire ? in *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG Première année.*
ROGALSKI M. (1991)
Commission inter IREM Université, pp. 279-291

Que faire quand on veut enseigner un type de connaissances tel que la dialectique outil-objet ne semble pas marcher, et qu'il n'y ait apparemment pas de situation fondamentale ? L'exemple de l'algèbre linéaire, *Didactique et technologies cognitives en mathématiques.*
ROGALSKI M. (1995)
Séminaires 1994-1995, pp. 127-162

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Deuxième trimestre 1999
N° de publication : 99-04

I.R.E.M. DE RENNES - Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu - Bâtiment 32 B
35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 26 34
Fax : 02 99 28 16 38
Site WEB : http://www.univ-rennes1.fr/irem

Commande :
Tél : 02 99 28 26 08
e.mail : Daniele.Quentin@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : ALGEBRE LINEAIRE : DU LYCEE A LA FAC

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS : CHARTIER Ghislaine - CHAUVET Françoise - DAGMAN Morched - GARNIER Gilbert - GUIDEVAY Gérard - VIALLARD Michel - WILLAIME Germaine.
Groupe " ALGEBRE LINEAIRE : DU LYCEE A LA FAC" - 1996/97 et 1997/98

DATE : MAI 1999

NIVEAU : Fin du lycée et DEUG

PUBLIC CONCERNE :

Enseignants de Mathématiques des Sections Scientifiques en Lycée et des DEUG Scientifiques.

MOTS-CLES :

- Linéarité.
- Algèbre linéaire.
- Logique.
- Ensemble.
- Sommation.
- Equations fonctionnelles.

RESUME :

Le thème de ce groupe IREM concerne à la fois la fin de l'enseignement secondaire (première, terminale) et la première année d'Université.

Le mot linéaire est employé depuis la troisième jusqu'à la terminale, sans jamais trop préciser ce qu'il recouvre : fonctions linéaires, systèmes linéaires, équations différentielles linéaires… D'autre part, il y a des situations linéaires et des situations non linéaires en analyse (suites récurrentes, fonctions trigonométriques) et en géométrie.

On constate, par ailleurs, qu'il est de plus en plus difficile d'enseigner et de faire assimiler l'algèbre linéaire en première année d'université.

Comme il ne peut être question d'alourdir les programmes de terminale scientifique nous avons simplement voulu préparer, par des activités adéquates, le début de l'enseignement de l'algèbre linéaire, et mettre en évidence, dès la classe de Terminale, les situations linéaires rencontrées. Ces activités sont celles développées dans la première partie pour l'assimilation de quelques prérequis, et dans la deuxième partie pour la mise en évidence, sans formalisme paralysant, de situations linéaires.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 × 29,7	59	1 € ~~35 F~~	400 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-045-9