# FAIRE DES MATHEMATIQUES A PARTIR DE LEUR HISTOIRE

TOME I

I.R.E.M. de Rennes
1990-1992

# FAIRE DES MATHEMATIQUES A PARTIR DE LEUR HISTOIRE

## TOME I

I.R.E.M. DE RENNES
1990-1992

Ce document a été écrit par le groupe
"Histoire des mathématiques"
composé de :

Danièle Aubry (Lycée Bertrand d'Argentré, Vitré)
Michèle Blimo (L.P. Louis Guillou, Rennes)
Daniel Dubois (Collège Amand Brionne, Saint Aubin d'Aubigné)
Jean-Pierre Escofier (I.R.E.M. de Rennes)
Gérard Hamon (Lycée Ile de France, Rennes)
Jean-Yves Hély (Lycée Jean Macé, Rennes)
André Julien (Collège Martin Luther King, Liffré)
Jean-Michel Le Laouénan (C.N.E.D.)
Marie Ruget (Lycée Freyssinet, Saint Brieuc)

Le tirage de décembre 1999 a été l'occasion de corriger quelques petites erreurs.

# TABLE DES MATIERES

# Introduction

Comme nous l'écrivions dans le projet du groupe proposé à la Mission Académique en janvier 1990, un travail considérable a été réalisé en France et à l'étranger sur l'histoire des mathématiques. L'ensemble des livres publiés dans ce domaine est en constante extension et il en est de même des documents produits par quelques I.R.E.M. et la commission Inter-irem épistémologie.

Si les enseignants de l'académie perçoivent quelques échos de cette effervescence, il nous a semblé utile qu'un groupe de l'I.R.E.M. de Rennes la leur rende plus accessible :

- en la plaçant dans une perspective marquant les étapes des découvertes et la maturation des différentes notions,

- en la diffusant par des animations (Saint-Brieuc, Vannes, Rennes, Lorient, etc.),

- en la complétant par des propositions d'activités dans le cadre des programmes et des cours, activités qui puissent séduire et motiver les élèves.

Il est tout à fait possible d'enseigner les mathématiques, comme beaucoup d'autres matières sans doute, sans aucune allusion à leur histoire ; c'était même, semble-t-il, la pratique courante, jusqu'à ces dernières années. Beaucoup d'enseignants cherchent cependant, même dans les classes où le libellé du programme ne les y invite pas, à lier le cours de mathématiques à des moments de leur histoire.

Notre objectif n'est cependant pas de faire de l'histoire pour l'histoire mais d'apporter :

- une aide à la compréhension et à la maîtrise des notions enseignées,

- un support à leur mémorisation pour certains, créant des paysages dans lesquelles ils placeront mieux leurs nouvelles connaissances,

- une motivation en replaçant les notions dans une perspective historique.

Parler des aspects culturels de nos activités n'est pas très facile. Certaines d'entre elles montrent les pratiques des mathématiciens. des siècles passés, leurs façons de s'exprimer (qui seraient à comparer avec les nôtres), leurs qualités d'imagination (à donner en exemple !). D'autres montrent les mathématiques vivantes, en mouvement, avec un avant où personne n'avait jamais formulé quelque chose et un après où tout le monde parcourt la voie ouverte avec facilité. Il est fascinant parfois de constater combien une notion maintenant "évidente" à mis de temps à se dégager, avec quelles hésitations, essais non retenus ou controverses. On y trouve matière à comprendre certaines difficultés, certains blocages des élèves.

Nos élèves posent souvent la question : "A quoi servent les mathématiques que vous nous enseignez ?" L'approche historique permet d'y répondre en partie et d'entrevoir les développements actuels de la matière. Mais nous n'avions pas comme objectif dans ce groupe de rendre plus sensible aux élèves les travaux et théories qui ont vu le jour ces dernières années.[1]

Le travail du groupe s'est effectué sous la forme : une activité pour un membre du groupe. Cette forme de travail a permis d'aborder en deux ans une dizaine de thèmes, ce qui était beaucoup pour des enseignants qui connaissaient a priori peu de l'histoire des mathématiques. Chaque chapitre reflète donc la personnalité de ceux qui y ont particulièrement travaillé. Manquant nous-mêmes d'expérience dans le domaine de l'histoire des mathématiques, nous espérons que vous nous pardonnerez les fautes éventuelles.

---

[1] La recherche de documents intéressants peut se révéler décevante : on ne sait pas où chercher un document précis par exemple. Donnons quelques conseils. La bibliothèque de l'I.R.E.M. de Rennes est riche d'un certain nombre de livres sur l'histoire des mathématiques et de tous les fascicules publiés par les I.R.E.M., lesquels contiennent la reproduction de documents. Les bibliothèques des grandes villes de l'académie de Rennes : Brest, Morlaix, Quimper, Rennes, Vannes... sont parfois très riches en livres anciens de mathématiques qu'on peut consulter sur place et dont un catalogue provisoire est à la bibliothèque de l'I.R.E.M. de Rennes. Nous espérons que ce document vous incitera à leur lecture ! Si vous ne trouvez pas ce que vous cherchez, un dernier conseil : nous écrire à l'I.R.E.M. de Rennes, on essaiera de vous renseigner.

# Mode d'emploi du document

Ce document présente une dizaine de thèmes d'activités pour différentes classes de lycées ou collèges.

Nous voulons attirer l'attention sur la nécessité d'un investissement préparatoire minimal, une bonne connaissance du texte et une connaissance suffisante de son environnement scientifique et historique (nous avons essayé de donner ces éléments). Les textes proposés sont plutôt "sûrs" mais pour les premières fois surtout, il est important de bien voir :

- dans quelle progression générale du cours ils s'insèrent,
- ce qu'on en attend,
- la durée de l'activité,
- les points à laisser à l'initiative des élèves,
- ceux à traiter soi-même.

Sinon, le risque est grand de perdre trop de temps, voire de s'égarer, coupant court ou gâchant l'activité dans laquelle on s'est lancé.

Les élèves sont assez surpris de l'irruption de l'histoire dans le cours de mathématiques mais, par la suite, la plupart en comprenne l'intérêt et prennent goût à de telles activités.

Le document contient trois chapitres “buissonniers” sur la numération grecque, l'histoire des notations algébriques, la vie de François Viète.

Les autres chapitres contiennent le texte d'une activité tel qu'il a été mis au point et expliquent les démarches qui ont été testées. Nous présentons les dernières versions élaborées, après plusieurs expérimentations. Chaque reprise de l'activité a provoqué des surprises et des remises au point car chaque classe a ses particularités et les élèves sont différents d'une année à l'autre. Aussi ces textes peuvent-ils être utilisés tels quels : nous pensons avoir suffisamment balisé le terrain ; ils peuvent aussi être remodelés suivant votre perception de l'activité et vos exigences propres.

# PREMIERE PARTIE

# LES NOMBRES DANS L'ANTIQUITE

# Chapitre I
# La Mésopotamie et l'Egypte

## 1 Mésopotamie

### 1.1 Nécessité de l'écriture

Les débuts fascinent toujours, particulièrement les premiers pas de l'écriture vers -3300 en basse Mésopotamie. Ce serait un peu avant l'Egypte mais certains en discutent toujours et de nouvelles découvertes archéologiques pourraient reposer la question. De cette époque datent des tablettes sur lesquelles ont été notés des inventaires : nombre de brebis, d'esclaves, quantité de telle céréale, etc., avec le nom ou le sceau du propriétaire. Les premières notions de calcul sont probablement antérieures de plusieurs millénaires : on a retrouvé, par exemple, des "jetons" qu'on plaçait (à partir de -3300 environ) dans des enveloppes d'argile closes, certains avec des signes, pour se souvenir de l'effectif d'un troupeau. Rappelons[1] qu'au Moyen Orient la production agricole et la

---

[1] Encyclopedia Universalis 12, p. 1064.

sédentarisation commencent très tôt, les céréales sont cultivées vers -7800 en Palestine, la domestication des animaux progresse (mouton : -9000, bœuf : -5000, etc.), la roue est utilisée cers -4000, et que tout ceci peut induire la nécessité de comptes.

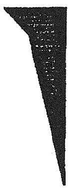
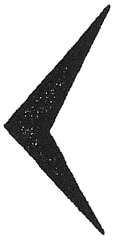
Il faut bien voir que les grands textes écrits sont postérieurs d'au moins 800 ans à la découverte de l'écriture ; pendant longtemps l'écriture a eu surtout des usages comptables.

### 1.2 L'arithmétique vers -3000

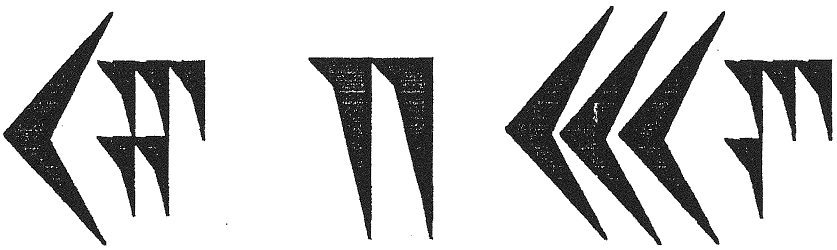
Elle consiste en additions, soustractions et multiplications, en général sur de petits nombres dans un système de base 60 où 10 joue un rôle important ; nous renvoyons aux traités spécialisés pour la description des symboles utilisés.

### 1.3 L'écriture des nombres en -1800

Des simplifications de notation semblent s'opérer vers -2600. En -1800, les nombres sont écrits en base 60, avec les deux seuls symboles

1 =  10 = 

Par exemple, le nombre noté

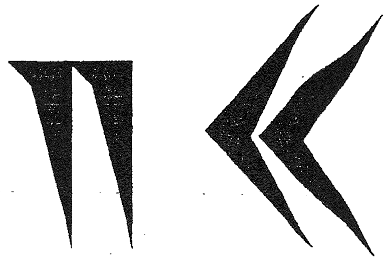


se lit 15 2 34 et signifie $15 \times 3600 + 2 \times 60 + 34 = 54154$, de la même façon qu'avec notre système décimale en base 10 l'écriture 379 signifie $3 \times 100 + 7 \times 10 + 9$.

Notre division des angles ou des heures en soixantièmes vient de là. On peut s'émerveiller que 5000 ans au moins nous séparent de sa première conception ; ce sont les astronomes grecs, arabes et juifs qui servent de relais.

Pour distinguer un nombre où une puissance de 60 est affectée d'un coefficient nul, tel que $2.60^2 + 0.60 + 20$, du nombre $2.60 + 20$ le scribe babylonien des années -1800... ne fait rien. Il fait confiance à son lecteur pour interpréter correctement ; rarement, il laisse un espace) . C'est une difficulté du système babylonien de notation des nombres. On pourrait trouver pour la même écriture des valeurs telles que :

$$\left.\begin{array}{l} 140 = 2 \times 60 + 20 \times 1 \\ 7220 = 2 \times 3600 + 20 \times 1 \\ 8400 = 2 \times 3600 + 20 \times 60 \end{array}\right\}$$



La conception du zéro ne semble vraiment pas aller de soi, même si tout écolier d'aujourd'hui la maîtrise. Il apparaît peut-être vers -700 et son utilisation est avérée vers -300 ; c'est le signe servant à séparer des phrases (ressemblant à deux clous penchés) ; on en connaît des exemples analogues à ceux de notre 0 dans les nombres 309 ou 3009 et de rares exemples pour noter l'absence d'unité comme dans 180 = 3.60 + 0, ou un nombre inférieur à 1 comme $\frac{53}{60}$ ou $\frac{30}{60^2}$. C'est la première numération positionnelle. Mais attention, ce symbole est utlisé pour noter des nombres. En aucun cas il ne note le cardinal 0 ; quand un scribe note le résultat d'une distribution de grains, il écrit : le grain est épuisé ! Voir les livres d'Ifrah.

### 1.4 Connaissances mathématiques babyloniennes

Elles ont de quoi surprendre, même si elles ne sont pas énoncées sous forme théorique comme dans la mathématique grecque mais sous forme d'exemples numériques (on a retrouvé de nombreuses tablettes conçues comme des tables de valeurs, pour les calculs).

Parmi les plus belles, citons celles donnant :

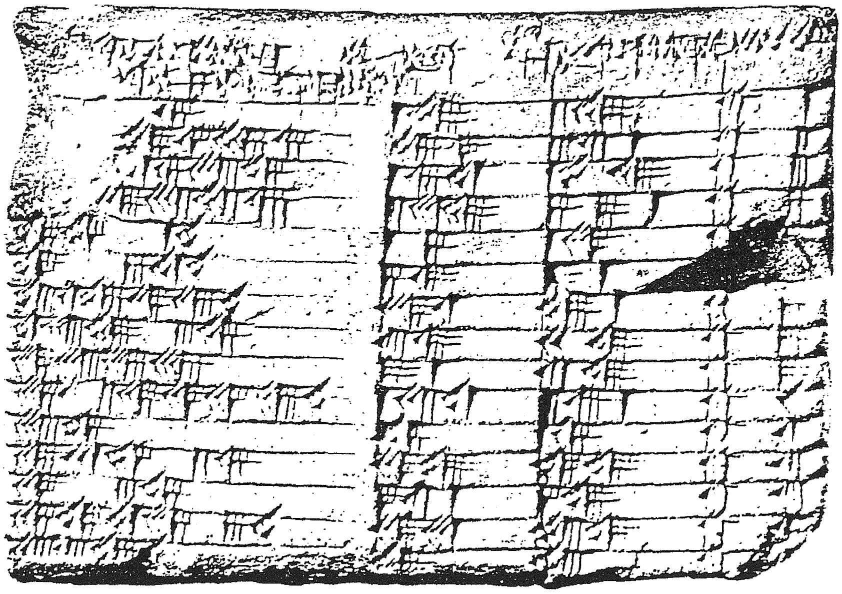
- le théorème de Pythagore,
- la méthode générale de résolution des équations du second degré,
- une formule donnant des triplets $(a, b, c)$ d'entiers tels que $a^2 = b^2 + c^2$ (tablette Plimpton 322 ci-dessus),
- une très bonne approximation de $\sqrt{2}$, datant de -1700 environ : la tablette donne 1 24 51 10 c'est-à-dire $1+\frac{24}{60}+\frac{51}{60^2}+\frac{10}{60^3} = 1,414212963$, valeur exacte à $10^{-6}$ près.

Pour l'approximation de $\sqrt{2}$, certains pensent qu'elle a pu être obtenue avec la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{2}{u_n})$ ; on a $u_1 = \frac{3}{2}$, $u_2 = \frac{17}{12} = 1\ 25$, $\frac{2}{u_2} = \frac{24}{17} \approx 1\ 24\ 42\ 21$ en utilisant une valeur approchée sexagésimale, d'où $u_3 \approx 1\,24\,51\,10$.

Nous proposons une activité sur la tablette Plimpton 322 dans le document du groupe Regard historique et actuel de l'I.R.E.M. de Rennes (1995).

### 1.5 Les tablettes

Ecrites le plus souvent sur de l'argile humide puis séchées au soleil, elles nous livrent le texte ancien dans son état original ou une copie très proche. On remarquera la différence avec les manuscrits contenant des textes d'Euclide ou d'autres.



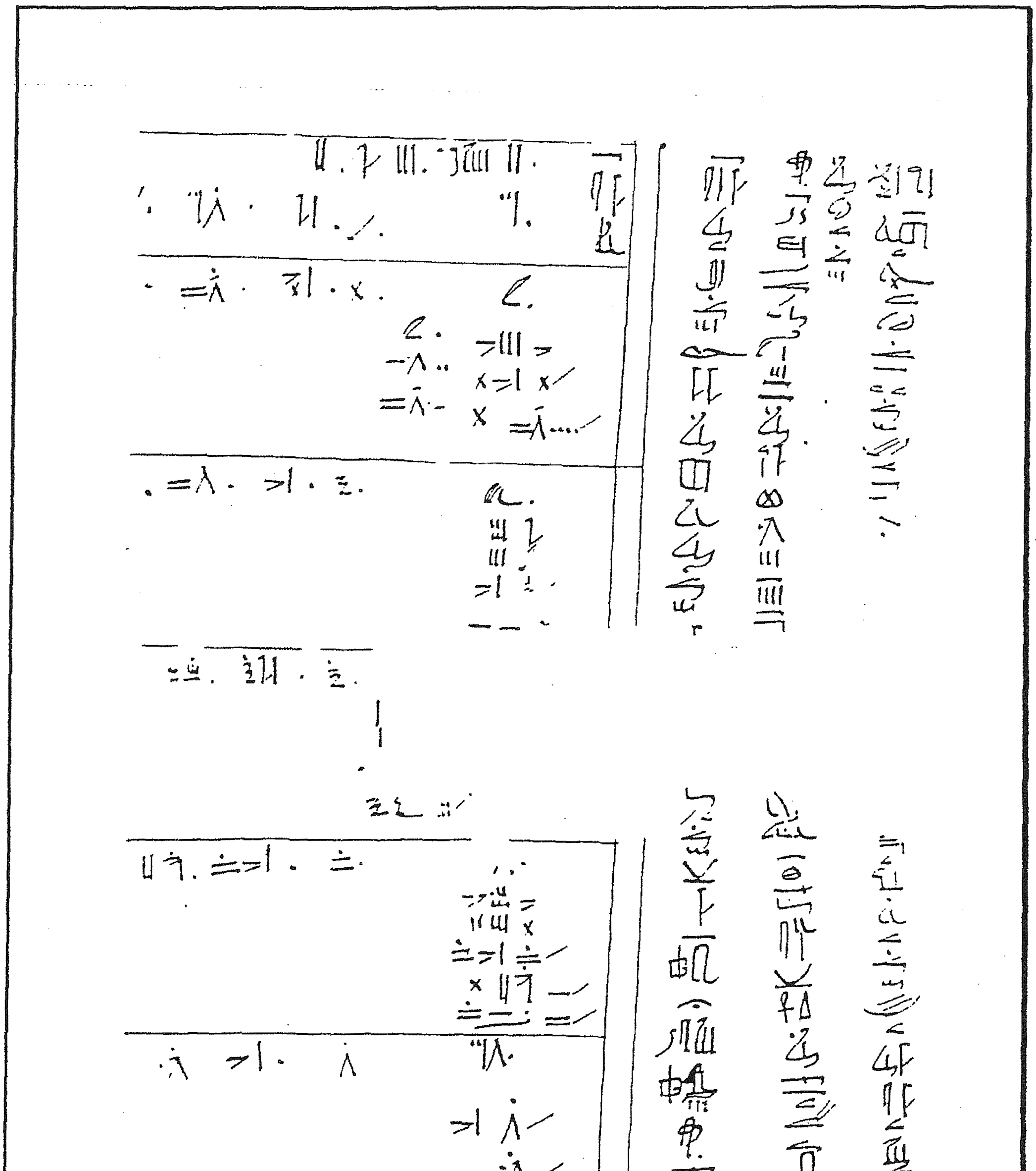
*La tablette Plimpton 322*

## 2 Egypte

### 2.1 Le papyrus Rhind

Les sources d'information sur les connaissances mathématiques égyptiennes vers -2000, -1500 sont contenus dans quelques papyrus retrouvés depuis 150 ans.

L'un des deux plus connus, découvert en 1855 à Thèbes, en Egypte, a été acheté par un jeune avocat écossais, Henry Rhind, à Louxor en 1858. Dans son état actuel, il mesure plus de 5 mètres de long et 33 centimètres de hauteur. Le papyrus Rhind est conservé au British Museum, à Londres. Il s'agit d'une copie vers -1700, par le scribe Ahmès, d'un document vieux d'une centaine d'années, écrit sous le règne de l'un des pharaons Hyksos, peuple qui a régné 150 ans sur l'Egypte. Un autre papyrus, le papyrus de Moscou, acheté en 1893 par un russe du nom de Golenischev, est un peu antérieur.



*Début du papyrus Rhind*

*"Règles pour scruter la nature et connaître tout ce qui existe. Ecrit en l'an 33, quatrième mois de la saison des inondations sous le règne de Âousserê Apopi, roi de la Haute et de la Basse Egypte, d'après un écrit du temps de Nemare, roi de la Haute et de la Basse Egypte. C'est Ahmoses qui a écrit cette copie."*

Au travers de ces deux textes, les connaissances mathématiques égyptiennes semblent bien moins importantes que les babyloniennes même si la fragilité du papyrus, support des textes égyptiens, n'a pas permis la conservation de beaucoup de documents.

### 2.2 L'écriture des nombres

Deux systèmes d'écriture (hiéroglyphique et hiératique), qui se distinguent par les symboles utilisés, étaient en usage. Le scribe Ahmès, par exemple, écrit les nombres avec un système de base 10, où les symboles adoptés pour la notation hiéroglyphique, sont les suivants :

- pour les unités : 𓏺 ;
- pour les dizaines : ∩ ;
- pour les centaines : 𓍢 ;
- pour les milliers : 𓆼 (une fleur de lotus avec sa tige) ;

avec des symboles aussi pour $10^4$, $10^5$, $10^6$, $10^7$. Le symbole est répété le nombre de fois nécessaire pour signifier 1, 2, 3, ..., 10, 20, 30, etc. Pour plus de lisibilité, les symboles identiques sont, en général, superposés par petits groupes s'ils sont en nombre ≥ 4. Les nombres s'écrivent de droite à gauche ou inversement ; dans le second cas, les symboles non symétriques sont écrits comme dans un miroir. Remarquons qu'un tel système n'a pas besoin de zéro.

Ecriture de 3269

*lecture de la droite vers la gauche* *lecture de la gauche vers la droite*

### 2.3 Duplication

Pour multiplier deux nombres, les égyptiens se ramènent, en général, à des multiplications par 2 (des duplications) successives, comme s'il décomposaient l'un des deux nombres en base deux.

Pour multiplier 7 par 13, le scribe double 7, double le résultat, double encore et additionne $7+28+56$ puisque $13 = 8 + 4 + 1$ (autrement dit $13 = 1101$ en base deux).

## 3 Activité proposée pour les classes de 6$^{\text{ème}}$ ou 5$^{\text{ème}}$

### 3.1 Connaissances nécessaires

Procédures de calcul de l'école primaire ; aucune connaissance de collège.

### 3.2 Objectifs pédagogiques

Lien avec l'enseignement de l'histoire en 6$^{\text{ème}}$ et 5$^{\text{ème}}$.

Donner un aperçu de méthodes de calculs anciennes, parfois encore pratiquées.

Faire prendre conscience des progrès accomplis.

Faire mieux comprendre et consolider les procédures de calcul.

### 3.3 Mode d'emploi

L'activité nécessite une introduction sur l'Egypte et l'écriture hiéroglyphique des nombres. Il faut aussi présenter la multiplication par duplications successives.

### 3.4 Réaction des élèves

L'activité est simple et n'a pas posé de problèmes particuliers aux élèves auxquels nous l'avons proposée.

## 4 Informations complémentaires

### 4.1 Division

La division utilise, à l'envers, le même procédé que la multiplication. Suivons le scribe du papyrus Rhind dans une division facile puis dans une division difficile où nous verrons un peu sa technique des fractions.

L'idée, pour nous, est la suivante : pour calculer le quotient $\frac{a}{b}$, on cherche des nombres $\alpha_1, \ldots,$ $\alpha_k$ tels que $\alpha_1 b + \ldots + \alpha_k b = a$ ; on aura alors : $\frac{a}{b} = \frac{(\alpha_1 + \ldots + \alpha_k)b}{b} = \alpha_1 + \ldots + \alpha_k$.

Nous avons suivi la disposition des calculs, ajoutant les expressions littérales.

**Division de $a = 1$ par $b = 3 + \frac{1}{3}$**

| | |
|---|---|
| $a = 1$ | $b = 3\frac{1}{3}$ |
| $\alpha_1 = \frac{1}{10}$ | $\alpha_1 b = \frac{1}{3}$ |
| $\alpha_2 = \frac{1}{5}$ | $\alpha_2 b = \frac{2}{3}$ |
| $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{10} + \frac{1}{5}$ | $\alpha_1 b + \alpha_2 b = 1$ |

Le résultat est $\frac{1}{10} + \frac{1}{5}$, que nous écririons $\frac{3}{10}$ mais que le scribe égyptien préfère laisser sous la forme de somme de fractions de numérateur 1.

**Division de $a = 2$ par $b = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$**

En général, on ne trouve pas immédiatement les $\alpha_i$. Il faut calculer des nombres de la forme $\beta_i b$ et choisir les $\alpha_i$ parmi les $\beta_i$. Toutefois, le scribe ne fait figurer que des calculs intermédiaires utiles. Ici, le scribe, sachant que ses calculs font apparaître des 144$^{\text{èmes}}$, dispose une troisième colonne qui donne l'équivalent en 144$^{\text{èmes}}$ des $\beta_i b$.

| $\beta_i$ | $\beta_i\, b$ | $144\ \beta_i\, b$ |
|---|---|---|
| * $1$ | $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$ | 228 |
| $\frac{2}{3}$ | $1+\frac{1}{18}$ | 152 |
| $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{36}$ | 76 |
| * $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{4}+\frac{1}{72}$ | 38 |
| * $\frac{1}{12}$ | $\frac{1}{8}+\frac{1}{144}$ | 19 |
| * $\frac{1}{228}$ | $\frac{1}{144}$ | 1 |
| * $\frac{1}{114}$ | $\frac{1}{72}$ | 2 |

Comme on veut trouver $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tels que $\alpha_1\, b + \ldots + \alpha_k\, b = a$, on doit avoir :

$$144\alpha_1\, b + \ldots + 144\ \alpha_k\, b = 288,$$

ce qui guide les calculs et le choix des $\alpha_i$ parmi les $\beta_i$ : ce sont ceux des lignes 1, 4, 5, 6, 7 puisque $228 + 38 + 19 + 2 + 1 = 288$. On a donc :

$$144\ \beta_1\, b + 144\ \beta_4\, b + 144\ \beta_5\, b + 144\ \beta_6\, b + 144\ \beta_7\, b = 288,$$

d'où :

$$\beta_1 + \beta_4 + \beta_5 + \beta_6 + \beta_7 = \frac{2}{b} \text{ soit } \frac{2}{b} = 1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{114} + \frac{1}{228}\,.$$

### 4.2 Fractions de la forme $\frac{2}{n}$

Les égyptiens ont développé le calcul des fractions avec cette particularité qu'ils se ramenaient toujours à des sommes de fractions de numérateur 1 à l'exception de $\frac{2}{3}$.

La notation de la fraction $\frac{1}{n}$ est celle de n surmontée du signe ⌒ placé au-dessus du nombre, ou d'une partie du nombre, si celui-ci est long à écrire.

La recherche de décompositions des fractions de la forme $\frac{2}{n}$ comme somme de fractions de numérateur 1 est un des principaux objets des problèmes du papyrus Rhind qui donne de telles formules pour $n$ impair, $5 \leq n \leq 101$. Différentes techniques sont utilisées, voir l'article de Van der Waerden.

## 5 Texte de l'activité

# Calculs des égyptiens

1) Ecrire dans le système hiéroglyphique, de la gauche vers la droite, les nombres :

541 233 403

2) Quels sont les nombres qui s'écrivent de la gauche vers la droite :

∩ ∩ ∩ | | |

∩∩∩
∩∩

| | | |
| | |

3) Effectuer les additions suivantes :

∩ |||
∩ ||

∩∩||||||
∩ ||||

∩∩∩∩∩∩|||
∩∩∩∩∩∩||

4) Effectuer les soustractions suivantes :

∩∩ ||||||
∩ ||||

∩∩∩|||
∩ ||||

∩∩|||
∩∩||||||

5) Etude d'un exemple de multiplication
Soit à calculer 13 × 7.

| Calculs avec notre écriture | | Calculs avec l'écriture hiéroglyphique | |
|---|---|---|---|
| * 1 | 7 | | |
| 2 | 14 | | |
| * 4 | 28 | | |
| * 8 | 56 | | |
| 13 | 91 | | |

On s'arrête à 8 car le calcul suivant serait 16 × 7 ; comme 13 < 16, il est donc inutile. On cherche dans la colonne de gauche des nombres dont la somme soit 13 : 13 = 8 + 4 + 1, d'où 13×7 = (8 + 4 +1) × 7 = 56 + 28 + 7 = 91 (on met un astérisque au début des lignes qu'on retient).

6) Complète le tableau précédent.

7) Calcule par cette méthode les produits $5 \times 12$, $14 \times 15$, $24 \times 27$, $31 \times 35$.

| Calculs avec notre écriture | | Calculs avec l'écriture hiéroglyphique | |
|---|---|---|---|
| 1 | 12 | | |
| 2 | | | |
| 4 | | | |
| | | | |

| Calculs avec notre écriture | | Calculs avec l'écriture hiéroglyphique | |
|---|---|---|---|
| 1 | 15 | | |
| 2 | | | |
| 4 | | | |
| | | | |

| Calculs avec notre écriture | | Calculs avec l'écriture hiéroglyphique | |
|---|---|---|---|
| 1 | 27 | | |
| 2 | | | |
| 4 | | | |
| | | | |

| Calculs avec notre écriture | | Calculs avec l'écriture hiéroglyphique | |
|---|---|---|---|
| 1 | 35 | | |
| 2 | | | |
| 4 | | | |
| | | | |

## 6 Bibliographie

¶¶¶ Catalogue de l'exposition Naissance de l'écriture, 7 mai - 9 août 1982.— Réunion des musées nationaux, 1982.
On y trouve la reproduction et l'étude de documents très anciens de Sumer et de l'Egypte.

¶¶¶ Collette Jean-Paul : Histoire des mathématiques, tome 1, Vuibert, 1973.
Un livre très accessible et en français.

¶¶¶ Encyclopedia Universalis, 1984.

¶¶¶ Gillain O. : La science Egyptienne. L'arithmétique du Moyen Empire.— Ed. de la fondation de la reine Elisabeth, 1927.
Lecture détaillée du papyrus Rhind.

¶¶¶ Groupe Regard historique et actuel : Document, I.R.E.M. de Rennes, 1995.
Contient une activité, niveau seconde, sur la tablette Plimpton 322.

¶¶¶ Guitel Geneviève : Histoire comparée des numérations écrites.— Flammarion, 1981.

¶¶¶ Ifrah Georges : Histoire universelle des chiffres.— Seghers, 1981. $2^{\text{ème}}$ éd., Robert Laffont, 1994, 2 vol.
La première édition paraissait déjà extrêmement complète, que dire de la seconde, quatre fois plus volumineuse ; on y trouve tout, très détaillé.

¶¶¶ Keller Olivier : L'algèbre et le calcul en Egypte antique.— I.R.E.M. de Lyon, sans date (vers 1990).
Bonne introduction à ce qu'on sait des mathématiques égyptiennes.

¶¶¶ W. Knorr : Techniques of fractions in ancient Egypt and Greece, historia mathematica 9, p. 133-171, (1982).

¶¶¶ Menninger Karl : Zahlwort und Ziffer.— Vandenhoek & Ruprecht, 1957-58.
En allemand.

¶¶¶ Neugebauer Otto : Les sciences exactes dans l'antiquité.— Actes Sud, 1990.
Traduction d'un livre de 1957 d'un grand spécialiste de la science ancienne.

¶¶¶ Van der Waerden Bartel Leendert : la table 2/n du papyrus Rhind.— Centaurus 23 (1980).— pages 259-274.
Document difficile à se procurer qui explique les procédés égyptiens pour décomposer $\frac{2}{n}$ en somme de fractions de numérateur 1.

# Chapitre II
# Numérations des Grecs

Ce chapitre ne semble pas être exploitable en classe sauf pour des élèves étudiant par ailleurs le grec. Mais ce serait sans doute une lacune dans notre document de ne pas expliquer avec quels systèmes les grecs, qui ont tellement contribué au développement des mathématiques, écrivaient leurs calculs numériques. Le seul système de numération de l'antiquité encore en usage de nos jours : les chiffres romains : I, V, X, L, C, D, M, n'était pas utilisé par les mathématiciens ; il aurait été assez impraticable, même pour une addition, et était réservé surtout aux inscriptions. Comme tout le monde à l'époque, les romains utilisaient un système grec.

Les livres cités en bibliographie donnent des informations sur de nombreux autres systèmes.

## 1 Présentation

L'alphabet grec est d'origine phénicienne ; Hérodote parle de *φοινικηια γραμματα* : écriture phénicienne.

Différents systèmes de numération ont été en usage dans les cités et le monde grec, parfois simultanément. Chaque communauté pouvait posséder le sien.

Nous présenterons les deux plus perfectionnés. Tous les deux utilisent les lettres de l'alphabet grec ; le premier attesté dès -600, le second au cours du 3ème siècle av. JC. L'usage du second s'étendra progressivement au monde méditerranéen et même à certains savants arabes antérieurs au douzième siècle ; ce sont les chiffres arabes venus de l'Inde qui causeront sa disparition ; il subsistera cependant dans l'empire byzantin jusqu'en 1453, ce qui lui donne la même durée que notre système actuel !

De nombreux documents d'époque : papyrus, monnaies, tables gravées... attestent de leur usage ancien.

La forme des signes (en particulier les lettres phéniciennes) est approximative dans ce qui suit.

## 2 Numération acrophonique

Ce système est employé dans la cité d'Athènes dès 600 av. JC. La domination d'Athènes sur le monde grec au cinquième siècle, après les victoires sur les Perses, lui permet d'imposer sa monnaie, son système de poids et mesures et ce système de numération. Son usage, limité à la métrologie et aux opérations monétaires continuera jusqu'au début de notre ère. On va voir que ce système déjà un peu lourd pour les additions est mal adapté aux multiplications.

Il est qualifié d'acrophonique parce que l'initiale du mot désignant le nombre sert à le représenter (en grec *ακροσ*, akros, signifie extrême) ; on parle aussi du système attique.

| Symbole | Nombre | Valeur du nombre |
|---|---|---|
| *I* iota | | 1 |
| Γ pi (graphie ancienne) | Πεντε pentè | 5 |
| Δ delta | Δεκα deca | 10 |
| *H* eta | *Ηεκατον* hecaton | 100 |
| *X* khi | *χιλιοι* khilioi | 1000 |
| *M* mu | *Μυριοι* murioi | 10000 |

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | *I* | 10 | Δ | 100 | *H* | 1000 | *X* | 10000 | *M* |
| 2 | *II* | 20 | ΔΔ | 200 | *HH* | 2000 | *XX* | 20000 | *MM* |
| 3 | *III* | 30 | ΔΔΔ | 300 | *HHH* | 3000 | *XXX* | 30000 | *MMM* |
| 4 | *IIII* | 40 | ΔΔΔΔ | 400 | *HHHH* | 4000 | *XXXX* | 40000 | *MMMM* |
| 5 | Γ | 50 | $\Gamma^{\Delta}$ | 500 | $\Gamma^{H}$ | 5000 | $\Gamma^{X}$ | 50000 | $\Gamma^{M}$ |
| 6 | Γ*I* | 60 | $\Gamma^{\Delta}$Δ | 600 | $\Gamma^{H}$*H* | 6000 | $\Gamma^{X}$*X* | 60000 | $\Gamma^{M}$*M* |
| 7 | Γ*II* | 70 | $\Gamma^{\Delta}$ΔΔ | 700 | $\Gamma^{H}$*HH* | 7000 | $\Gamma^{X}$*XX* | 70000 | $\Gamma^{M}$*MM* |
| 8 | Γ*III* | 80 | $\Gamma^{\Delta}$ΔΔΔ | 800 | $\Gamma^{H}$*HHH* | 8000 | $\Gamma^{X}$*XXX* | 80000 | $\Gamma^{M}$*MMM* |
| 9 | Γ*IIII* | 90 | $\Gamma^{\Delta}$ΔΔΔΔ | 900 | $\Gamma^{H}$*HHHH* | 9000 | $\Gamma^{X}$*XXXX* | 90000 | $\Gamma^{M}$*MMMM* |

Ce système repose d'abord sur un principe additif : les multiples des nombres 1, 10, 100, 1000, 10000 par 1, 2, 3, 4 se notent par la répétition du signe, ce qui revient par exemple à écrire 400 sous la forme 400 = 100 + 100 + 100 + 100 = *HHHH*.

Mais il est aussi basé sur un principe multiplicatif : 50, 500, 5000, 50000 se notent en plaçant le symbole rapetissé de 10, 100, 1000, 10000 sous la barre horizontale du Γ ; par exemple, 𐅄 doit être lu en pensant 50 = 5 × 10 ; de même pour écrire 500, 5000 ou 50000.

Les multiples des mêmes nombres par 6, 7, 8, 9 se notaient en juxtaposant les deux principes ; par exemple, 800 = 5 × 100 + 100 + 100 + 100 = 𐅅*HHH*.

Exemples d'écriture

73 s'écrit 𐅄ΔΔ*III* ;

1984 s'écrit *X*𐅅HHHH𐅄ΔΔΔ*IIII*.

Il faut donc 6 symboles et 14 signes dont deux complexes pour écrire 1984.

Expression de sommes d'argent

Le signe *I* désignant l'unité est remplacé par celui de l'unité de compte.

En voici deux exemples :

3633 drachmes s'écrit *XXX*𐅅*H*ΔΔΔ⊢⊢⊢, le signe ⊢ désignant la drachme ;

128 talents (1 talent vaut 6000 drachmes) s'écrit *H*ΔΔ𐅈*TTT*, le signe *T* désignant le talent.

128 talents 5357 drachmes 5 oboles (1 drachme vaut 6 oboles, l'obole est notée *I*) s'écrit :

*H*ΔΔ𐅈*TTT*𐅆*HHH*𐅄Γ⊢⊢*IIIII* ;

225 talents 140 drachmes 1/2 obole 1/4 obole s'écrit :

*HH*ΔΔ𐅈*H*ΔΔΔΔ*CT*.

Où trouver des documents ?

Voir les livres d'Ifrah ou de Menninger. Dans le second, voir la reproduction d'une table à compter en marbre non datée trouvée à Salamine (ville proche d'Athènes) et visible au musée d'Athènes (qui possède un certain nombre de documents du même genre), où on retrouve les 13 symboles du système ; cette table ressemble aux instruments à compter des banquiers du Moyen âge.

## 3 Numération alphabétique

Ce système, dont les premiers exemples connus datent de -310 à -250, se diffuse dans tout le Proche Orient au cours du 3$^{\text{ème}}$ siècle av. J.C.

Pour écrire les 27 entiers $k$, $10.k$, $100.k$ avec $1 \leq k \leq 9$, les 24 lettres de l'alphabet grec classique ne suffisent pas ; trois lettres phéniciennes dont les grecs n'ont pas gardé longtemps l'usage pour l'écriture de leur langue sont employées pour noter les nombres 6, 90, 900.

Pour les nombres supérieurs à 999 des symboles dérivés des précédents sont formés.

Ainsi les symboles des nombres $k$, $1 \leq k \leq 9$, surmontés à gauche d'une sorte d'accent aigu, notent les nombres $k.1000$ : ´*A* = 1000, ´*B* = 2000, etc., ce que montre par exemple la table de carrés du papyrus 65445 du musée du Caire.

Les nombres de la forme $n.10000$ où $1 \leq n \leq 9999$ sont notés avec un $M$ (initiale de myriades, $\mu\upsilon\rho\iota o\iota$) surmonté (ou précédé) du n écrit dans ce système :
$\overset{\alpha}{M} = 10000$, $\overset{\beta}{M} = 20000$, $\overset{\iota\alpha}{M} = 110000$, $\overset{\chi\xi\theta}{M} = 6690000$, etc.

Ce système combine donc des aspects additifs et des aspects multiplicatifs.

Exemples

Aristarque de Samos (vers -310 à -230) écrit :

$$\overset{\supset}{\zeta}\rho\, o\, \varepsilon M\, \overset{\supset}{\varepsilon}\, \omega\, o\, \varepsilon$$

pour 7175 × 10000 + 5875 = 71 755 875.

Diophante d'Alexandrie, 500 ans plus tard, écrit un . à la place du $M$, par exemple :

$\delta\, \tau\, o\, \beta\, .\, \overset{\supset}{\eta}$ ϙ $\zeta$

pour 43 728 097.

| Unités | | | Dizaines | | | Centaines | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $A$ | alpha | 10 | $I$ | iota | 100 | $P$ | ro |
| 2 | $B$ | béta | 20 | $K$ | kappa | 200 | $\Sigma$ | sigma |
| 3 | $\Gamma$ | gamma | 30 | $\Lambda$ | lambda | 300 | $T$ | tau |
| 4 | $\Delta$ | delta | 40 | $M$ | mu | 400 | $Y$ | upsilon |
| 5 | $E$ | epsilon | 50 | $N$ | nu | 500 | $\Phi$ | phi |
| 6 | ϛ | digamma | 60 | $\Xi$ | ksi | 600 | $X$ | khi |
| 7 | $Z$ | zéta | 70 | $O$ | omicron | 700 | $\Psi$ | psi |
| 8 | $H$ | èta | 80 | $\Pi$ | pi | 800 | $\Omega$ | oméga |
| 9 | $\Theta$ | théta | 90 | ϙ | koppa | 900 | ϡ | san |

Apollonius de Perge (vers -262 à -180) écrit de plus grands nombres en adaptant ce système. Si le nombre est de la forme $n.10000$ où $1 \leq n \leq 9999$, (classe des myriades premières, c'est-à-dire des nombres compris entre 10 000 et 9 999 000), on écrira n précédé de $\overset{\alpha}{M}$, par exemple $\overset{\alpha}{M}\ \chi\ \xi\ \delta = 664\ 0000$, s'il est de la forme $n.10^8$ où $1 \leq n \leq 9999$ (classe des myriades secondes), on écrira n précédé de $\overset{\beta}{M}$ et on pourrait continuer avec $\gamma$, $\delta$, etc. ; on conçoit qu'on puisse avec cette convention écrire des nombres beaucoup plus grands ; Pappus (vers 300) écrit :

$$\overset{\gamma}{M}\overset{\supset}{\varepsilon}\,\upsilon\,\xi\,\beta\quad \kappa\alpha\iota\quad \overset{\beta}{M}\overset{\supset}{\gamma}\,\chi\quad \kappa\alpha\iota\quad \overset{\alpha}{M}\ \overset{\supset}{\text{ϛ}}\ \upsilon$$

pour 5462 3600 6400 0000 où $\kappa\alpha\iota$ signifie plus.

Signalons enfin l'arénaire d'Archimède, court traité cherchant à construire de très grands nombres.

Les opérations

Nous avons fort peu de renseignements sur les méthodes des grecs mais quelques documents sont très instructifs.

Démosthène dans un plaidoyer contre Androtion vers -365 donne un exemple de calcul oral pour montrer que 12 mois lunaires de 29 jours 1/2 font 354 jours :

10 fois 20 font 200, 2 fois 20 font 40, 10 fois 9 font 90, 2 fois 9 font 18 et la moitié de 12 est 6 ; résultat : 354.

Les calculs commerciaux pouvaient s'effectuer sur des tables, telles celle retrouvée à Salamine. L'historien Polybe écrit vers -200 dans ses histoires : "Ceux qui vivent à la cour des rois sont exactement comme les jetons d'une table à compter ; c'est la volonté du calculateur qui fait valoir soit un chalkos, soit un talent" (ces termes désignent des monnaies).

Pour les opérations, il existait des tables (de multiplication, de carrés). Pour les calculs d'astronomie, il en existait d'arcs et de cordes. La disposition en colonnes des unités, dizaines, centaines... apparaît vers -300.

Un exemple de multiplication, dans un commentaire d'Eutocius au traité d'Archimède sur la mesure du cercle, avec une disposition semblable à celle de nos multiplications à la main, est donné dans le livre de Dedron et Itard, p. 280.

Compléments

Les systèmes précédents ne nécessitent pas de chiffre 0 ; l'histoire de l'apparition du 0 (chez les babyloniens, les indiens, les arabes) est détaillée dans le livre d'Ifrah.

L'histoire de l'écriture des fractions qui a mélangé, chez les grecs, le système alphabétique avec une partie fractionnaire en base 60 est trop technique pour tenter d'en donner une idée plus précise.

## 4 Bibliographie

¶¶¶ Eliane Cousquer : Histoire du concept de nombre.— I.R.E.M. de Lille, mai 1992.
¶¶¶ Dedron Pierre, Itard Jean : Mathématiques et mathématiciens.— Paris : Magnard, 1959.
¶¶¶ Guitel Geneviève : Histoire comparée des numérations écrites.— Flammarion, 1981.
¶¶¶ Ifrah Georges : Histoire universelle des chiffres.— Seghers, 1981.
¶¶¶ Menninger Karl : Zahlwort und Ziffer.— Vandenhoek & Ruprecht, 1957-58. En allemand.

# SECONDE PARTIE

# LA GEOMETRIE

# Chapitre III
# La Construction du pentagone étoilé dans les Eléments d'Euclide

## 1 Présentation

### 1.1 Fiche technique

Niveau : classes de seconde.

Thème : comment Euclide inscrit un pentagone régulier dans un cercle.

Durée : il est raisonnable de prévoir entre 3 et 4 heures :

- 1 heure en groupe pour se familiariser avec les énoncés : propositions 43 du livre 1 et 6 du livre 2
- 1 heure en classe entière : proposition 11 du livre 2
- 1/2 heure en classe entière : proposition 32 du livre 3
- à lire à la maison : propositions 36 et 37 du livre 3
- 1 heure en classe entière : proposition 10 du livre 4

Remarque : les propositions traitées dans l'activité suivent un ordre logique :

- la proposition 43 du livre 1 sert à Euclide pour démontrer la proposition 6 du livre 2,
- le résultat de la proposition 6 du livre 2 est essentiel,
- la proposition 11 du livre 2 vient obligatoirement après la proposition 6 du livre 2,
- la proposition 10 du livre 4 vient en dernier car elle fait appel aux résultats antérieurs.

### 1.2 Connaissances requises

Conservation des aires dans une symétrie centrale.

Aire des quadrilatères usuels.

Théorème de Pythagore.

Identités remarquables.

Angles complémentaires, supplémentaires, inscrits.

### 1.3 Objectifs pédagogiques

Rechercher le sens d'un texte écrit selon le style d'Euclide.

Aborder la notion de rigueur à partir des démonstrations étudiées.

Comprendre des constructions géométriques.

Percevoir l'importance de la géométrie grecque dans la manière de penser les mathématiques aujourd'hui.

Comparer une méthode de démonstration euclidienne, basée ici sur des considérations d'aires, avec les démonstrations algébriques actuelles.

## 2 Un peu d'histoire

### 2.1 L'école d'Alexandrie

C'est en janvier -331 qu'Alexandre, ayant conquis l'Egypte, fonde la ville d'Alexandrie, au bord de la mer.

A la mort d'Alexandre, en -323, Ptolémée, fils de Lagos, l'un des généraux d'Alexandre, se fait nommer satrape d'Egypte. Le pays est très riche ; Ptolémée affermit peu à peu son pouvoir durant les guerres des généraux d'Alexandre et se fait proclamer roi en -305, sous le nom de Ptolémée I Sôter, fondant une dynastie dont le dernier représentant est le fils de César et Cléopâtre.

En quelques dizaines d'années, Alexandrie devient la capitale intellectuelle du monde antique. Sur l'île de Pharos toute proche, on construit vers -280 le célèbre phare, une des sept merveilles du monde, haut de 180 mètres, qui ne sera détruit qu'en 1302, par un tremblement de terre.

Ptolémée fait venir du monde grec les lettrés et les savants, en particulier, en -297, Démétrios de Phalère, ancien gouverneur d'Athènes au savoir encyclopédique. Celui-ci serait le premier organisateur du Musée (lieu de rencontre des savants de l'époque, sous les auspices des muses, une sorte de CNRS). Son opposition à l'un des fils du roi, le futur Ptolémée II, lui coûtera la vie.

A la même époque, Ptolémée I fonde la Bibliothèque d'Alexandrie. Zénodote d'Ephèse en est le premier bibliothécaire. C'est le précepteur de Ptolémée II, roi de -285 à -246 ; il fit venir de partout les livres disponibles, réunissant dans la bibliothèque 600 000 ou 700 000 volumes soigneusement rangés.

Le rayonnement de la ville est alors immense et les échanges commerciaux et intellectuels avec le monde méditerranéen très développés. L'importance intellectuelle d'Alexandrie dure au moins jusqu'à 400 voire 600/700. La disparition de la très grande bibliothèque, par incendie dit-on, aura lieu dans des circonstances mal connues entre 450 et 650.

## 2.2 Euclide et les Eléments

L'école mathématique, rattachée au musée, connaît une activité intense dès le début. Euclide est un des premiers. Son contemporain Aristarque de Samos suppose un univers héliocentrique et calcule la distance de la terre à la lune.

Les Eléments d'Euclide supplantent immédiatement tous les textes mathématiques écrits avant eux ; ceux-ci ne sont plus étudiés ni recopiés et disparaissent.

Un philosophe du $5^{\text{ème}}$ siècle, Proclus, cite une anecdote concernant Euclide. Selon lui, le roi Ptolémée demanda un jour à Euclide s'il y avait pour la géométrie un chemin plus court que celui des Eléments ; Euclide répondit "qu'il n'y a pas, pour la géométrie, de voie directe réservée aux rois". On peut douter de la véracité d'un récit plus que banal, postérieur de plus de 700 ans aux faits ! En fait, on ne sait rien d'Euclide.

Les Eléments d'Euclide forment le texte le plus fréquemment imprimé, après la Bible.

Parmi les œuvres d'Euclide, certaines perdues, citons le livre des Données, qui traite de géométrie plane, les Phénomènes, introduction à l'astronomie, l'Optique, quatre livres sur les coniques.

Parmi les prédécesseurs d'Euclide, citons Hippocrate de Chio, Théétète, et surtout Eudoxe de Cnide (-400 à -355 environ), qui aurait considérablement influencé les Eléments. Ce dernier semble avoir été un des plus grands savants de son temps ; il serait l'auteur de la théorie difficile des proportions (livre 5 des Eléments), inventant en quelque sorte les coupures de Dedekind (qui définissent un réel par l'ensemble des rationnels qui lui sont inférieurs et l'ensemble des rationnels qui lui sont supérieurs) et l'auteur de la démonstration de la formule donnant le volume de la pyramide (livre 12 des Eléments), comme tiers du produit de la base par la hauteur, par des techniques géométriques inventant le calcul intégral.

Au travers de cette activité on pourra apprécier la nouveauté des Eléments, leur élégance de construction, les premiers livres tournés vers la construction du pentagone régulier, etc. Même la lourdeur de certaines répétitions apparaît justifiée pour un mathématicien soigneux.

Nous utilisons la traduction de F. Peyrard[1], publiée en 1814-1818, que nous citerons en utilisant des italiques, en remplaçant cependant les lettres grecques par des lettres latines pour être plus lisible. Des éditions critiques des Eléments, beaucoup plus précises ont été réalisées depuis.

Nous ne voulons pas alourdir ce chapitre par une présentation trop longue ; pour en savoir beaucoup plus, lire Maurice Caveing.

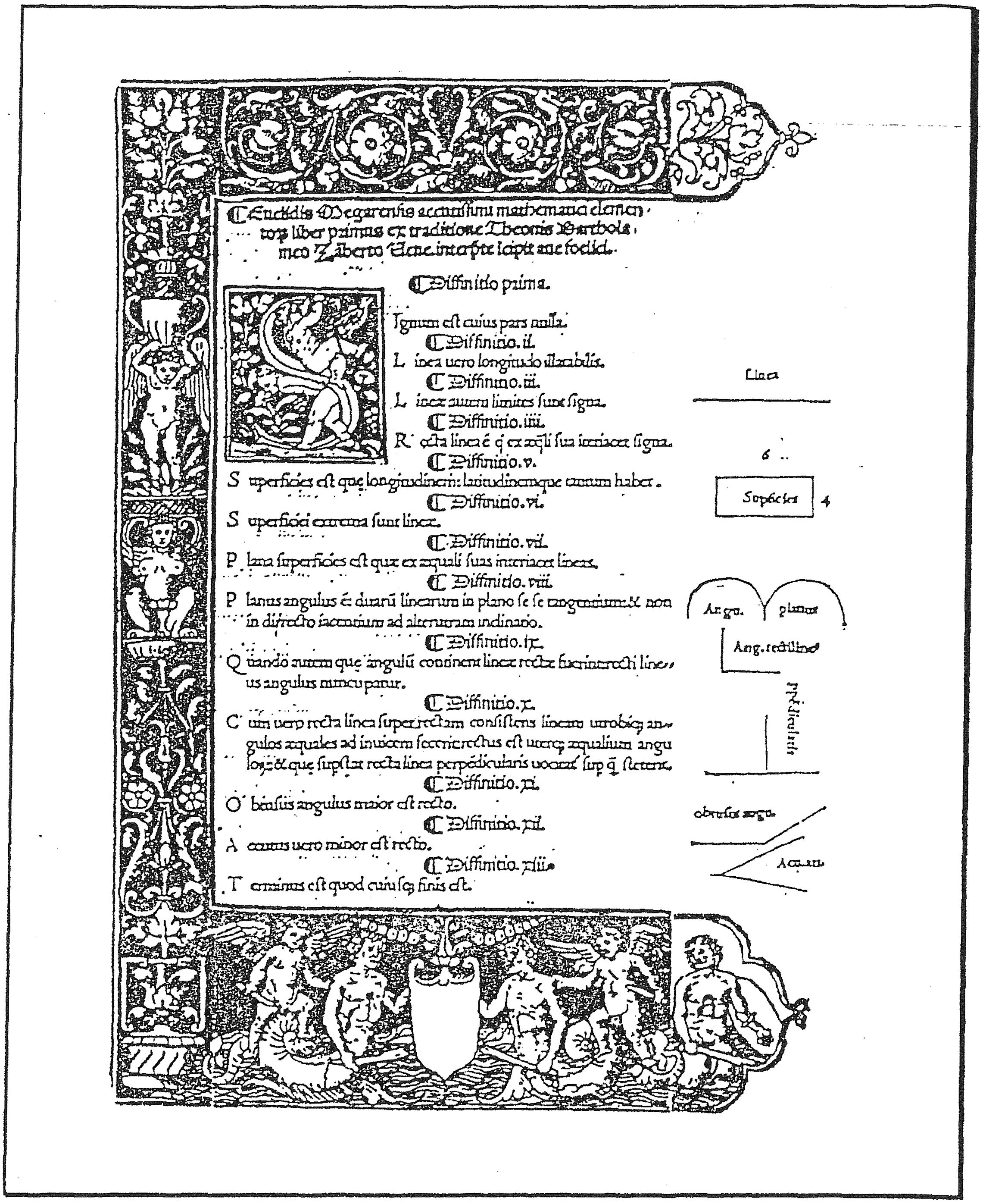
---

[1] Pour plus de détails sur Peyrard, nous renvoyons aux documents du groupe Regard historique et actuel de l'IREM de Rennes

## 2.3 Chronologie de -600 à -180

Certaines dates sont approximatives. Ce qui concerne les mathématiques est signalé par une astérisque.

| date | math | |
|---|---|---|
| -600 | * | Thalès de Milet |
| -520 | * | Pythagore |
| -430 | * | Hippasos de Métaponte |
| -427 | * | Naissance de Platon |
| -415 | * | Naissance de Théétète |
| -400 | * | Naissance d'Eudoxe de Cnide |
| -399 | | Mort de Socrate |
| -384 | | Naissance d'Aristote |
| -369 | * | Mort de Théétète |
| -356 | | Avénement de Philippe II de Macédoine |
| -355 | * | Mort d'Eudoxe |
| -347 | | Mort de Platon |
| -336 | | Alexandre succède à Philippe II, assassiné |
| -331 | | Fondation d'Alexandrie par Alexandre |
| -323 | | Mort d'Alexandre à Babylone |
| -322 | * | Mort d'Aristote |
| -305 | | Ptolémée I Sôter fonde la dynastie des Lagides à Alexandrie |
| -300, -280 ? | * | Eléments d'Euclide |
| -290 | | Fondations du Musée et de la Bibliothèque |
| -287 | * | Naissance d'Archimède |
| -284 | * | Naissance d'Eratosthène |
| -280 | | Construction du phare d'Alexandrie (détruit en 1302) |
| -262 | * | Naissance d'Apollonius de Perge |
| -212 | * | Mort d'Archimède |
| -192 | * | Mort d'Eratosthène |
| -180 | * | Mort d'Apollonius |



Euclidis Megarensis acutissimi mathematici elemen-
torum liber primus ex traditione Theonis Bartholo-
meo Zāberto Vene. interpte icipit [illegible]

Diffinitio prima.

Signum est cuius pars nulla.

Diffinitio. ii.

Linea uero longitudo illatabilis.

Diffinitio. iii.

Lineae autem limites sunt signa.

Diffinitio. iiii.

Recta linea ē q ex aeqli sua interiacet signa.

Diffinitio. v.

Superficies est quae longitudinem: latitudinemque tantum habet.

Diffinitio. vi.

Superficiei extrema sunt lineae.

Diffinitio. vii.

Plana superficies est quae ex aequali suas interiacet lineas.

Diffinitio. viii.

Planus angulus ē duarū linearum in plano se se tangentium & non in directo iacentium ad alterutram inclinatio.

Diffinitio. ix.

Quando autem quae angulū continent lineae rectae fuerint recti lineus angulus nuncupatur.

Diffinitio. x.

Cum uero recta linea super rectam consistens lineam utrobique angulos aequales ad inuicem fecerit rectus est uterque aequalium angulorum & quae superstat recta linea perpēdicularis uocatur super quā stetit.

Diffinitio. xi.

Obtusus angulus maior est recto.

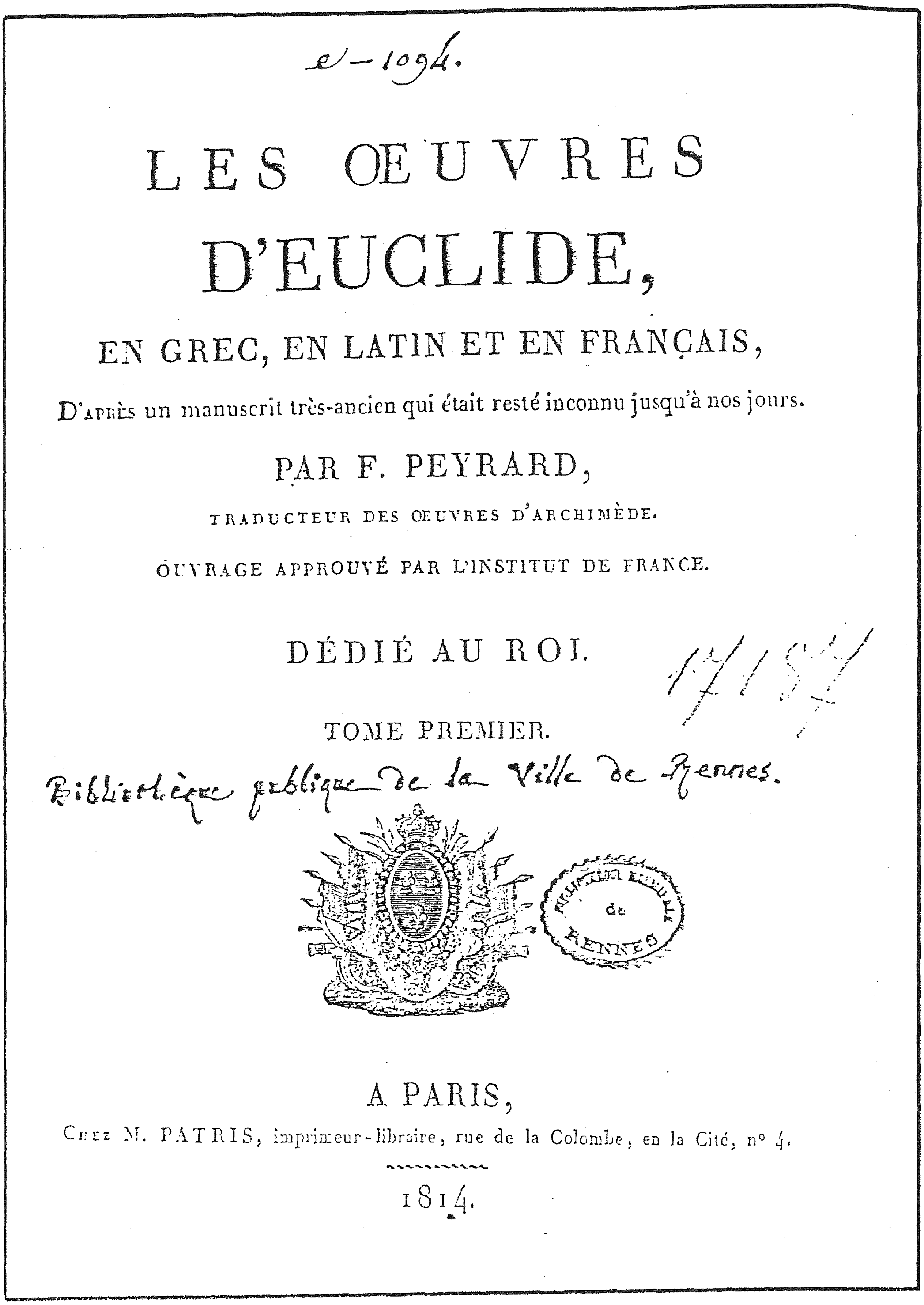
Diffinitio. xii.

Acutus uero minor est recto.

Diffinitio. xiii.

Terminus est quod cuiusque finis est.

*Les Eléments, édition du 16$^{ème}$ siècle de Zamberto.*



# LES ŒUVRES D'EUCLIDE,

## EN GREC, EN LATIN ET EN FRANÇAIS,

D'après un manuscrit très-ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours.

PAR F. PEYRARD,

TRADUCTEUR DES ŒUVRES D'ARCHIMÈDE.

OUVRAGE APPROUVÉ PAR L'INSTITUT DE FRANCE.

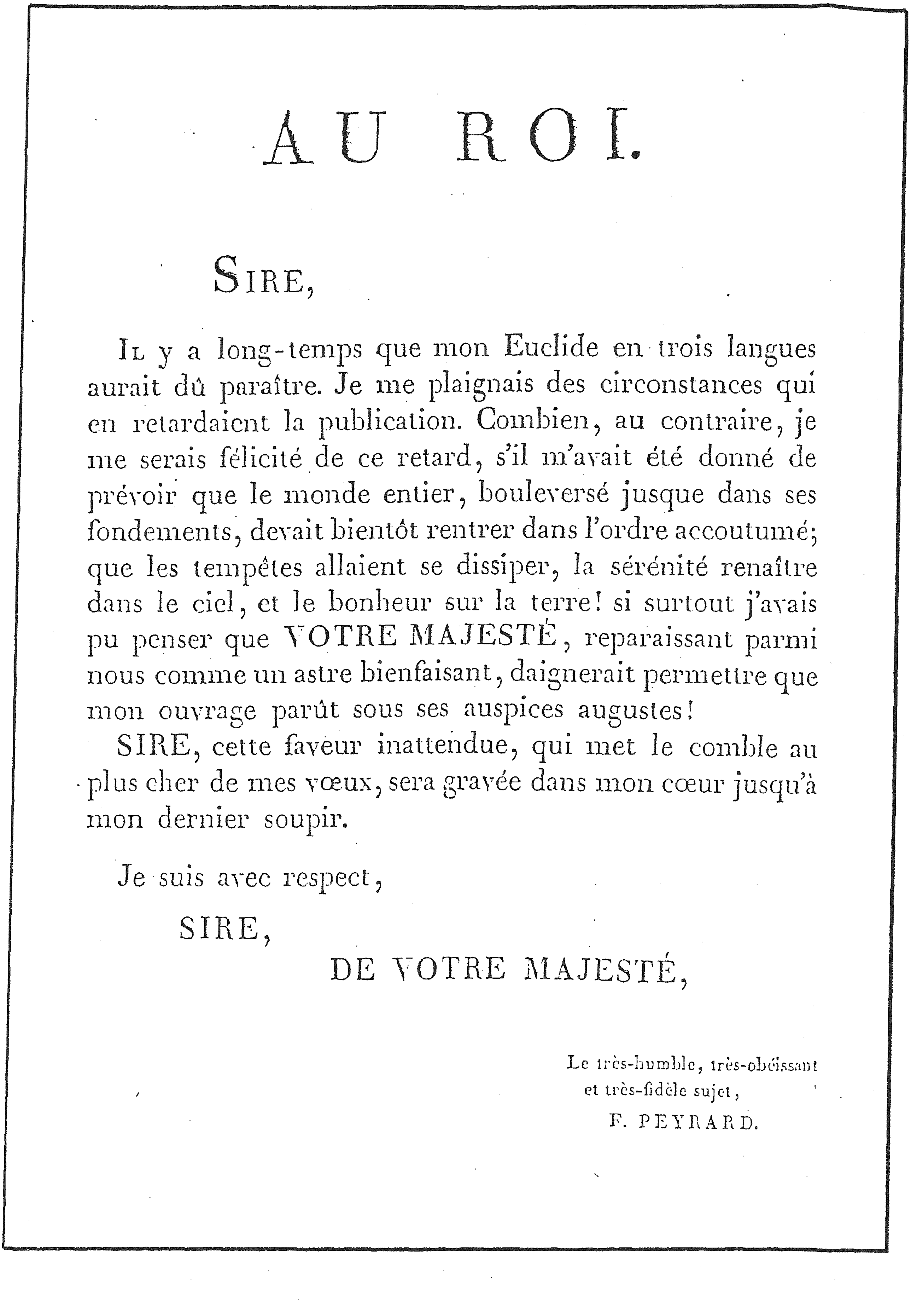
DÉDIÉ AU ROI.

TOME PREMIER.

Bibliothèque publique de la Ville de Rennes.

A PARIS,
Chez M. PATRIS, imprimeur-libraire, rue de la Colombe, en la Cité, nº 4.

1814.



# AU ROI.

SIRE,

Il y a long-temps que mon Euclide en trois langues aurait dû paraître. Je me plaignais des circonstances qui en retardaient la publication. Combien, au contraire, je me serais félicité de ce retard, s'il m'avait été donné de prévoir que le monde entier, bouleversé jusque dans ses fondements, devait bientôt rentrer dans l'ordre accoutumé; que les tempêtes allaient se dissiper, la sérénité renaître dans le ciel, et le bonheur sur la terre! si surtout j'avais pu penser que VOTRE MAJESTÉ, reparaissant parmi nous comme un astre bienfaisant, daignerait permettre que mon ouvrage parût sous ses auspices augustes!

SIRE, cette faveur inattendue, qui met le comble au plus cher de mes vœux, sera gravée dans mon cœur jusqu'à mon dernier soupir.

Je suis avec respect,

SIRE,

DE VOTRE MAJESTÉ,

Le très-humble, très-obéissant
et très-fidèle sujet,
F. PEYRARD.

## 3 Activité proposée

### 3.1 Texte

Fondée en -331 par Alexandre le grand, la ville d'Alexandrie devint très rapidement, sous le règne des Ptolémée, la capitale intellectuelle du monde antique. Elle devait le rester 800 ans.

Le roi Ptolémée I fonda, vers -290, le "musée" d'Alexandrie, lieu de rencontre des savants de l'époque, auquel fut rattachée une célèbre école mathématique grecque. Euclide y enseigna au début ; les dates de sa vie, sa personnalité nous sont inconnues. La Bibliothèque d'Alexandrie contiendra jusqu'à 600 000 ou 700 000 volumes qui brûlèrent dans des circonstances qui ne sont toujours pas bien comprises et à une date qui n'a pu être fixée (autour de 450-650).

Euclide a écrit, en grec, de nombreux ouvrages, certains perdus ; le plus célèbre reste les Eléments ; il comprend 13 chapitres, appelés "livres". De nombreuses copies manuscrites ont été faites de ce livre ; celles du moyen âge en latin, parfois d'après des traductions arabes antérieures. Le développement de l'imprimerie permet de nombreuses éditions des Eléments. Une des plus connues est celle du français F. Peyrard, publiée en 1814-1818.

**Proposition 11 du livre 4**

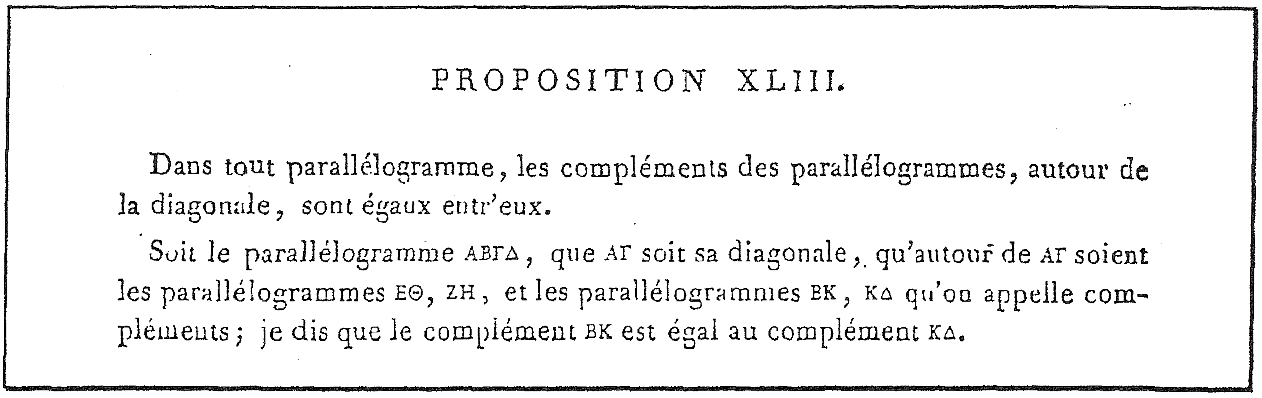
*Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.*

Pour parvenir à cette construction, Euclide est amené à démontrer auparavant un nombre assez important de propositions qui ont un enchaînement logique et rigoureux. Dans ce qui suit, nous allons seulement en étudier quelques unes. Certaines propositions seront démontrées à peu près comme pouvait le faire Euclide, alors que d'autres seront démontrées par des raisonnements plus actuels.

**Proposition 43 du livre 1**

*Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes autour de la diagonale sont égaux entre eux.*

*Soit le parallélogramme ABCD, que AC soit sa diagonale, qu'autour de AC soient les parallélogrammes EG, FH, et les parallélogrammes BK, KD qu'on appelle compléments. Je dis que le complément BK est égal au complément KD.*

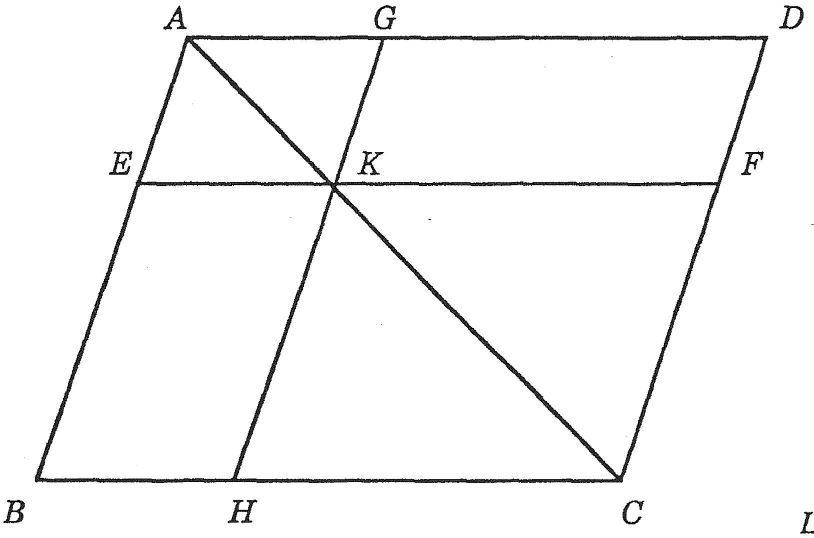


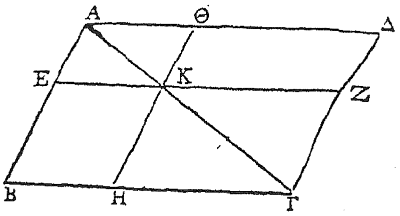
PROPOSITION XLIII.

Dans tout parallélogramme, les compléments des parallélogrammes, autour de la diagonale, sont égaux entr'eux.

Soit le parallélogramme ΑΒΓΔ, que ΑΓ soit sa diagonale, qu'autour de ΑΓ soient les parallélogrammes ΕΘ, ΖΗ, et les parallélogrammes ΒΚ, ΚΔ qu'on appelle compléments; je dis que le complément ΒΚ est égal au complément ΚΔ.

### Figure





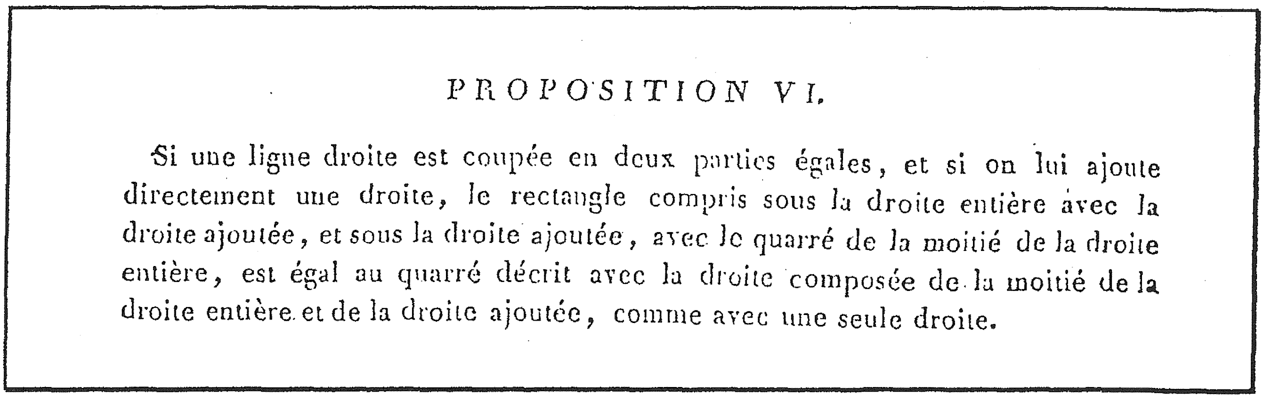
*La même figure dans le livre de Peyrard*

### Questions

1) Quels sont les deux parallélogrammes "autour de la diagonale".
   Quels sont les "compléments" évoqués par Euclide ?
   Comment Euclide désigne-t-il certains parallélogrammes ?
2) Ecrire la conclusion dans le langage actuel.
   Démontrer la proposition énoncée par Euclide en comparant des aires.

### Proposition 6 du livre 2

*Si une ligne droite* [2] *est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le carré de la moitié de la droite entière, est égal au carré décrit avec la droite composée de la moitié la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.*

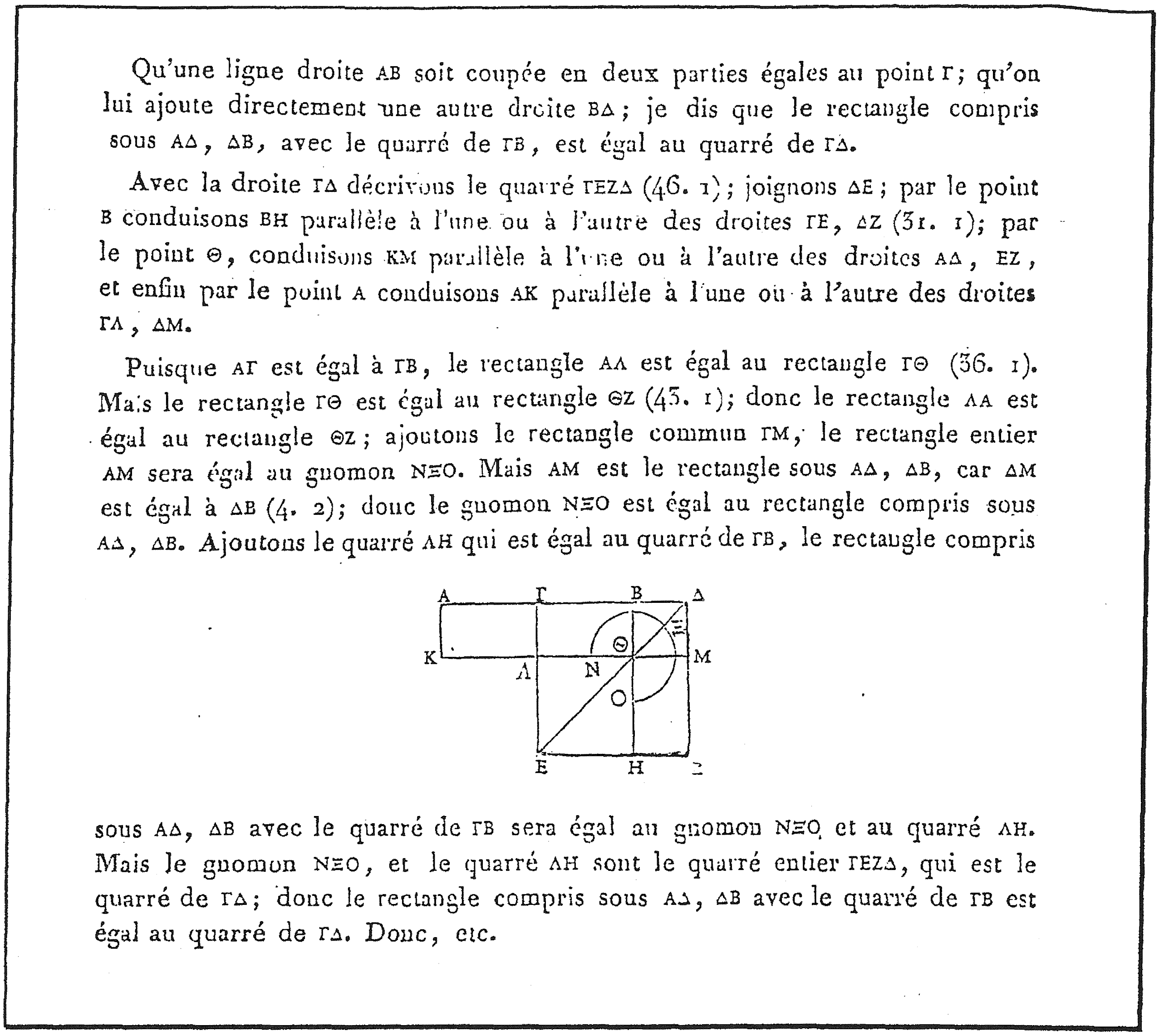


PROPOSITION VI.

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite.

---

[2] Euclide désigne ainsi un segment.

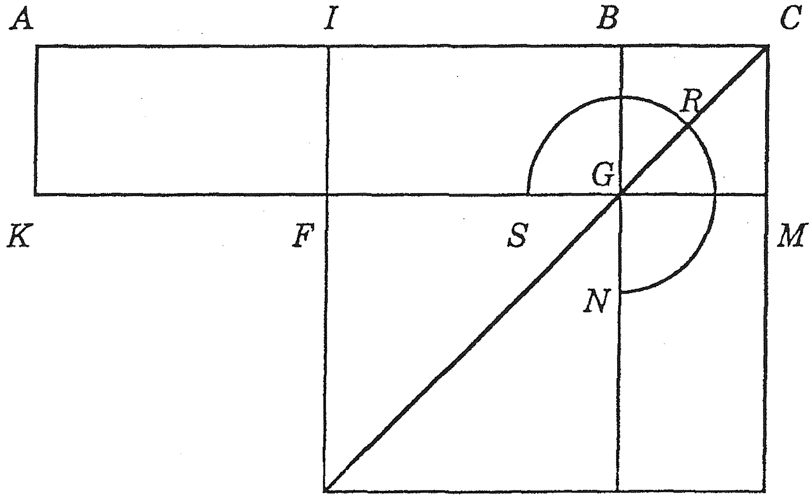


Qu'une ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au point Γ; qu'on lui ajoute directement une autre droite BΔ; je dis que le rectangle compris sous AΔ, ΔB, avec le quarré de ΓB, est égal au quarré de ΓΔ.

Avec la droite ΓΔ décrivons le quarré ΓEZΔ (46. 1); joignons ΔE; par le point B conduisons BH parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓE, ΔZ (31. 1); par le point Θ, conduisons KM parallèle à l'une ou à l'autre des droites AΔ, EZ, et enfin par le point A conduisons AK parallèle à l'une ou à l'autre des droites ΓΛ, ΔM.

Puisque AΓ est égal à ΓB, le rectangle AΛ est égal au rectangle ΓΘ (36. 1). Mais le rectangle ΓΘ est égal au rectangle ΘZ (43. 1); donc le rectangle AΛ est égal au rectangle ΘZ; ajoutons le rectangle commun ΓM, le rectangle entier AM sera égal au gnomon NΞO. Mais AM est le rectangle sous AΔ, ΔB, car ΔM est égal à ΔB (4. 2); donc le gnomon NΞO est égal au rectangle compris sous AΔ, ΔB. Ajoutons le quarré ΛH qui est égal au quarré de ΓB, le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB sera égal au gnomon NΞO et au quarré ΛH. Mais le gnomon NΞO, et le quarré ΛH sont le quarré entier ΓEZΔ, qui est le quarré de ΓΔ; donc le rectangle compris sous AΔ, ΔB avec le quarré de ΓB est égal au quarré de ΓΔ. Donc, etc.

**Figure**



### Explication de la figure

*Qu'une ligne droite AB soit coupée en deux parties égales au point I ; qu'on lui ajoute directement une autre droite BC ; je dis que le rectangle*[3] *compris sous AC, CB, avec le carré de IB, est égal au carré de IC.*

*Avec la droite IC décrivons le carré ICDE ; joignons CE ; par le point B conduisons BH parallèle à l'une ou l'autre des droites IE, CD ; par le point G, conduisons KM parallèle à l'une ou l'autre des droites AC, ED, et enfin par le point A conduisons AK parallèle à l'une ou l'autre des droites IF, CM.*

### Remarque

La formule mathématique qui traduit la phrase "je dis que le rectangle compris sous $AC$, $CB$ avec le carré de $IB$, est égal au carré de $IC$" est : $AC.CB + IB^2 = IC^2$ (1).

### Questions

1) Hachurer les surfaces dont Euclide veut montrer l'égalité ; démontrer cette égalité.

2) On pose $AI = IB = a$ et $BC = b$. Démontrer la relation (1) en écrivant une identité algébrique.

### Proposition 11 du livre 2

*Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.*

### Figure

Voir page suivante.

### Explication de la figure

*Soit AB la droite donnée ; il faut couper AB de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au carré du segment restant.*

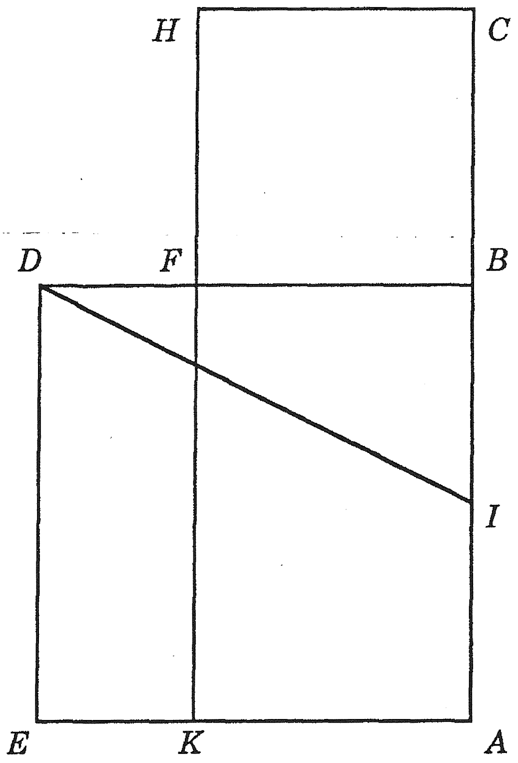
*Avec la droite AB décrivons le carré BDEA ; coupons BA en deux parties égales au point I ; joignons DI, prolongeons AB vers C ; faisons IC égal à ID ; décrivons avec BC le carré BCHF ; et prolongeons HF vers K ; je dis que la droite BD est coupée en F, de manière que le rectangle compris sous BD, DF est égal au carré de BF.*

### Rappel

D'après la proposition 6 du livre 2, on sait que : $AC.CB + IB^2 = IC^2$.

---

[3] Pour Euclide, un nombre est représenté par un segment ; un produit de deux nombres est représenté par le rectangle ayant ces nombres pour longueur et largeur.



**Remarque**

La relation mathématique qui traduit la phrase "je dis que la droite $BD$ est coupée en $F$, de manière que le rectangle compris sous $BD$, $DF$ est égal au carré de $BF$" est :

$$BD.DF = BF^2 \qquad (2)$$

**Questions**

1) Montrer que la relation (2) traduit une égalité entre l'aire d'un rectangle et l'aire d'un carré. Les nommer.

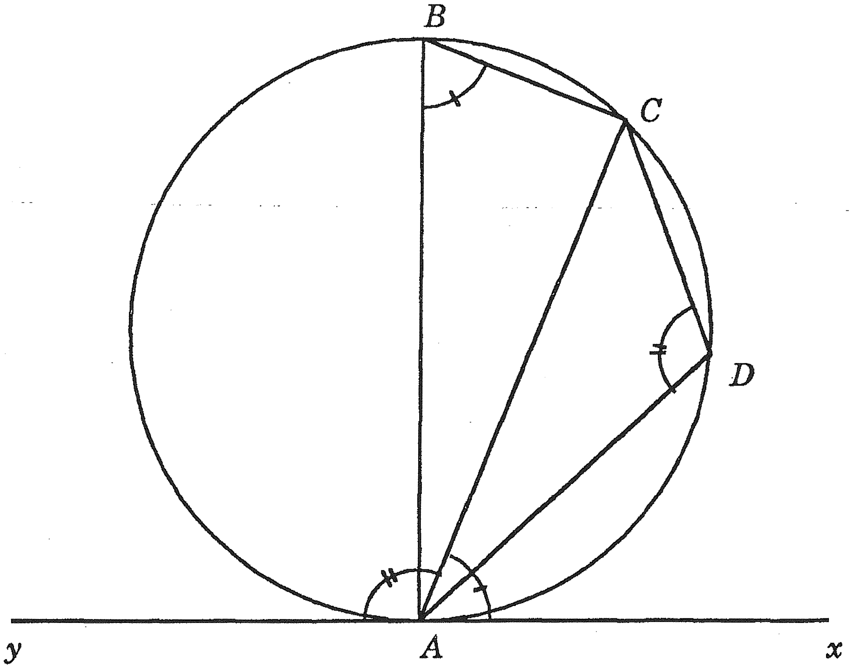
2) A l'aide de la relation (1) et du théorème de Pythagore appliqué au triangle $DBI$, montrer qu'on obtient : $AC.CB = DB^2$. En déduire deux quadrilatères ayant la même aire.

3) Montrer que Aire($DEKF$) = Aire($BCHF$). Conclure.

**Proposition 32 du livre 3**

*Si une droite touche un cercle, et si du point de contact on mène une droite qui coupe ce cercle, les angles que cette droite fait avec la tangente seront égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle.*

**Figure**



**Explication de la figure**

*Qu'une droite xy touche le cercle BADC au point A, et du point A menons une droite AC qui coupe le cercle BADC ; je dis que les angles que fait AC avec la tangente xy sont égaux aux angles placés dans les segments alternes du cercle ; c'est-à-dire, que l'angle* $\widehat{CAx}$ *est égal à l'angle placé dans le segment ABC, et que l'angle* $\widehat{CAy}$ *est égal à l'angle placé dans le segment CDA.*

**Remarques**

La proposition n'est pas compréhensible sans l'explication. Euclide veut montrer que $\widehat{CAx} = \widehat{ABC}$ et que $\widehat{CAy} = \widehat{CDA}$. Il place les points $A$ et $B$ diamétralement opposés.

**Questions**

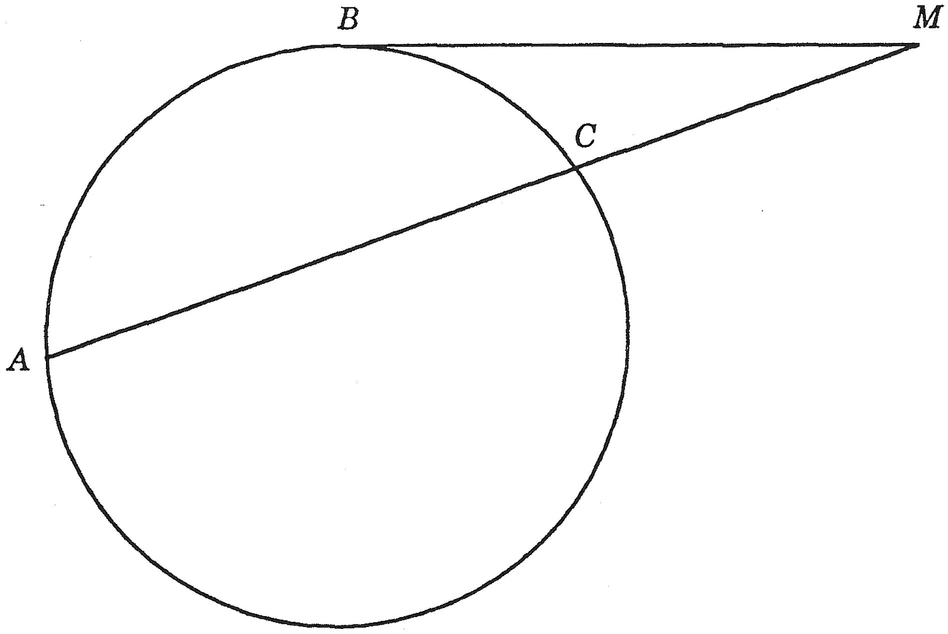
1) Quelle est la nature du triangle $ABC$ ? En déduire que $\widehat{CAx} = \widehat{ABC}$.

2) Joindre $B$ et $D$. Montrer que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CDA}$ sont supplémentaires. En déduire que $\widehat{CAy} = \widehat{CDA}$.

**Proposition 36 du livre 3**

*Si l'on prend un point quelconque hors du cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe le cercle, et dont l'autre lui soit tangente, le rectangle compris sous la sécante entière et la droite prise extérieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la tangente.*

**Figure**



**Remarque**

Euclide affirme donc que la droite $(MB)$ étant tangente au cercle, $MA.MC = MB^2$. Nous admettrons cette proposition sans la démontrer.

**Proposition 37 du livre 3**

*Si l'on prend un point quelconque hors d'un cercle, et si de ce point on mène deux droites dont l'une coupe ce cercle, et dont l'autre tombe sur ce cercle, et si le rectangle sous la sécante entière et la droite prise extérieurement entre ce point et la circonférence convexe est égal au carré de la droite qui tombe sur ce cercle, la droite qui tombe sur le cercle sera tangente à ce cercle.*

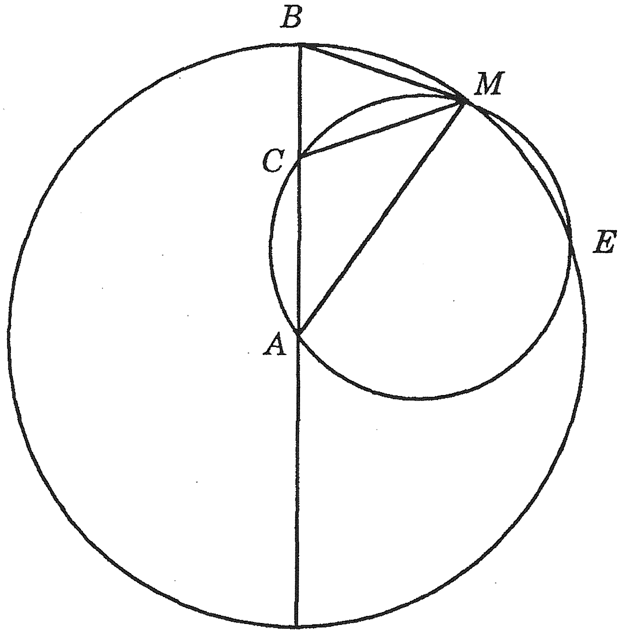
**Remarque**

La figure est la même que la précédente. Euclide démontre que si $MA.MC = MB^2$, la droite $(MB)$ est tangente au cercle. C'est la réciproque de la proposition précédente. Nous admettrons aussi cette proposition sans la démontrer.

**Proposition 10 du livre 4**

*Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.*

## Figure



## Explication de la figure

*Soit une droite AB ; que cette droite soit coupée en un point C, de manière que le rectangle compris sous AB, BC soit égal au carré de CA. Du centre A et de l'intervalle AB décrivons le cercle BME ; dans le cercle BME adaptons une droite BM égale à la droite AC, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle BME ; joignons AM, CM, et circonscrivons le cercle ACM au triangle ACM.*

## Remarque

On va montrer que les mesures, en degrés, des angles du triangle isocèle $ABM$ sont telles que $\widehat{A} = 36°$, $\widehat{B} = \widehat{M} = 72°$.

## Résumé de la démonstration d'Euclide

Par hypothèse, $AB.BC = AC^2$ et $AC = BM$, d'où $AB.AC = BM^2$.

La proposition 37 du livre 3 prouve que $BM$ est tangente au cercle $ACM$.

La proposition 32 du livre 3 prouve alors que $\widehat{MAC} = \widehat{BMC}$.

En ajoutant $\widehat{CMA}$ aux deux membres de l'égalité précédente, on obtient :

$$\widehat{MAC} + \widehat{CMA} = \widehat{BMC} + \widehat{CMA} = \widehat{BMA}.$$

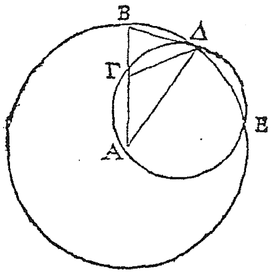
Comme $\widehat{BCM} = \widehat{CAM} + \widehat{CMA}$, on a $\widehat{BCM} = \widehat{BMA}$.

On a alors $\widehat{BCM} = \widehat{BMA} = \widehat{ABM}$.

## PROPOSITION X.

Construire un triangle isocèle, qui ait chacun des angles de la base double de l'angle restant.

Soit une droite AB ; que cette droite soit coupée en un point Γ, de manière que le rectangle compris sous AB, BΓ soit égal au quarré de ΓA (11. 2) ; du centre A et de l'intervalle AB décrivons le cercle BΔE (dém. 3) ; dans le cercle BΔE adaptons une droite BΔ égale à la droite AΓ, qui n'est pas plus grande que le diamètre du cercle BΔE (1. 4); joignons AΔ, ΓΔ, et circonscrivons le cercle AΓΔ au triangle AΓΔ (5. 4).



Puisque le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré AΓ, et que AΓ est égal à BΔ, le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré de BΔ. Et puisque le point B a été pris hors du cercle AΓΔ, que les droites BA, BΔ vont du point B au cercle AΓΔ, que l'une d'elles le coupe, et que l'autre ne le coupe point, et que le rectangle sous AB, BΓ est égal au quarré de BΔ, la droite BΔ est tangente au cercle AΓΔ (37. 3). Donc, puisque la droite BΔ est tangente, et que la droite ΔΓ a été menée du point de contact Δ, l'angle BΔΓ est égal à l'angle ΔAΓ placé dans le segment alterne du cercle (32. 3). Puisque l'angle BΔΓ est égal à l'angle ΔAΓ, ajoutons l'angle commun ΓΔA, l'angle entier BΔA sera égal aux deux angles ΓΔA, ΔAΓ. Mais l'angle extérieur BΓΔ est égal aux angles ΓΔA, ΔAΓ (32. 1); donc l'angle BΔA est égal à l'angle BΓΔ. Mais l'angle BΔA est égal à l'angle ΓBΔ (5. 1), puisque le côté ΔA est égal au côté AB ; donc l'angle ΔBA est égal à l'angle BΓΔ. Donc les trois angles BΔA, ΔBA, BΓΔ sont égaux entr'eux. Et puisque l'angle ΔBΓ est égal à l'angle BΓΔ, le côté BΔ est égal au côté ΔΓ (6. 1). Mais le côté BΔ est supposé égal au côté ΓA ; donc le côté AΓ est égal au côté ΓΔ ; donc l'angle ΓΔA est égal à l'angle ΔAΓ (5. 1) ; donc les angles ΓΔA, ΔAΓ sont doubles de l'angle ΔAΓ. Mais l'angle BΓΔ est égal aux angles ΓΔA, ΔAΓ (32. 1); donc l'angle BΓΔ est double de l'angle ΔAΓ. Mais l'angle BΓΔ est égal à chacun des angles BΔA, ΔBA ; donc chacun des angles BΔA, ΔBA est double de l'angle BAΔ.

Donc on a construit un triangle isocèle AΔB, ayant chacun des angles de la base BΔ double de l'angle restant. Ce qu'il fallait faire.

## Questions

1) Quelle est la nature du triangle $BCM$ ?
2) Montrer que $\widehat{BMA} = 2\widehat{BAM}$.
3) En déduire la mesure, en degrés, de chacun des angles du triangle $ABM$.

## Proposition 11 du livre 4

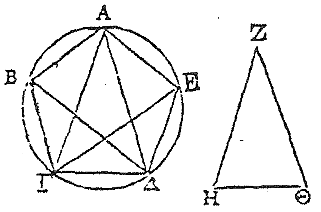
*Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.*

### PROPOSITION XI.

Dans un cercle donné, inscrire un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit ABΓΔE le cercle donné ; il faut inscrire dans le cercle ABΓΔE un pentagone équilatéral et équiangle.

Soit posé le triangle isocèle ZHΘ, ayant chacun des angles en H, Θ double de l'angle Z (10. 4) ; inscrivons dans le cercle ABΓΔE le triangle AΓΔ équiangle avec le triangle ZHΘ (2. 4), de manière que l'angle ΓAΔ soit égal à l'angle Z, et que chacun des angles H, Θ soit égal à chacun des angles AΓΔ, ΓΔA ; chacun des angles AΓΔ, ΓΔA sera double de l'angle ΓAΔ. Coupons chacun des angles AΓΔ ΓΔA en deux parties égales par les droites ΓE, ΔB (9. 1), et joignons AB, BΓ, ΔE, EA.



Puisque chacun des angles AΓΔ, ΓΔA est double de l'angle ΓAΔ, et que ces angles sont coupés en deux parties égales par les droites ΓE, ΔB, les cinq angles ΔAΓ, AΓE, EΓΔ, ΓΔB, BΔA sont égaux entr'eux. Mais les angles égaux sont appuyés sur des arcs égaux (26. 3) ; donc les cinq arcs AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA sont égaux entr'eux. Mais les arcs égaux sont soutendus par des droites égales (29. 3) ; donc les cinq droites AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EA sont égales entr'elles ; donc le pentagone ABΓΔE est équilatéral. Je dis aussi qu'il est équiangle. Car puisque l'arc AB est égal à l'arc ΔE, ajoutons l'arc commun BΓΔ ; l'arc entier ABΓΔ sera égal à l'arc entier EΔΓB. Mais l'angle AEΔ est appuyé sur l'arc ABΓΔ, et l'angle BAE sur l'arc EΔΓB ; donc l'angle BAE est égal à l'angle AEΔ (27. 3). Par la même raison, chacun des angles ABΓ, EΓΔ, ΓΔE est égal à chacun des angles BAE, AEΔ ; donc le pentagone ABΓΔE est équiangle. Mais il a été démontré qu'il est équilatéral ;

Donc dans un cercle donné, on a inscrit un pentagone équilatéral et équiangle. Ce qu'il fallait faire.

**Question**

Montrer comment construire un pentagone régulier inscrit dans un cercle donné à l'aide de la figure de la proposition 10 du livre 4 ci-dessus.

### 3.2 Réaction des élèves

La première difficulté pour les élèves concerne le texte d'Euclide dans la traduction de Peyrard. Il s'agit pour eux de bien comprendre les énoncés et les explications des figures. Après un premier moment d'étonnement, il s'adaptent petit à petit. Il faut cependant prendre le temps de leur expliquer les deux premières propositions : ils sont alors plus à l'aise pour comprendre les suivantes, seuls ou en groupe.

**Proposition 43 du livre 1**

Une fois l'énoncé compris, cette proposition ne présente pas de difficulté majeure. La plupart ont utilisé le fait que la diagonale d'un parallélogramme partage celui-ci en deux triangles de même aire.

**Proposition 6 du livre 2**

Ici, l'énoncé est assez difficile à comprendre. La formule donnée en remarque permet de mieux voir ce qu'Euclide désire démontrer. Les élèves ont eu à leur disposition la démonstration donnée par Euclide. La simplicité de la démonstration algébrique les a surpris et ils se sont demandés pourquoi la démonstration d'Euclide est si compliquée. C'est l'occasion d'indiquer que le calcul algébrique littéral a été initié par Viète à la fin du $16^{\text{ème}}$ siècle (voir chapitre XI et XIII).

**Proposition 11 du livre 2**

L'énoncé est assez bien compris, en partie grâce au rappel et à la remarque. Les élèves commencent à se familiariser avec les démonstrations par les aires. Cependant peu se rendent compte que, pour Euclide, l'aire du rectangle $DEKF$ représente le produit $BD.DF$.

Pour la démonstration, on peut écrire successivement :

$AC.BC + IB^2 = IC^2$ (d'après la proposition 6 du livre 2),

$AC.BC = IC^2 - IB^2 = ID^2 - IB^2 = BD^2$

$AC.BC - AB.BF = BD^2 - AB.BF$

$BF^2 = BD.DF.$

**Proposition 32 du livre 3**

Ayant vu que le triangle $ABC$ est rectangle en $C$, ils pensent bien à considérer les angles complémentaires et supplémentaires.

### Proposition 36 et 37 du livre 3

Pour les plus curieux, le professeur peut donner à étudier le texte des démonstrations d'Euclide, de lecture longue (deux pages et demi, nous ne les reproduisons pas) et assez difficile.

### Proposition 10 du livre 4

Le texte doit être étudieé avec beaucoup d'attention car Euclide y emploie pratiquement tous les résultats antérieurs. Ils ont été frappés par la maîtrise d'Euclide pour organiser ses propositions en vue du résultat .

### Proposition 11 du livre 4

C'est une formalité pour tous.

### Remarques d'élèves

On n'est pas habitué à ce genre d'exercice.
Les méthodes de démonstration sont inhabituelles.
La rédaction des démonstrations par Euclide ne fait pas penser, a priori, à des mathématiques.
Euclide fait des démonstrations rigoureuses.
Les propositions s'enchaînent bien les unes les autres, ça fait penser à un château de cartes.
Comment Euclide a-t-il fait pour trouver tout cela ?
Euclide a-t-il trouvé cela tout seul ?
Combien de temps Euclide a-t-il mis pour écrire ce livre ?
Peut-on espérer trouver un jour l'œuvre originale ?
Y a-t-il beaucoup de livres anciens de mathématiques qui ont disparu ?

## 3.3 Explications complémentaires

### Proposition 43 du livre 1

Quand Euclide dit que deux parallélogramme sont égaux, il veut signifier l'égalité de leurs aires. Ici, il s'agit de démontrer que : $\text{Aire}(DGKF) = \text{Aire}(BHKE)$. On pensera à des symétries centrales pour comparer des aires.

### Proposition 6 du livre 2

Le rectangle compris sous $AC$, $CB$ désigne un rectangle dont les longueurs des côtés sont égales à celles de $AC$ et $CB$ qui a pour aire le produit $AC.CB$. Il est beaucoup plus facile d'utiliser l'algèbre ici. On verra au ch. X, 4.1, comment cette proposition permet d'obtenir la forme canonique pour certaines équations du second degré.

**Proposition 11 du livre 2**

L'énoncé pourrait se résumer ainsi : trouver $F$ sur le segment $[BD]$ tel que Aire$(DEKF)$ = Aire$(BCHF)$.

Il faut rappeler que $IC = ID$.

La seconde question démontre que : Aire$(ABDE)$ = Aire$(ACHK)$.

**Proposition 32 du livre 3**

Les triangles $ABC$ et $ABD$ étant rectangles, on utilise les propriétés des angles inscrits et complémentaires. On suppose que le cas limite d'angles inscrits dont l'un des côtés est une tangente au cercle n'est pas bien connu des élèves, ce qui justifie d'en apporter une démonstration.

**Proposition 36 et 37 du livre 3**

Il s'agit ici de la notion de puissance d'un point par rapport à un cercle.

La proposition 37, réciproque de la proposition 36, se démontre en traçant une tangente $MD$ au cercle ; la proposition 36 permet de voir que $MD = MB$, d'où la tangence de $(MB)$ au cercle.

**Proposition 10 du livre 4**

Il faut suivre pas à pas la démonstration d'Euclide.

Pour la 3$^{\text{ème}}$ question, on peut appeler x la mesure de l'angle $\widehat{BAM}$ et voir que $x = 36°$.

**Proposition 11 du livre 4**

$BM$ donne le côté du décagone régulier convexe ; le pentagone régulier convexe est alors facile à tracer.

**Remarque**

On peut trouver cette méthode de construction assez longue mais c'est, historiquement, la première, avec une démonstration.

Voici une construction plus rapide.

$(C)$ est un cercle de centre $O$ et de rayon $OA$.

L'angle $\widehat{AOB}$ est droit.

$I$ est le milieu de $[OA]$.

$(C¢)$ est le cercle de centre $I$ et de rayon $IB$.

$M$ et $N$ sont les intersections de $(OA)$ et de $(C')$.

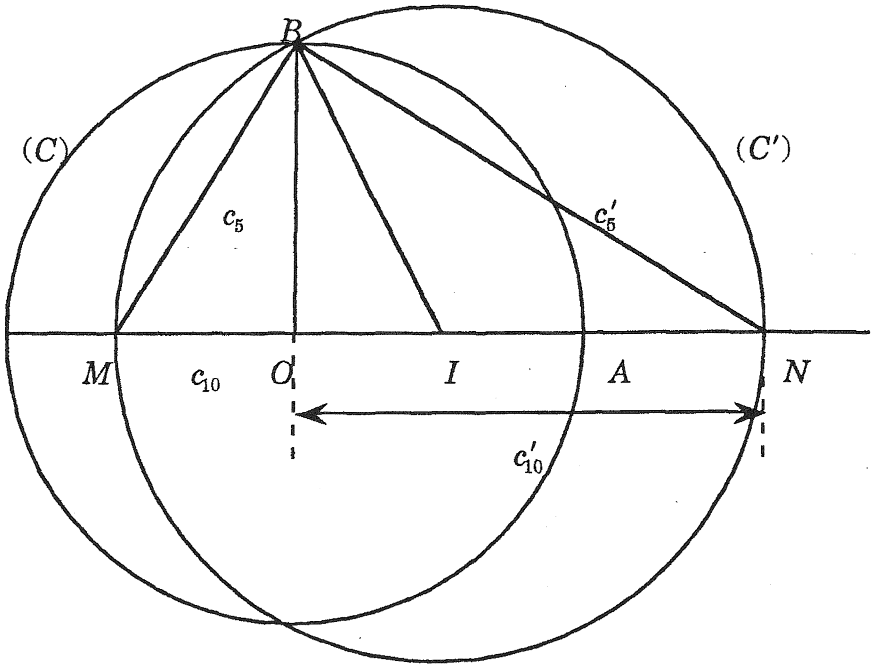
On obtient :

$BM = c_5$ : côté du pentagone régulier convexe inscrit dans le cercle $(C)$ ;

$BN = c_5'$ : côté du pentagone régulier étoilé inscrit dans le cercle $(C)$ ;

$OM = c_{10}$ : côté du décagone régulier convexe inscrit dans le cercle $(C)$ ;

$ON = c_{10}'$ : côté du décagone régulier étoilé inscrit dans le cercle $(C)$.



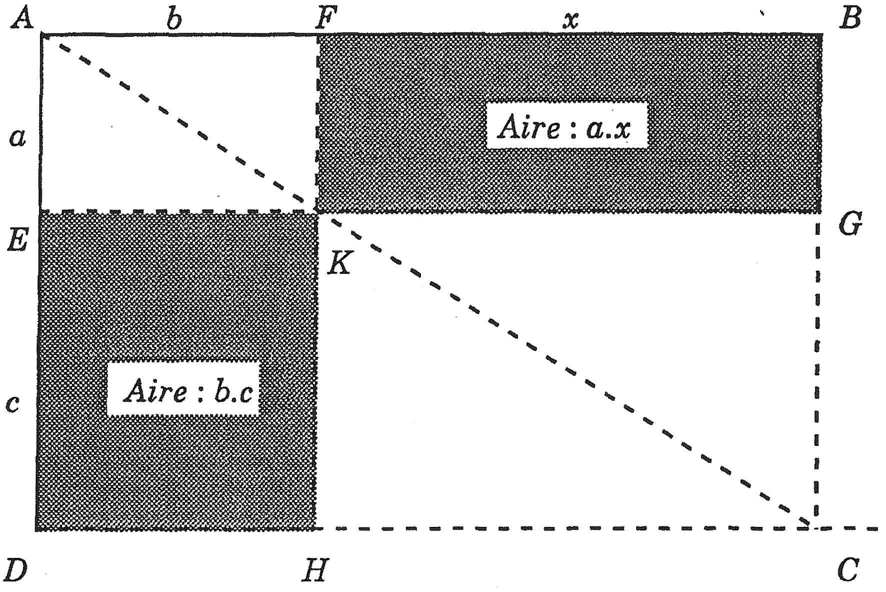
Pour justifier ces résultats, on peut comparer les valeurs numériques des segments que nous venons de construire avec les valeurs calculées en 4.3.

## 4 Prolongements de l'activité

### 4.1 A partir de la proposition 43 du livre 1

**Construction de la quatrième proportionnelle**

La quatrième proportionnelle de trois nombres $a$, $b$, $c$, est le nombre $x$ tel que $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

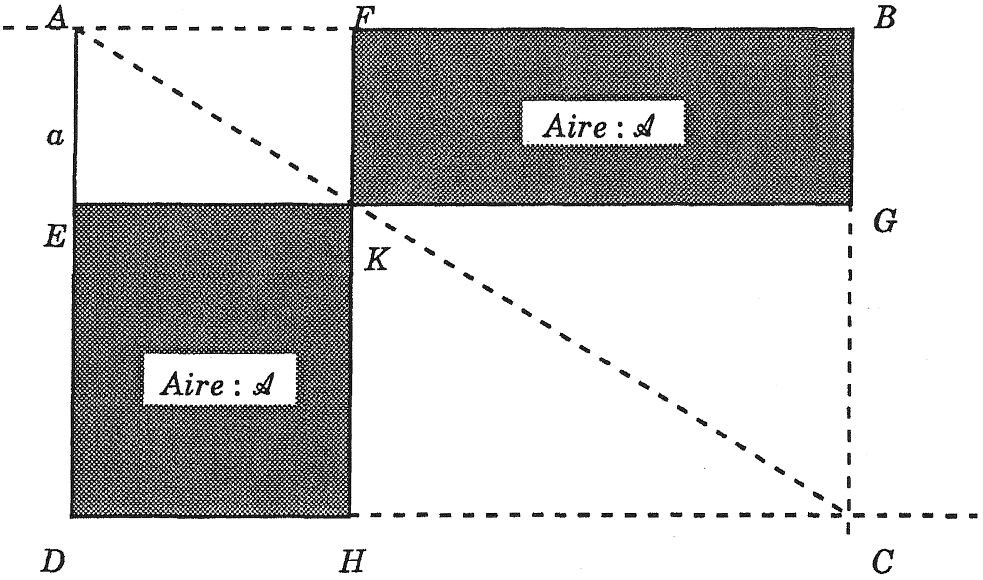


Ce que nous exprimons algébriquement $x = \frac{b.c}{a}$, peut être construit géométriquement à l'aide de la proposition 43 du livre 1 qui, valant pour les parallélogrammes, vaut en particulier pour les rectangles et les carrés.

Si on pose $AE = a, ED = c, AF = b$, on construit les rectangles $AFKE, EKHD$, l'intersection $C$ de $(AK)$ et de $(DH)$ permet de construire le rectangle $ABCD$ ; la proposition donne $\text{Aire}(EKHD) = \text{Aire}(FBGK)$ soit $bc = ax$ d'où $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$.

### Construction d'un rectangle

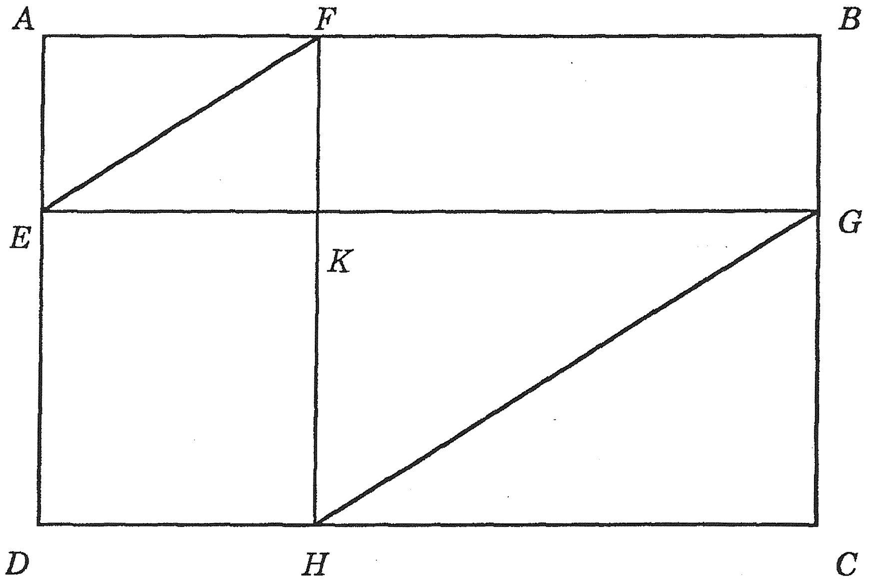
Soient $EKHD$ un rectangle et $a$ une longueur. On cherche à construire un rectangle de même aire que le rectangle $EKHD$ et de côté $a$.



On place $A$ tel que $AE$ soit un segment de longueur $a$ dans le prolongement de $DE$. L'intersection $C$ de $(AK)$ et $(DH)$ permet de construire le rectangle $FBGK$ dont l'un des côtés a la longueur $a$ et dont l'aire est celle du rectangle $EKDH$.

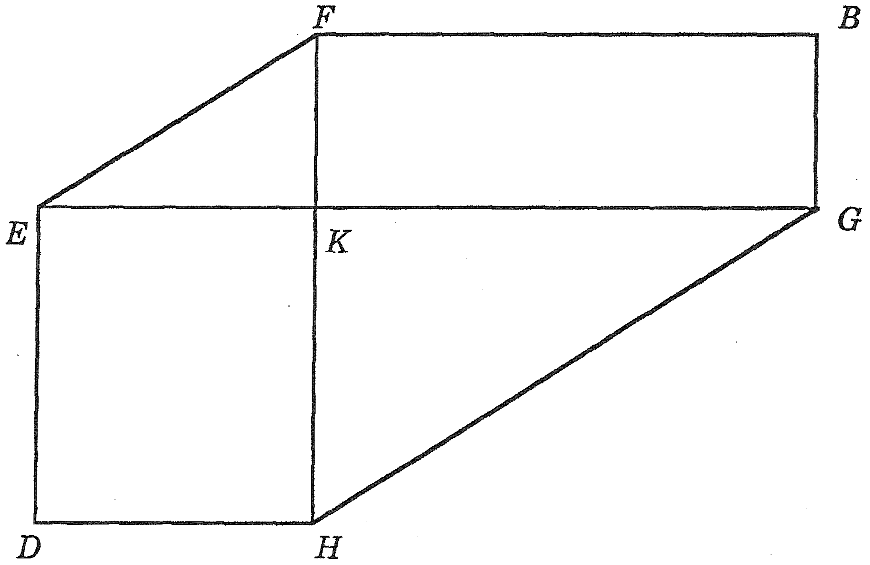
### Situation de Thalès 1

Les droites $(EF)$ et $(GH)$ sont parallèles dans la figure de la page suivante. En effet, l'égalité des aires des rectangles $EKHD$ et $FBGK$ prouve que $KE.KH = KF.KG$, d'où la relation $\frac{KF}{KE} = \frac{KH}{KG}$ ; la réciproque du théorème de Thalès prouve le parallélisme de $(EF)$ et $(GH)$.



**Situation de Thalès 2**

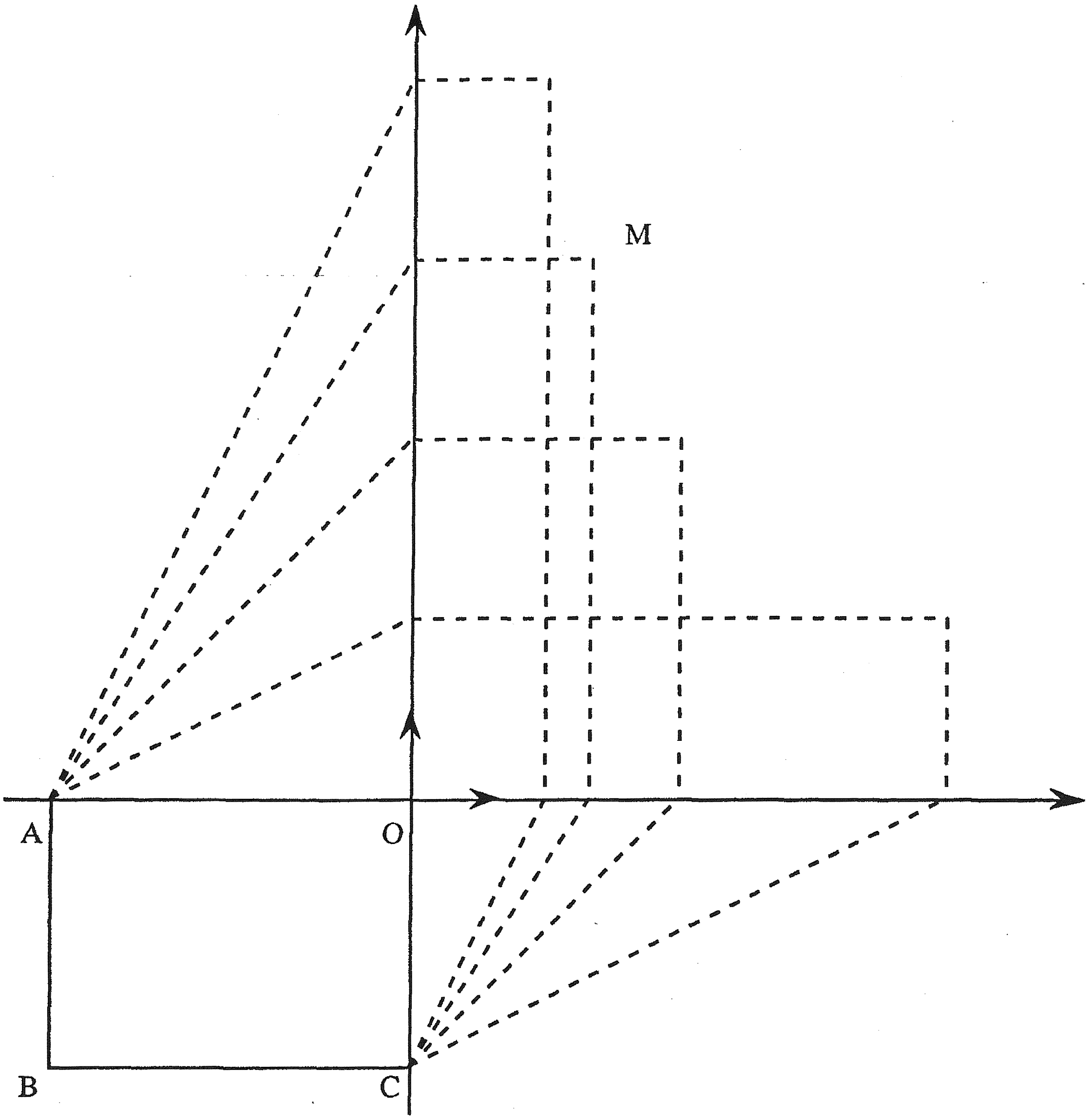
Si on coupe deux droites perpendiculaires par des droites parallèles $(EF)$ et $(GH)$, les rectangles *FBGK* et *EKHD* ont même aire :



**Construction d'une branche d'hyperbole point par point**

On veut construire, par exemple, la branche de l'hyperbole d'équation $xy = 12$ avec $x$ et $y$ strictement positifs.

On construit, dans le premier quadrant, des rectangles d'aire 12 en construisant le rectangle *AOCB* d'aire 12 puis en menant une droite variable passant par *A* et sa parallèle par *C*. Les points *M* sont sur l'hyperbole d'après la situation précédente.

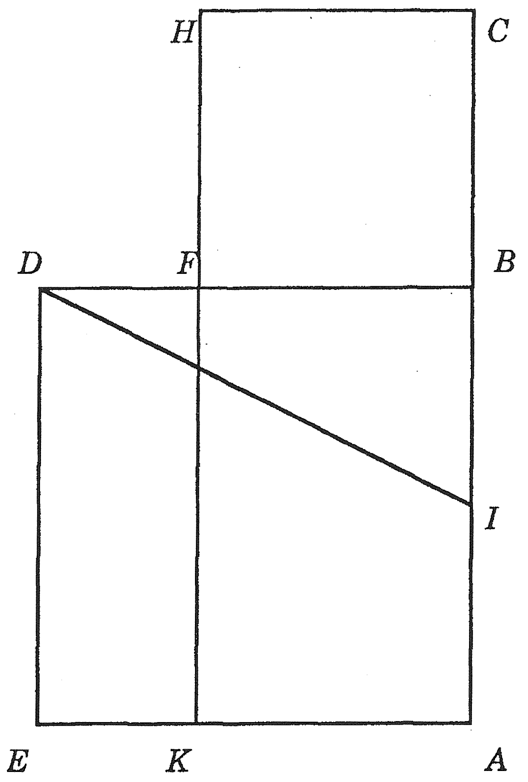


## 4.2 A partir de la proposition 11 du livre 2

### Partage d'un segment en extrême et moyenne raison

Si un point $M$ d'un segment $[AB]$ est tel que $\frac{AB}{AM} = \frac{MA}{MB}$, on dit que $M$ partage le segment $[AB]$ en extrême et moyenne raison .

La construction a été donnée dans la proposition 11 du livre 2 puisque, dans la figure que nous avons alors donné :



on a vu que $DB.DF = BF^2$, soit $\frac{BD}{BF} = \frac{FB}{FD}$ ; le point $F$ y partage donc le segment $[BD]$ en extrême et moyenne raison.

**Le nombre d'or**

Reprenons la figure précédente et posons $BD = a, BF = x$ et $\frac{BD}{BF} = \frac{a}{x} = y$.

L'égalité $\frac{BD}{BF} = \frac{FB}{FD}$ donne $y = \frac{x}{a-x} = \frac{1}{y-1}$ ce qui montre que $y$ est racine de l'équation :

$$y^2 - y - 1 = 0.$$

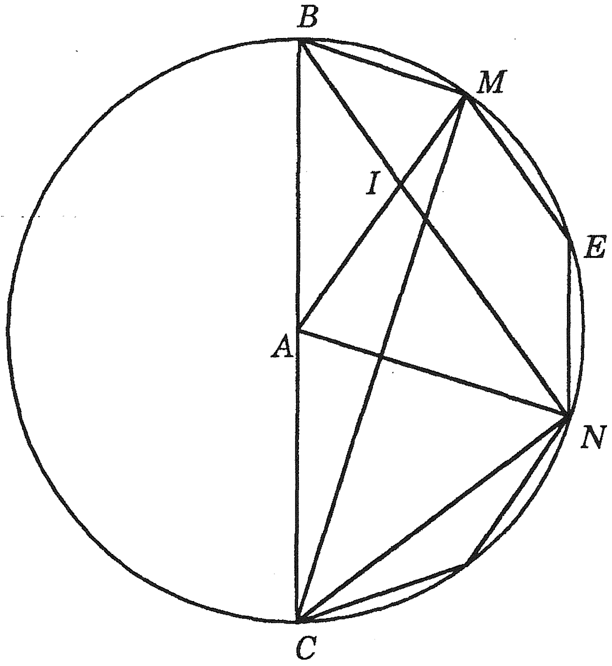
On obtient $y = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. La valeur positive, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, correspond à la situation de la figure ; c'est le nombre d'or.

On a $x = \frac{a}{y} = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

### 4.3 A partir de la proposition 10 du livre 4

Reprenons la figure donnée avec cette proposition.

Le côté du décagone régulier inscrit dans un cercle de rayon $R$ a pour longueur $BM$ ; d'après lecalcul ci-dessus, $c_{10} = R\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Le triangle $ABM$ a des angles de mesure 36°, 72° et 72° ; il est isocèle ; il en est de même des triangles $AIN$ et $BIM$. La longueur de $[BN]$ est celle du côté du décagone étoilé, d'où $c'_{10} = R\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.



Les côtés du pentagone régulier convexe et étoilé s'obtiennent en utilisant le théorème de Pythagore dans les triangles rectangles *BNC* et *BMC* ; on trouve :

$$c_5 = R\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}\ , \ c_5' = R\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2}.$$

## 5 Bibliographie

### 5.1 Bibliographie générale

¶¶¶ Alexandrie III$^{e}$ siècle av. J.-C. Tous les savoirs du monde ou le rêve d'universalité des Ptolémée.— Ed. Autrement, Série Mémoires n° 19, 1992.

¶¶¶ Dedron Pierre, Itard Jean : Mathématiques et mathématiciens.— Paris : Magnard, 1959.

¶¶¶ Les Œuvres d'Euclide, traduites par F. Peyrard. Voir en 5.2.

¶¶¶ Euclide : Les Eléments, traduits du texte de Heiberg et commentés par Bernard Vitrac, introduction de Maurice Caveing.— PUF, 1990.
Seuls les 4 premiers livres des Eléments sont présentés avec des commentaires très détaillés. L'introduction de Maurice Caveing explique exactement tout ce qu'on sait ou qu'on a cru savoir sur Euclide, la mathématique grecque, l'influence des Eléments, les différents manuscrits, etc.

## 5.2 Vieilles éditions d'Euclide dans les bibliothèques de Bretagne

¶¶¶ Euclidis megarensis geometricorum Elementorum libri XV, Campani... commentariorum libri XV, Theonis... commentariorum libri XIII, Hypsiclis... commentariorum libri 2.— Parisiis : in officina Henrici Stephani, 1516.— 523 p.
B. M. Rennes 3721

¶¶¶ Euclidis megarensis mathematici clarissimi Elementorum geometricorum lib. XV : pages 1-482 suivi de : phænomena : pages 484-503, specularia : pages 504-515, perspectiva : pages 516-536, data.— Basileæ : apud Johannen Hervagium, 1537.— 8-587 p.
B. M. Rennes 3715

¶¶¶ Euclidis Elementorum libri XV...— Parisiis : apud Hieronymum de Marnef, & Gulielmum Cavellat, 1573.— 350 p.
B. M. Rennes 15540 (Réserve)

¶¶¶ Six premiers livres des Eléments (12-359 p.), puis : Euclidis posteriores libri 9, accessit XVI. de solidorum regularium cuiuslibet intraquodlibet comparatione. omnes perspicuis demonstrationibus, accuratisq; scholiis illustrati : nunc tertio editi... auctore Christophoro Clavio.— Coloniæ : expensis Ioh. Baptista Ciotti, 1591.— 355 p., index : 37 p.
B. M. Rennes 3411

¶¶¶ Euclidis posteriores libri 9... auctore Christophoro Clavio.— Francofurti : Nicolai Hoffmanni, 1607.— 680 p.
B. M. Vannes 8° 6095

¶¶¶ Euclidis elementorum libri XV, una cum scholiis antiquis a Federico Commandino urbinate in latinum converse...— Pisauri : typis Flaminii Concordiæ, 1619.— 18-510 p.
B. M. Rennes 15027. Ex. de Moreau de Paris.

¶¶¶ Les quinze livres des Elémens géométriques d'Euclide, traduits et commentez par D. Henrion.— Ed. revue et augmentée.— Paris : J. d'Houry, 1677.— 2 vol. :
1 : 6-531 p., livres 1 à 9.
2 : sommaire de l'algèbre par Henrion : pages 1-122, livres 10 à 15 : pages 123-527, livre des données : 116 p. intercalé à la page 480.
B. M. Rennes 84050

¶¶¶ Elementa geometrica novo ordine ac methodo fere demonstrata una cum Nicolai Mercatoris in geometriam introductione brevi.— Londini : John Martyn, 1678.— 168 p.
B. S. H. M. Brest R382

¶¶¶ Les quinze livres des Elémens géométriques d'Euclide et son livre des donnéz ... et un traité sommaire de l'algèbre par le sieur Henrion.— Paris : Jombert, 1685.— 2 vol. ; 8°.
B. S. H. M. Brest R2603 et R2604

¶¶¶ »»» Les Eléments d'Euclide expliquez d'une manière nouvelle et très facile... par le père Claude F. Milliet-Dechalles.— Nouv. éd.— Paris : Estienne Michallet, 1690.— 393 p. Livres 1 à 6, 11 et 12.
B. M. Rennes 84051
B. M. Vannes 8° 5868
»»» Nouv. éd. revue et corrigée par M. Ozanam.— Paris : Claude Jombert, 1709.— 378 p., 15 pl.
B. M. Rennes 84052

¶¶¶ Elements of geometry from the latin translation of Commandine, by John Keil, revised by Samuel Cunn.— Londres : Wood Ward, 1723.— 20-364 p., pl. ; 8°.
B. S. H. M. Brest R2606

¶¶¶ Les Œuvres d'Euclide en grec, en latin et en français d'après un manuscrit très ancien qui était resté inconnu jusqu'à nos jours ; trad. par F. Peyrard.— Paris : M. et C. F. Patris.— 3 vol. :
1 : livres 1 à 7.— M. Patris, 1814.— XLIV-520 p.
2 : livres 8, 9, 10.— M. Patris, 1816.— XLIV-519 p.
3 : livres 11, 12, 13, données, livres des cinq corps d'Hypsicle.— C.-F. Patris, 1818.— XVIII-616 p.
B. M. Rennes 17187
B. M. Vannes 4° 619. Le tome 2 manque.

¶¶¶ Les Œuvres d'Euclide, traduites littéralement d'après un manuscrit grec très ancien, resté inconnu jusqu'à nos jours par F. Peyrard.— Paris : C.-F. Patris, 1819.— 10-627 p., contenant : les éléments, 13 livres : pages 1-515, les données : pages 517-603, les deux livres des cinq corps d'Hypsicle : pages 605-627.
B. M. Rennes 17186

¶¶¶ La Prospettiva... trad. dal R. P. M. Egnatio Danti. Heliodori Larissaei capito opticorum.— Fiorenza : Stamperia de' Giunti, 1573.— 110-13 p.
B. M. Rennes 56302

¶¶¶ Jacobi Peletarii (Jacques Peletier du Mans, 1517-1582) cenom. in euclididis elementa geometrica demonstrationum libri sex...— 2$^{ème}$ éd.— Lugd. : apud Ioann. Tornæsium, 1610.— 6-308 p.
B. M. Rennes 17346

# Chapitre IV
# Léonard de Pise (1170-1240)

## 1 Présentation

### 1.1 Fiche technique

Niveau : classes de seconde.

Thème : le *Liber abaci* de Léonard de Pise ; méthode de fausse position.

Durée : 3 heures.

### 1.2 Connaissances nécessaires

Pour l'activité :

- résolution d'équations du premier degré ;
- théorème de Pythagore ;
- trigonométrie ;
- proportionnalité.

Pour les compléments :

- homothétie (ce que nous appelons théorème de Thalès) ;
- symétrie orthogonale ;
- notion de lieu géométrique.

### 1.3 Objectifs pédagogiques

Lecture de textes en latin si la classe comporte des élèves étudiant cette langue.

Comparaison de méthodes pour la résolution d'un problème.

Consolidation de connaissances géométriques et algébriques.

## 2 Un peu d'histoire

Leonardo Pisano est connu en France sous le nom de Léonard de Pise. Il est souvent appelé Fibonacci, fils de Bonaccio, mais ce dernier nom lui aurait été donné fantaisistement vers 1840 par Guillaume Libri, connu comme escroc plus que comme historien des sciences (il a dérobé de nombreux livres et documents extrêmement précieux).

Léonard de Pise est né à Pise vers 1170. Son père, ayant été envoyé en mission à la douane de Bougie en Algérie, l'appela auprès de lui vers 1192 afin de l'initier aux affaires commerciales, en particulier aux calculs. Léonard de Pise étudia sous la direction d'un maître arabe et parcourut l'Egypte, la Syrie, la Grèce, la Sicile et la Provence. Ayant assimilé les Eléments d'Euclide et ayant beaucoup appris des arabes, il rentra à Pise et composa cinq ouvrages.

Le premier, intitulé *Liber abaci*, c'est-à-dire *Livre de abaques.* Ecrit en 1202, revu et augmenté en 1228, ce livre fut peu utilisé dans les écoles et ne sera imprimé qu'au $19^{\text{ème}}$ siècle. Il est divisé en 15 chapitres ; les problèmes de fausse position sont étudiés dans les chapitres 12 et 13. Léonard de Pise explique également le système indo-arabe de numération et présente les résultats arabes d'algèbre sur la résolution des équations de degré 1 et 2.

Le second ouvrage, intitulé *Practica Geometriæ*, est composé vers 1220. Il réunit les connaissances de géométrie (Euclide, ...) et de trigonométrie de l'époque.

Le troisième ouvrage, intitulé *Flos Leonardi Bigolli Pisani super solutionibus quarumdam quaestionum ad numerum et ad geometriam pertinentium*, c'est-à-dire *Fleur de solutions de certaines questions relatives au nombre et à la géométrie*, date de 1225 environ.

Le quatrième ouvrage, de la même époque, est une *Epistola Leonardi ad magistrum Theodorum Philosophum domini Imperatoris*, une lettre adressée à Théodore, astrologue attaché à la cour de Frédéric II.

Le cinquième ouvrage, de la même époque, est intitulé *Liber quadratorum*, c'est-à-dire *Livre des nombres carrés*. Il a été traduit en français par Paul Ver Eecke en 1952.

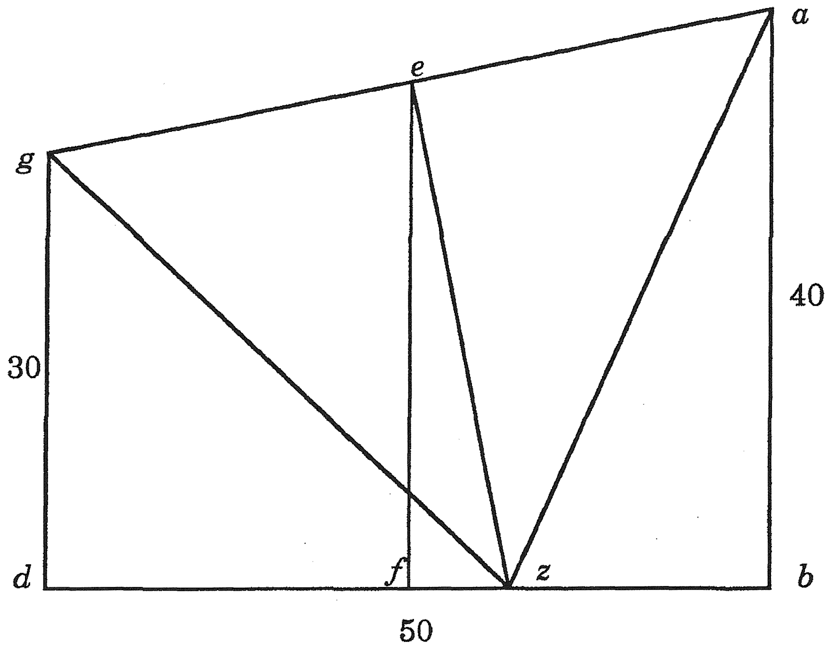
## 3 Activité proposée

### 3.1 Un exercice du *Liber abaci*

*In quodam plano sunt due turres, quarum una est alta passibus 30, altera 40, et distant in solo passibus 50 ; infra quas est fons, ad cuiuc centrum uolitant due aues pariuolatu, descendentes pariter ex altitudine ipsarum ; queritur distantia centri ab utraque turri.*

**Traduction**

Deux tours, l'une haute de 30 pas, l'autre de 40, sont distantes de 50 pas. Entre les deux tours est une fontaine vers laquelle deux oiseaux, volant de chaque tour en descendant à la même vitesse, arrivent en même temps. Quelle est la distance de la fontaine à chaque tour ?



### 3.1.1 Premières stratégies

**Question 1**

Première stratégie : déterminer l'emplacement de la fontaine par une construction géométrique.

**Question 2**

Seconde stratégie : résoudre algébriquement le problème posé par Léonard de Pise.

### 3.1.2 Troisième stratégie

*40 et 30 sont 70 ; la moitié est 35, à savoir la ligne ef. Les lignes df et fb ont 25 de longueur, la différence entre 35 et la tour la plus petite est 5 qui, multiplié par 35, est 175 qui, divisé par la moitié de la distance entre les deux tours, à savoir 25, donne 7, la ligne fz. Donc dz est 32 et il ne reste que 18 pour la ligne zb.*

**Question 1**

Lire attentivement la démonstration et vérifier que le résultat trouvé par Léonard de Pise est exact.

**Question 2**

On se propose maintenant de comprendre la démonstration précédente.

Appelons $h$ la projection orthogonale de $g$ sur la droite $(ef)$. En considérant les deux triangles rectangles $efz$ et $egh$, déterminer la longueur $fz$.

### 3.1.3 Quatrième stratégie : méthode de double fausse position

*Si la tour la plus haute est à une distance de 10 de la fontaine, 10 fois 10 font 100 qui ajouté à la tour la plus haute multipliée par elle-même, à savoir 1600, donne 1700 ; il faut multiplier la distance qui reste par elle-même qui, ajouté à la tour la plus petite multipliée par elle-même, à savoir 900, donne 2500. Cette somme et la précédente différent de 800. Il faut éloigner la fontaine de la tour la plus haute. Par exemple de 5, à savoir globalement de 15, qui multiplié par soi-même est 225 qui, ajouté à la tour la plus haute multipliée par elle-même donne 1825 ; 35, distance de la fontaine à la tour la plus petite, multipliée par elle-même donne 1225 qui, ajouté à la tour la plus petite multipliée par elle-même donne 2125. Les deux sommes diffèrent de 300.*

*Avant, la différence était de 800. Donc, quand on a ajouté 5 pas, on a diminué la différence de 500. Si on multiplie 5 par 300 et si on divise par 500, on a 3 qui, ajouté à 15 pas donne 18, qui est la distance de la fontaine à la tour la plus haute.*

Cette méthode de Léonard de Pise est appelée méthode de double fausse position.

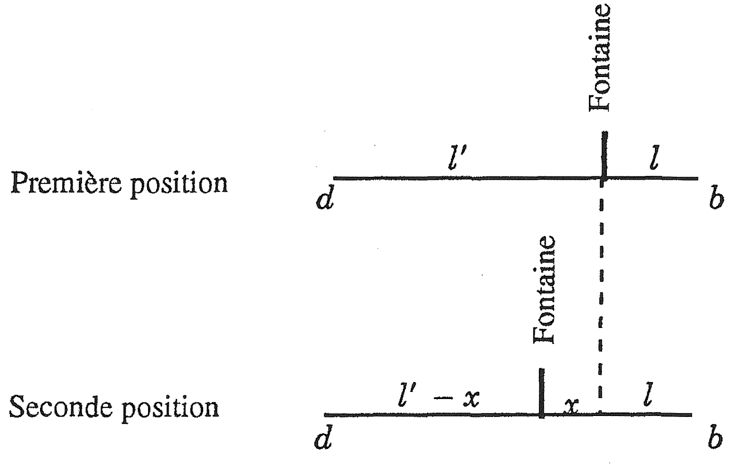
**Question 1**

Faire un dessin correspondant aux deux positions successives choisies pour la fontaine. Ecrire sous chaque dessin les calculs de Léonard de Pise.

**Question 2**

On peut illustrer le raisonnement de Léonard de Pise par le schéma ci-dessous.

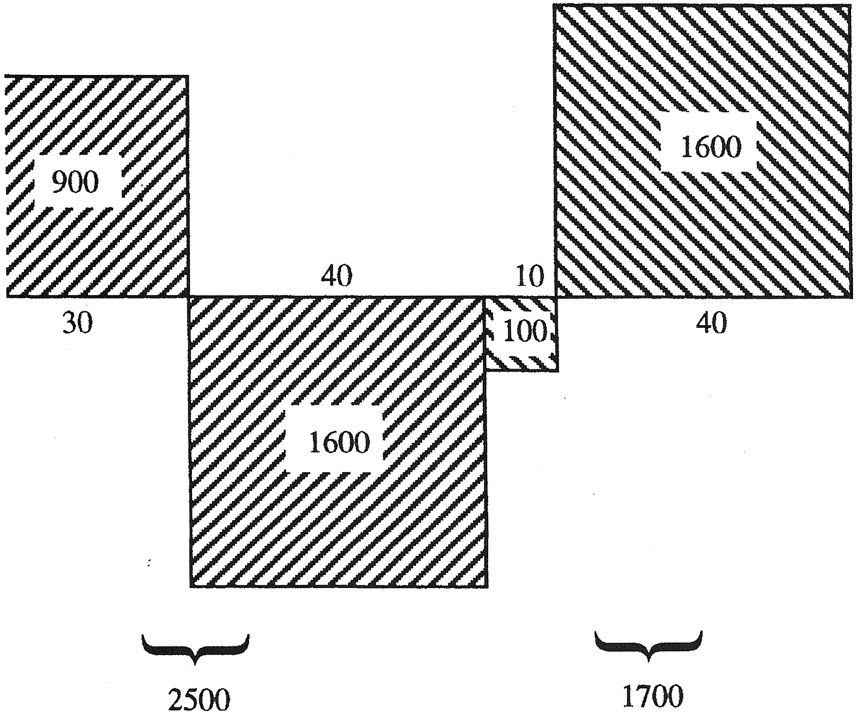
Considérons deux positions quelconques de la fontaine comme ci-dessous, avec $l + l' = 50$ :



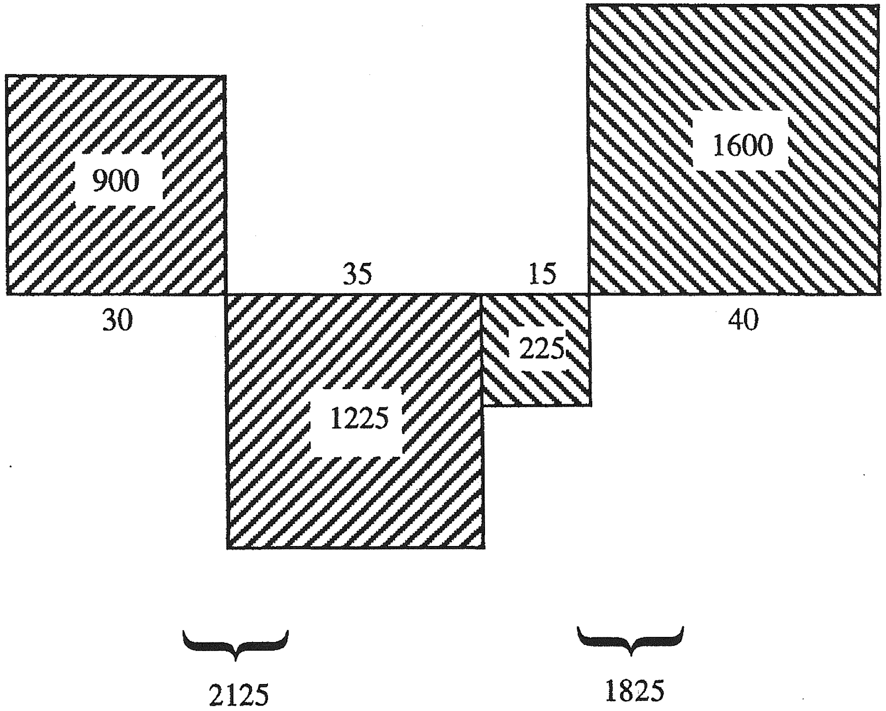
Les calculs de Léonard de Pise conduisent à calculer les différences $diff_1$ et $diff_2$ par :

$$diff_1 = (l'^2 + 900) - (l^2 + 1600) = l'^2 - l^2 - 700,$$

$$diff_2 = ((l' - x)^2 + 900) - ((l + x)^2 + 1600) = l'^2 - l^2 - 700 - 2x(l + l').$$



Première position : $l$ = 10
Différence des aires : 800



Seconde position : $l$ = 15
Différence des aires : 300

Position cherchée : $l$ = ?
Différence des aires : 0

On obtient alors $diff_1 - diff_2 = 2x(l + l') = 100\ x$, ce qui montre que la différence des aires est proportionnelle à $x$. Il ne reste plus qu'à déterminer $x$, et à conclure.

Résumons les calculs de Léonard de Pise :

| Distance de la plus haute tour | Différence des distances | Aires | Différences des aires |
|---|---|---|---|
| 10 | | 800 | |
| | } 5 | | } 500 |
| 15 | | 300 | |
| | } x | | } 300 |
| 15 + x | | 0 | |

## 3.2 Réaction des élèves

### 3.2.1 Premières stratégies

La construction a été réussie par presque tous ; quelques uns ne pensent pas à la médiatrice.

Pour la résolution algébrique, certains ont fait le choix d'une inconnue alors que d'autres ont travaillé avec deux inconnues : $dz$ et $zb$.

Quelques élèves avaient déjà résolu cet exercice au collège, avec des textes un peu différents.

### 3.2.2 Troisième stratégie

Les élèves s'aperçoivent que le résultat est identique à celui obtenu par la première stratégie. Par contre, ils ont beaucoup de mal à expliquer pourquoi la démonstration est exacte. Leur première idée est d'appliquer le théorème de Pythagore. Quelques uns pensent ensuite à la trigonométrie, en particulier à la notion de tangente.

### 3.2.3 Quatrième stratégie

Beaucoup ont souffert pour comprendre la démonstration.

Il a fallu d'abord tracer la figure correspondant à la première position pour les débloquer et qu'ils tracent eux-mêmes la seconde figure.

Pour la seconde question, la plupart comprennent les calculs mais ont du mal à saisir pourquoi cela donne la réponse. Bien sûr, la proportionnalité portant sur des différences d'aires et de distances n'est pas évidente.

Ils sont très surpris que Léonard de Pise fasse des calculs sans les justifier. Il est bon de leur faire remarquer que c'est justement ce qu'ils font très souvent …

Les élèves se sont demandés pourquoi Léonard de Pise donnait plusieurs méthodes pour résoudre le même problème et surtout pourquoi il en donnait de si compliquées. Le calcul algébrique a en effet rendu obsolètes les méthodes de fausse position si utilisées avant le $16^{\text{ème}}$ siècle pour les problèmes dont nous dirions maintenant qu'ils conduisaient à des équations linéaires du premier degré (voir 4.5).

### 3.3 Explications complémentaires

Troisième stratégie : faire d'abord repérer où se trouvent les nombres cités dans la démonstration : 35, 5, 25. Attirer l'attention sur les triangles $geh$ et $efz$ ; proposer d'utiliser des connaissances de trigonométrie, préciser si besoin : la tangente d'un angle.

Quatrième stratégie : même après avoir tracer les deux dessins, la proportionnalité n'est pas évidente. Plutôt que de rester sur les dessins, il faut revenir au calcul algébrique.

### 3.4 Les explications de Léonard de Pise

Dans son Liber abaci, Léonard de Pise explique d'abord comment il construit le point $z$ (c'est la stratégie n° 1). Il justifie sa construction en montrant que $gz = za$ ; il est un peu surprenant de le voir utiliser le théorème de Pythagore, pour démontrer une propriété de la médiatrice évidente pour des élèves de quatrième.

"*Soient donc la plus haute tour ab, la plus petite gd, l'espace entre elles est la ligne bd. Supposons que soient reliées les sommets de ces tours par la ligne ag qui est divisée en deux parties égales au point e. A partir de celui-ci, que l'on trace une ligne ef équidistante des lignes ab et gd ; et à partir du point e, que l'on trace une ligne ez faisant deux angles droits sur la ligne ag, c'est-à-dire autour de e. J'affirme que le point z est le centre de la fontaine, ce qui sera prouvé ainsi. Que l'on trace à partir de z deux droites qui soient za et zg, qui sont le vol des oiseaux, que je montrerai être égaux. Etant donné que la ligne za sous-tend l'angle droit dans le triangle zae, par conséquent le carré de celui-ci est égalé par les deux carrés des lignes ze et ea. De la même façon, le carré de la ligne zg est égalé par les deux carrés des lignes ge et ze. Mais ge est égal à ea et le carré de la ligne ez est commun aux deux triangles précités. C'est pourquoi gz et az sont égaux et c'est ce que nous voulons.*"

Léonard de Pise poursuit avec le calcul que nous avons reproduit au début de la stratégie n° 3 afin de déterminer la distance de $z$ à $b$. Il envisage le cas où la disposition des tours est telle que la fontaine soit en $b$ ou en un point extérieur au segment $[bd]$ ; on voit qu'il maîtrise parfaitement la situation générale mais il la traite sur un exemple numérique. A partir de cette partie du texte d'autres activités sont concevables (voir ci-dessous).

"*Il faut noter que si le carré de la tour la plus haute est égal aux deux carrés qui sont faits par l'espace bd et par la petite tour, alors le centre de la fontaine serait le point b qui est le pied de la tour. Et si le carré de cette même plus haute tour était encore plus grand que la somme des* *carrés précédents, alors le centre sera en dehors, ce que l'on trouvera de la même façon. Bref, soit 10 l'espace bd qui est la différence entre les tours et que les tours soient les mêmes pour qu'on aperçoive une autre règle. Traçons la ligne db à l'infini au delà de b et qu'à partir de e on trace ef ; en outre, la ligne es faisant des angles droits avec aga ; par là est montré à partir de ce que nous avons dit que les lignes sa et sont égales l'une à l'autre ; si l'on divise le 175 précédent par qui est 5, certainement 35 vient pour fez. C'est pourquoi le centre z est distant du pied de la petite tour, c'est-à-dire du point d, de 40."*

## 4 Prolongements de l'activité

### 4.1 Un autre exercice du Liber abaci

*In quodam plano sunt erecte due aste, que distant in solo pedibus 12 ; et minor asta est alta pedibus 35, maior quoque pedibus 40 ; queritur, si maior asta ceciderit super minorem, in qua parte ipsius erit cumtactus eorum.*

### Traduction

*Deux hampes, l'une haute de 35 pas, l'autre de 40, sont distantes de 12 pas. Si la hampe la plus haute tombe sur la plus petite, en quel point va-t-elle la toucher ?*

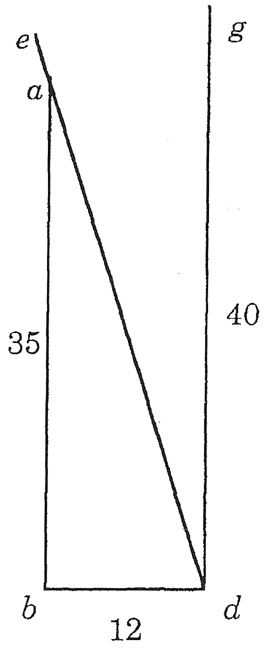


Figure 1

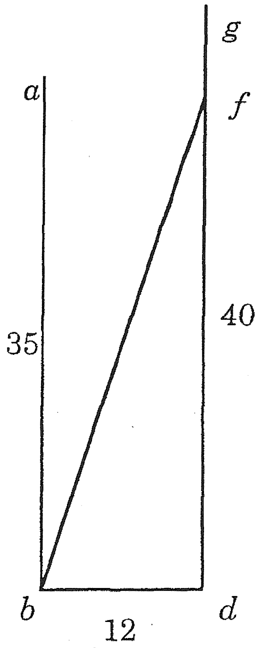


Figure 2

### Question 1

Lorsque la grande hampe $dg$ tombe en de sur la plus petite hampe $ab$, calculer les distances $da$ et $ae$ (figure 1).

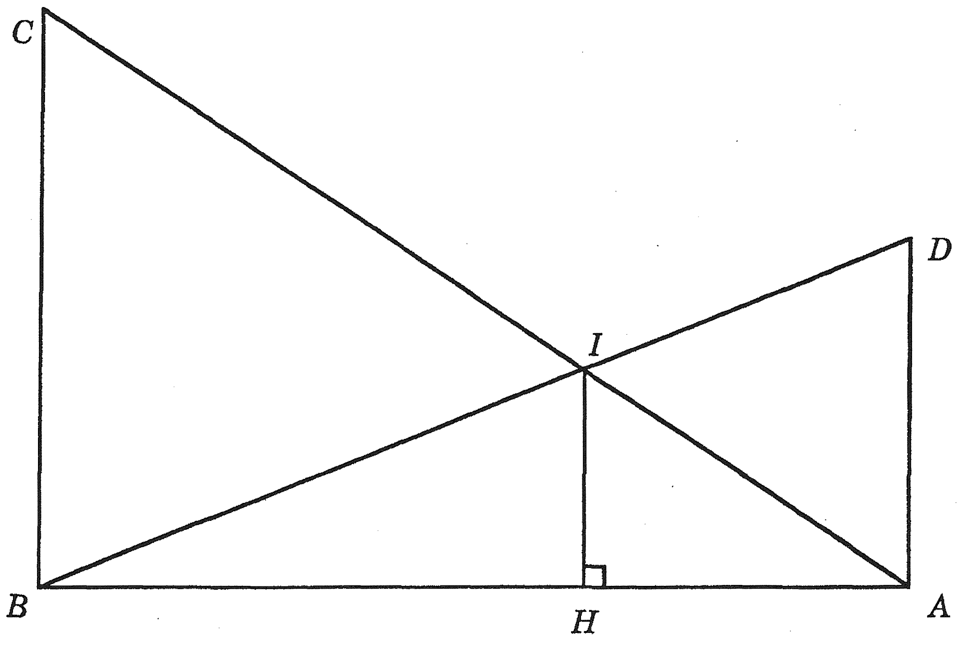
**Question 2**

Lorsque la petite hampe $ab$ tombe en $bf$ sur la plus grande hampe $dg$, calculer les distances $df$ et $fg$ (figure 2).

Ce problème peut faire penser au classique problème des échelles.

### 4.2 Problème des échelles

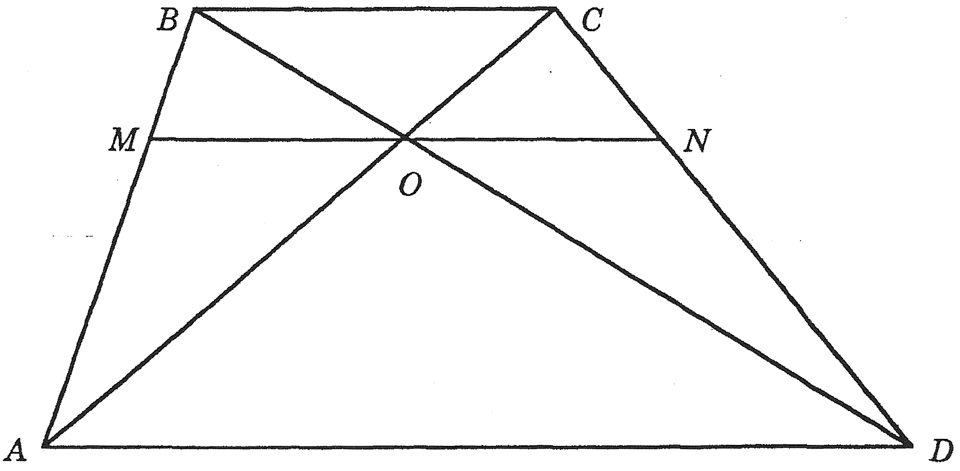
Deux échelles $AC$ et $BD$ sont placées entre deux murs verticaux. Elles se croisent au point $I$. Il s'agit, connaissant la longueur des échelles et la distance entre les deux murs, de déterminer à quelle hauteur se croisent les échelles, c'est-à-dire de déterminer la distance $HI$.



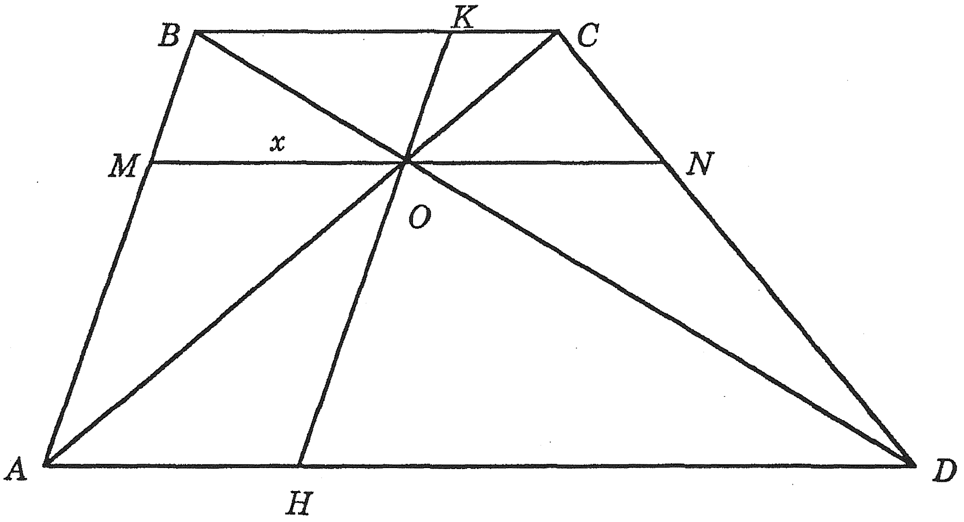
**Question 1**

$ABCD$ est un trapèze dont les diagonales se coupent en $O$. La parallèle à $(AD)$ passant par $O$ coupe $[AB]$ en $M$ et $[CD]$ en $N$.

Montrer que $OM = ON$.



**Question 2**



Sur la figure précédente, on trace la droite $(KH)$ passant par $O$ et parallèle à la droite $(AB)$. On pose $AD = a, BC = b, OM = x$.

1) Montrer que $\frac{b-x}{x} = \frac{x}{a-x}$.

2) En déduire une formule donnant $x$ en fonction de $a$ et $b$.

**Question 3**

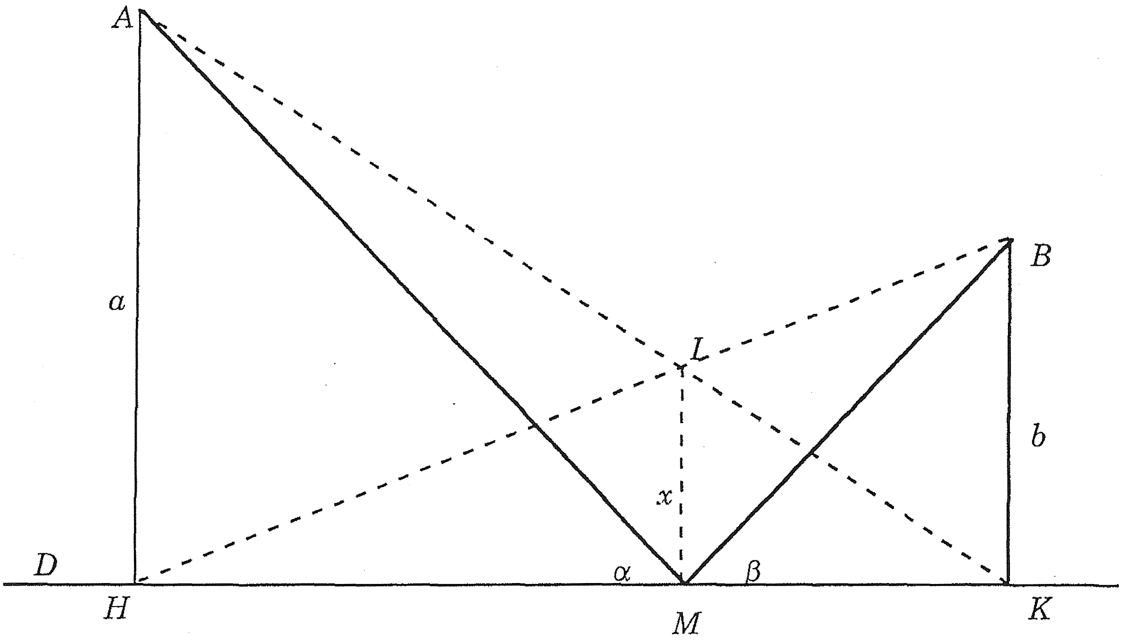
Applications : déterminer la hauteur $IH$ dans les cas suivants :

| AB | AC | BD |
|---|---|---|
| 2,4 m | 7,4 m | 2,3 m |
| 2,4 m | 7,4 m | 8 m |
| 5 m | 6,25 m | 7,25 m |

### 4.3 Le plus court chemin

*Les points A et B ainsi que la droite D sont donnés. Où doit-on placer un point M sur D pour que la distance AM + MB soit minimale ?*

Rappelons que ce problème classique se résout géométriquement à l'aide d'une symétrie orthogonale. Rappelons aussi qu'on peut obtenir la solution de ce problème avec la contrainte supplémentaire de ne faire des tracés que dans le demi-plan délimité par $D$ et contenant $A$ et $B$. Le problème des échelles conduit à la solution en construisant l'intersection $I$ de $(AK)$ et de $(BH)$ et en projetant $I$ en $M$ sur $D$.



On a en effet : $\frac{x}{b}=\frac{HM}{HK}$ et $\frac{x}{a}=\frac{KM}{KH}$ ce qui donne $\frac{a}{MH}=\frac{b}{MK}$ soit $\tan\alpha=\tan\beta$.

### 4.4 Un lieu géométrique

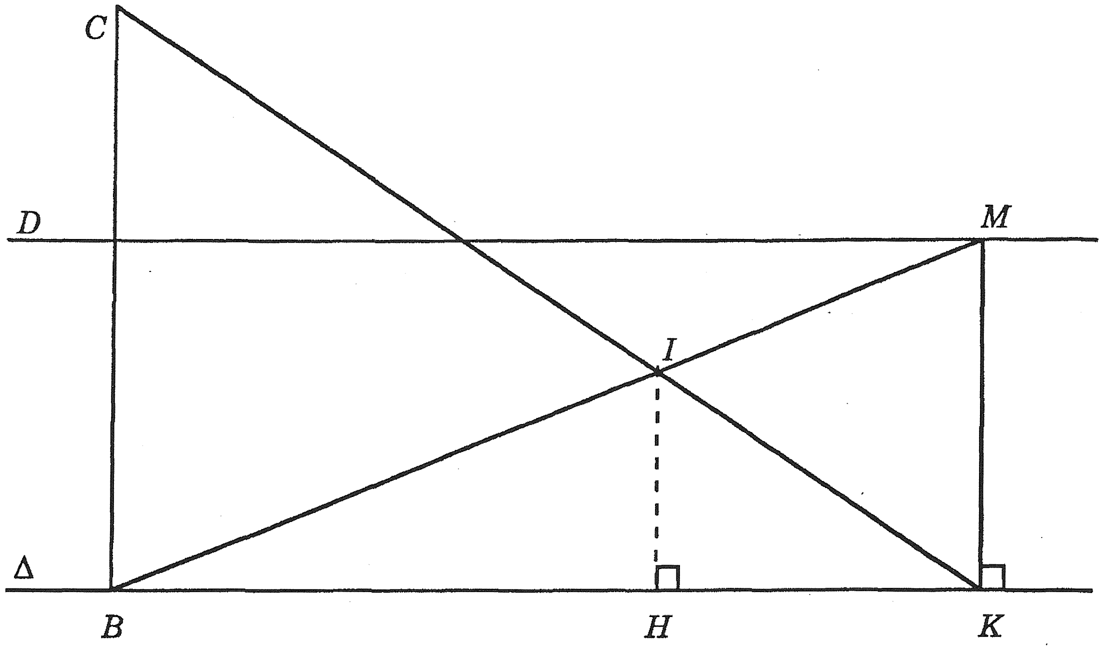
Les deux droites $D$ et $\Delta$ sont fixes et parallèles ; le point $A$ est fixe et $B$ est son projeté orthogonal sur $\Delta$.

Le point $M$ est variable sur $D$ et on note $K$ son projeté orthogonal sur $\Delta$ et $I$ l'intersection des segments $[AK]$ et $[BM]$ (figure ci-dessous)

### Question

Sur quel ensemble $E$ se trouve le point $I$ quand $M$ varie sur $D$ ?

La réponse est facile : si on note $d$ la distance des deux droites, $a = AB$, $x = IH$, le calcul fait pour le problème du plus court chemin montre que $x=\frac{ad}{a+d}$ ; ainsi la distance du point $I$ à la droite $\Delta$ est constante.



## 4.5 Méthode de la double fausse position

Cette méthode a eu beaucoup de succès jusqu'à ce que les progrès de l'algèbre lui enlève son intérêt. Elle est enseignée dans des traités chinois vieux de 2000 ans, dans les traités arabes, dans ceux des algébristes italiens du moyen âge et même dans des livres d'algèbre du $18^{\text{ème}}$ siècle.

Quand on regarde le texte des exercices où la méthode s'applique, on s'aperçoit que les calculs, souvent compliqués, reviennent à calculer $x$ pour que $ax + b$ soit égal à une quantité donnée $y$, le problème étant posé de telle façon que $a$ et b ne soient pas évidents parce que le calcul de $y$ en fonction de $x$ est donné en plusieurs étapes, comme un composé de fonctions affines.

Pour déterminer $x$ par la méthode de la double fausse position, on essaie d'abord une valeur $x_1$. La valeur $y_1$ obtenue par le procédé de calcul n'est pas, sauf coup de chance, égale à $y$. On essaie une seconde valeur $x_2$ qui donne une valeur $y_2$. Ces deux essais infructueux n'ont pas été inutiles car ils permettent de trouver la valeur exacte de $x$. En effet, on a :

$ax_1 + b = y_1$

$ax_2 + b = y_2$

et, si on pose $e_1 = y - y_1$, $e_2 = y - y_2$, on obtient : $x_2e_1 - x_1e_2 = ax(x_2 - x_1)$ d'où :

$$x = \frac{x_2e_1 - x_1e_2}{e_1 - e_2}.$$

Dans le problèmes de la fontaine, le calcul numérique donnerait :

$x_1 = 10$, $e_1 = 800$, $x_2 = 15$, $e_1 = 300$, $x = \frac{15.800 - 10.300}{800 - 300} = 18.$

## 5 Bibliographie

¶¶¶ Dedron Pierre, Itard Jean : Mathématiques et mathématiciens.— Paris : Magnard, 1959.

¶¶¶ Picutti Ettore : Léonard de Pise.— Pour la Science, dossier, janvier 1994, pages 6-15.

# Chapitre V
# Nicolas Chuquet

## 1 Présentation

### 1.1 Fiche technique

Niveau : classes de 4$^{\text{ème}}$ et de 3$^{\text{ème}}$.

Thème : un texte de géométrie en français de la fin du 15$^{\text{ème}}$ siècle.

Durée : 1 heure en classe, travail individuel à la maison, 30 minutes de bilan en groupes.

### 1.2 Connaissances nécessaires

Définition du parallélogramme et propriété de la projection du milieu.

### 1.3 Objectifs pédagogiques

Lecture d'un texte en français du 15$^{\text{ème}}$ siècle.

Eveil de la curiosité des élèves à l'égard de l'évolution de la rédaction des textes mathématiques.

Consolidation des connaissances.

Fonctionnement d'une notion apprise en classe dans un problème concret.

Montrer la diversité des méthodes pour une même situation.

Rédaction de démonstration.

Dialogue en classe.

## 2 Nicolas Chuquet

Sa date de naissance ne semble pas connue, sans doute le milieu du 15$^{\text{ème}}$ siècle. Nicolas Chuquet est arrivé rue de la Grenette à Lyon en 1480. Il y a pratiqué le métier d'"escripvain", ce qui signifie qu'il a enseigné aux enfants à écrire, puis il est devenu "maistre d'algorisme" jusqu'à sa mort en 1488 (Bien loin de Lyon, cette année-là, la Bretagne allait être rattachée à la France après la bataille de Saint Aubin du Cormier). Il est l'auteur du "Triparty en la science des nombres" (1484) et d'un autre manuscrit qui est la première géométrie en langue française. Il pourrait aussi avoir pratiqué la médecine.

Il fut connu très tardivement et son œuvre fut pillée par un voisin, Estienne de La Roche, qui édita en 1520 puis en 1538 "Larismeticque et geometrie".

Deux courants sont présents dans la géométrie de Nicolas Chuquet. D'une part, un courant ancien, remontant au moins à Hugues de Saint-Victor, dont le noyau est constitué par la connaissance et l'usage d'instruments et de procédés matériels. D'autre part, un courant plus tardif, essentiellement représenté en Italie, dont les ouvrages, les "practiche di geometria", le plus souvent en langue vulgaire, ont pour objet la description des figures et des problèmes sur les lignes, les surfaces et les volumes.

Le "Triparty en la science des nombres" est ainsi appelé parce qu'il comporte trois parties : calculs avec des nombres rationnels, avec des nombres irrationnels, théorie des équations. Non imprimé, son manuscrit a eu une grande influence et innove sur plusieurs points :

1) Même s'il rejette en général les nombres négatifs,

- c'est le premier qui pose une équation avec un tel nombre : $4x = -2$.

- il pose aussi un problème où la solution en comporte un : trouver cinq nombres tels que leur somme sans le premier fasse 120, que leur somme sans le deuxième fasse 180, sans le troisième elle fait 240, sans le quatrième elle fait 300 et sans le cinquième elle fait 360 ; les nombres sont 180, 120, 60, 0, -60.

3) Il trouve même des solutions imaginaires.

4) La notation exponentielle des puissances de l'inconnue a une allure très moderne. Chuquet écrit $^1$, $^2$, $^3$ pour $x$, $x^2$, $x^3$ ; par exemple, il écrit $1225\ \tilde{p}\ 148^2$ pour $1225 + 148\ x^2$ ; on trouve même $12^0$ et $12^{-1}$ pour 12 et $\frac{12}{x}$. Chuquet connaît la formule $a^{m+n} = a^m\ a^n$.

## 3 Activité proposée

### 3.1 Texte

# Mesure d'une distance

Nicolas Chuquet a proposé, vers 1485, le procédé suivant pour mesurer une distance inconnue.

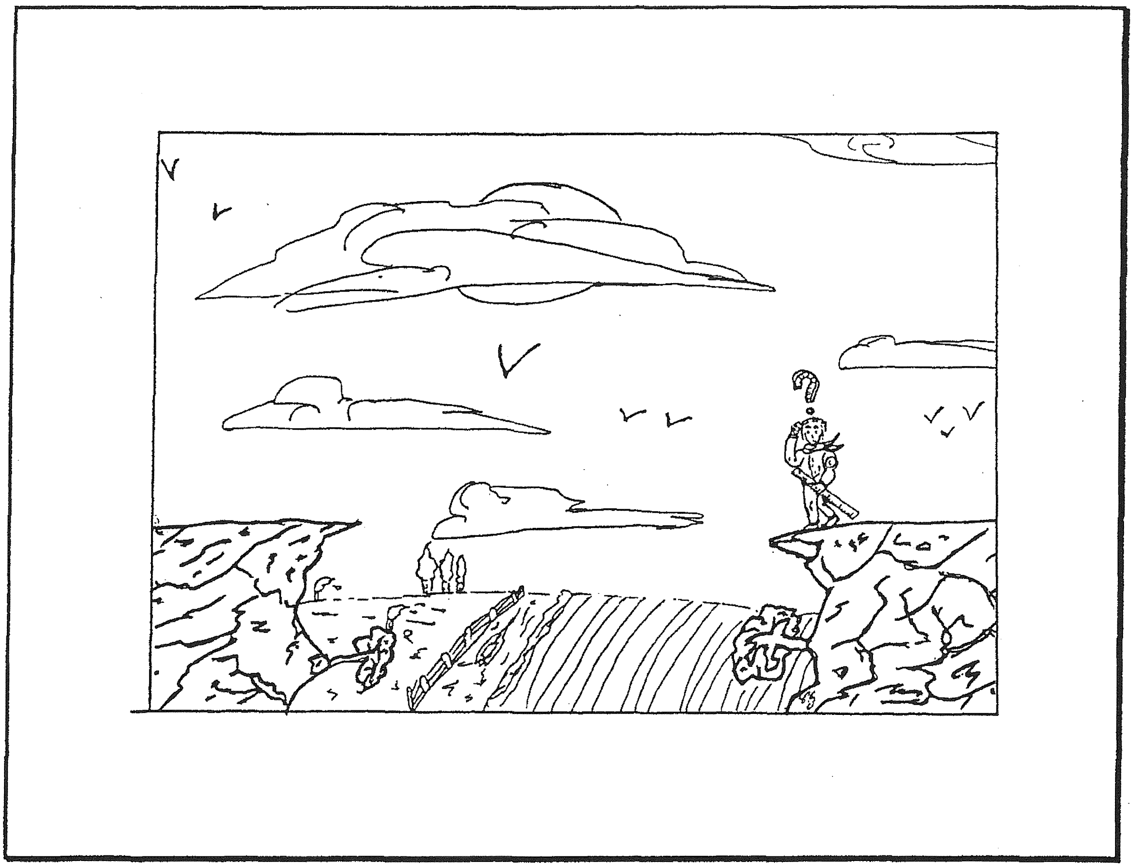
*"Une maniere de faire : a l'ung des boutz de la chose que veulx mesurer plante droit ung baston de petite longueur, comme de 2 pyez et* $\frac{1}{2}$*, dont le* $\frac{1}{2}$ *pyé seroit dedans terre ; puys esloigne toy d'icellui baston, et ayes ung aultre qui soit deux foiz autant long que le premier, c'est assavoir de 4 pyez, et puis recule en arriere et en telle maniere que en regardant par la summité d'icellui baston la summité de l'aultre, tu puisse veoir l'aultre bout de la chose a mesurer ; adonc saches la distance d'ung baston a aultre, car elle est egale a la longueur que tu serches."*

Montre que l'affirmation de Nicolas Chuquet est vraie.

Pour aider les élèves en difficulté, nous avons mis au point quatre textes.

**Aide n°1**

Voici un exemple de point inaccessible dont on veut déterminer la distance par rapport à soi.



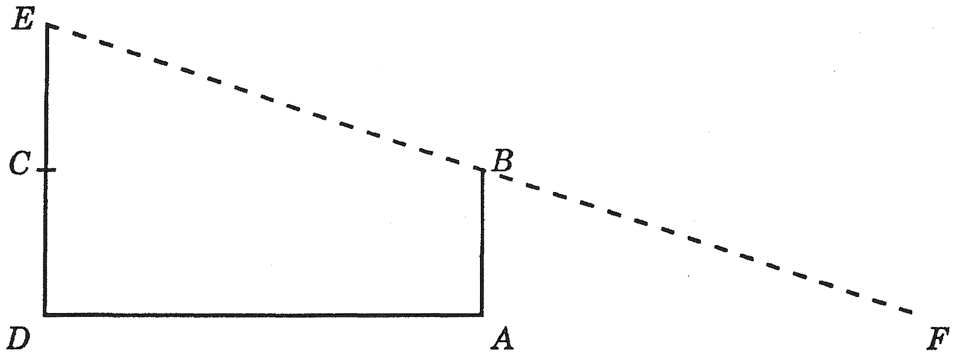
**Aide n°2**

Faites l'expérience, entre deux tables par exemple. La conclusion de Nicolas Chuquet est-elle plausible ?

**Aide n°3**

Traduis cette expérience par une figure géométrique simple : soit $[AB]$ le petit bâton, de sommet $B$, et soit $[DE]$ le grand bâton, de sommet $E$ et de milieu $C$.

**Aide n°4**



1) Complétez la liste des données.
2) Le quadrilatère $ABEC$ est-il un parallélogramme ? Justifier.
3) Que peut-on en conclure pour les droites $(CA)$ et $(EF)$ ? Pour le point $A$ ?

Une variante de cette aide suit la démarche d'un élève dont le travail est joint :

2') Le quadrilatère $ABCD$ est-il un parallélogramme ? Justifier.
3') Que peut-on en conclure pour le point $B$ ? Pour le point $A$ ?

## 3.2 Réaction des élèves

L'ancienneté du texte a étonné les élèves ; ils ont bien participé et ont argumenté lors de l'analyse. Ils ont ensuite interrogé le professeur de français sur l'évolution de notre langue.

L'aide n° 1 a été utilisée par un grand nombre d'élèves qui s'attardaient sur une traduction mot à mot. Le support du dessin leur a permis de prendre du recul et de relativiser la difficulté.

L'aide n° 2 a été bien accueillie par tous : elle propose une expérimentation qui détend la séance et suggère une représentation sous la forme d'une figure. Le tiers des élèves avance dans la recherche mais il a fallu harmoniser les notations.

L'aide n° 3 soulage les élèves manquant d'initiative et permet à ceux qui ont commencé une figure d'en nommer les points. Le tiers des élèves produit une démonstration écrite.

Les deux tiers restant ont besoin de l'aide n° 4 qui n'est qu'un énoncé identique à ceux des manuels de $4^{\text{ème}}$.

Lors du bilan, tous les élèves ont dit avoir été intéressé par l'origine et la nature de cette activité.

### 3.3 Explications complémentaires

Cet exercice est faisable en classe de $5^{\text{ème}}$ et en début de classe de $4^{\text{ème}}$ en utilisant les définitions et propriétés des côtés des parallélogrammes mais la longueur de la démonstration risque de freiner l'attention et l'intérêt des élèves.

## 4.Prolongements de l'activité

Dans le livre de Chuquet cité en bibliographie, on peut proposer :

1) En $5^{\text{ème}}$, l'exercice du calcul du volume d'un prisme (n° 90 page 211) ;

2) En $4^{\text{ème}}$, la représentation de $\sqrt{13}$ et d'autres racines carrées d'entiers (n° 159 page 288, n° 157 page 284/86).

## 5 Bibliographie

¶¶¶ Chuquet Nicolas : La géométrie. Introduction, texte et notes de Hervé l'Huillier.— Vrin, 1979.

¶¶¶ Haegel S. : Les nombres négatifs ont une histoire.— I. R. E. M. de Strasbourg, 1992.

¶¶¶ Struik D. J. : A source book in mathematics, 1200-1800.— Harvard university press, 1969.

# Chapitre VI
# La naissance de la géométrie analytique : la Géométrie de Descartes (1637)

## 1 Présentation

### 1.1 Fiche technique

Niveau : $1^{\text{ère}}$ S ; TC.

Thèmes : La première utilisation d'un repère chez Descartes, équation d'une hyperbole tracée point par point.

Durée : 3 heures et 15 minutes.

### 1.2 Connaissances nécessaires

Les proportions et le théorème de Thalès.

Les repères non orthonormés.

L'équation d'une hyperbole.

Notons d'asymptotes.

### 1.3 Objectifs pédagogiques

L'objectif principal est l'étude d'un texte charnière dans l'histoire des mathématiques puisqu'il s'agit là de la fondation de la géométrie analytique.

C'est également l'occasion :

- de la construction point par point d'une conique (problème de lieu).

- de la mise en place d'une fonction dans une situation issue de la géométrie.

## 2 Un peu d'histoire

### 2.1 De 1600 à 1650

C'est l'époque du baroque qui remplace la renaissance et qui, comme elle, vient d'Italie. C'est la période du règne de Louis XIII (1610-1643) et de la mise en place de l'absolutisme.

Depuis un siècle, les progrès scientifiques semblent beaucoup plus rapides, les échanges sont plus importants et s'organisent, par exemple autour de Marin Mersenne à Paris qui au travers d'une énorme correspondance, transmet les travaux des uns aux autres.

C'est le développement de la mécanique céleste et terrestre avec l'importance grandissante de la navigation ; la terre n'est plus le centre de l'univers et les navigateurs ont besoin de cartes précises. Le géographe Mercator invente un système de projection cartographique (1569), de nouvelles régions sont découvertes (passage du cap Horn, Australie, Arctique).

Bacon (1561-1626) fonde l'empirisme basé sur l'observation. Descartes représente, lui, le rationalisme.

La conception du monde change grâce à de nouvelles théories scientifiques. Galilée (1564-1642) avec son "livre pour la lecture de la nature à l'aide des mathématiques", crée la physique classique, découvre les lois de la chute libre des corps, qui seront complétées par Kepler (1571-1630) avec les lois sur le mouvement des planètes, puis par Isaac Newton (1643-1727) avec celles de la gravitation.

Toutes ces nouvelles pensées et découvertes préparent le grand courant spirituel et scientifique que connaîtra l'Europe et en particulier la France au XVIII$^{\text{ième}}$.

Les principales découvertes scientifiques sont :

| | | |
|---|---|---|
| 1609 | chute des corps, pendule | Galilée |
| 1609 | loi des planètes | Kepler |
| 1614 | tables des logarithmes | Napier (ou Neper) |
| 1618 | circulation du sang | Harvey |
| 1618 | réfraction de la lumière | Snellius (attribuée à Descartes) |
| 1637 | géométrie analytique | Descartes et successeurs |
| 1665, etc. | calcul infinitésimal | Newton et Leibniz[1] |
| 1686 | loi de gravitation | Newton[2] |

---

[1] ce développement ne s'est pas fait en un seul jour et se poursuit pendant près d'un siècle

[2] pour l'apport respectif de Newton et de Hooke à cette théorie, voir le livre d'Arnold ; Newton ne sort pas grandi de cette lecture, du moins en tant qu'homme.

### 2.2 La famille de Descartes à Rennes

Originaire du Poitou, la famille de Descartes s'installe à Rennes. Le père de Descartes, Joachim, est nommé conseiller "non originaire" au parlement de Bretagne (voir XI.3). Il y sera considéré comme un des membres les plus compétents. Il s'attache à la Bretagne, se remarie en 1600 avec une bretonne. Ses descendants demeurent en Bretagne et on en compte cinq (deux fils et trois petits fils) qui occuperont des charges au parlement. René Descartes fut peu considéré par sa famille ; son père plaisantait : "*Faut-il que j'ai mis au monde un fils assez ridicule pour se faire relier en veau*" et personne ne jugea bon de prévenir son fils lorsqu'il mourut, en 1640.

### 2.3 René Descartes 1596-1650

La peste s'étant déclarée à Rennes, sa mère quitte la ville et il naît à La Haye (Touraine) le 31 mars 1596. Il passe cependant la plus grande partie de son enfance en Bretagne. A l'âge de 10 ans, il est mis au collège royal de la Flèche, tenu par les Jésuites et y restera 8 ans. Sa santé fragile lui laisse du temps, il est curieux de tout, mais seules les mathématiques le satisfont, doutant de la philosophie et de la physique telles qu'elles lui sont enseignées, et n'y trouvant que des opinions et non des vérités.

Ensuite, après avoir obtenu son baccalauréat et une licence en droit à Poitiers, il passe quelques temps à Paris, puis il se rend en Hollande et commence une carrière militaire. En cherchant à résoudre un problème de géométrie affiché dans les rues de Bréda, il fait la rencontre d'un mathématicien nommé Beeckman. Ce dernier se tient au courant de tous les progrès scientifiques de l'époque et c'est en partie grâce à lui que Descartes s'enthousiasme au départ pour le mécanisme (explication des phénomènes physiques par le mouvement). Il voyage ensuite dans toute l'Europe.

En 1619, profitant d'un quartier d'hiver, il passe plusieurs mois d'isolement à méditer et essayer de créer une science nouvelle. Et le 10 novembre 1619, il connaît une nuit d'exaltation où il conçoit "*les fondements d'une science admirable*". Jusqu'en 1621, il porte les armes et visite la Hongrie, l'Allemagne, l'Autriche, la Pologne, les côtes de la mer Baltique puis retourne en Hollande. Déçu par toutes ces guerres, il quitte alors l'armée et, sa fortune personnelle le lui permettant, continue de voyager à travers pratiquement toute l'Europe.

A cette époque, les géomètres s'envoient facilement des énigmes à deviner et Descartes, par sa capacité à les résoudre rapidement entretient des relations avec tous les plus grands savants géomètres de son siècle.

En 1625, de retour à Paris, il fréquente les salons, rencontre des savants : Morin, Mersenne, Mydorge, Villebressieu. Il se consacre à son oeuvre de philosophe et de savant, en particulier après sa rencontre, en 1627, avec le cardinal de Bérulle, qui lui en fait une obligation de conscience.

Il s'installe définitivement en Hollande en 1629. Son but est la retraite afin de se consacrer uniquement à la recherche de la vérité. Il ne confie son lieu de résidence qu'à un seul de ses amis, ne date jamais ses lettres du lieu où il demeure, change sans cesse de lieu de séjour, lieu le plus souvent isolé dans la campagne. Son biographe Baillet déclare que son ermitage "n'eut presque rien de plus stable que le séjour des israélites dans l'Arabie déserte".

C'est là qu'il rencontre Elisabeth, princesse palatine en exil, passionnée par la philosophie et les mathématiques. Descartes lui voue une grande admiration et lui dédie ses *Principes de la philosophie*. A travers leur correspondance, il dégage les idées de son *Traité des passions*.

Il correspond avec plusieurs savants, en particulier avec le Père Mersenne. Après un court séjour en France en 1647 où il rencontre Roberval, Hobbes, Gassendi, Pascal auquel il prétend avoir suggéré ses expériences sur le vide, il repart en Hollande.

En octobre 1649, il finit par accepter une invitation de la reine Christine de Suède à Stockholm. La reine l'écoute chaque matin, dès cinq heures, disserter sur la philosophie. Peu habitué aux climats aussi froids, il ne peut supporter cette obligation et il meurt d'une pneumonie le 11 février 1650, âgé de 53 ans. Ses cendres se trouvent actuellement à l'église Saint-Etienne du Mont à Paris.

## Son oeuvre scientifique

Ses préoccupations principales sont :

- Substituer aux incertitudes de la science du Moyen-Age une science véritable et universelle dont la certitude égale celle des mathématiques.

Dans la première partie du discours de la méthode, parlant de ses études au collège des Jésuites, il écrit : "*Je me plaisais surtout aux mathématiques, à cause de la certitude et de l'évidence de leurs raisons, mais je ne remarquais point encore leur vrai usage, et, pensant qu'elles ne servaient qu'aux arts mécaniques, je m'étonnais de ce que, leurs fondements étant si fermes et si solides, on n'avait rien bâti dessus de plus solide et plus relevé.*"

Cette science rendra les hommes "*maîtres et possesseurs de la nature*".

- Résoudre le conflit opposant religion et science.

La pensée cartésienne est marquée par la recherche d'une méthode "pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences". Son idée d'un ordre unique se retrouve dans son dernier ouvrage : *Règles pour la direction de l'esprit.*

Dés 1629, il entreprend l'étude des météores.

En 1631, en cherchant à résoudre le problème de Pappus (résolution géométrique de la duplication du cube), il découvre les principes de la géométrie analytique.

En 1633, il termine son ouvrage : "Le traité du monde ou de la lumière" où il soutient le mouvement de la terre, mais, le 22 juin 1633, l'ouvrage de Galilée est condamné par l'inquisition, cela lui fit une forte impression, il renonce à faire publier son ouvrage et est sur le point de brûler tous ses papiers. Il ne reprendra sa théorie qu'en 1644 et en termes très prudents.

Descartes s'est souvent trompé : à propos de la circulation du sang, de la pesanteur, de sa théorie niant l'existence du vide (les progrès en ce domaine ont donné raison à Newton contre Descartes) mais on lui doit des développements importants en physique et essentiels en mathématiques.

## Ses principaux ouvrages

Rendu prudent par l'affaire Galilée, Descartes publie ses premiers grands travaux en Hollande : ils paraissent le 8 juin 1637 à Leyde. Ils sont composés du Discours de la méthode et de trois appendices : la Dioptrique qui explique la taille des verres de lunettes, la Géométrie texte charnière de la pensée mathématique et les Météores qui propose une cosmogonie. Il faut remarquer qu'il écrit en Français pour être compris de tous (les livres philosophiques ou scientifiques sont d'habitude en latin), entre autres des femmes. Notons également que les "Œuvres complètes" rassemblées par Adam et Tannery au XIX$^{ième}$ et rééditées en 1974 donnent pratiquement la seule édition française de sa Géométrie en ce qui concerne le XX$^{ième}$ siècle.(absent en particulier des éditions de la Pléiade et de Garnier ).

Un Traité de musique, composé en 1618 avec Beeckman ne fut publié qu'après sa mort, ainsi qu'un traité de mécanique, assez incomplet composé en 1636 pour le père de Huygens.

En 1641, paraissent les Méditations métaphysiques suivies d'une série d'objections (Catérus, Mersenne, Hobbes, Arnauld, Gassendi).

En 1646, il compose le Traité des passions, publié en 1649.

En 1646, il fait paraître les Principes de la philosophie dans lequel il expose l'ensemble de la métaphysique et de la science cartésiennes.

Il fut tout au long de sa vie mêlé à des polémiques et souvent tenté de ne plus rien publier. Il est l'objet d'attaques de la part des Jésuites, puis des théologiens hollandais (son grand ennemi est Vœtius), et de l'Université de Leyde.

## La méthode et le projet de science universelle

Il regardait le doute comme la base de la philosophie. Il faut résister à notre tendance naturelle à juger vite et refuser tout ce qui n'est pas clair et distinct.

D'où la première règle : " *Ne recevoir jamais aucune chose pour vraie, que je ne la connusse évidemment comme telle*".

Il cherche la vérité; et pour cela, il faut séparer le connu de l'inconnu, se ramener des propositions obscures et compliquées aux plus simples, s'élever ensuite par degrés, parcourir toutes les questions, toutes les branches, enchaîner les pensées les unes aux autres, examiner longtemps les choses les plus faciles, utiliser l'imagination, les sens....;

D'où les règles :

*"Diviser chacune des difficultés que j'examinerai en autant de parcelles qu'il se pourrait et qu'il serait requis pour mieux les résoudre" dite : de l'analyse.*

*"Conduire par ordre mes pensées, en commençant par les objets les plus simples et les plus aisés à connaître, pour remonter peu à peu, comme par degrés, jusques à la connaissance des plus composés*" dite : de la synthèse.

*"faire partout des dénombrements si entiers, et des revues si générales, que je fusse assuré de ne rien omettre*" dite : du dénombrement.

**Son apport mathématique**

On le trouve dans son essai : *la Géométrie* composé de trois livres et dans d'autres textes.

Nous lui devons une simplification des systèmes de notation algébrique qui s'imposera aux mathématiciens qui le suivent. Il utilise les lettres latines, les quantités connues sont désignées par a, b, c,... et les quantités inconnues par x, y, z. Il introduit également la notation actuelle des puissances à exposants numériques.

Sa grande découverte reste cependant l'application de l'algèbre à la géométrie des courbes, c'est-à-dire la fondation de la géométrie analytique qui permet des calculs algébriques pour traiter la géométrie des anciens.

Remarquons qu'il omet souvent les démonstrations et laisse au lecteur le soin de les découvrir seul : "Je ne m'arrête point à expliquer ceci plus en détail, à cause que je vous ôterois le plaisir de l'apprendre de vous-même, et l'utilité de cultiver votre esprit en vous y exerçant, qui est à mon avis la principale qu'on puisse tirer de cette science".

Son premier livre est consacré aux problèmes ne faisant intervenir que des cercles et des droites. Il fait le lien entre les longueurs et les nombres, les opérations de géométrie et les calculs arithmétiques. Il se dégage de l'obligation de représenter les produits de longueur par des surfaces.

Son livre second intitulé "de la nature des lignes courbes" est consacré à un classement des courbes algébriques (qu'il appelle géométriques), classement pas encore parfait. Depuis Apollonius, on connaît parfaitement les coniques mais jusqu'à Descartes, elles sont mises sur le même plan que les courbes ne pouvant être décrites d'un mouvement continu par la règle et le compas (courbes mécaniques). Descartes fait une distinction plus correcte de ces courbes géométriques et mécaniques. Il rejette cependant de sa géométrie les courbes transcendantes comme la spirale d'Archimède (courbes mécaniques). C'est le degré de l'équation qui lui permettra de hiérarchiser les courbes géométriques. Celles du premier genre sont décrites par des équations du second degré (les coniques), celles du deuxième genre par des équations de degré trois et quatre (ovales de Descartes), etc.

Son livre troisième est consacré à une théorie des équations algébriques mais reste profondément lié à des problèmes géométriques. Les calculs sur les polynômes sont possibles puisque leur écriture ne pose plus de problèmes, par exemple la division par X - a pour abaisser le degré des équations. Il présente à la fin du livre une construction géométrique des racines par des intersections de courbes.

Descartes considère de l'ordre du divin ce qui est infini : "*je n'aurais pas néanmoins l'idée d'une substance infinie, moi qui suis un être fini, si elle n'avait pas été mise en moi par quelque substance qui fut véritablement infinie*" (méditation 3) ; citons le encore : "*car il est de la nature de l'infini que moi qui suis fini et borné ne puisse comprendre*" (méditation 3). Descartes refuse donc de considérer l'infini même s'il s'en est quelquefois approché : l'introduction des fonctions sous la forme d'équations fut révolutionnaire dans l'essor des mathématiques et donne le signal de départ du calcul infinitésimal.

## 3 Activité proposée

### 3.1 Texte

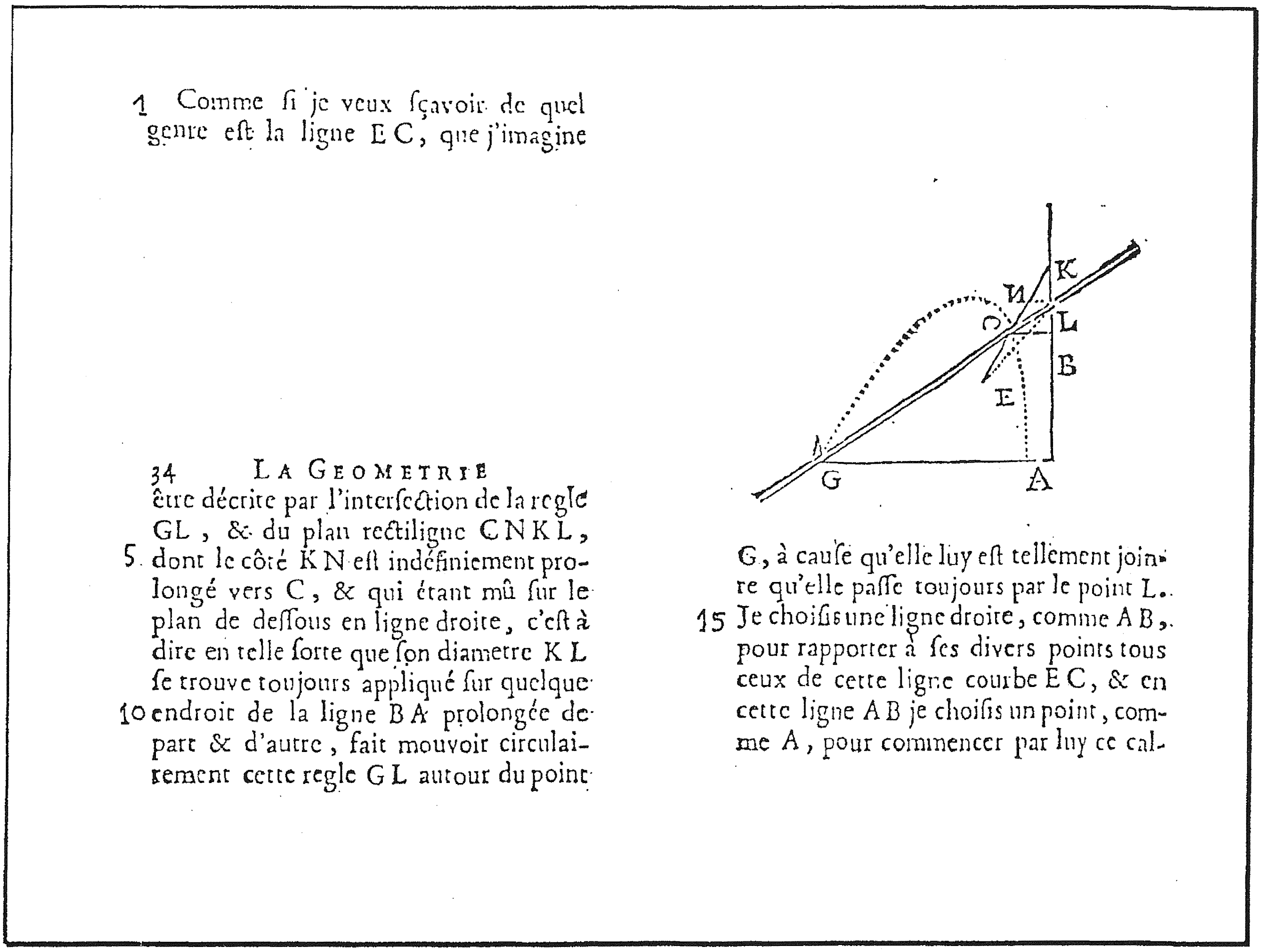
Descartes publie en 1637, La Géométrie, appendice du Discours de la méthode. Le texte proposé est extrait du livre 2, d'après l'édition publiée à Paris, en 1705 par la Veuve Barbin.

En publiant le Discours de la méthode, Descartes cherche "*la vraie méthode pour parvenir à la connaissance de toutes choses dont mon esprit serait capable*" et illustre ces règles dans sa Géométrie où il fonde ce qui deviendra pour nous la géométrie analytique.

Descartes cherche à exprimer un rapport entre les points d'une courbe obtenue par un procédé géométrique, et les points d'une droite ; son but est d'obtenir une équation. Cependant, même s'il ne possède pas encore la notion de repère au sens où nous l'entendons actuellement, il travaille avec des grandeurs coordonnées et est l'instigateur de la notion de repère utilisée jusqu'à aujourd'hui.

### Présentation de la figure

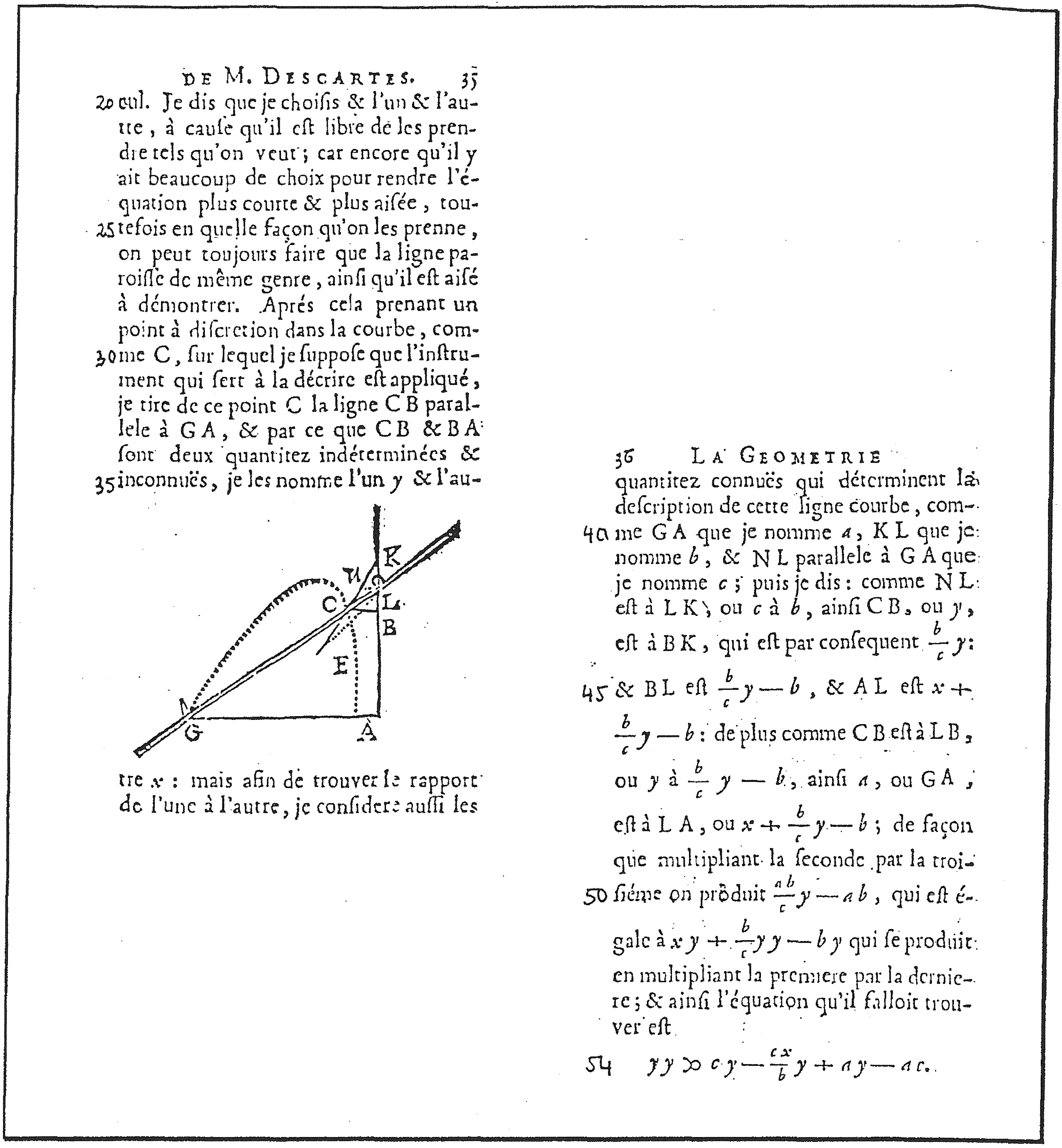
Les deux droites (*GA*) et (*AL*) sont perpendiculaires en *A* ; *KLN* est un triangle rectangle en *L* tel que *K* et *L* sont situés sur (*AL*). Le point *C*, intersection de (*KN*) et (*GL*), est un point de la courbe. En faisant glisser le triangle *KLN* le long de l'axe (*AL*), on obtient, pour chaque position de ce triangle, un nouveau point *C*, intersection des nouvelles droites (*KN*) et (*GL*).



Comme ſi je veux ſçavoir de quel genre eſt la ligne E C, que j'imagine

34 LA GEOMETRIE

être décrite par l'interſection de la regle GL, & du plan rectiligne CNKL, dont le côté KN eſt indéfiniement prolongé vers C, & qui étant mû ſur le plan de deſſous en ligne droite, c'eſt à dire en telle ſorte que ſon diametre KL ſe trouve toujours appliqué ſur quelque endroit de la ligne BA prolongée de part & d'autre, fait mouvoir circulairement cette regle GL autour du point G, à cauſe qu'elle luy eſt tellement jointe qu'elle paſſe toujours par le point L. Je choiſis une ligne droite, comme AB, pour rapporter à ſes divers points tous ceux de cette ligne courbe EC, & en cette ligne AB je choiſis un point, comme A, pour commencer par luy ce cal-



DE M. DESCARTES. 35

cul. Je dis que je choiſis & l'un & l'autre, à cauſe qu'il eſt libre de les prendre tels qu'on veut; car encore qu'il y ait beaucoup de choix pour rendre l'équation plus courte & plus aiſée, toutefois en quelle façon qu'on les prenne, on peut toujours faire que la ligne paroiſſe de même genre, ainſi qu'il eſt aiſé à démontrer. Aprés cela prenant un point à diſcretion dans la courbe, comme C, ſur lequel je ſuppoſe que l'inſtrument qui ſert à la décrire eſt appliqué, je tire de ce point C la ligne CB parallele à GA, & par ce que CB & BA ſont deux quantitez indéterminées & inconnuës, je les nomme l'un $y$ & l'autre $x$ : mais afin de trouver le rapport de l'une à l'autre, je conſidere auſſi les

36 LA GEOMETRIE

quantitez connuës qui déterminent la deſcription de cette ligne courbe, comme GA que je nomme $a$, KL que je nomme $b$, & NL parallele à GA que je nomme $c$; puis je dis: comme NL eſt à LK, ou $c$ à $b$, ainſi CB, ou $y$, eſt à BK, qui eſt par conſequent $\frac{b}{c}y$: & BL eſt $\frac{b}{c}y - b$, & AL eſt $x + \frac{b}{c}y - b$: de plus comme CB eſt à LB, ou $y$ à $\frac{b}{c}y - b$, ainſi $a$, ou GA, eſt à LA, ou $x + \frac{b}{c}y - b$; de façon que multipliant la ſeconde par la troiſiéme on produit $\frac{ab}{c}y - ab$, qui eſt égale à $xy + \frac{b}{c}yy - by$ qui ſe produit en multipliant la premiere par la derniere; & ainſi l'équation qu'il falloit trouver eſt

$$yy \propto cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

## Exercice 1

Lire les lignes 1 à 14. Descartes y décrit la construction expliquée ci-dessus.

Voici un peu de vocabulaire pour clarifier son texte :

Genre : Descartes cherche à classer les courbes qu'il connaît en différentes catégories, à partir des équations de ces courbes.

Règle : il s'agit de l'instrument ; il définit la droite $(GL)$.

Plan rectiligne : figure

Mu sur le plan de dessous en ligne droite : la figure $CKLN$ se déplace par translation ; Descartes pense à un tracé de la courbe avec deux surfaces glissant l'une sur l'autre.

Diamètre : côté

**Question**

Lorsque le triangle se déplace, que peut-on dire des positions relatives des différentes droites $(KN)$ ? Que peut-on dire des différentes droites $(GL)$ ? En conclusion, quels sont les points fixes et les directions fixes de la construction ?

**Exercice 2**

Tracer la courbe : utiliser une feuille entière de papier millimétré dans le sens de la hauteur.

Placer $G$ au bas de la feuille vers la gauche.

Choisir $AG = 5$ cm, $KL = 1$ cm, $NL = \frac{1}{2}$ cm

Construire plusieurs points $C$ en déplaçant le triangle $KLN$.

Il existe une position de la droite $(KN)$ pour laquelle le point $C$ n'existe pas, quelle est cette position ?

Dans ce cas, le triangle $KLN$ a une position particulière; soit $kln$ ce triangle.

Placer le triangle $kln$ sur la figure.

Prolonger la construction de Descartes en déplaçant le triangle $KLN$ sur tout l'axe $(AL)$, c'est-à-dire de part et d'autre du triangle $kln$.

Par lecture graphique, quelles semblent être les asymptotes à la courbe ?

**Exercice 3**

Le but est d'exprimer l'équation de la courbe obtenue par Descartes dans un repère ayant pour axes les deux asymptotes.

Refaire une figure en construisant un seul point $C$, les droites $(Gl)$ et $(kn)$.

Le repère choisi est $(k, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{kn}$, $\vec{j} = \overrightarrow{kl}$.

Appelons $P$ la projection de $C$ sur $(kn)$ parallèlement à $(kl)$ et $Q$ la projection de $C$ sur $(kl)$ parallèlement à $(kn)$.

Nous travaillerons dans le premier quadrant, celui dans lequel $C$ a des coordonnées positives.

Placer les points $P$ et $Q$.

Si $X$ et $Y$ sont les coordonnées de $C$ dans le repère choisi, nous avons donc $\overrightarrow{kC} = \overrightarrow{kP} + \overrightarrow{kQ} = X\overrightarrow{kn} + Y\overrightarrow{kl}$.

De plus, les points $K$ et $Q$ sont confondus.

Faire apparaître clairement les triangles $NKL$ et $GAl$, exprimer $\frac{lG}{KN}$ en fonction de $NL$ et $GA$.

De même, en considérant les triangles $LGl$ et $LCK$, exprimer $\frac{Ll}{LK}$ en fonction de $lG$ et $KC$.

Les deux rapports trouvés précédemment sont-ils constants ?

Déduire de ce qui précède l'expression de $Y$ en fonction de $X$, c'est-à-dire l'équation de la courbe dans le repère donné.

Pouvez vous alors préciser de quel type de courbe il s'agit ?

**Exercice 4**

Lire le texte lignes 15 à 42

Que représentent $x$ et $y$ pour Descartes (sur sa figure) ?

Sur quel repère Descartes s'appuie t-il implicitement ?

Lire les lignes 42, 43, 44.

Traduire cette partie en langage plus moderne pour les proportions.

Calculer $BL$ et $AL$. Vérifier en comparant vos résultats avec ce que trouve Descartes lignes 45 et 46.

Lire ligne 46 à 54.

Refaire les calculs et montrer comment Descartes obtient l'équation de sa courbe.

Quelle notation est utilisée pour le signe "=" ?

Quelle différence peut-on remarquer entre l'équation trouvée dans l'exercice 3 et celle trouvée par Descartes ?

### 3.2 Réactions des élèves

**Première séance (15 minutes)**

Après une rapide présentation de Descartes et son époque, je distribue le document ci-joint 15 minutes avant la fin d'un cours. Les questions concernant le vocabulaire fusent. La première réaction est sur l'écriture des s en f. Je leur demande alors de lire la présentation et l'exercice 1. Un élève explique à toute la classe le principe de construction de la courbe et je leur demande de faire les exercices 1 et 2 pour la fois suivante.

**Deuxième séance (2 heures)**

Trois élèves sont perturbés par une erreur de lettre dans le texte et ne réussissent pas à faire le tracé. D'autre part, très peu trouvent la deuxième branche d'hyperbole en raison du manque d'espace sur la feuille pour faire glisser l'équerre suffisamment haut. J'ai donc apporté depuis des précisions dans le texte quand à la place des points.

Un élève explique comment faire la construction et la plupart recommencent la courbe; je décide alors de les laisser avancer à leur rythme pendant les deux heures.

Ils se mettent à travailler spontanément en groupe et j'interviens à la demande. J'avais au départ choisi le repère $(k, \frac{\overrightarrow{kl}}{\|\overrightarrow{kl}\|}, \frac{\overrightarrow{kn}}{\|\overrightarrow{kn}\|})$. Leur tendance est de prendre le repère $(k, \overrightarrow{kl}, \overrightarrow{kn})$. Ce repère semblant plus naturel et les calculs y étant plus simples, j'ai apporté des modifications au texte.

A la fin de la séance, la plupart ont terminé l'exercice 3. Ils ont à le rédiger et à terminer l'activité entière pour la fois suivante.

**Dernière séance (1 heure) :**

Correction des exercice 3 et 4. En ce qui concerne l'exercice 4, la lecture du texte à partir de la ligne 15 ne pose pas de réels problèmes.

On peut noter au passage la différence entre l'explication quelquefois obscure de la construction (lignes 1 à 15) et la clarté de la mise en équation de l'hyperbole (lignes 15 à 54).

Les élèves traduisent en général bien les deux proportions. Un petit nombre ne réussit pas à faire le lien entre les deux résultats et ne retrouve pas l'équation du texte.

**En conclusion de ce paragraphe**

Les élèves donnent leur impression par écrit à la fin de cette activité. Ils se déclarent tous, sans exception, intéressés par ce type d'expérience même si cela leur a semblé souvent difficile. Certains sont sensibles aux notations, au vocabulaire, différents des nôtres. Ils aiment faire le lien entre notre façon de faire aujourd'hui et celle de Descartes. Plusieurs font la remarque que les mathématiques s'inventent et ne sont pas figées. J'avais pensé qu'il était possible de donner cette activité sous forme de devoir maison mais leurs réponses laissent penser qu'il était, en ce qui les concerne, préférable de la faire en classe, par l'aspect de travail en groupe et le besoin de certains d'être encadrés.

Le texte, après avoir subi les modifications signalées plus haut, a été donné en devoir maison dans une classe de terminale C. Des renseignements complémentaires ont été proposés mais aucun élève n'en a ressenti le besoin. La construction de la courbe a été jugée intéressante et la partie mathématiques a en général été traitée correctement. Quelques élèves ont fait apparaître que l'équation trouvée par Descartes pouvait se mettre sous la forme : $x = Ay + B + \frac{k}{y}$ où l'on reconnaît l'équation d'une hyperbole après échange de $x$ et $y$. La compréhension du texte historique a été jugée assez difficile, beaucoup ayant été déroutés par les tournures de phrases très différentes de celles que l'on peut lire dans les textes mathématiques actuels.

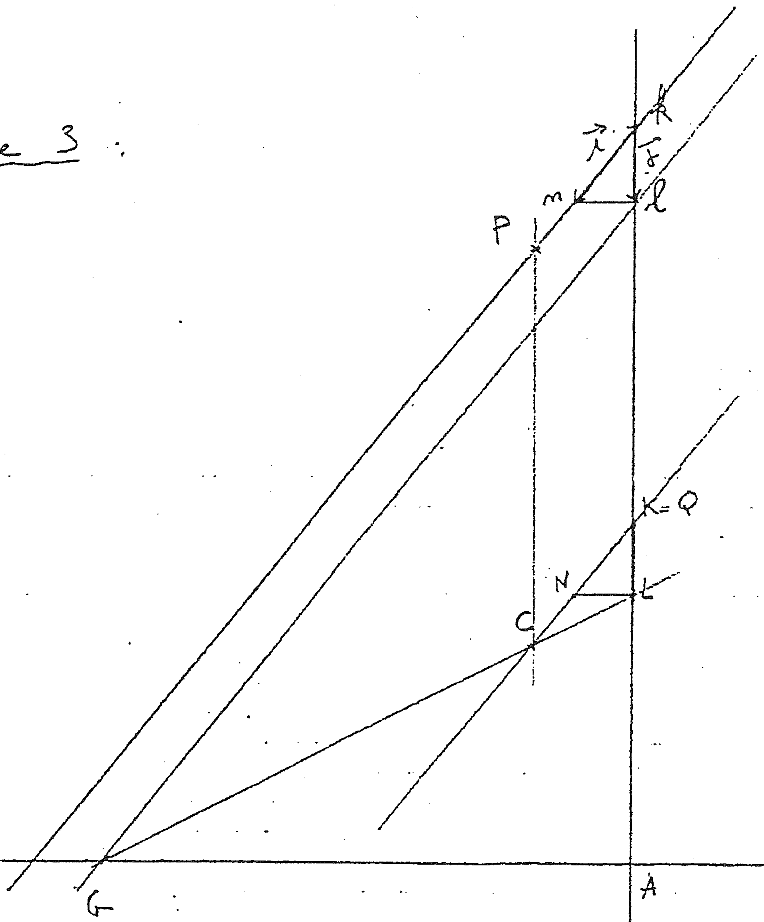
## 4 Bibliographie

- Descartes : La géométrie.— Paris, Vve Barbin 1705.
- Descartes : Oeuvres philosophiques.— Société du Panthéon littéraire.
- Jean Dhombres : Le nombre, la mesure, le continu.— Cedic, Fernand Nathan, 1978.
- Montucla : Histoire des mathématiques.— Blanchard. Réimpression de l'édition de 1799.
- Youschkevitch : Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX$^{\text{ième}}$.— APMEP n° 41.

## 5 Copie d'élève

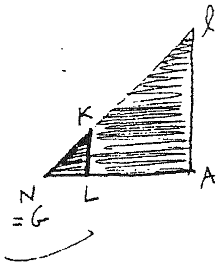
Exercice 1 : Le triangle KLN se déplaçant par translation, toutes les différentes droites (KN) sont parallèles.
Le point G étant fixe, toutes les droites (GL) sont concourantes en G.

Exercice 3 :



$$X = \frac{kP}{km} = \frac{KC}{KN} \qquad Y = \frac{kQ}{kl} = \frac{kK}{kl} = \frac{lL}{KL}$$

Si on considère les 2 triangles (NKL) et (GAl) de cette façon



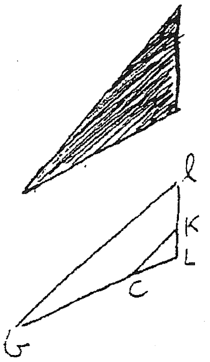
D'après le théorème de Thalès on a

$$\frac{\ell G}{KN} = \frac{GA}{NL}$$

Bien.

De même si on considère (LGl) et (LCK) de cette façon

D'après Thalès on a :



$$\frac{L\ell}{LK} = \frac{\ell G}{KC}$$

on sait que :

$$\begin{cases} X = \dfrac{KC}{KN} \\ Y = \dfrac{\ell L}{KL} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \dfrac{\ell G}{KN} = \dfrac{GA}{NL} \\ \dfrac{L\ell}{LK} = \dfrac{\ell G}{KC} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Y = \dfrac{\ell G}{KC} \\ X = \dfrac{KC \times GA}{\ell G \times NL} \end{cases} \Leftrightarrow \quad Y = \frac{\overset{a}{\overset{\shortparallel}{GA}}}{X.NL} = \frac{1}{X.a}$$

cette équation est l'équation d'une HYPERBOLE rapportée à ses asymptotes

exercice 4 :

$x$ est l'ordonnée du pt C [BA]
$y$ est l'abscisse du pt C [CB]

Descartes s'appuie sur le repère $(A; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$
où $\vec{\imath} = \overrightarrow{AI}$ $(I \in AG)$
$\vec{\jmath} = \overrightarrow{AJ}$ $(J \in AB)$

Traduction des lignes 42-44

NL et CB sont respectivements proportionnels à LK et BK
d'où

$$\frac{NL}{LK} = \frac{CB}{BK} \iff \frac{c}{b} = \frac{y}{BK}$$

$$\iff BK = \frac{b}{c}y$$

$$BL = BK - LK$$

$$AL = AB + LB = x + \frac{b}{c}y - b$$

lignes 46 à 56 -

on a $\frac{CB}{LB} = \frac{GA}{LA}$

$$\iff \frac{y}{\frac{b}{c}y - b} = \frac{a}{x + \frac{b}{c}y - b}$$

D'où

$$\frac{a.b}{c}.y - a.b = xy + \frac{b}{c}y^2 - by$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = ay - a.c - \frac{c}{b}x.y + c.y$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 - (a+c)y + ac = -\frac{c}{b}xy$$

$$\Leftrightarrow \quad x = \frac{y^2 - (a+c)y + ac}{-\frac{cy}{b}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x = -\frac{b}{c}y + \frac{b(a+c)}{c} - \frac{b.a}{y}$$

ou $$y = -\frac{b}{c}x + \frac{b(a+c)}{c} - \frac{5}{x}$$

- Descartes utilise le signe "∞" pour "="
- En notation actuelle, on obtient l'équation d'une hyperbole mais cette fois un des axes n'est pas parallèle aux asymptotes -

# Chapitre VII
# Problèmes de division des champs

Les problèmes présentés dans ce chapitre sont ceux de division des champs en parties égales en se donnant souvent une contrainte, par exemple utiliser un point donné. Dans les traités anciens, ces méthodes sont associées aux problèmes d'arpentage.

## 1 Présentation

### 1.1 Fiche technique

Niveau

Classes de 5$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$ : exercices 1, 2, 3, 4, 5 (activité de recherche), 6 (niveau 3$^{\text{ème}}$ pour la fin), 7, 8, 9.

Classes de 3$^{\text{ème}}$ et 2$^{\text{de}}$ : exercices 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 11.

Thème : arpentage, division des champs, méthode pour diviser des polygones en parties d'aire égale.

Durée : 3 fois une heure en demi-classe.

### 1.2 Connaissances requises

Quelques notions sur les aires : formule donnant l'aire d'un triangle.

Théorème de Thalès, ou homothétie, pour un des exercices.

### 1.3 Objectifs pédagogiques

Lire des textes du $18^{\text{ème}}$ siècle.

Savoir réinvestir trois constructions préliminaires simples.

Savoir lire des propriétés, raisonner sur une figure.

Comprendre une démonstration ancienne, la comparer avec une démonstration moderne.

## 2 Un peu d'histoire

### 2.1 Origine de l'arpentage

L'étymologie du mot géométrie (du grec gé, terre, et metron, mesure) indique que les débuts de cette science ont consisté dans des opérations de mesure des terres, ce que nous appelons aujourd'hui l'arpentage. L'origine de la géométrie remonterait selon l'historien grec Hérodote (-484 à -420) à l'Egypte où les édiles égyptiens ont été amenés à dresser un cadastre des champs cultivés pour retrouver leurs limites après chaque inondation du Nil. Que cela soit vrai ou non, la géométrie a pu naître des besoins de l'arpentage. Les problèmes d'arpentage apparaissent très tôt dans les ouvrages de mathématiques. On en trouve, par exemple, dans les Métriques, ouvrage de géodésie écrit par Héron d'Alexandrie au premier siècle de notre ère où le livre 3 traite de la division des surfaces.

### 2.2 Objet de l'arpentage

Les opérations de l'arpentage sont :

- l'arpentage proprement dit, comprenant les opérations à exécuter sur le terrain ;
- le levé des plans, ou les opérations qui ont pour but de représenter sur le papier la figure et les proportions du terrain mesuré ;
- le toisé, ou les calculs nécessaires pour connaître la superficie d'un terrain.

Les problèmes d'arpentage peuvent se résumer dans les deux opérations suivantes :

- mesure des superficies ;
- partage des terres en cas de vente ou d'héritage.

Pour mesurer la superficie d'un terrain, il faut savoir le décomposer en triangles et en quadrilatères simples. Pour cela, l'arpenteur doit être capable de tracer et de mesurer des lignes qui serviront de bases aux calculs d'aires. Il doit aussi savoir mesurer un angle, abaisser ou élever une perpendiculaire, mener des parallèles. A l'aide de ces opérations, il reste à déterminer une évaluation correcte des superficies.

Les appareils se sont rapidement améliorés à partir du $17^{\text{ème}}$ siècle. Les calculs ont été allégés grâce à l'invention des logarithmes.

### 2.3 L'arpent : ancienne mesure agraire

Le mot arpentage vient du mot arpent, dérivé du gaulois arapennis qui désignait une mesure agraire, surtout employée pour les étendues de bois et de vignes et dont la valeur variait selon les localités. Un arpent se divisait en 100 perches carrées mais la perche était une unité de longueur valant 18, 20, 22 pieds suivant les régions : 18 pieds à Paris, 20 à Montargis, 22 pour les Eaux et Forêts au 18ème siècle. L'arpent des Eaux et Forêts s'appelait arpent d'ordonnance, celui de Montargis était l'arpent commun. En 1789, en Ille et Vilaine, l'arpent est utilisé pour l'arpentage des forêts et la perche est de 22 pieds.

| | arpent de Paris | arpent commun ou arpent de Montargis | arpent d'ordonnance ou des Eaux et forêts |
|---|---|---|---|
| 1 perche en pieds | 18 | 20 | 22 |
| 1 perche en mètres | 5,847109 | 6,496788 | 7,146466 |
| 1 arpent en $m^2$ | 3418,8683 | 4220,825 | 5107,1983 |

Rappelons, qu'avant la révolution, les anciennes mesures changeaient de nom, de valeur, non seulement d'une région à une autre mais d'un village à l'autre. Par exemple, plus de 80 mesures agraires différentes dans le département du Tarn, en 1789 ; en Ille et Vilaine, la pinte avait 11 valeurs : 0,986 litre à Rennes, Antrain, Janzé, ..., 1,359 litre à Saint-Méen, 1, 164 à Combourg, etc. Cela existait déjà du temps de Charlemagne et depuis cette époque il avait été question d'y remédier. Mais cette extrême complication qui empêchait le développement du commerce, n'était pas un désavantage pour tout le monde : seigneurs, fraudeurs... D'autres part, les subdivisions n'étant pas décimales, les calculs étaient compliqués.

La révolution a mis en place un nouveau système en plusieurs étapes. D'abord, en proposant les divisions décimales des unités. Puis en construisant un nouveau système de mesure basé sur l'unité de longueur, le mètre, 10 000 000ème partie du quart du méridien terrestre. Voir la bibliographie pour des détails sur cette histoire complexe.

### 2.4 Jacques Ozanam (1640-1717) et Jean Guillaume Garnier (1766-1840)

Jacques Ozanam est né à Bouligneux, dans l'Ain, et mort à Paris. Son premier ouvrage, écrit en 1670, est une Table des sinus, tangentes et sécantes. Ses principaux ouvrages sont cités en bibliographie. Leibniz considérait le cours d'algèbre de 1702 comme un des meilleurs de son époque. Ozanam fut nommé membre de l'Académie des sciences de Paris en 1701.

Garnier s'est signalé comme professeur à l'Ecole polytechnique (1797-1801), auteurs de traités de mathématiques et fondateur d'une revue "Correspondance mathématique et physique" (1824).

## 3 Activité proposée

### 3.1 Sources de l'activité

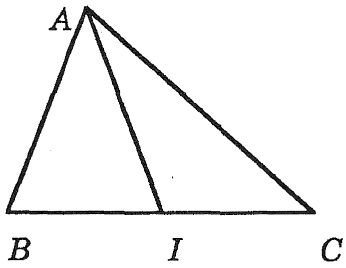
Les exercices proposés sont extraits de deux livres. Les numéros 4, 5, 6, 10 et 11 sont extraits de la seconde partie du livre d'Ozanam : Usage du Compas de proportion, et de l'instrument universel, suivi d'un Traité de la division des champs. Les exercices 7, 8, 9 figurent dans un livre de 1794 de Jean Guillaume Garnier (1766-1840) : Usage du compas de proportion suivi d'un traité de la division de champs.

### 3.2 Texte

#### 3.2.1 Exercices préliminaires

Exercices à chercher à la maison, essentiels pour bien comprendre la suite de l'activité.

**Exercice 1**



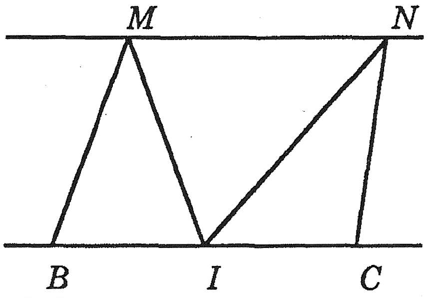
**Données**

$ABC$ est un triangle quelconque ; I est le milieu de $[BC]$.

**Question**

Montrer que : Aire$(ABI)$ = Aire$(ACI)$.

**Exercice 2**



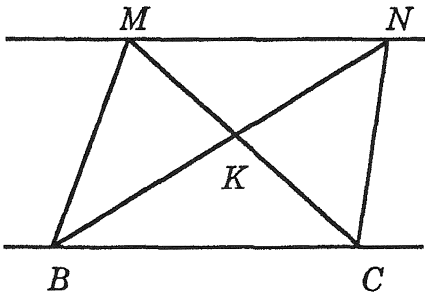
**Données**

$(MN)$ est parallèle à $(BC)$ ; $I$ est le milieu de $[BC]$.

**Question**

Montrer que : Aire$(MBI)$ = Aire$(NCI)$

**Exercice 3**



**Données**

$(MN)$ est parallèle à $(BC)$.

**Questions**

Comparer : Aire$(BMC)$ et Aire$(BNC)$

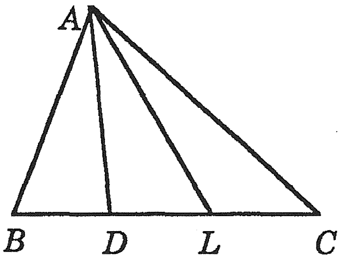
Comparer : Aire$(BMK)$ et Aire$(KNC)$

### 3.2.2 Division des triangles

**Exercice 4 Ozanam, chapitre I, problème 1**

Diviser le triangle donné $ABC$ en autant de parties égales que l'on voudra, par des lignes tirées de l'angle $A$.

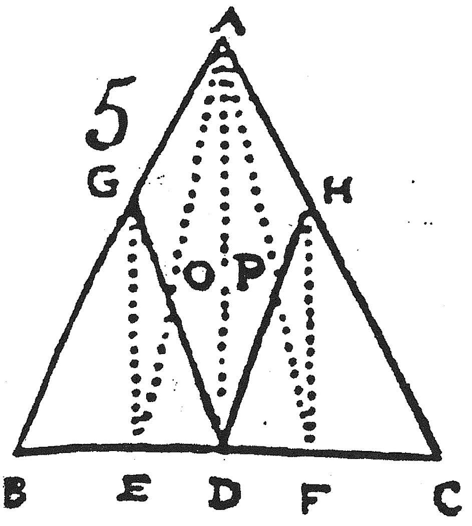
Proposons-nous, par exemple, de diviser le triangle ABC en trois parties égales



**Question**

Expliquer la construction de la figure et dire pourquoi elle convient.

**Exercice 5 Ozanam, chapitre I, problème 5**



PROBLEME V.

*Diviſer le triangle donné* ABC *en autant de parties égales que l'on voudra, par des lignes tirées du point donné* D, *ſur le côté donné* BC. Planche X. Figure 5.

Pl. X. *Fig.* 5. POur le diviſer en trois parties égales, par exemple, diviſez le côté donné BC auſſi en trois parties égales aux deux points E, F; & ayant tiré la droite AD, tirez-lui par les deux points E, F, les paralleles EG, FH; pour avoir ſur les côtés AB, AC les deux points G, H, par leſquels on tirera au point donné D les droites DG, DH, qui diviſeront le triangle propoſé ABC en trois parties égales.

**Questions**

1) Le point $D$ étant quelconque sur $[BC]$, refaire la construction de la figure 5 en suivant les explications données (on prendra $D$ entre $E$ et $F$)

2) Montrer que la construction faite partage bien le triangle $ABC$ en trois parties de même aire.

## Exercice 6 Ozanam, chapitre I, problème 7

### PROBLEME VII.

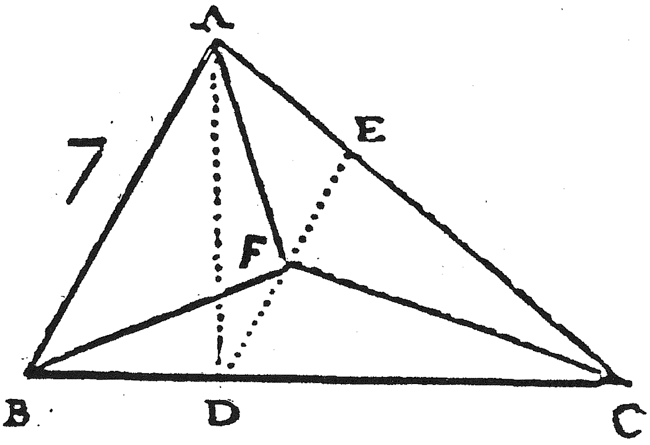
*Diviſer le triangle donné* ABC *en trois parties égales, par trois lignes tirées aux trois angles* A, B, C. Planche X. Fig. 7.

AYant pris ſur l'un des côtés, comme ſur BC, ſa troiſieme partie BD, tirez par le point D, au côté adjacent AB, la parallele DE, & par ſon point de milieu F, tirez les trois lignes FA, FB, FC, qui diviſeront le triangle propoſé ABC en trois parties égales.

Pl. X. Fig. 7.

### *Démonſtration.*

Car il eſt déja bien évident que le triangle AFB eſt le tiers du triangle ABC, parce qu'il eſt égal au triangle ABD, qui eſt le tiers du triangle ABC, (par 1. 6.) Il eſt évident auſſi que chacun des deux autres triangles AFC, BFC, eſt le tiers du même triangle ABC, parce qu'ils ſont égaux entr'eux, à cauſe des deux triangles égaux CFD, CFE & des deux égaux AFE, BFD, (par la 38. du 1.) D'où il ſuit que les trois lignes FA, FB, FC, diviſent le triangle propoſé ABC en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*



**Questions**

1) Refaire la construction de la figure 7 en suivant les explications données.

2) Lire la démonstration et comprendre les explications données. Réécrire la démonstration comme on pourrait le faire actuellement.

3) Le point intérieur *F* est un point particulier du triangle *ABC*. Lequel ?

## Exercice 9 Garnier, problème 4

*Diviser le parallélogramme ABCD en trois parties, en faisant partir la ligne de division d'un point pris sur un des côtés.*

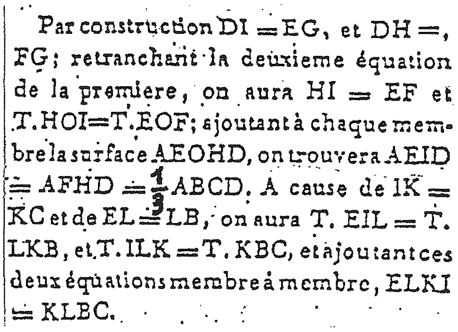
### Construction

*Soit E le point donné ; après avoir fait* $AF = FG = \frac{1}{3}AB$*, et mené FH parallèle à AD, on prendra* $DI = EG$ *; et joignant les points E et I, on aura* $AEID = \frac{1}{3}ABCD$.

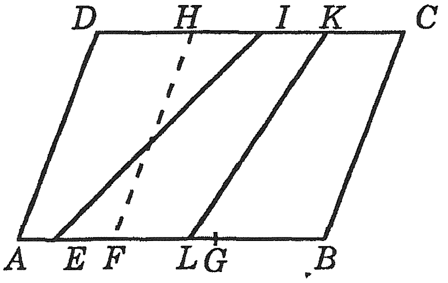
*Faisant ensuite* $IK = \frac{1}{2}IC$, $EL = \frac{1}{2}EB$*, et menant KL, on aura*

$$IELK = KLBC = \frac{1}{3}DABC.$$

### Démonstration



Par construction DI = EG, et DH =, FG; retranchant la deuxieme équation de la premiere, on aura HI = EF et T.HOI=T.EOF; ajoutant à chaque membre la surface AEOHD, on trouvera AEID = AFHD = $\frac{1}{3}$ABCD. A cause de IK = KC et de EL = LB, on aura T. EIL = T. LKB, et T. ILK = T. KBC, et ajoutant ces deux équations membre à membre, ELKI = KLBC.



### Questions

1) Refaire la construction de la figure en suivant les explications données.

2) Lire la démonstration et la réécrire dans le langage actuel.

**Exercice 10 Ozanam, chapitre II, problème 7**

### PROBLEME VII.

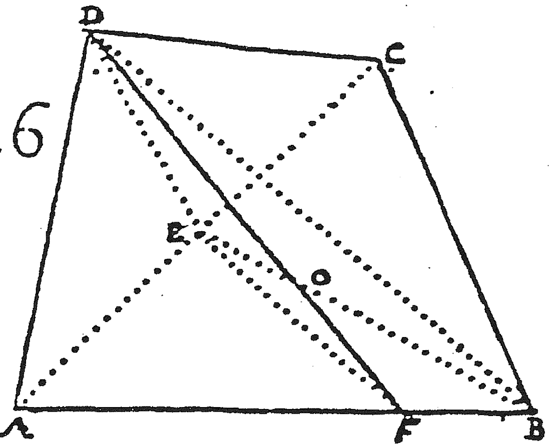
*Diviſer le trapeze donné ABCD en deux également par une ligne droite tirée de l'angle donné D. Planche XI. Figure 16.*

AYant tiré par le point E, milieu de la diagonale AC la droite EF, parallele à l'autre diagonale BD, menez la droite DF, qui diviſera le trapeze propoſé ABCD en deux parties égales.

*Démonſtration.*

Car ſi aux triangles égaux DEA, DEC, on ajoute les triangles égaux AEB, CEB, on aura le trapeze ADEB égal au trapeze CDEB, & à cauſe du trapeze ADEB égal au triangle ADF, & du trapeze CDEB égal au trapeze CDFB, parce que les deux triangles DEO, BFO ſont égaux, comme l'on connoîtra en ôtant des deux triangles égaux DEB, DFB, le triangle commun DOB, il s'enſuit que le triangle ADF eſt égal au trapeze CDFB, & qu'ainſi la ligne DF diviſe le trapeze donné ABCD en deux également. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*

16



**Questions**

1) Quel est ici le sens du mot trapèze ?

2) Refaire la construction de la figure en suivant les explications données.

3) Comparer les aires des deux quadrilatères *DFBC* et *DEBC*.

4) En remarquant que le quadrilatère *DEBC* peut être décomposé en deux triangles, montrer que :

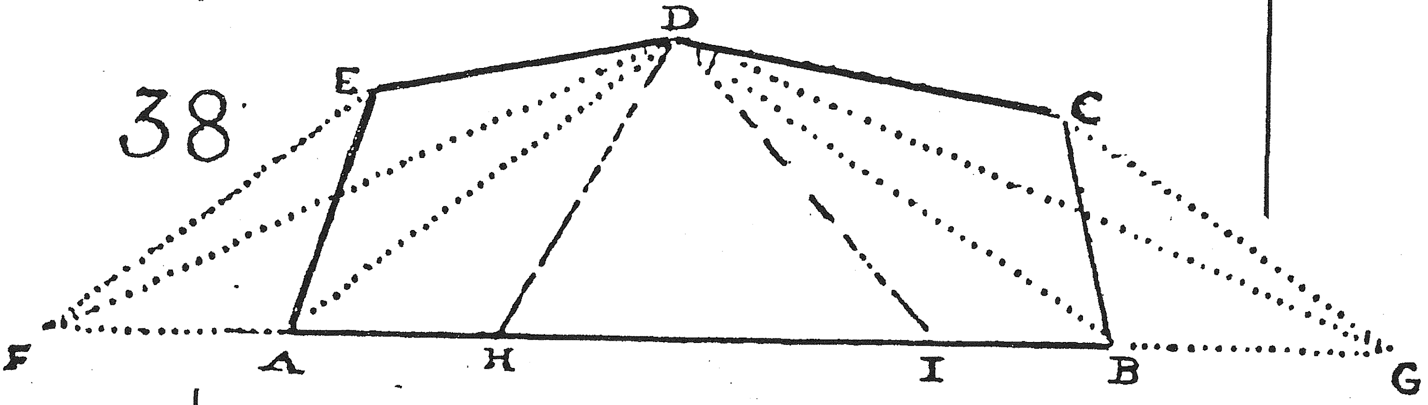
$$\text{Aire}(ABCD) = 2\ \text{Aire}(DEBC)$$

5) En déduire que le segment $[DF]$ partage bien le quadrilatère *ABCD* en deux parties de même aire.

6) Comparer avec la démonstration d'Ozanam.

**Exercice 11 Ozanam, chapitre III, problème 7**

Diviser en trois parties égales le polygone donné $ABCDE$ par deux lignes tirées de l'angle $D$.



38

**Méthode**

On détermine d'abord un triangle dont l'un des sommets est $D$ et qui a la même aire que le polygone. Il suffit ensuite d'utiliser l'exercice 4.

**Questions**

1) Observer la figure 38 et essayer de refaire la construction.
2) Montrer que : Aire$(ABCDE)$ = Aire$(BCDF)$.
3) Montrer que : Aire$(BCDF)$ = Aire$(DFG)$.
4) En déduire la division de $ABCDE$ en trois parties égales.

## 3.3 Réaction des élèves

### Exercices 1, 2, 3

Tous les élèves trouvent assez facilement les réponses.

### Exercice 4

Cet exercice ne présente aucune difficulté.

### Exercice 5

L'énoncé est bien compris et les explications permettent à la plupart des élèves de refaire correctement la figure. Beaucoup pensent que $D$ est le milieu de $[BC]$. Ceux qui font le rapprochement avec l'exercice 3 parviennent à une démonstration correcte.

### Exercices 6, 7, 8, 9

Cette fois-ci les énoncés et démonstrations du livre sont fournis aux élèves. Certains d'entre eux sont surpris par les rédactions d'Ozanam qui leur font davantage penser à des exercices de français que de mathématiques. Beaucoup éprouvent le besoin de les relire plusieurs fois ; leurs réécritures sont à peu près correctes. Dans l'exercice 6, si beaucoup voient que $F$ est le centre de gravité, peu sont capables de le démontrer.

### Exercice 10

Le mot trapèze intrigue les élèves. Beaucoup pensent que la figure est fausse et que $(AB)$ // $(DC)$. La question 3 est assez bien réussie, ce qui n'est pas le cas de la question 4. La question 5 ne pose pas de problème. Leur ayant demandé de lire chez eux la démonstration d'Ozanam (question 6), celle-ci ne leur a pas paru évidente du tout.

### Exercice 11

Les élèves qui ont bien compris la figure n'ont pas trop de mal à répondre aux questions posées. Certains ne comprennent pas où se trouvent les points $I$ et $H$.

## 3.4 Explications complémentaires

### Exercice 5

Pour avoir une figure comme celle de la figure 5, il faut prendre $D$ entre $E$ et $F$. La figure proposée par Ozanam est particulière : le triangle $ABC$ est presque isocèle et $D$ semble être le milieu de $[BC]$ et d'autre part, les points $E$ et $F$ ne partagent pas le segment $[BC]$ en trois segments de même longueur ! Nous examinons plus loin des cas de figure avec $D$ non entre $E$ et $F$.

### Exercice 6

Pour la question 3, le plus simple est sans doute d'utiliser une homothétie de centre $C$. L'image de $F$ est alors le milieu de $[AB]$ et c'est quasiment terminé. Les élèves éprouvent plus de difficulté en appliquant le théorème de Thalès.

### Exercice 10

Pour la question 4, il faut bien décomposer $DEBC$ en écrivant :

$$\text{Aire}(DEBC) = \text{Aire}(DEC) + \text{Aire}(BEC).$$

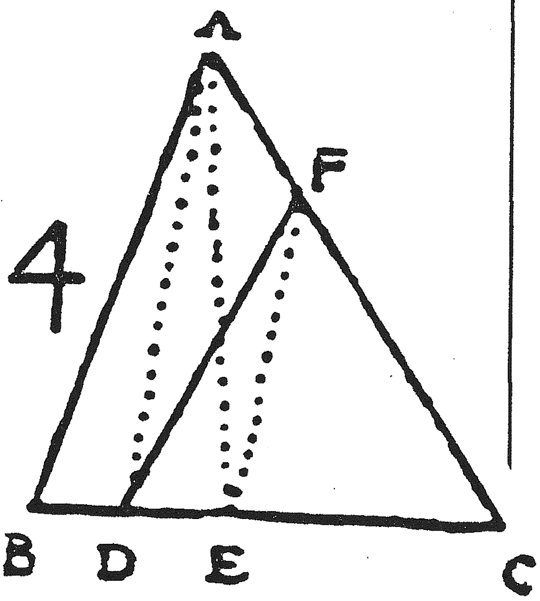
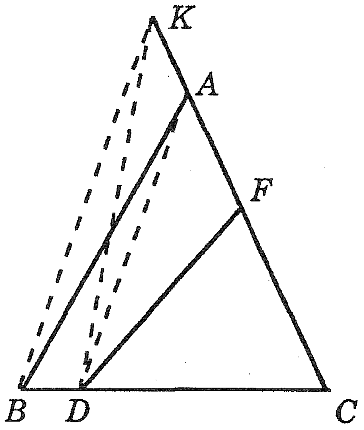
### Exercice 11

On transforme le pentagone en un triangle de même aire.

## 4. Compléments

### 4.1 Division des triangles

Ces prolongements sont tirés des livres d'Ozanam, de Garnier et des Hogard.

<table>
<tr><th colspan="2">Ozanam, chapitre I, problème 4</th></tr>
<tr><td colspan="2">Diviser le triangle donné $ABC$ en deux parties égales par une ligne tirée du point $D$ sur le côté $BC$ (voir figure 4).</td></tr>
<tr><th>Construction d'Ozanam</th><th>Autre construction</th></tr>
<tr><td> </td><td> </td></tr>
<tr><td><b>Construction</b><br>Le point $D$ est quelconque sur $[BC]$ et $E$ est le milieu de $[BC]$. On trace $[AD]$ puis $[EF]$ tel que $(EF)$ // $(AD)$.<br><b>Démonstration</b><br>On a : Aire$(AFE)$ = Aire$(EDF)$<br>d'où Aire$(ACE)$ = Aire$(DFC)$,<br>d'où Aire$(DFC) = \frac{1}{2}$Aire$(ABC)$.<br><b>Conclusion</b><br>Aire$(DFC)$ = Aire$(ABDF)$.</td><td><b>Construction</b><br>Le point $D$ est quelconque sur $[BC]$. On trace $[BK]$ parallèle à $[AD]$, puis on place $F$ au milieu de $[KC]$.<br><b>Démonstration</b><br>On a : Aire$(ADK)$ = Aire$(ABD)$<br>d'où Aire$(ABC)$ = Aire$(CDK)$,<br>comme Aire$(DFC) = \frac{1}{2}$Aire$(CDK)$<br>on a Aire$(DFC) = \frac{1}{2}$Aire$(ABC)$.<br><b>Conclusion</b><br>Aire$(DFC)$ = Aire$(ABDF)$.</td></tr>
</table>

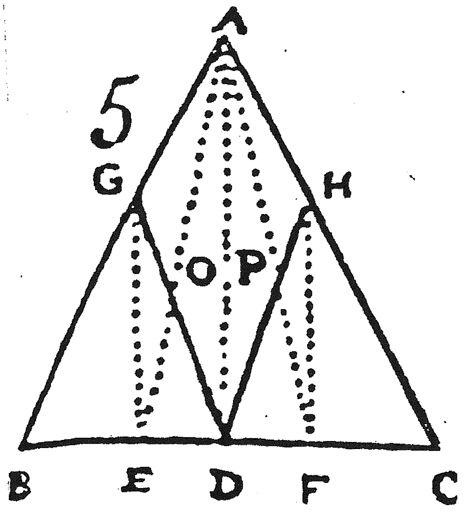
Voici maintenant trois rédactions de l'exercice 5 ci-dessus qui consiste à partager un triangle en trois parties d'aires égales en menant des segments issus d'un point de l'un des côtés. Le texte de Garnier est plus soigné que le texte, postérieur, des Hogard.

## Exercice 5 Ozanam, chapitre I, problème 5

### Démonstration d'Ozanam

*Démonſtration.*

Car ſi on mene les droites A E, AF, on connoîtra (par 1. 6.) que chacun des deux triangles B A E, C A F, eſt le tiers du triangle A B C; & parce que le triangle BAE eſt égal au triangle BGD, à cauſe des triangles égaux GOA, DOE, parties des triangles égaux GAE, GDE, le triangle BGD ſera auſſi le tiers du triangle ABC. Par un ſemblable raiſonnement, on connoîtra que le triangle CAF eſt auſſi égal au triangle DHC, à cauſe des deux triangles égaux A P H, DPF, parties des triangles égaux AFH, D F H, & que par conſéquent le triangle D H C eſt auſſi le tiers du triangle A B C. D'où il ſuit que le trapeze AGDH eſt auſſi le tiers du même triangle ABC, & qu'ainſi les deux lignes D G, DH, diviſent le triangle propoſé A B C en trois parties égales. *Ce qu'il falloit faire & démontrer.*



### Démonstration des Hogard

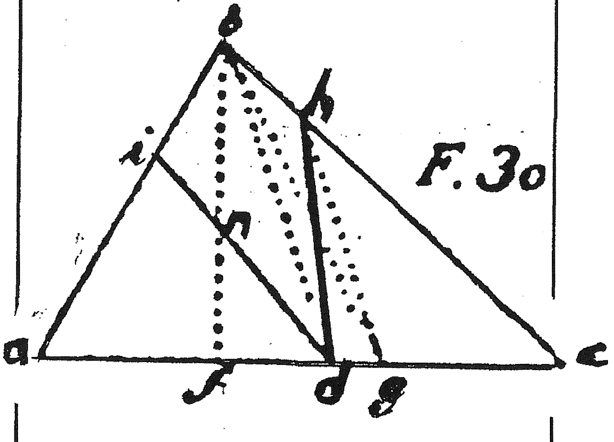
47. Partager le triangle ABC en trois parties équivalentes par des lignes partant du point D donné pour la base AC. (*Supplém. fig.* 3o.)

Si l'on divise la base AC en trois parties égales, A*f*, *fg* et *gc*, et que l'on mène les droites *f*B, *g*B, il est évident que le triangle sera divisé en trois parties égales, *af*B, *f*B*g*, *g*B*c*.

Du point D menant DB, et des points *g* et *f* menant à DB les parallèles *gh* et *fi*; menant les droites D*h* et DI, ces dernières diviseront le triangle en trois parties égales D*h*C, *h*D*i*, *i*DA.

En effet, le triangle AB*fa*, a, avec celui AID, une partie commune *Ainf*: le triangle BDI étant égal au triangle BD*f* comme ayant même base DB et même hauteur comprise entre les parallèles BD, *if*, si l'on ôte de ces deux triangles la partie commune *n*DB, les restes *fn*D et *i*B*n* sont aussi égaux entre eux; ainsi l'un et l'autre de ces derniers restes, ajouté à *Ain*, fera la valeur du triangle *ai*D ou A*f*B, qui est le tiers du triangle total.

On démontrera de même que DHC est égal à *g*BC, c'est-à-dire au tiers du triangle total ABC



## Démonstration de Garnier

### PROBLÈME V.

*Diviser le triangle BAC en trois parties par des lignes tirées d'un point D pris sur le côté BC.*

*Construction.*

Après avoir divisé la ligne BC en trois parties égales, aux points E et F, et mené la droite AD, on tirera par ces points de division des paralleles à AD qui rencontreront AB en deux points H et G; menant alors les lignes HD et GD, le triangle ABC se trouvera divisé en trois parties égales.

*Démonstration.*

Soient menées les lignes AE, AF; on aura, à cause des paralleles GE et AD,

$$\text{T. GAE} = \text{T. GDE};$$

et, ajoutant aux deux membres le triangle BGE, on trouve

$$\text{T. BAE} = \text{T. BGD} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. BAC},$$

par la même raison

$$\text{T. AFD} = \text{T. ADH};$$

et ajoutant à chaque membre T. DAC, il vient

$$\text{T. FAC} = \text{AHDC} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. BAC};$$

donc aussi $\text{T. GDH} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. BAC}.$

Le point D peut être donné entre les points B et E, n°. 2, ou bien entre les points E et F, n°. 3. Il n'y a de différence entre la figure n°. 2, et celle n°. 1, qu'en ce que, dans la première, les points G et H, au lieu d'être sur le côté AB, tombent sur le côté AC. Faisant, dans la figure n°. 3, la construction prescrite plus haut, on a

$$\text{T. AGE} = \text{T. GDE};$$

donc

$$\text{T. AGE} + \text{T. GBE} = \text{T. GDE} + \text{T. GBE},$$

$$\text{et T. BAE} = \text{T. GDB} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. ABC}.$$

On démontreroit de la même maniere que

$$\text{T. AFC} = \text{T. CHF} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. BAC};$$

d'où on conclura que

$$\text{AGDH} = \tfrac{1}{3}\,\text{T. BAC}.$$

Lorsque le point D tombe sur le milieu de EF, il est clair que les lignes AG et AH sont égales entre elles.

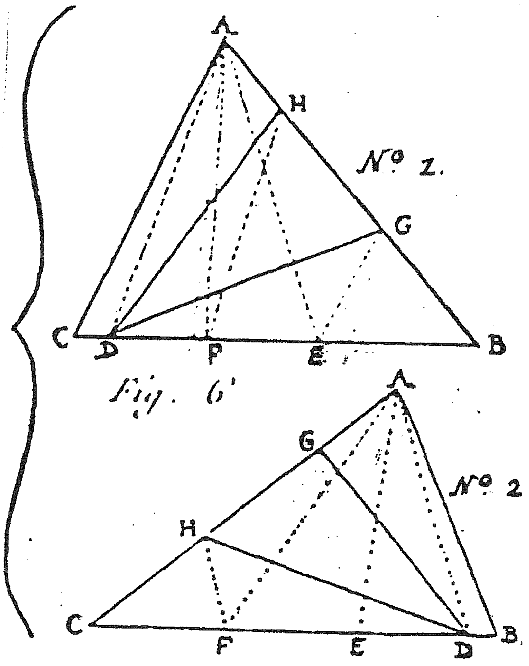
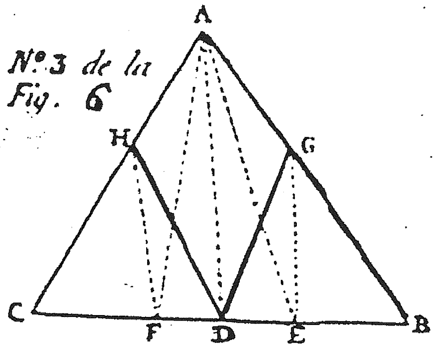


Fig. 6



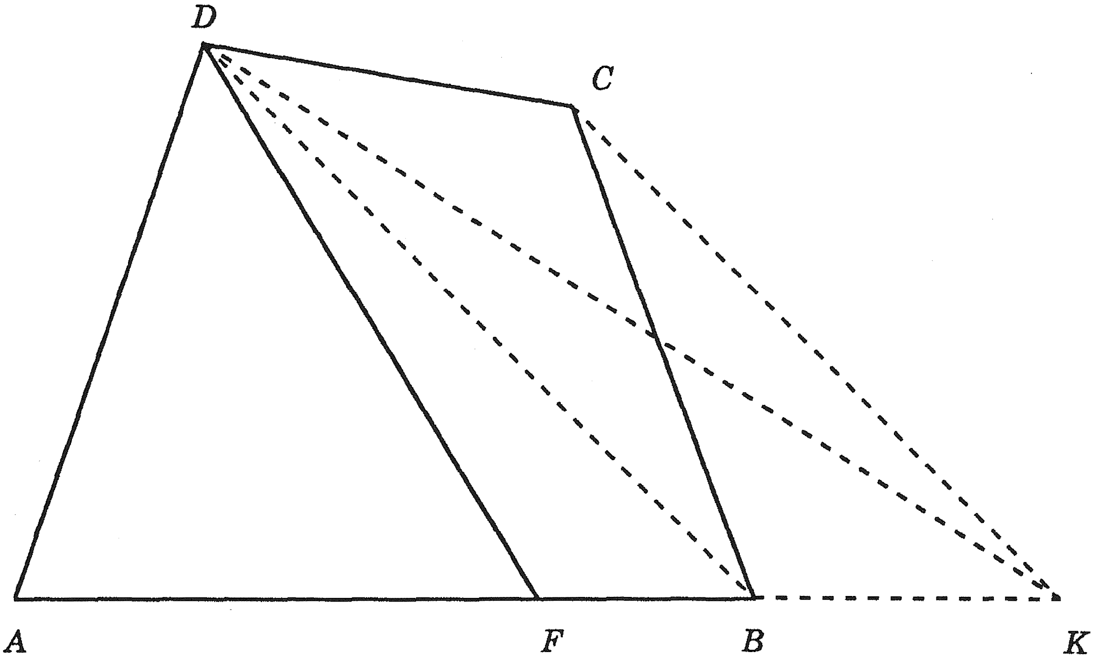
N°3 de la Fig. 6

### 4.2 Division des quadrilatères

Proposons une construction pour l'exercice 10 différente de celle proposée par Ozanam. Rappelons qu'il s'agit de partager un quadrilatère en deux parties d'aires égales avec un segment issu d'un sommet donné. L'idée est de remplacer le quadrilatère par un triangle de même aire qu'il ne reste plus qu'à diviser en deux parties égales en traçant une médiane convenable.

### Construction

On trace $(CK)$ parallèle à $(DB)$, on construit $F$ milieu de $[AK]$ puis on trace $[DF]$.



### Démonstration

Comme Aire$(BCD)$ = Aire$(BDK)$, on a Aire$(ABCD)$ = Aire$(ADK)$ ;
comme Aire$(ADF) = \frac{1}{2}$ Aire$(ADK)$ alors Aire$(ADF) = \frac{1}{2}$ Aire$(ABCD)$.

### Conclusion

On a donc Aire$(ADF)$ = Aire$(BCDF)$.

**Ozanam, chapitre II, problème 8**

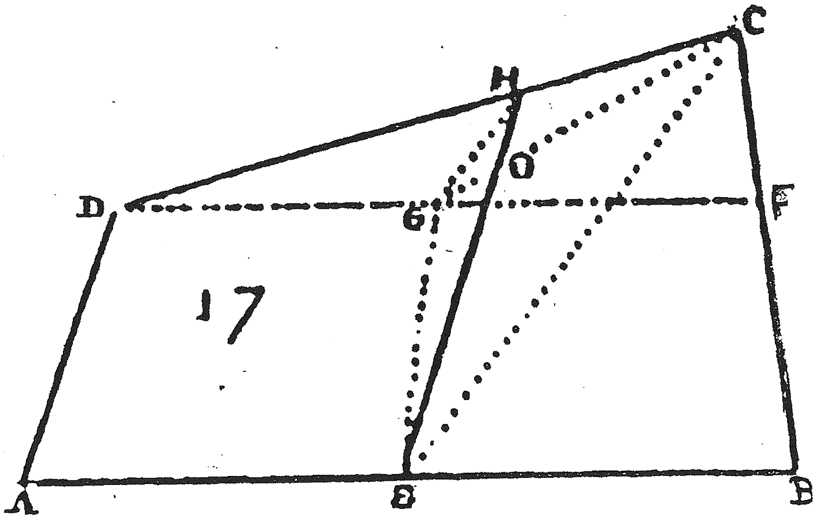
### PROBLEME VIII.

*Diviſer le trapeze donné* ABCD *en deux également par une ligne droite tirée du point* E, *milieu du côté* AB. Pl. XI. Fig. 17.

AYant tiré par l'angle D, au côté donné AB, la parallele DF, tirez par ſon point du milieu G à la ligne EC la parallele GH, & menez la droite EH qui diviſera le trapeze propoſé ABCD en deux également.

*Démonſtration.*

Car ſi aux deux trapézoïdes AEGD, BEGF qui ſont égaux (par le Problême VI.), on ajoute les triangles GCD, GCF, qui ſont auſſi égaux, (par 38. 1.) on aura le pentagone AEGCD égal au trapeze EGCB, ou le trapeze AEHD égal au trapeze EHCB, à cauſe des deux triangles égaux EGO, CHO, comme l'on connoîtra en ôtant des deux triangles égaux EGC, EHC, le triangle commun EOC, ou des deux égaux EGH, CGH, le commun GOH, &c.



## Ozanam, chapitre II, problème 9

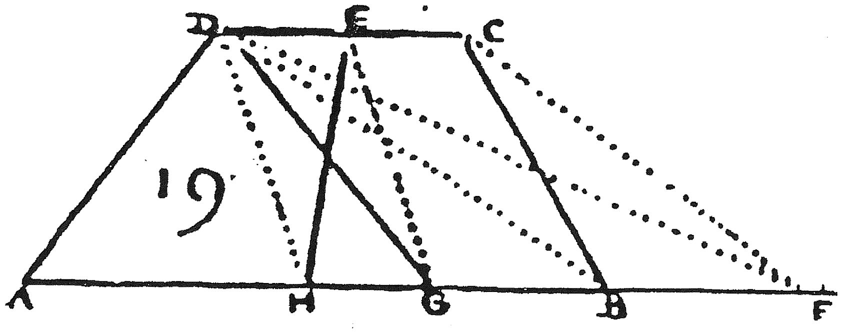
### PROBLEME IX.

*Diviſer le trapeze donné* A B C D *en deux également par une ligne droite tirée du point* E, *donné ſur le côté* C D. Planche XI. Figure 19.

*Démonſtration.*

Car à cauſe du triangle ADF égal au rapeze ABCD, (comme nous avons dé-nontré dans notre Géométrie pratique) a moitié ou le triangle A D G ſera auſſi a moitié du trapeze ABCD; & parce que ce même triangle A D G eſt égal u trapeze A D E H, à cauſe des parallèles EG, DH, il ſuit que ce trapeze DEH eſt auſſi la moitié du donné BCD, & que par conſéquent la ligne G diviſe le trapeze donné ABCD en eux parties égales. *Ce qu'il falloit faire démontrer.*

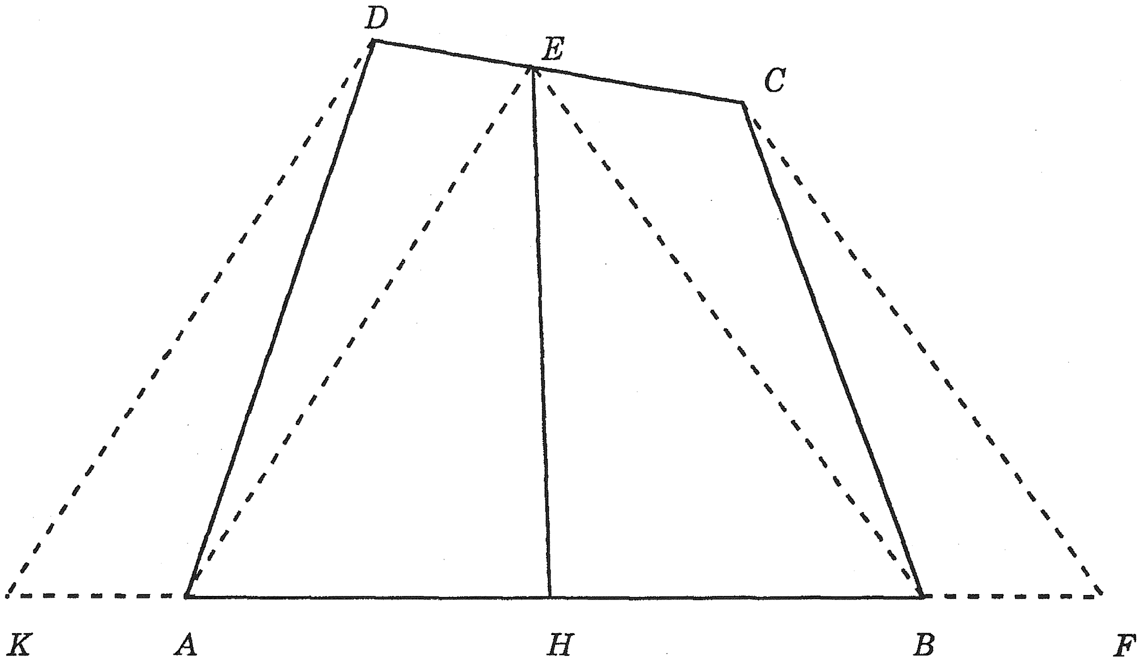
Pl. XI. Fig. 19. AYant tiré de l'angle C, à la diagonale DB, la parallele CF, qui rencontre le côté AB, prolongé en F, diviſez A F en deux également au point G; & ayant tiré de l'angle D à la ligne EG la parallele DH, menez la droite EH qui diviſera en deux également le rapeze propoſé ABCD.



### Construction 2

Proposons une seconde construction pour cet exercice.

On trace $(CF)$ parallèle à $(EB)$ et $(DK)$ parallèle à $(AE)$, on construit $H$ milieu de $[FK]$ puis on trace $[EH]$.



### Démonstration

Comme Aire$(BCEH)$ = Aire$(EFH)$ et Aire$(ADEH)$ = Aire$(EKH)$, on a Aire$(ABCD)$ = Aire$(EKF)$ ;

de plus Aire$(EFH)$ = Aire$(EKH)$ $= \frac{1}{2}$ Aire$(EKF)$.

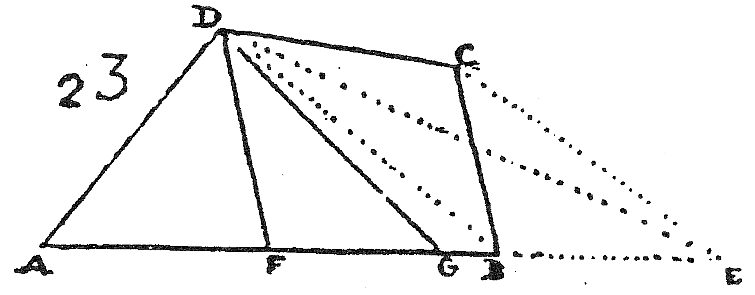
### Conclusion

On a donc Aire$(ADEH)$ = Aire$(BCEH)$.

**Ozanam, chapitre II, problème 11**

Diviser le trapèze donné $ABCD$ en trois parties égales par deux lignes tirées de l'angle donné $D$.

**Figure d'Ozanam**



**Construction**

On trace la droite $(CE)$ parallèle à la droite $(DB)$ puis on partage le segment $[AE]$ en trois parties égales : $[AF]$, $[FG]$, $[GE]$ comme dans l'exercice 4.

**Remarques**

La figure d'Ozanam n'est pas très exacte car les trois segments construits n'y sont pas de longueurs égales.

**Démonstration**

Comme la droite $(CE)$ est parallèle à la droite $(DB)$, Aire$(DCB)$ = Aire$(DEB)$. Donc Aire$(ABCD)$ = Aire$(AED)$.

Comme $AF = FG = GE$,

$$\text{Aire}(DAF) = \text{Aire}(DFG) = \text{Aire}(DGE) = \frac{1}{3}\text{Aire}(AED).$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part Aire}(DGE) &= \text{Aire}(DGB) + \text{Aire}(DBE) \\ &= \text{Aire}(DGB) + \text{Aire}(DCB) \\ &= \text{Aire}(DGBC). \end{aligned}$$

**Conclusion**

Aire$(DAF)$ = Aire$(DFG)$ = Aire$(DGBC)$.

## 5 Bibliographie

### 5.1 Bibliographie générale

¶¶¶ Bigourdan : Le système métrique des poids et mesures, son établissement...— Paris, Gauthier-Villars, 1901.
Histoire assez complète du système métrique.

¶¶¶ Garnier, Jean Guillaume : Usage du compas de proportion, voir ci-dessous.

¶¶¶ Hogard, Henri et Hogard : Manuel supplémentaire d'arpentage ou recueil d'exemples pratiques pour les différentes opérations d'arpentage et de levée

de plans.— Paris : librairie encyclopédique de Roret, 1836.— 114 p., 3 pl. dépl. (figures de Chartier).

¶¶¶ Lefort Xavier : Arpentage et mathématiques au 17$^{\text{ème}}$ siècle, dans Mathématiques, Arts et techniques au 17$^{\text{ème}}$ siècle.— Publications de l'Université du Maine n° 4. Pages 255-274.

¶¶¶ Ozanam Jacques : Usage du Compas de proportion, voir ci-dessous.

### 5.2 Jean Guillaume Garnier (1766-1840) dans les bibliothèques de Bretagne

¶¶¶ Analyse algébrique faisant suite à la première section de l'algèbre.— 2$^{\text{ème}}$ éd. revue et considérablement augmentée.— Paris : Ve Courcier, 1814.— XVI-668 p., 1 pl.
B. M. Rennes 55816

¶¶¶ Eléments de géométrie analytique.— 312 p., 9 pl.
B. M. Morlaix 33021

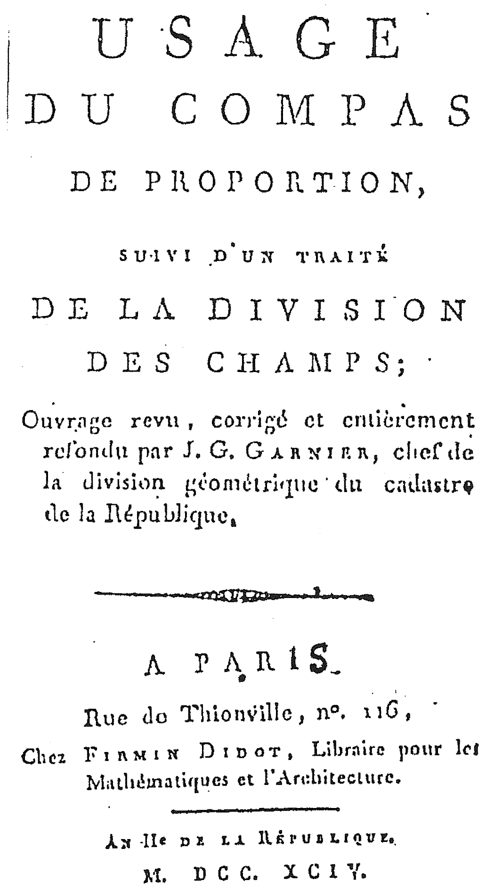
¶¶¶ Leçons d'analyses algébrique, différentielle et intégrale, donnée en l'an 9 à la première division de l'école polytechnique.— Paris : Baudouin, floréal an 9.—174 p. env., 1 pl.
B. M. Rennes 17098

¶¶¶ Notes sur le calcul différentiel et sur le calcul intégral faisant suite à la méchanique de Bezout...— Paris : Courcier, an 9.— Volume contenant les pages I-V, 367-494, 405-415, 489-501, 517-826 (erreurs de pagination), errata : 10 p., 2 pl.
B. M. Morlaix 33022 (incomplet)
B. M. Morlaix 33215
B. M. Rennes 56249

On trouve également un texte de Garnier dans le livre de Gaspard Clair François Marie Riche de Prony (1755-1839) :

¶¶¶ Nouvelle architecture hydraulique.— Paris : Firmin Didot, 1790-an 4.— 2 vol. :
1 : 1790.— XII-621 p., 72 p. de tables, 15 pl.,
2 : an 4.— 204 p., Eclaicissements sur le tome premier... par M. Garnier... : 28 p., 39 pl.
B. S. H. M. Brest R3968 et 3969
B. M. Rennes 10709. Tome 2 seul.
B. M. Rennes 15012

¶¶¶ Garnier, Jean Guillaume : Usage du compas de proportion suivi d'un traité de la division de champs.— Paris : Firmin Didot, an 2.— 4-287 p., 4 tables dépl., 9-6 pl.



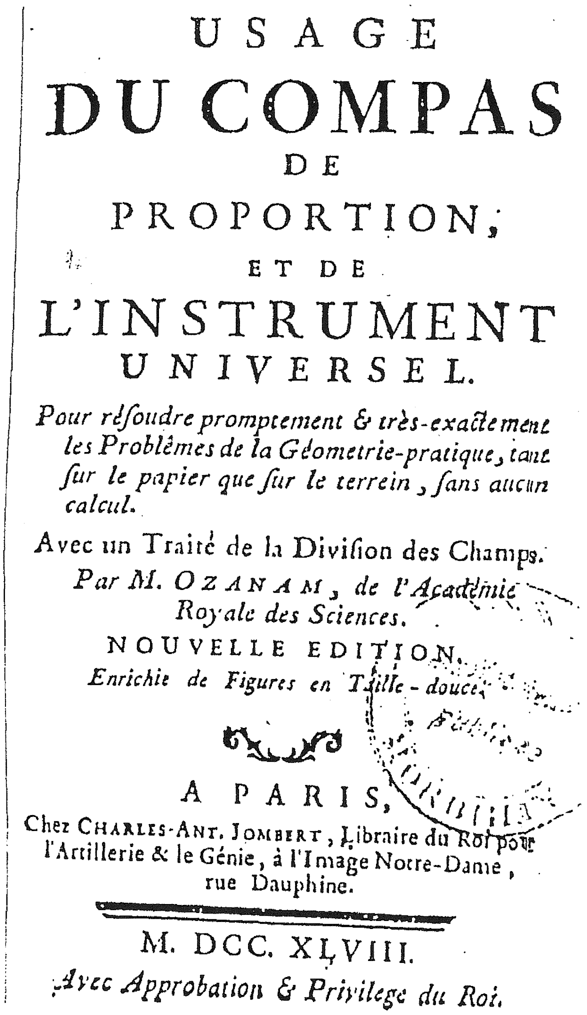
USAGE
DU COMPAS
DE PROPORTION,

SUIVI D'UN TRAITÉ
DE LA DIVISION
DES CHAMPS;

Ouvrage revu, corrigé et entièrement refondu par J. G. Garnier, chef de la division géométrique du cadastre de la République.

A PARIS,
Rue de Thionville, n°. 116,
Chez Firmin Didot, Libraire pour les Mathématiques et l'Architecture.

An IIe de la République.
M. DCC. XCIV.



USAGE
DU COMPAS
DE
PROPORTION,
ET DE
L'INSTRUMENT
UNIVERSEL.

*Pour réſoudre promptement & très-exactement les Problêmes de la Géometrie-pratique, tant ſur le papier que ſur le terrein, ſans aucun calcul.*

Avec un Traité de la Diviſion des Champs.

*Par M. Ozanam, de l'Académie Royale des Sciences.*

NOUVELLE EDITION,
*Enrichie de Figures en Taille-douce.*

A PARIS,
Chez Charles-Ant. Jombert, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame, rue Dauphine.

M. DCC. XLVIII.
*Avec Approbation & Privilege du Roi.*

## 5.3 Jacques Ozanam (1640-1717) dans les bibliothèques de Bretagne

Les signes »»» distinguent les différentes éditions.

¶¶¶ »»» Cours de mathématique qui comprend toutes les parties de cette science les plus utiles et les plus nécessaires à un homme de guerre & à tous ceux qui veulent se perfectionner dans les mathématiques.— Paris : Jean Jombert, 1693.— 5 vol. :
1 : 10 p., Introduction aux mathématiques : 112 p., 4 pl., Eléments d'Euclide : 428 p., 17 pl.

2 : Arithmétique : 140 p., trigonométrie : 243 p., 7 pl., tables des sinus... logarithmes des sinus... : 294 p., cat. 4 p.
3 : 26 p., Géométrie : 321 p., 24 pl., Fortification 8-256 p., 44 pl.
4 : 28 p., Traité de mécanique, 276 p., 28 pl. Traité de la perspective, 108 p., 36 pl.
5 : Géographie : 268 p., 14 pl., Gnomonique : 186 p., 30 p.
B. M. Rennes 54251. Le tome 5 manque.
B. M. Vannes 8° 6094

¶¶¶ »»» Dictionnaire mathématique...— Paris : Estienne Michallet, 1691.— 10-672 p., tables : 70 p., 24 pl.
B. M. Rennes 17173
»»» Amsterdam : Huguetan, 1691.— 16-739 p.
B. S. H. M. Brest R3680

¶¶¶ »»» La Géometrie pratique contenant la trigonométrie théorique et pratique, la longimétrie, la planimétrie et la stéréométrie...— 2ème éd. revue, corrigée et augmentée.— Paris : l'auteur et Estienne Michallet, 1689.— 301 p., table : 11 p.
B. M. Rennes 84064
B. M. Vannes 8° 5846
»»» Paris : Ch. A. Jombert, 1736.— 327 p., pl.
B. M. Morlaix 34572

¶¶¶ »»» Méthode Facile pour arpenter ou mesurer toutes sortes de superficies...— Paris : Jean Jombert, 1699.— 8-404 p.
B. M. Rennes 84068

¶¶¶ »»» Méthode Générale pour tracer des cadrans sur toutes sortes de plan.— Paris : Estienne Michallet, 1685.— 161 p., 5 pl.
B. M. Vannes 8° 5848

¶¶¶ »»» Méthode de Lever les plans et les cartes de terre et de mer avec toutes sortes d'instrumens & sans instrumens.— Nouv. éd.— Paris : Charles Antoine Jombert, 1750.— 12-244-4 p. 15 pl.
B. S. H. M. Brest R1530
B. M. Rennes 84069
B. U. Rennes (Sciences) 55225
»»» Paris : Charles Antoine Jombert, 1781.— VI-495 p., 15 pl.
B. M. Morlaix 30027

¶¶¶ »»» La Perspective théorique et pratique...— Paris : Claude Jombert, 1720.— 108 p., 36 pl.
B. S. H. M. Brest R2800

¶¶¶ »»» Récréations mathématiques et physiques, qui contiennent plusieurs problèmes d'arithmétique, de géométrie, de musique, d'optique, de gnomonique, de cosmographie, de mécanique, de pyrotechnie et de physique. Avec un traité des horloges élémentaires.— Nouv. éd. revue corrigée et augmentée.— Paris : Jacques Rollin fils, 1749-1750.— 4 vol. :

1 : 1750.— 16-460 p., table : 20 p., 32 pl.,
2 : 1749.— 462 p., table : 14 p., 55 pl.,
3 : 1750.— 482 p., table : 12 p., 30 pl.,
4 : 1750.— 8-446 p., table : 4 p., 17 pl.
B. M. Rennes 54256
»»» Paris : Jombert, 1778.— 4 vol.
B. S. H. M. Brest R2626 à 2629

¶¶¶ »»» La Trigonométrie rectiligne et sphérique avec les tables des sinus, tangentes et sécantes... et les tables de logarithmes des sinus et des tangentes...— Nouv. éd. revue et corrigée.— Paris : Jombert, 1711.
B. S. H. M. Brest R2612
»»» Paris : Charles-Antoine Jombert, 1741.— 8-103 p., 4 pl., 282 p. de tables.
B. M. Rennes 55817

¶¶¶ Usage du Compas de proportion, et de l'instrument universel.— Nouv. éd.— Paris : Charles Antoine Jombert, 1748.— 24-240 p., 12 pl.. Usage de l'instrument universel : pages 131-188, traité de la division des champs : pages 189-240, pl. 10-12.
B. M. Vannes 8° 5847

¶¶¶ Usage de l'Instrument universel, pour résoudre promtement et très exactement tous les problèmes de la géométrie pratique sans aucun calcul...— Paris : Estienne Michallet, 1688.— 116 p., 3 pl.
B. M. Rennes 84063

On trouve également des textes d'Ozanam dans les livres de :

¶¶¶ Jean Boulenger : La Géométrie pratique ou Nouvelle méthode pour toiser et arpenter promptement et facilement...— Nouv. éd. augmentée de plusieurs notes et d'un traité de l'arithmétique par géométrie par Mr Ozanam.— Paris : Loüis Lucas, 1691.— 422 p.
B. M. Rennes 84065

¶¶¶ Jean Boulenger : Traité de la sphère du monde.— Nouv. éd. corrigée et augmentée (note manuscrite : par Ozanam).— Paris : Jean Jombert, 1688.— 320 p.
B. M. Rennes 83833

¶¶¶ Les Eléments d'Euclide expliquez d'une manière nouvelle et très facile... par le père Claude F. Milliet-Dechalles.— Nouv. éd. revue et corrigée par M. Ozanam.— Paris : Claude Jombert, 1709.— 378 p., 15 pl.
B. M. Rennes 84052

# TROISIEME PARTIE

# L'ALGEBRE

# Chapitre VIII
# L'algèbre babylonienne

## 1 Présentation

La civilisation sumérienne dont nous avons parlé dans le chapitre I voit, après maintes péripéties, lui succéder entre -1900 et -1600 un empire dont la capitale est Babylone, sur l'Euphrate, juste au sud de la Bagdad actuelle. Les tablettes de cette époque conservent une foule d'informations, en particulier elles nous révèlent une algèbre déjà très développée et témoignent de la maîtrise des babyloniens à résoudre des équations du second degré.

## 2 Résolution d'équations du second degré

### 2.1 Exemple : $11\ x^2 + 7\ x = 6\ 15$

"J'ai additionné 7 fois le côté de mon carré et 11 fois la surface : 6 15" (tablette du British museum n° 13901)

Il s'agit donc de résoudre $11\ x^2 + 7\ x = 6\ 15$ ; la notation "6 15", en base 60, est ambiguë, car les babyloniens ne donnent pas d'indication de l'ordre de grandeur ; 6 15 peut valoir 6.3600 + 15.60, 6.60 + 15, $6 + \frac{15}{60}$ et même 6.3600 + 15, etc. ; nous avons vu au chapitre I que le zéro n'est introduit, rarement, que vers 300 avant J.C.

Pour suivre la solution de la tablette, posons $a = 11$, $b = 7$, $c = -6\frac{1}{4}$ ; l'équation à résoudre correspond à celle dont nous avons l'habitude : $a\ x^2 + b\ x + c = 0$. Les deux colonnes de gauche sont traduites de la tablette. Nous avons indiqué en plus les nombres en base 10 et le calcul littéral correspondant.

On ne s'étonnera pas que la solution soit 30. Dans l'écriture babylonienne, 30 peut être lu $\frac{30}{60}$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}$. L'autre racine est négative : $-\frac{25}{22}$.

| Instructions | base 60 | base 10 | calcul littéral |
|---|---|---|---|
| Tu multiplieras 11 par 6 15 | 1 8 45 | $68\frac{3}{4}$ | calcul de $-a\,c$ |
| Tu diviseras 7 par 2 | 3 30 | $3\frac{1}{2}$ | calcul de $b/2$ |
| Tu multiplieras 3 30 par 3 30 | 12 15 | $12\frac{1}{4}$ | calcul de $\frac{b^2}{4}$ |
| Tu l'ajouteras à 1 8 45 | 1 21 | 81 | calcul de $\frac{b^2}{4} - a\,c$ |
| C'est le carré de | 9 | 9 | calcul de $\sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$ |
| Tu soustrairas 3 30 | 5 30 | $5\frac{1}{2}$ | calcul de $-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$ |
| | | | |
| L'inverse de 11 ne peut être calculé.[1] Que poser qui, multiplié par 11, donne 5 30 | 30 | $\frac{1}{2}$ | calcul de $\frac{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}}{a}$ |
| Le côté du carré est 30. | | | |

## 2.2 Autres exemples

Voici les équations correspondants à d'autres problèmes de la même tablette. Les valeurs rationnelles à choisir, pour interpréter les nombres en notation sexagésimale des tablettes, sont indiquées entre parenthèses.

| | |
|---|---|
| $x^2 + x = 45$ | $(\frac{3}{4})$ |
| $x^2 = x + 14\ 30$ | $(870)$ |
| $x^2 - 20\,x^2 + 20\,x = 20$ | $(\frac{1}{3})$ |
| $x^2 - 20\,x^2 + x = 4\ 46\ 40$ | $(\frac{1}{3}$ et $286\frac{2}{3})$ |
| $x^2 + x + 20\,x = 55$ | $(\frac{1}{3}$ et $\frac{55}{60})$ |
| $x^2 + 40\,x = 35$ | $(\frac{2}{3}$ et $\frac{35}{60})$ |

Un problème à deux inconnues :

$$\left\| \begin{array}{ll} x^2 + y^2 = 25\ 25 & (1525) \text{ et} \\ y = 40\,x + 5 & (\frac{2}{3}) \end{array} \right.$$

Dans les deux premiers exemples l'algorithme de résolution est légèrement différent, à cause des signes opposés de x.

---

[1] Les babyloniens disposaient, pour faciliter les divisions, de tables d'inverses ; 1/11 n'ayant pas de développement fini en base 60 n'y apparaissait pas.

Dans le dernier exemple, le scribe babylonien reporte $y$ dans la première équation, puis résoud l'équation du second degré obtenue par la méthode ci-dessus ; il trouve $x = 30$.

### 2.3 Cas étudiés

Dans ces problèmes, les solutions sont toujours des nombres positifs à développement simple et fini en base 60 : le discriminant est carré d'un nombre simple, la division par $a$ "tombe juste". Mis à part ces restrictions, on voit que les babyloniens maîtrisaient l'algorithme de résolution algébrique des équations du second degré. Rien n'a été retrouvé qui permette de comprendre comment ils y étaient parvenus : sur leurs tablettes ils n'écrivent que l'application de recettes ; c'est dans les textes des grecs que les mathématiques sont fondées sur la méthode déductive.

On remarque aussi que les babyloniens ne posent, avec des coefficients numériques positifs, que des équations des deux formes : $ax^2 + bx = c,$ $ax^2 = bx + c$
et évitent de poser des équations de la forme : $ax^2 + c = bx.$

Dans cette dernière forme, et dans celle-là seulement, on sait qu'il peut y avoir deux racines positives et cette possibilité a dû gêner les babyloniens. Cependant on trouve des problèmes dans lesquels il est demandé de trouver la longueur $L$ et la largeur $l$ d'un rectangle dont on connaît le demi-périmètre $a$ et la surface $b$, autrement dit $l$ et $L$ vérifient le système :

$$\begin{cases} l+L=a \\ lL=b. \end{cases}$$

C'est une façon déguisée de poser l'équation : $x^2 + b = ax$ ;

On trouve par exemple $a = 6{,}5$ et $b = 7{,}5$ qui donne $L = 5$ et $l = 1{,}5$.

De cette façon, le mathématicien babylonien évite d'avoir à choisir entre les deux racines de son équation, puisqu'il peut les distinguer par une propriété supplémentaire donnée par une relation d'ordre : l'une, la longueur, est plus grande que l'autre, la largeur ; il obtient la longueur et la largeur en ajoutant puis retranchant à $-\frac{b}{2}$ la quantité $\sqrt{\frac{b^2}{4} - a\,c}$. Cette impossibilité de distinguer algébriquement les racines sera au cœur de la théorie de Galois ; même si les babyloniens n'en étaient pas là, admirons !

En tout cas, nous n'avons jamais entendu dire que l'existence de deux racines a une équation du second degré ait été affirmée explicitement avant al Khwarizmi vers 825 (voir ch. IX 2).

## 3 Bibliographie

¶¶¶ Collette Jean-Paul : Histoire des mathématiques, tome 1, Vuibert, 1973.

¶¶¶ I.R.E.M. des Pays de Loire : Promenades historiques. Première promenade : Sumer, Babylone, le nombre comptable et les débuts de la pensée algorithme, mai 1994.

¶¶¶ Neugebauer Otto : Les sciences exactes dans l'antiquité, Actes Sud, 1990.

# Chapitre IX
# L'algèbre arabe : Al Khwarizmi vers 825

## 1 Présentation

### 1.1 Fiche technique

Niveau : Classes de première.

Thème : Résolution de certaines équations du second degré avec des méthodes géométriques.

Durée : 2 heures.

### 1.2 Connaissances nécessaires

Identités remarquables, calculs algébriques.

### 1.3 Objectifs pédagogiques

Faire prendre connaissance de l'importance de l'algèbre arabe dans l'évolution de l'algèbre.

Lier l'algèbre et la géométrie.

Préparer l'introduction de la forme canonique d'un trinôme.

Utiliser la notion d'aire.

## 2 Un peu d'histoire

Mahomet, chassé de La Mecque en 622, y revient en vainqueur en 630 et meurt en 632. Pour ses successeurs, les califes, commencent les grandes périodes de conquête. Cents ans plus tard environ de grands centres culturels et scientifiques sont créés. C'est ainsi que se développe à Bagdad une civilisation brillante autour d'Al Mamoun, calife de 813 à 833. Les savants du Bayt al-hikma, la "Maison de la sagesse", sont d'origine et de cultures diverses ; ils rassemblent les connaissances de leur époque, se procurent et traduisent des manuscrits grecs d'Euclide, Archimède, Apollonius, Diophante, Ptolémée, les textes des mathématiciens indiens ...

Parmi eux, le fondateur principal est sans doute Mohammed ibn Musa al Khwarizmi. Il est originaire de la ville de Khwarizmi, nommée aujourd'hui Khiva et située en Ouzbékistan. Il est né vers 780 et meurt vers 850. L'Encyclopædia universalis ne cite que ses œuvres astronomiques, par lesquelles il connut la célébrité à son époque.

Le principal ouvrage mathématique d'Al Khwarizmi, considéré pendant longtemps comme un ouvrage de référence, est intitulé Al Kitab al Mukhtasar fi Hisab al jabr wa-l-Muqabala : Livre concis du calcul par les procédés du jabr et du muqabala (qu'on nous excuse pour l'orthographe arabe imparfaite). Rédigé vers 825, l'ouvrage est dédié au calife Al Mamoun et a des objectifs pratiques de calculs d'héritage, etc. Le mot al jabr est à l'origine du mot algèbre, ayant été conservé tel quel dans les premières traductions latines. En arabe, il exprime le remplissage ou la réduction d'une fracture ; il peut aussi être d'origine assyrienne. C'est l'opération consistant à ajouter aux deux membres d'une équation le même terme afin de faire disparaître les termes affectés du signe –. L'opération al muqabala consiste, elle, à retrancher aux deux membres des termes égaux.

Ainsi, avec nos notations, l'équation

$$4x^2 - 2x + 3 = 3x^2 + 2$$

devient $4x^2 + 3 = 3x^2 + 2x + 2$ par al jabr

puis $x^2 + 1 = 2x$ par al muqabala.

Un ouvrage probablement ultérieur d'Al Khwarizmi, introduit à Bagdad les méthodes indiennes de calcul ; il traite d'arithmétique élémentaire, contient un premier exposé du système décimal et explique l'usage d'un petit cercle pour noter l'absence d'une unité, transmettant ainsi l'invention indienne du zéro pour noter l'absence d'unités, de dizaines, de centaines... A partir de 1150, il est à son tour traduit en latin à de très nombreuses reprises et diffusé dans toute l'Europe par des manuscrits appelés algorismus, déformation d'Al Khwarizmi, mot qui donne algorithme et a pris le sens de "procédé de calcul" que l'on sait. Le signe rond est alors appelé circulus ou cifre, transcription de l'arabe as-sifr. Le mot deviendra chiffre en français, zéro en italien.

Al Khwarizmi distingue six types d'équations de degré $\leq 2$ car, pour lui, les coefficients d'une équation sont toujours positifs :

$a\,x^2 = b\,x$

$a\,x^2 = b$

$a\,x = b$

$a\,x^2 + b\,x = c$

$a\,x^2 + c = b\,x$

$a\,x^2 = b\,x + c.$

Mais, à son époque, l'usage des lettres était inconnu et ceci est dit en phrases ; pour expliquer une méthode de résolution, il l'explicite sur un ou des exemples numériques.

Pour lui, l'équation $x^2 = 40\ x - 4\ x^2$, qui est $x^2 = 8\ x$, ne donne que la racine 8 ; par contre, pour l'équation $x^2 + 21 = 10\ x$, il donne les deux solutions 3 et 7 et affirme qu'il en est de même pour toutes les équations du $5^{\text{ème}}$ type lorsque leur discriminant est $> 0$ ; il est ainsi le premier à remarquer qu'une équation du second degré peut avoir plus d'une solution (voir ch. VIII 2.3) et à signaler le cas de racine double.

Même si des justifications géométriques sont longuement données, elles ne débouchent pas sur une construction mais seulement sur une justification puisqu'y figurent des segments de la longueur inconnue ; l'esprit de la méthode est bien algébrique.

Tout ceci sera sans doute plus clair en citant, d'après Youschkevitch, le texte d'Al Khwarizmi pour l'équation $x^2 + 21 = 10\ x$ :

"Divise en deux les racines ; ce qui donne 5 ; multiplie 5 par lui-même, tu obtiens 25 ; retire les 21 qui sont ajoutés au carré ; il reste 4 ; extrais la racine, cela donne 2, et retire-la de la moitié de la racine, c'est-à-dire de 5 ; il reste 3 ; c'est la racine du carré que tu cherches et le carré est 9. Si tu le désires, ajoute cela à la moitié de la racine, ce qui donne 7, qui est la racine du carré que tu cherches et le carré est 49. Si tu rencontres un problème qui se ramène à ce cas, examine alors sa justesse à l'aide de l'addition ; si tu ne le peux, tu obtiendras certainement (la solution) à l'aide de la soustraction. Parmi les trois cas dans lesquels on doit diviser en deux les racines[1], c'est le seul où l'on se serve de l'addition et de la soustraction. Sache en outre que si, dans ce cas, tu divise en deux la racine, que tu la multiplies par elle-même et que le produit soit plus petit que les dirhams[2] qui sont ajoutés au carré, alors le problème est impossible. Mais s'il est égal aux dirhams, la racine du carré est égale à la moitié de la racine, sans qu'on ajoute ou retire quoi que ce soit."

Le rôle du discriminant et de son signe est ici nettement mis en évidence : s'il est $< 0$, l'équation est impossible, s'il est nul, elle a une racine seulement (qui n'est pas qualifiée de racine double).

On a beaucoup discuté des origines des connaissances d'Al Khwarizmi. Faut-il y voir une influence grecque alors que les méthodes ne ressemblent pas aux méthodes euclidiennes, pourtant traduites depuis quelques années en arabe ? Une influence des mathématiciens indiens tels que Brahmagupta, plus avancés que lui, utilisant déjà, par exemple, des nombres négatifs ? Une utilisation de connaissances mathématiques communes dans le Moyen orient à cette époque ?

Nous allons maintenant considérer trois équations du second degré proposées dans l'algèbre d'Al Khwarizmi. Ces équations correspondent aux trois types d'équations complètes de degré 2. On ne s'occupera que des racines positives de ces équations.

Avant l'activité, on donnera aux élèves quelques extraits de cet aperçu historique, au gré de chacun. On peut aussi piocher dans les ouvrages cités en bibliographie.

## 3 Activité proposée

### 3.1 Texte

---

[1] les trois derniers des six cas, ceux où le coefficient du terme du premier degré n'est pas nul.

[2] Voir ci-dessous le début de 3.1

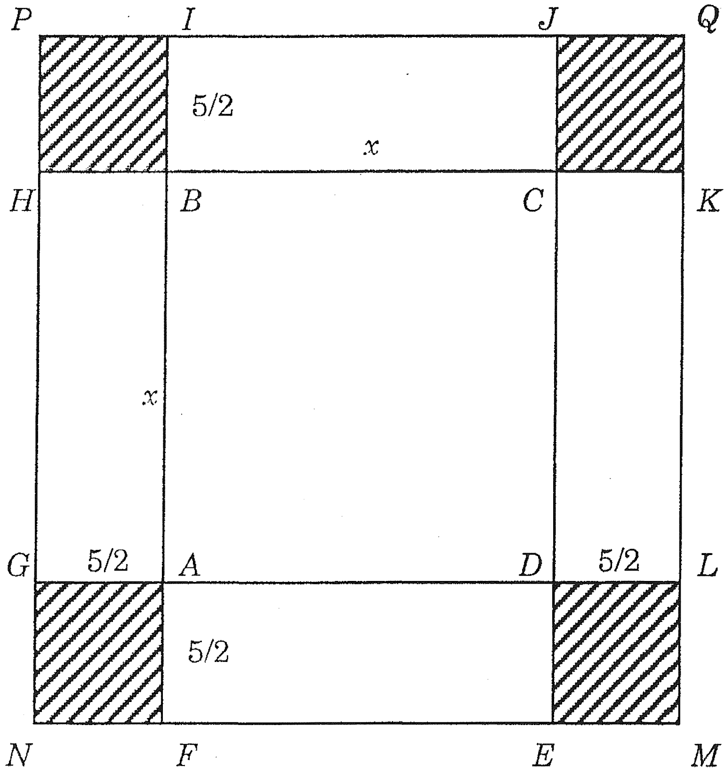
**Enoncé 1**

Un carré et dix de ses racines sont égaux à 39 dirhams.

En algèbre, Al Khwarizmi considère plusieurs sortes de nombres : les nombres simples ou dirhams (de la drachme, monnaie grecque), les racines, les carrés qui sont les produits de racines par elles-mêmes. Dans la suite on dira plutôt nombre que dirham.

1) Ecrire l'équation $E_1$ que veut résoudre Al Khwarizmi.

La méthode de résolution de l'équation donnée par Al Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté $x$ d'un carré $ABCD$ de telle manière que, si on lui ajoute quatre rectangles de côtés $x$ et $\frac{5}{2}$, $AGHB$, $BIJC$, $CKLD$, $ADEF$, on obtienne une figure en forme de croix dont l'aire est 39.



2) Exprimer l'aire $\mathscr{A}_1$ de la "croix" en fonction de $x$. Calculer l'aire $\mathscr{A}_2$ de l'ensemble des 4 carrés hachurés. En exprimant de deux manières l'aire du carré $MNPQ$, trouver une équation qui permette de calculer $x$. Quelle est la valeur de $x$ calculée par Al Khwarizmi ?

3) Résoudre algébriquement l'équation $E_1$.

Quelle est la valeur qu'Al Khwarizmi n'obtient pas ?

4) Résoudre l'équation $x^2 + 12x = 85$ :

a) par la méthode d'Al Khwarizmi ;

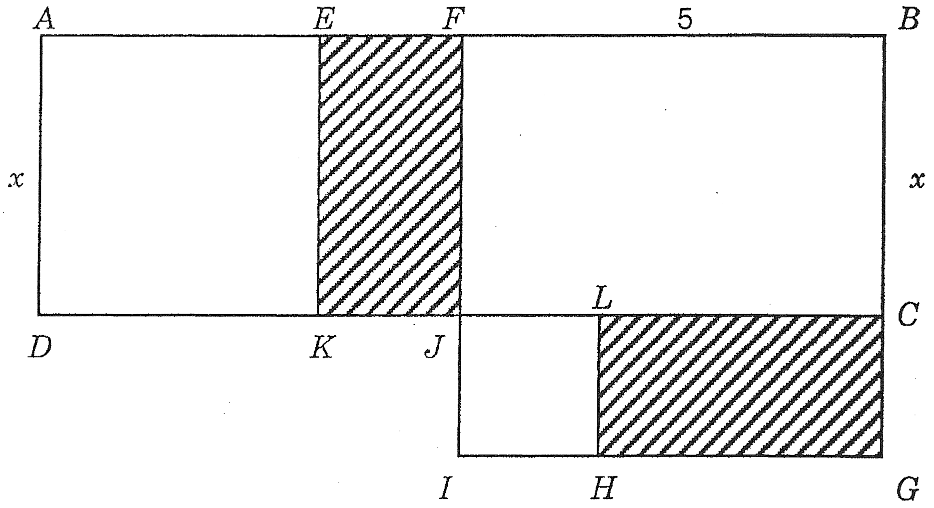
b) par la méthode algébrique usuelle.

**Enoncé 2**

Un carré et vingt et un nombres égalent dix de ses racines.

1) Ecrire l'équation $E_2$ que veut résoudre Al Khwarizmi.

Ici encore, la méthode de résolution de l'équation donnée par Al Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté $x$ d'un rectangle $ABCD$ tel que $BC = x$ avec $x < 5$ et $AB = 10$, de telle manière qu'il se décompose en deux figures, l'une ayant l'aire d'un carré de côté $x$, l'autre ayant une aire de 21. Dans la figure, $AEKD$ est un carré de côté $x$, $F$ est le milieu de $AB$, $FBGI$ est un carré de côté 5 et $IJLH$ est un carré.



2) Déterminer, en fonction de $x$, les longueurs $JL$ et $LC$.

Montrer que Aire($EFJK$) = Aire($CGHL$).

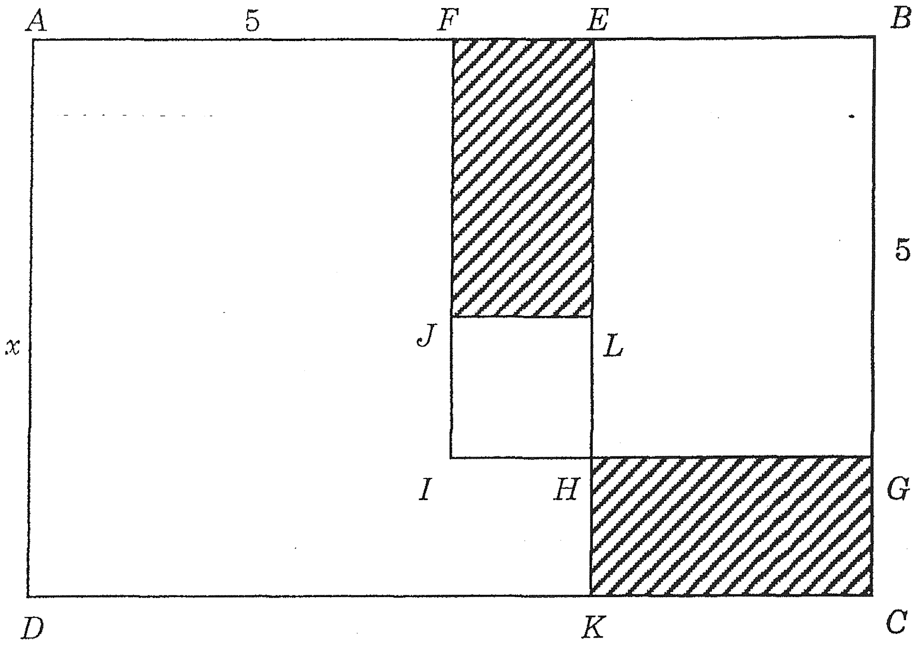
En déduire l'aire de la figure $BGHLJF$, puis l'aire du carré $IJLH$.

Déterminer la longueur $JL$ puis la valeur de $x$.

3) Résoudre algébriquement l'équation $E_2$.

Combien cette équation a-t-elle de racines positives ?

4) On considère la figure ci-dessous, où $AB = 10, AF = 5, AD = x$ avec $10 > x > 5$ et où $AEKD$, $FBGI$ et $IJLH$ sont des carrés.



Montrer, en s'inspirant de la méthode du 2), comment cette figure permet de déterminer la seconde solution de $E_2$.

**Enoncé 3**

Un carré égale trois de ses racines et quatre nombres.

1) Ecrire l'équation $E_3$ que veut résoudre Al Khwarizmi.

Ici aussi, la méthode de résolution algébrique de l'équation donnée par Al Khwarizmi s'appuie sur une figure géométrique. Il cherche à déterminer le côté $x$ d'un carré de façon qu'il puisse se décomposer en deux rectangles, le premier de côté 3 et $x$, le second ayant une aire égale à 4 : $ABCD$ est un carré de côté $x$, $DF = 3$, $E$ est le milieu de $[DF]$, $AGJE$ est un carré et $EFLK$ aussi.

2) Quelle est l'aire du carré $EFLK$ ?

Quelle est l'aire du carré $AGJE$ ?

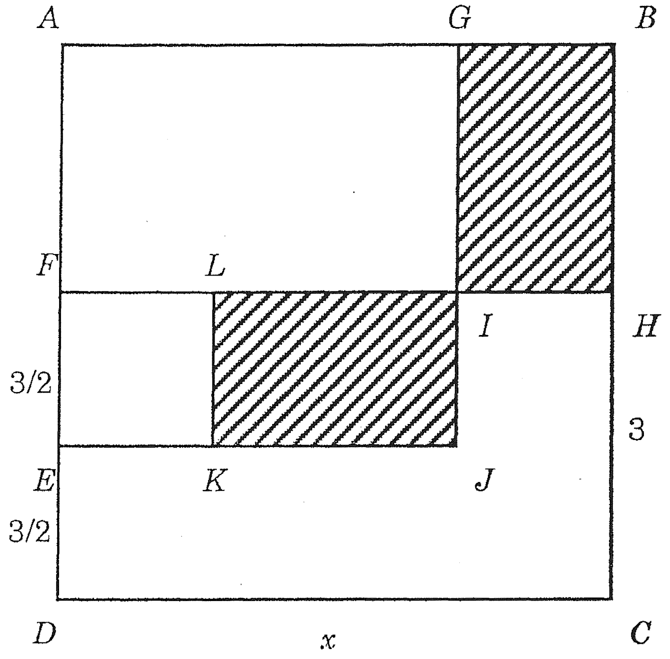
Montrer que $\text{Aire}(BHIG) = \text{Aire}(IJKL)$.

En déduire l'aire de la figure $AGJKLF$.

Déterminer la valeur de $x$ trouvée par Al Khwarizmi.

3) Résoudre algébriquement l'équation $E_3$.

Quelle valeur de $x$ n'obtient-on pas par cette méthode ?



4) Résoudre l'équation : $x^2 = 5x + 14$ :
   a) par la méthode d'Al Khwarizmi, pour obtenir la racine positive ;
   b) par la méthode algébrique usuelle.

### 3.2 Réaction des élèves

La surprise des élèves est forte à la lecture de l'énoncé concernant l'équation $E_1$. Ensuite, il n'y a pas de difficulté pour comprendre les autres énoncés.

**Enoncé 1**

Une fois l'énoncé compris, il est facile de trouver l'équation. La plupart des élèves commencent par refaire la figure, ce qui leur permet de traiter la question 2. Les élèves voient le lien de la question 3 avec la précédente et, pour la question 4, calquent le raisonnement fait auparavant.

**Enoncé 2**

L'écriture de $E_2$ est immédiate mais la seconde figure est plus difficile à maîtriser que la première et les élèves peinent pour résoudre la question 2). Seuls ceux qui réussissent à bien comprendre les deux figures ont réussi la question 4).

**Enoncé 3**

Cette partie a été mieux réussie que la précédente car elle faisait appel aux mêmes notions. A noter cependant quelques erreurs de calculs dans la méthode algébrique dues au fait que le coefficient de $x$, impair, ne se divise pas par 2 dans $\mathbb{N}$.

Dans cette activité, la résolution des équations algébriques en s'appuyant sur des figures géométriques a beaucoup intrigué les élèves. Ils ont trouvé ces méthodes longues à cause des tracés. Une autre remarque est souvent apparue : pourquoi fallait-il adopter des méthodes différentes suivant les cas ? L'unification des méthodes n'était pas encore réalisée, elle n'était donc pas évidente ; c'est une leçon de cette histoire.

### 3.3 Explications complémentaires

Il faut faire remarquer que le produit de deux nombres représente l'aire d'un rectangle et le carré d'un nombre représente l'aire d'un carré. Il est important que les élèves refassent les figures, cela leur permet d'aborder plus facilement les questions 2.

La seconde figure pour l'équation $E_2$ peut ne pas être fournie aux élèves pour provoquer une recherche complémentaire, difficile même pour les meilleurs. On peut répondre au 4) en suivant la démarche suivante :

$EL = 5 - (x - 5) = 10 - x$,

$\text{Aire}(FELJ) = (x - 5)(10 - x) = \text{Aire}(HGCK)$

$\text{Aire}(FBGHLJ) = \text{Aire}(EBCK) = x(10 - x) = 21$,

$IJ^2 = \text{Aire}(JLHI) = \text{Aire}(FBGI) - \text{Aire}(FBGHLJ) = 25 - 21 = 4$,

d'où $IJ = 2$, $x = 7$.

L'utilisation d'un rétroprojecteur est conseillée : montrer des figures sur des transparents, avec des couleurs, débloquera certains.

Cette activité a servi d'introduction au cours sur le second degré ; la forme canonique y apparaît naturellement. Par la suite, plusieurs élèves ont continué a mettre sous cette forme plutôt que de calculer le discriminant, au moins dans le cas où le coefficient de $x$ est pair.

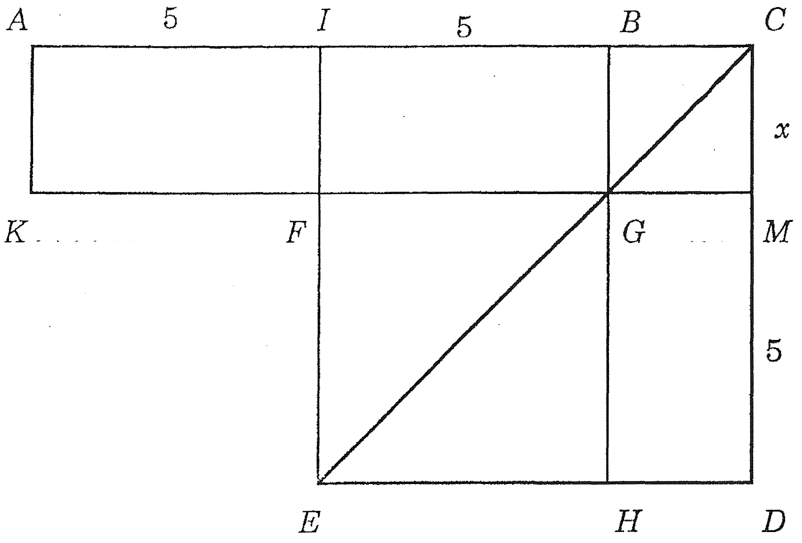
## 4 Prolongements de l'activité

### Equation $E_1 : x^2 + 10x = 39$

La première figure que donne Al Khwarizmi pour la résolution de l'équation $E_1$ correspond à la résolution d'une équation de la forme $x^2 + ax = b$ par le calcul algébrique :

$$x^2 + 4(\frac{a}{4})x + 4.\frac{a^2}{16} = b + \frac{a^2}{4}\text{ , }(x + 2.\frac{a}{4})^2 = b + \frac{a^2}{4}\text{ , etc.}$$

Ce type d'équation peut aussi être résolue géométriquement à partir de la proposition 6 du livre 2 des Eléments d'Euclide (voir ch. III, 3.1).



Rappelons que, dans la figure, $ICDE$ est un carré ainsi que $BCMG$ et que $I$ est le milieu de $[AB]$. Euclide démontre que : $AC.CB + IB^2 = IC^2$, autrement dit : Aire($ACMK$) + Aire($FGHE$) = Aire($ICDE$) puisque les rectangles $AIKF$ et $GMDH$ sont égaux.

Posons $CM = x$, $AI = IB = MD = 5$. On remarque que :

Aire($ACMK$) = Aire($BCMG$) + Aire($ABGK$) = $x^2 + 10x$.

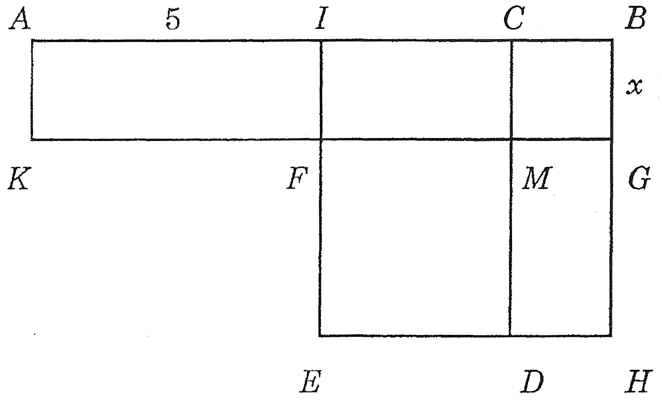
On cherche donc à déterminer $x$ de façon que l'aire de $ACMK$ soit 39. A l'aide de la proposition d'Euclide, l'équation s'écrit $39 + 25 = (x + 5)^2$, d'où sa solution positive : $x = 3$.

La seconde figure d'Al Khwarizmi est très peu différente de celle d'Euclide. Elle correspond à la résolution d'une équation de la forme $x^2 + ax = b$ par le calcul algébrique :

$x^2 + 2(\frac{a}{2})x + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$, $(x + \frac{a}{2})^2 = b + \frac{a^2}{4}$, etc.

### Equation $E_2 : x^2 + 21 = 10x$

Cette fois-ci, c'est la proposition 5 du livre 2 des Eléments d'Euclide qui peut être appliquée.



Dans la figure, $C$ est un point entre $I$ et $B$, $IBHE$ et $CBGM$ sont des carrés, $I$ est le milieu de $[AB]$. Euclide démontre que $AC.CB + IC^2 = IB^2$ ; en effet, en terme d'aires :

$AC.CB$ = Aire($ACMK$) = Aire($AIFK$) + Aire($ICMF$),

$IC^2$ = Aire($FMDE$), $IB^2$ = Aire($IBHE$), et la proposition résulte de Aire$(CBHD)$ = Aire$(IBGF)$ = Aire$(AIFK)$.

Posons $CB = CM = x, AI = IB = BH = 5$, avec $x < 5$. On remarque que :
Aire$(ACMK)$ = Aire$(ABGK)$ − Aire$(CBGM)$ = $10x - x^2$.

On cherche donc à déterminer $x$ de façon que l'aire de $ACMK$ soit 21. A l'aide de la proposition d'Euclide, l'équation s'écrit $21 + (5 - x)^2 = 25$, d'où la solution : $x = 3$.

## 5 Bibliographie

¶¶¶ Collette Jean-Paul : Histoire des mathématiques, tome 1, Vuibert, 1973.
¶¶¶ Dedron Pierre, Itard Jean : Mathématiques et mathématiciens, Magnard, 1959.
¶¶¶ Euclide : voir ch. III.
¶¶¶ M.A.T.H. : IREM Paris VII, n° 79, janvier 1990.
¶¶¶ Youschkevitch Adolf P. : Les mathématiques arabes (VIII$^{ème}$-XV$^{ème}$ siècles), Vrin, 1976.
Un livre très clair, très riche et très précis. L'exemplaire de la bibliothèque de l'IREM de Rennes a malheureusement disparu.

*Une traduction latine du traité d'algèbre d'al Khwarizmi*

# Chapitre X
# Notations algébriques

Avant le $16^{\text{ème}}$ siècle, les mathématiciens n'utilisaient quasiment jamais de notations (les premières sont de Diophante vers 200 à Alexandrie) et on conçoit la difficulté de la mise en œuvre de méthodes algébriques dans ces conditions. Une équation se décrit alors par une phrase où sont décrites les différentes opérations algébriques. Les usages actuels datent, en gros, de Descartes qui les impose dans le traité de géométrie adjoint à son discours de la méthode (1637).

## 1 Notations de Viète

Donnons une idée des notations de Viète (voir chapitre 11) ; dans les Zététiques, l'expression

$$\frac{F.H+F.D}{D+F}=E$$

est écrite :

$$\left\{\frac{\begin{matrix} F \text{ in } H \\ + F \text{ in } D \end{matrix}}{D \quad + F}\right\} \text{æquatibur } E$$

Pour les puissances de l'inconnue $A$ Viète est encore très lourd ; il écrit :
$A$ quadratum pour $A^2$, $A$ cubus pour $A^3$, $A$ quadrato-quadratum pour $A^4$, etc.,
$A$ potestas, $A$ gradum pour $A^m, A^n$ ;
pour indiquer la dimension du paramètre $F$ :
$F$ planum pour $F$ de dimension 2, $F$ solidum pour $F$ de dimension 3, etc.

Par exemple, pour l'équation générale du second degré en l'inconnue A, Viète, qui suppose une homogénéité de dimension entre les variables et les paramètres $B$, $D$, $Z$, écrit :

$B$ in $A$ quadratum plus $D$ plano in $A$ aequari $Z$ solido,
autrement dit : $BA^2 + DA = Z$.

Ces notations et la condition d'homogénéité sont très lourdes (cette dernière ne sera définitivement abandonnée qu'au temps de Descartes, voir V.7). Le grand apport de Viète est la création du calcul avec des lettres pour les quantités connues (*logistice speciosa*, où les lettres sont les espèces, par opposition à la *logistice numerosa*) ; il transforme par là profondément les méthodes et la conception de l'algèbre : au lieu de travailler sur des exemples numériques, on écrit le cas général.

Certains avaient déjà utilisé des lettres : Diophante, rarement, ou des algébristes italiens, notant une quantité par une lettre, son carré par une autre, etc. mais sans pour cela concevoir de calculer avec comme Viète le fait.

## 2 Points de repères pour l'apparition de nos notations

Pour les nombres, la notation décimale avec un signe séparateur commence à être utilisée au début du dix-septième siècle (les décimaux sont introduits par Al Kasi, Viète en 1579, Stevin en 1585). C'est Neper qui introduit un point pour séparer les parties entières et décimales d'un nombre, nous utilisions une virgule jusqu'à ces dernières années. Mais on écrira longtemps encore l'entier avec, à la suite la fraction donnant la partie fractionnaire : $11\frac{224176}{1000000}$.

Pour les signes d'opération :

+ et – existent vers 1480 (+ serait une déformation de &) mais leur usage ne se généralise qu'au début du dix-septième siècle ;

la multiplication est notée M par Stifel (1545), in par Viète (1591) ; nos usages sont inventés par Oughtred (1637) pour ×, par Leibniz (1698) pour le point.

Pour les puissances de l'inconnue :

- notation de Chuquet (1484) : $1225 + 148\ x^2$ est écrit $1225\ \tilde{p}\ 148^2$, finalement déjà très proche de l'usage actuel,

- notation de Bombelli : $3x^2$ est écrit $3^{\overset{2}{\smile}}$,

- notation de Stevin (1548-1620) : $x^2$ est écrit ②,

- l'écriture exponentielle $x^2$, $x^3$, etc. s'impose avec Descartes ; c'est seulement à ce moment que le calcul sur les polynômes est pensable clairement et que de nouveaux développements sont possibles. Au 18$^{\text{ème}}$ siècle on écrit $bb$ pour $b^2$ mais $b^3$, $b^4$, etc.

Le signe =, qui apparaît chez Recorde (1557), ne s'impose qu'à la fin du dix-septième siècle, grâce à Leibniz, sur le signe de Descartes : un alpha renversé : $\propto$ .

On doit à Girard (vers 1595-1632) la notation $\sqrt[3]{\ }$ qu'il substitue à la notation $\textcircled{\tfrac{1}{3}}$, et aussi les signes <, >, les abréviations sin, tan pour sinus et tangente.

Les indices sont introduits par Cramer (1750) pour écrire ses célèbres formules (les ', '', ''' suivies par $^{\text{iv}}$, $^{\text{v}}$, etc. deviennent usuels à la même époque), les indices d'indices sont introduits par Galois. Le signe $\Sigma$ est introduit par Euler.

L'usage de ces dernières notations n'est généralisé qu'au cours du vingtième siècle ; avant les mathématiciens écrivent des phrases du style : soient $a$, $b$, $c$, ... , $k$, l des quantités de tel type et, au moins jusqu'au dix-huitième siècle, rédigent alors leurs démonstrations dans des cas particuliers.

## 3 Bibliographie

¶¶¶ Encyclopedia Universalis : article Notation.

# Chapitre XI
# François Viète

Ce texte est écrit d'après les ouvrages cités en bibliographie, sans vérifications supplémentaires, quelques contradictions de dates ou de faits parmi nos sources n'ont pu être éclaircies. Nous avons développé ce chapitre, Viète étant non seulement un mathématicien important pour l'histoire des mathématiques mais aussi un homme de l'Ouest de la France qui est passé par Rennes.

François Viète (1540-1603) a mêlé toute sa vie ses recherches mathématiques et une carrière au service des grands personnages du royaume.

## 1 La jeunesse

François Viète nait à Fontenay-le-Comte en Vendée en 1540. Son aïeul François est marchand en 1528, son père Etienne est bachelier ès lois et notaire, sa mère s'appelle Marguerite Dupont. Un personnage important dans sa famille : un cousin germain de sa mère, Barnabé Brisson, qui sera président à mortier du parlement de Paris (1580).

Ses premières études se font au cloître franciscain de Fontenay, là où Rabelais avait passé 15 ans. Il poursuit des études de droit à la faculté de Poitiers (1558) à la fin desquelles il s'inscrit au barreau de Fontenay comme avocat (1559). Il prospère, devient sieur de la Bigotière (près de

Mervent, à côté de Fontenay) et compterait Marie Stuart, la reine Eléanor d'Autriche parmi ses clients.

## 2 Les Rohan

Il est secrétaire particulier d'Antoinette d'Aubeterre (1563) à Soubise (Charente maritime). Le mari de celle-ci, Jean de Parthenay-Larchevêque, huguenot mort en 1567, a dirigé (1562-63) la défense de Lyon assiégée par les catholiques. Mais la ville est prise. Le mari, accusé, est défendu par Viète qui écrit un "Discours des choses advenues à Lyon pendant que M. de Soubise y commandait".

En 1564, il devient précepteur de leur fille, Catherine de Parthenay. Il écrit le texte de ses leçons, tels les "Principes de cosmographie". Celle-ci (1554-1631), mariée d'abord au baron de Quellenec, tué à la Saint Barthélémy, épouse en seconde noce René, Vicomte de Rohan (1550-1586) une des plus vieilles et quasiment la première des familles nobles de Bretagne, qui a défendu Lusignan dans la Vienne contre les troupes de Henri de Guise en 1574. Elle sera la mère des célèbres Rohan et Rohan Soubise. Soutien des protestants, femme de lettres auteur de comédies et tragédies, connaissant l'hébreu, s'intéressant à l'astronomie et à l'astrologie, Viète la comparera à la fée Mélusine quand il lui dédie ses œuvres vers 1591.

Barnabé Brisson facilite l'entrée de son cousin dans la justice : Viète est avocat au parlement de Paris en 1570, puis entre au parlement de Bretagne.

## 3 Le parlement de Bretagne

Le parlement de Bretagne est crée en mars 1553. Il est alors prévu une chambre à Rennes tenant séance en août, septembre et octobre, une chambre à Nantes tenant séance en février, mars, avril (les séances seront suivies de vacations pour régler les affaires courantes). Un registre était tenu pour chaque période, ce qui permet notre information.

La lutte entre Rennes et Nantes tourne d'abord à l'avantage de Nantes où le parlement siège toute l'année de 1557 à 1560 puis à l'avantage, définitif, de Rennes le 4 mars 1560 (il sera transféré à Vannes en 1675 pour une quinzaine d'années par Louis XIV pour punir les Rennais de leur opposition).

Les deux périodes de 3 mois seront prolongées à 4 mois en 1585, à 6 mois en 1600. Les deux semestres seront réunis en un en 1724.

A l'origine, le Parlement compte 4 présidents et 32 conseillers, la moitié originaires de Bretagne siégeait à partir de février, l'autre moitié, les "non-originaires" de Bretagne (des provinces voisines le plus souvent) siégeait à partir d'août. Des offices supplémentaires seront créés à plusieurs reprises (12 pour une chambre criminelle en 1575, 16 pour les problèmes fiscaux en 1581).

Les non-originaires devaient donc être présents 3 mois en Bretagne ; le reste de l'année, ils pouvaient retourner s'occuper de leurs affaires chez eux. Beaucoup d'entre eux finissent par s'établir en Bretagne, s'y marier, remarier ou marier leurs enfants (la fille de Viète épouse un conseiller du

Parlement : Jean Gabriau ; elle vivait encore en 1628 ; l'histoire est analogue pour le père de Descartes).

## 4 Viète au Parlement de Bretagne

Viète est nommé conseiller non-originaire au Parlement de Bretagne à Rennes en 1573, en remplacement de Dodieu. Les huguenots viennent d'en être chassé mais les convictions calvinistes de Viète ne semblent pas avoir posé de problèmes. La protection des Rohan, de la même religion, était puissante.

Il est reçu au Parlement (il y avait tout un cérémonial) le 6 avril 1574. En fait, il sera peu présent à Rennes, le roi Henri III, sitôt sacré, lui demandant fréquemment d'autres services. Il est ainsi exempté en septembre et octobre 1576, en 1577, en 1579. Il est souvent à Beauvoir sur mer chez Françoise de Rohan, belle sœur de Catherine de Parthenay. En 1580, il ne paraît que le 15 octobre, en qualité de maître des requêtes, pour présenter des lettres relatives à des ventes extra-ordinaires de bois en Bretagne dont il a demandé la vérification. Le 31 octobre, il est absent ; ses gages lui seront payés mais il ne reviendra pas au Parlement. Il cède son office à Philippe Berland qui n'y est pas admis, un de ses frères en occupant un autre ; c'est finalement Mondoré qui en sera pourvu, le 11 juillet 1582.

## 5 Maître des requêtes

C'est désormais en tant que maître des requêtes que Viète va servir Henri III. Il est nommé le 28 mars 1580. Les fonctions de maître de requêtes ont beaucoup évolué dans la seconde moitié du seizième siècle. Leur nombre est passé de 8 à 16 sous François 1$^{er}$, il est de 51 en 1585. Dans ces temps troublés, ils sont souvent envoyés en province. Ils ont des tâches judiciaires et administratives et un rôle important dans les grands organismes d'état : chancellerie, parlement, grand conseil (tribunal des conflits), cour et conseil du roi.

Viète devient enfin membre du conseil privé. C'est à ces titres que ses contemporains le connaissait et non à celui de mathématicien.

Il est disgracié en 1585 : c'est un proche de Françoise de Rohan, sujet d'un conflit entre les familles de Guise et d'Albret.

## 6 Les dernières années

En avril 1589, après la rupture d'Henri III et des Guise, il redevient conseiller privé d'Henri III qu'il suit à Tours à la fin de 1589.

C'est l'époque où il déchiffre les messages codés des espagnols (voir ci-dessous).

Il devient conseiller privé de Henri IV en 1594 (l'année ou celui-ci entre à Paris, qui "vaut bien une messe"). Il est un des personnages les plus influents de la cour. En 1598, on note encore une mission au service du roi, afin de récupérer des sommes dues par des notaires du Poitou. Il quitte son poste en 1602, malade.

Il meurt à Paris le 23 février 1603. Selon L'Estoile, il serait mort riche, laissant 2000 écus dans sa demeure.

Viète a été marié deux fois : à Barbe Cottereau dont il a une fille, Jeanne, puis à Julienne Le Clerc (1593).

## 7 Les recherches mathématiques

La puissance de travail de Viète semble avoir été considérable, de Thou raconte qu'on l'a vu souvent demeurer trois jours entiers rivé à sa table de travail sans manger, ne dormant qu'en appuyant de temps en temps sa tête sur sa main.

Des copies de ses premiers travaux mathématiques "Harmonicon cœleste" existent encore à Paris et Rome. Sa première publication est de 1579 : "Canon mathematicus, seu Ad triangula cum adpencibus. Liber singularis universalium inspectionum ad canonem mathematicum." (Henri III lui accorde des dispenses pour l'impression, le 6 juillet 1579). Cet ouvrage, où Viète emploie systématiquement des nombres décimaux, contient des tables trigonométriques calculées par des formules analytiques et un calcul approché de $\pi$ avec 11 décimales exactes[1] (Adrien Romain, hollandais, donne 17 décimales exactes[2] vers 1609).

Dix ans plus tard, il publie : "Deschiffrement d'une lettre escripte par le Commandeur Moreo au Roy d'Espagne son maître, du 28 octobre 1589". La notice sur la vie de Viète écrite d'après un ouvrage de Jacques Auguste de Thou (lui-même personnage important de l'époque, 1553-1617, ami de Montaigne, conseiller d'Henri IV...), publiée en introduction à l'édition de 1646, détaille cette réussite de Viète. Il s'agissait de percer les codes secrets (plus de 500 signes) utilisés par la cour d'Espagne pour correspondre avec les vice-rois d'Amérique latine. Sur la demande du roi, Viète y parvient, ce qui permet de prendre connaissance de textes importants. De Thou ajoute : "Et cette chose troubla beaucoup les espagnols pendant deux ans, qui par le secret découvert au moyen de nos lettres interceptées à leur tour, étaient affligés par la nécessité de changer une méthode qu'ils pensaient inexplicable" ; les espagnols insinuent perfidement qu'elle est d'origine diabolique !

Commencent alors, à ses frais, les publications mathématiques, en latin, que Viète offre à ses amis. Il avait prévu de les regrouper en une vaste collection : "L'art analytique" dont nous n'avons pas tous les volumes. Le premier paraît en 1591 : "Isagoge in artem analyticem" comme les "Zététiques" ($\zeta\eta\tau\varepsilon\iota\nu$ = chercher), d'autres en 1593, 1595, 1600.

Après sa mort ses œuvres circulent sous forme de manuscrits, récupérés par différents mathématiciens : Ghetaldi, Pierre Alleaume puis son fils Jacques. Quelques unes sont publiées : 1615 (par Alexandre Anderson), 1630 (par Vasset), 1631 (par Vaulezard), 1637. Une grande partie d'entre

---

[1] 9 dit le petit Archimède sur $\pi$

[2] 15 dit le petit Archimède

elles, réunies par le père Mersenne (1588-1648) et Frans van Schooten (1615-1660) de Leyde, est publiée en 1646 par Bonaventure Elzevier et Abraham son neveu, célèbres imprimeurs. Les notations de Viète y sont abandonnées.

## 8 Points de repère dans l'œuvre mathématique

Pour les notations de Viète, voyez le chapitre 12. Notons que Viète refuse l'usage des nombres négatifs, les nombres, étant liés à la géométrie, ne peuvent être que positifs.

### 8.1 Equation du 3ème degré

Viète développe (de æquationum recognitione et emendatione tractatus duo, 1615) toute une méthode pour transformer les équations et les mettre sous une forme plus agréable. Par exemple, une translation de la variable permet de supprimer le second terme d'une équation polynomiale, ce qui résout immédiatement les équations du second degré et simplifie celles du troisième.

Viète donne la résolution suivante (trad. Peyroux, p. 224) de l'équation du troisième degré en A, écrite ici avec nos signes mais ses lettres :

$$A^3 + 3\,B\,A = 2\,Z$$

($B$ est plan et $Z$ solide, voir chapitre 12).

Il introduit une nouvelle inconnue $E$ telle que $B = E\ (A + E)$, (ce qui est comme résoudre $x^3 + p\,x + q = 0$ avec le changement de variable $x = \frac{p}{3y} - y$ puisque $A = \frac{B}{E} - E$) d'où

$$A^3 + 3\,A\,E\,(A + E) = 2\,Z$$
$$(A + E)^3 = 2\,Z + E^3$$
$$B^3 = 2\,Z\,E^3 + E^6$$

équation du second degré en $E^3$ qui permet de calculer $E$ puis $A$ ; la méthode est au fond celle de Cardan mais Viète n'effectue qu'une seule extraction de racine cubique.

Le même texte comporte aussi la résolution de l'équation de degré 4.

### 8.2 Relations entre coefficients et racines d'un polynôme

Ce texte se termine (trad. Peyroux, p. 238) par la mention des relations entre coefficients (Viète serait l'inventeur du mot) et racines d'un polynôme sous la forme suivante :

Si $A$ cubus $-\ \overline{B+D+G}$ in $A$ quad $+\ \overline{B \text{ in} D + B \text{ in } G + D \text{ in } G}$ in $A$,
aequatur $\overline{B \text{ in } D \text{ in } G}$
$A$ explicabilis est de quadlibet illarum trium $B, D$ vel $G$,
c'est-à-dire si :

$A^3 - (B + D + G)\,A^2 + (B\,D + B\,G + D\,G)\,A = B\,D\,G$ alors $A = B, D$ ou $G$ puisque l'égalité s'écrit encore $(A - B)(A - D)(A - G) = 0$.

Viète ajoute les énoncés pour les degrés 4 et 5.

### 8.3 Résolution de l'équation du 3ème degré et trisection de l'angle

Viète a montré que la résolution des équations du 3ème degré se ramène à des constructions géométriques étudiées depuis les grecs : duplication du cube, trisection de l'angle. Toujours en ne conservant que les racines positives.

Cette partie importante de son œuvre ne peut être résumée ici.

### 8.4 Pour finir

Il faudrait encore parler de la formule infinie donnant $\pi$, de la résolution d'un problème posé par Adrien Romain et de l'amitié entre les deux hommes qui en résulte (Romain voyage jusqu'en Poitou pour rencontrer Viète, y reste plusieurs semaines, son retour est payé par Viète), du différend avec Clavius au sujet du nouveau calendrier, avec Scaliger au sujet de la quadrature du cercle. Mais peut-être en avons-nous déjà beaucoup trop raconter sur ce sujet et, contrainte plus sérieuse, les documents ne sont toujours faciles à trouver, ils sont rares et souvent à Paris.

## 9 Bibliographie

### 9.1 Bibliographie générale

¶¶¶ Dedron, Pierre et Itard, Jean : Mathématiques et mathématiciens.— Paris : Magnard, 1959.

¶¶¶ Encyclopedia universalis : Article Viète.

¶¶¶ Etchechoury, Maïté : Les maîtres des requêtes de l'hôtel du roi sous les derniers Valois (1553-1589).— Thèse de l'école des Chartes.

¶¶¶ Grisard, J. : François Viète, mathématicien de la fin du seizième siècle.— Thèse inédite disponible au centre Alexandre Koyré, Bibliothèque du Museum d'histoire naturelle, Paris.

¶¶¶ Guichard, J. P., Sicre, J. P. : François Viète (thème d'activités interdisciplinaires en 1er cycle).— IREM de Poitiers.

¶¶¶ Montucla, Jean Etienne (1725-1799) : Histoire des mathématiques, tome 1.— Réédité par Blanchard. (Viète est étudié pages 573-574 et 600-613).

¶¶¶ Saulnier, Frédéric : Le Parlement de Bretagne.— Rennes : Plihon, Hommay, 1909.— 2 vol.— Réédité en 1991.

¶¶¶ Viète : Œuvres mathématiques, trad. Jean Peyroux.— Paris : Blanchard, 1991. Une traduction mot à mot.

¶¶¶ Witmer, Richard : François Viète et l'art analytique.— Plot n° 53, pages 23-28.

### 9.2 Vieilles éditions de Viète dans les bibliothèques de Bretagne

¶¶¶ Opera mathematica in unem volumen congesta... opera atque studio Francisci à Schooten Leydensis...— Lugduni Batavorum : ex officina Bonaventuræ et Abrahami Elzeviriorum, 1646.— 10-554 p.— B. M. Rennes 3909.

¶¶¶ Relatio Kalendarii vere Gregoriani... exhibita Pontifici Maximo Clementi VIII.— Parisiis : Io. Mettayer, 1600.— 40 feuillets ; 4°.— B. S. H. M. Brest R154.

pour quelques étapes de la démonstration. C'est peut-être une occasion pour eux de mieux comprendre nos exigences de clarté et de précision.

**Activité II**

Suivant les classes, il faudra préciser ce qu'on entend par contrôler.

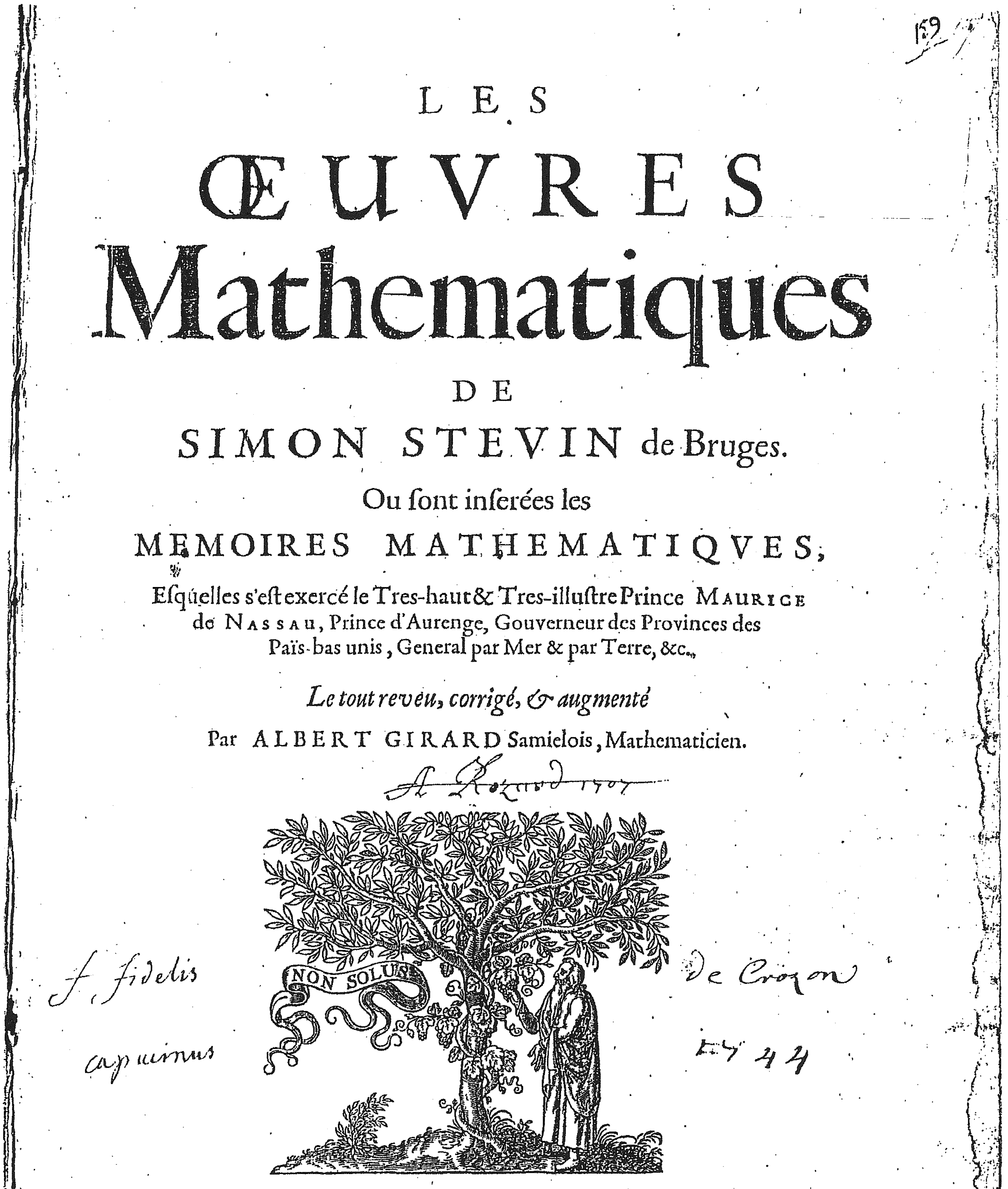
La méthode de Girard revient à expliciter, sur un cas particulier, un algorithme de calcul des racines d'une équation du second degré. Ce n'est finalement pas différent des textes qu'on retrouve sur des tablettes babyloniennes antérieures de 3500 ans ! Il est possible de demander aux élèves une rédaction structurée de cet algorithme et même un programme sur une calculatrice. Cependant les résultats de la calculatrice ne sont qu'approchés si les racines ne sont pas des rationnels simples.

Pour la question II, l'équation à résoudre doit d'abord être mise sous la forme utilisée par Girard, ce qui est une occasion de souligner l'importance des conditions d'application d'une formule ou d'un théorème. Le contrôle de l'exactitude des racines trouvées : $\frac{3}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ permet de vérifier si le développement du carré d'un binôme est bien maîtrisé, beaucoup d'élèves oubliant ici le double produit. Un contrôle sur calculatrice ne donne pas toujours des valeurs égales (cela dépend des calculatrices) et on pourra mettre l'accent sur les limites des calculatrices.

## 5 Vieilles éditions de Girard et Stevin dans les bibliothèques de Bretagne

¶¶¶ Girard Albert (1595-1632) : Invention nouvelle en l'algèbre, par Albert Girard mathématicien. Tant pour la solution des équations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science, suivi de : De la mesure de la superfice des triangles et polygones sphéricques, nouvellement inventée.— Amsterdam : Guillaume Iansson Blaeuw, 1629.— 64 p.
Ce livre se trouve à la bibliothèque municipale de Rennes, n° 54372.

¶¶¶ Stevin Simon (1548-1620) : Les Œuvres mathematiques de Simon Stevin de Bruges. Ou sont inserées les mémoires mathématiques, esquelles s'est exercé le... Prince Maurice de Nassau, prince d'Aurenge... Le tout reveu, corrigé, & augmenté par Albert Girard, Samielois, mathematicien. (I- L'arithmétique, traduction des six livres de Diophante (Stevin pour les quatre premiers, Girard pour les deux derniers), ... II- La cosmographie, III- Practique de la géométrie, IV- L'art ponderaire ou statique, V- L'optique, VI- La castramétation, la fortification par escluses, la fortification.— Leyde : Bonaventure & Abraham Elsevier, 1634.— 4-224-678 p., in folio.
Ce beau livre se trouve à la bibliothèque du service historique de la marine de Brest, n° R5138, et à la bibliothèque municipale de Morlaix, n° 159.



159

LES

# ŒUVRES Mathematiques

DE

SIMON STEVIN de Bruges.

Ou ſont inſerées les

MEMOIRES MATHEMATIQVES,

Eſquelles s'eſt exercé le Tres-haut & Tres-illuſtre Prince MAURICE
de NASSAU, Prince d'Aurenge, Gouverneur des Provinces des
Païs-bas unis, General par Mer & par Terre, &c.

*Le tout reveu, corrigé, & augmenté*

Par ALBERT GIRARD Samielois, Mathematicien.

~~A Rozard 1707~~

NON SOLUS

f. fidelis capucinus de Crozon

Ex 44

A LEYDE

Chez Bonaventure & Abraham Elſevier, Imprimeurs ordinaires
de l'Univerſité, ANNO CIↄ Iↄ CXXXIV.

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Premier Trimestre 1995
N° de Publication : 95-01

Université de RENNES I
Institut de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques
Campus de Beaulieu - 35042 RENNES CEDEX
Tél : 99 28 63 42

# FICHE DUBLIREM

**TITRE :** *"FAIRE DES MATHEMATIQUES A PARTIR DE LEUR HISTOIRE"*

**I.R.E.M. : RENNES**

**AUTEUR :** Le groupe *"ACTIVITES D'HISTOIRE DES MATHEMATIQUES"*

**DATE : JANVIER 1995**

**NIVEAU :** Classes de Collèges et Lycées

**PUBLIC CONCERNE :** Professeurs de Collèges et Lycées

**MOTS-CLES :**

- Histoire
- Activités

**RESUME :**

Notre objectif n'est pas de faire de l'histoire pour l'histoire mais d'apporter :

- une aide à la compréhension et à la maîtrise des notions enseignées,
- un support à la mémorisation pour certains, créant des paysages dans lesquels ils placeront mieux leurs nouvelles connaissances,
- une motivation en replaçant les notions dans une perspective historique.

| FORMAT | NOMBRE DE PAGES | PRIX T.T.C. | TIRAGE |
|---|---|---|---|
| 21 x 29,7 | 145 | ~~50~~ F 4€ | 500 Ex. |

I.S.B.N. 2-85728-014-9