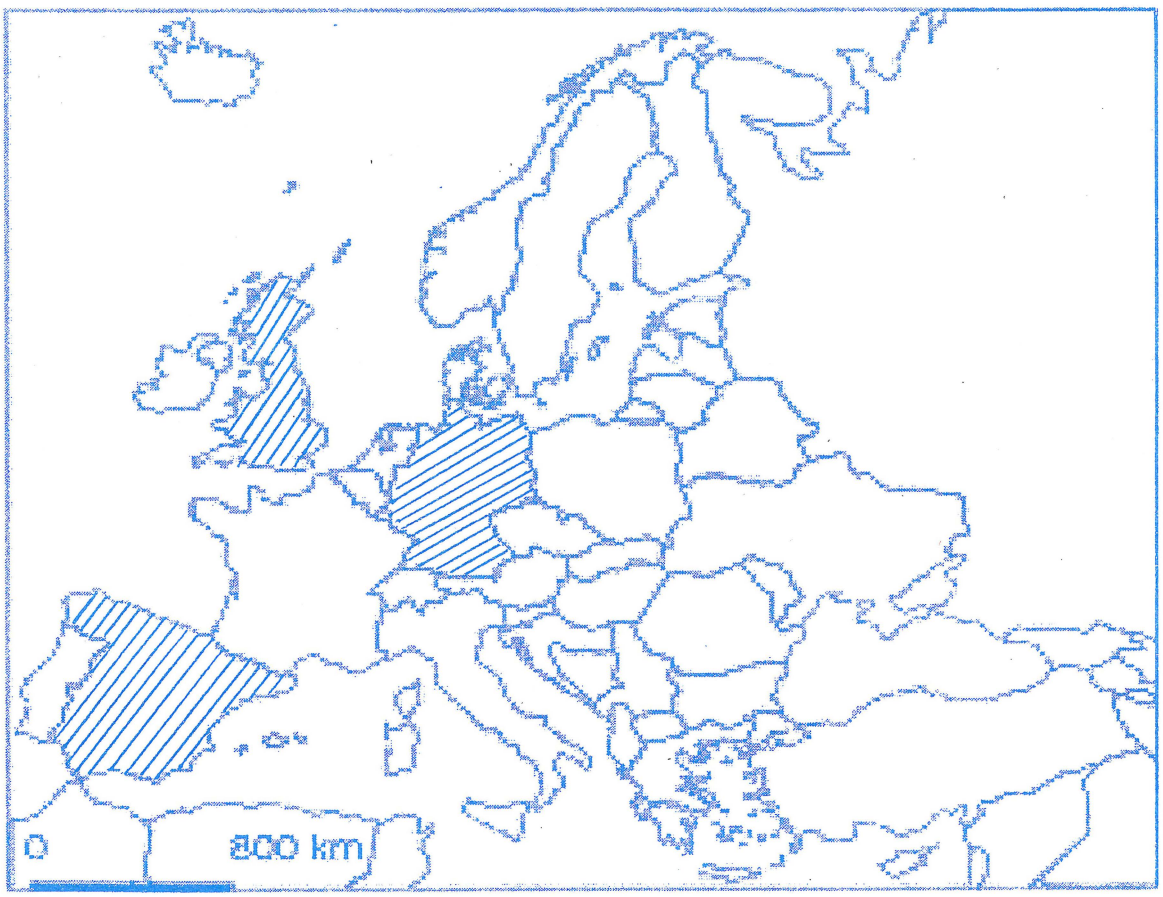
UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

DIFFERENTES APPROCHES EN EUROPE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES



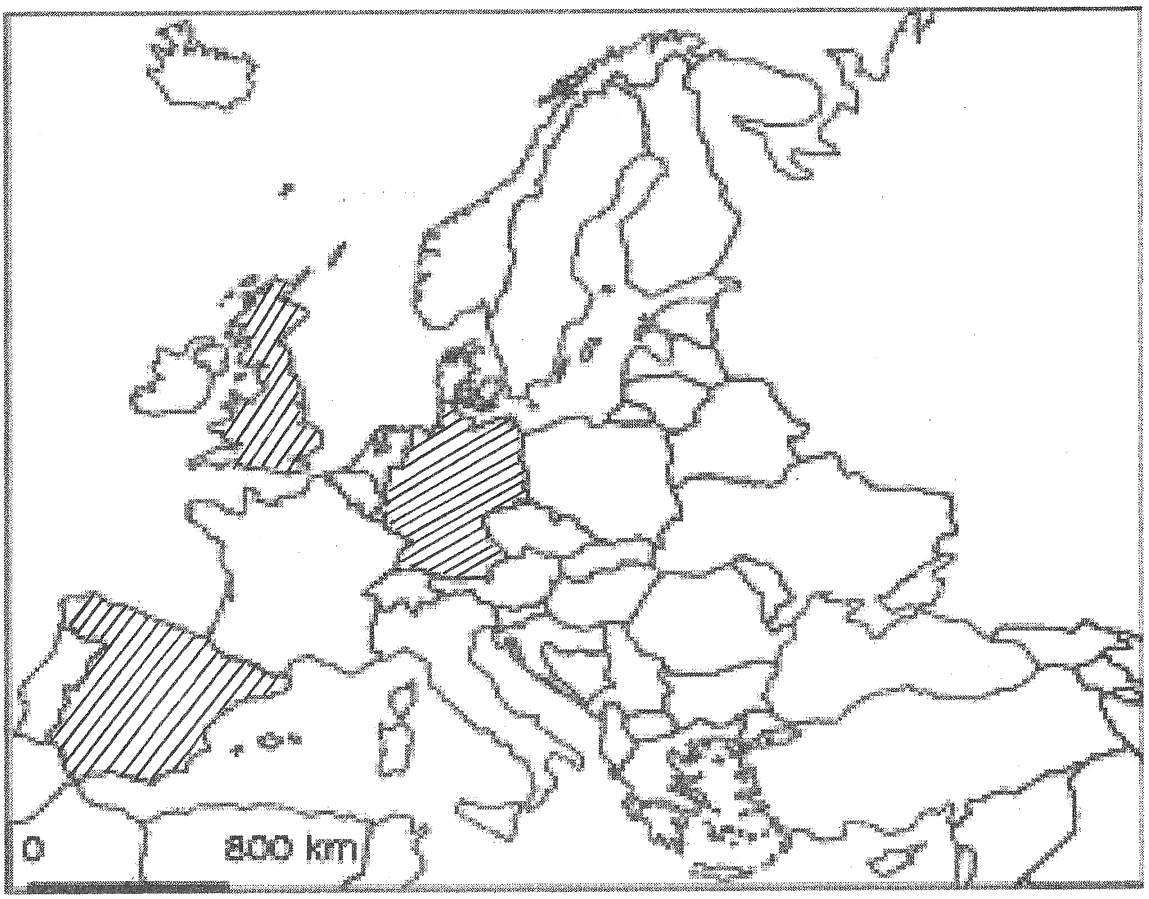
IREM DE RENNES

SEPTEMBRE 2001

UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

DIFFERENTES APPROCHES EN EUROPE DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES



IREM DE RENNES

SEPTEMBRE 2001

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, une ou plusieurs pages blanches). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

ISBN 2-85728-057-2

Ont participé à la rédaction de ce document :

BOHUON Jean-Yves
Lycée René Descartes - RENNES

CHARTIER Ghislaine
UFR de Mathématiques - RENNES

GARNIER Gilbert
Lycée Ile de France - RENNES

HAIRAULT Jean-Pierre
Lycée Joliot Curie - RENNES

HALBERT Roselyne
Lycée Bertrand d'Argentré - VITRE

LAPPART Jean
Collège Jean Monnet – BROONS

MIQUEL Annie
Lycée Jean Guéhénno – FOUGERES (Nommée dans l'académie de Rouen)

VIALLARD Michel
UFR de Mathématiques - RENNES

Cette recherche a été menée avec des moyens de l'IREM et de la DAFI.

La saisie et la mise en page ont été assurées par Danièle QUENTIN.
La reprographie par Françoise LE BESCOND.

SOMMAIRE

INTRODUCTION 1

Chapitre 1 – ANGLETERRE 3

1 – Présentation du système scolaire anglais 5

2 – Compte rendu d'observation de cours 17

3 – Analyse d'un manuel anglais (niveau lycée) 23

4 – Textes d'examens et de « course work » 39

Chapitre 2 – ALLEMAGNE 137

1 – Présentation du système scolaire allemand 139

2 – Analyse de manuels 147

Chapitre 3 – ESPAGNE 153

1 – Présentation du système scolaire espagnol 155

2 – Compte rendu d'observation de cours 163

3 – Exemples de fiches d'exercices et de sujets d'examens 173

Chapitre 4 – COMPARAISON 179

1 - Enseignement de l'analyse 181

2 – Exercices 195

3 – Annexes 203

CONCLUSION 229

BIBLIOGRAPHIE 231

INTRODUCTION

L'objectif de cette brochure, et du travail mené par notre groupe, était de permettre à des enseignants de collège et de lycée non seulement de découvrir l'enseignement des mathématiques tel qu'il est pratiqué dans d'autres pays d'Europe, mais également de mener grâce aux comparaisons effectuées une réflexion sur leur propre enseignement.

Pour des questions pratiques liées à la langue et aux nécessités de traduction, nous avons limité notre activité au Royaume-Uni, à l'Allemagne et à l'Espagne.

Nous avons dans un premier temps rassemblé des manuels scolaires, et des programmes de ces différents pays.

Nous n'avions pas les moyens d'établir un échange suivi avec des enseignants étrangers : une telle demande, faite à des enseignants anglais et allemands, s'est vue opposer un refus, dû à l'investissement (bénévole) qu'elle aurait demandé. Cependant, nous avons pu interviewer des étudiants anglais, espagnols et allemands de passage à Rennes.

Nous avons correspondu durant notre première année d'activité avec une enseignante anglaise, qui est venue à Rennes s'entretenir avec les membres du groupe.

Nous avons également collaboré avec des étudiants de deuxième année de l'IUFM, qui faisaient un stage en Angleterre. Nous avons confié à ceux-ci une grille d'observation, ainsi qu'une liasse d'exercices (présentée au chapitre 4) à proposer à des élèves anglais. La même liasse a pu être proposée à des élèves allemands, grâce à une étudiante de l'université de Hambourg. Nous tenons ici à remercier tous ceux et celles qui ont accepté ces échanges avec nous, et plus particulièrement Mary Cleare (Colyton Grammar School) et Mme Mailhos (IUFM de Bretagne, site de Rennes).

Des observations fructueuses ont été directement effectuées par des membres du groupe qui se sont rendus en Angleterre et en Espagne (voir les comptes rendus d'observation dans les chapitres correspondants). Seule l'immersion dans un établissement permet de constater le déroulement effectif de l'enseignement de mathématiques, et de comprendre la vie d'une classe. Nous espérons que ce document rendra compte aussi fidèlement que possible de ce que nous avons noté ; sans donner un excès de détails, nous avons souhaité retranscrire plus particulièrement ce qui nous a frappé, tout en décrivant suffisamment le système éducatif concerné pour permettre au lecteur de comprendre le contexte correspondant.

CHAPITRE 1

ANGLETERRE

Système scolaire anglais

I - CADRE GENERAL

Le système anglais ne possède pas d'enseignement en école maternelle (Socialisation en "Play Ground" et écoles maternelles privées). L'enseignement est obligatoire de l'âge de 5 ans à l'âge de 16 ans, dans le système public qui concerne 90 % des élèves elle est gratuite jusqu'à l'âge de 18 ans. L'enseignement primaire et secondaire comporte 13 années (numérotées de 1 à 13) les six premières années se déroulent dans une école primaire. De la 7ième à la 11ième année, les jeunes sont, pour une grande majorité d'entre eux dans une Comprehensive School, certains sont dans une Grammar Schol dont l'entrée se fait sur examen. Il y a beaucoup d'établissements privés, certains étant très chers. A la fin de la 11ième année les élèves passent le **GCSE** "General Certificate of Secondary Education". Les 12ième et 13ième années se passent soit dans le même établissement soit dans un établissement spécifique et sont conclues par le **A-Level**. Les élèves passent des tests nationaux à 7, 11 et 14 ans en anglais, maths et sciences. Il n'y a pas de redoublement, grâce à des groupes de niveau avec des exigences différentes.

Classes-Ages-Examens

Ages	17-18	16-17		15-16	14-15	13-14	12-13	11-12	10-11	9-10	8-9	7-8
Classe en France	Term.	1ère		2nde	3ème	4ème	5ème	6ème	CM2	CM1	CE2	CE1
	BAC				Brevet							
Classe en GB	Y 13	Y12		Y11	Y10	Y9	Y8	Y7	Y6	Y5	Y4	Y3
	A level			GCSE								

II - DE LA 7IEME A LA 11IEME ANNEE

Les élèves étudient à peu près les mêmes matières qu'en France mais ont aussi des cours d'éducation religieuse et d'éducation sexuelle, (une langue vivante est obligatoire depuis peu). Les cours ont lieu en général, sans temps libre, de 8h30 à 15h30. Les séquences durent 55 minutes. Il y a régulièrement des assemblées d'élèves ; les symboles jouent un rôle important dans l'éducation : port de l'uniforme au moins jusqu'à 16 ans, récompenses et certificats honorifiques, sanctions pour les élèves indisciplinés, déclarations et affiches comportant des maximes ou les valeurs de l'établissement.

C'est en fin de Y11 que les élèves passent les différents GCSE (un par matière).

III - DE LA 12IEME A LA 13IEME ANNEE

Les élèves peuvent parfois poursuivre dans leur établissement si celui-ci comporte une "Sixth Form" sinon ils poursuivent dans un autre établissement, un « Further Education College » .

On peut dire que ces classes (Y12, Y13) correspondent à nos classes de premières et de terminales générales. L'élève se spécialise, il choisit trois ou quatre matières (par exemple : Anglais - Mathématiques – Sciences) qu'il étudie à raison de 5 heures par semaine. Cela peut être beaucoup plus (Maths pures 6 h, Statistiques 3 h, Mécanique 3 h). L'enseignement technologique est dispensé dans d'autres établissements et ne se termine pas par un A-Level.

Par ailleurs, le taux de scolarisation des jeunes de plus de 16 ans est plus faible qu'en France (même s'il a tendance à s'accroître). Par exemple, dans un établissement sur 420 élèves au collège seulement 2 sont en "A level" de maths, mais les reprises d'études sont beaucoup plus nombreuses qu'en France.

IV - LA SCOLARITE OBLIGATOIRE

Depuis la loi de 1988 "Educational Reform Act" le **"National curriculum"** définit les programmes des années Y4 à Y11; depuis quelques années, il en est de même pour les études menant au A-Level .

La scolarité obligatoire est divisée en quatre périodes "Key stages". Les élèves subissent des évaluations nationales à la fin de chaque période, (SAT's : Standart Attainment Task). A la fin de la quatrième période le contrôle des connaissances est validé par le GCSE.délivré pour chaque matière étudiée.

KS1	de 5 à 7 ans	Tests en Anglais et Mathématiques.
KS2	de 7 à 11 ans	Tests en Anglais Maths, Sciences et Technologie.
KS3	de 11 à 14 ans	Tests en Anglais Maths, Sciences et Technologie.
KS4	de 14 à 16 ans	Examen sur chacune des matières étudiées.

V - L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

Les connaissances et les savoir-faire exigibles sont divisés en groupes "Attainment Target" ; ce qui doit être acquis à la fin de chaque période est défini dans chacun des huit niveaux "Level" (il y en avait 10 au départ) et est divisé en quatre thèmes :

- AT1 : Mathématiques appliquées "Using and applying Mathematics" .
- AT2 : Nombres et algèbre "Number and algebra".
- AT3 : Figures et mesures "Shape, space and measure".
- AT4 : Gestion de données et statistiques "Handling data".

Depuis quelques années le thème AT1 Mathématiques appliquées comprend des projets de recherche développés sur la durée (Courseworks – Investigating).

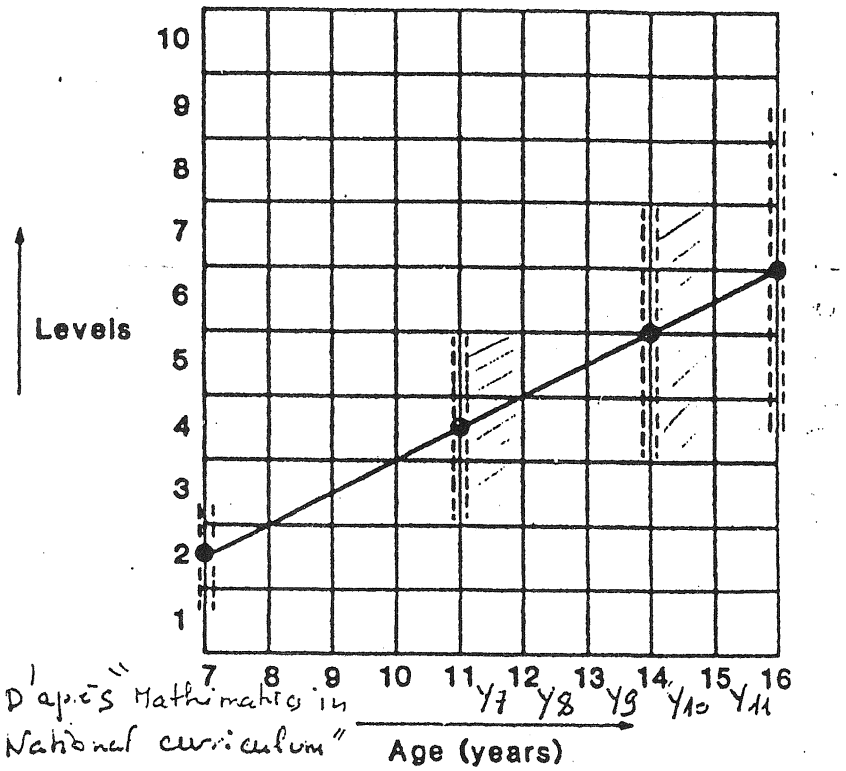
VI – ORGANISATION DU TRAVAIL DES ELEVES

L'enseignement se fait, pour chaque classe d'âge, **par groupes de niveau**, (level), au nombre de trois les premières années ils peuvent passer à sept en dernière année (Y11). La

taille des groupes dépend des compétences des élèves, elle varie en général de 15 à 35 élèves, les meilleurs groupes ont des effectifs importants, un groupe très faible peut comporter cinq élèves. Comme le représente le diagramme ci-dessous, à un âge donné il est prévu une fourchette de répartition par niveau.

Dans le "National curriculum" les programmes ne sont pas organisés par année d'âge mais les connaissances exigibles (AT1 à AT4) sont détaillées par niveau (level), un même niveau peut être traité par des élèves d'années différentes. Ainsi des élèves de Y7 (classe de 6^{ième} en France) de bon niveau pourront dans un groupe faire des calculs de périmètres qui sont traités dans un groupe d'élèves faibles de Y11 (année correspondant à la classe de seconde en France).

D'après « Mathematics in national Curriculum »



Les progrès des élèves sont surveillés avec attention et le passage dans un autre groupe devrait avoir lieu si un élève n'est plus à sa place dans son groupe mais cela est rare.

Les élèves en grande difficulté peuvent être suivis par des assistants "head teachers", il leur est parfois dispensé des cours de méthode de travail. De plus chaque élève tient à jour sa scolarité, un dossier comprenant des devoirs, des rapports et des appréciations.

En classe le professeur introduit le cours par des exemples, peu de définitions sont énoncées, de nombreux exercices d'application directe sont résolus sur "le cahier du jour". Le livre est l'outil de base de cet enseignement et son contenu peut être différent selon les groupes de niveaux auxquels il s'adresse; ainsi la série de livrets de la méthode SMP "School Mathematics Project" rédigé antérieurement à la parution du "National curriculum", pour les élèves de 11-12 ans, est-elle encore très populaire, elle est utilisée ou complétée par les enseignants. L'élève ne dispose que de son cahier du jour qu'il utilise en classe pour faire les exercices et qui est corrigé le soir par le professeur.

L'élève doit entreprendre un travail personnel, "coursework" sous forme d'un ou deux sujets à développer, (voir page 121), ce travail est évalué et rentre pour une part dans la note d'examen, le GCSE, en Y11. Des travaux collectifs sont développés au même titre que les "courseworks". Dans certaines classes les élèves travaillent tout au long de l'année sur un ou deux sujets, par exemple les polygones (dénombrement, symétrie, tracés, angles). Les travaux réalisés sont affichés sur les murs de la classe,. murs sur lesquels des maximes comme par exemple : "Faire toujours son maximum", sont aussi accrochées. Tout le matériel, même de papeterie et de traçage, est fourni à l'élève par l'établissement, et y demeure.

VII – LES EXAMENS

En cours et en fin d'année (Y11) l'élève passe un GCSE pour chacune des 10 matières qu'il a étudié durant les deux années précédentes. (6 matières sont obligatoires, les autres sont au choix).

C'est le gouvernement qui définit les programmes scolaires et ce sont des organismes privés qui proposent et font passer les examens "Examining Boards", (ils sont au nombre de 6 ou 7 en Angleterre), tous ces organismes sont agréés par le "SCAA" "School Curriculum and Assesment Authority". Un établissement secondaire par l'intermédiaire des différents chefs de département peut s'affilier à plusieurs "exam board" chacun des ces organismes examinant une ou plusieurs matières.

En mathématiques pour l'examen final GCSE, trois sujets différents sont proposés selon le groupe de niveau auquel appartient l'élève :

De base **"Foundation"** permettant d'obtenir les mentions G , F, E ou D,
Moyen **"Intermediate"** permettant d'obtenir les mentions E, D, C ou B,
Supérieur **"Higher"** permettant d'obtenir les mentions C, B A ou A*

En mathématiques un même organisme peut proposer plusieurs programmes "syllabus" à partir des directives officielles. Les épreuves du GCSE peuvent dans certains cas se dérouler en plusieurs sessions sur les années Y10 et Y11. Toute cette organisation relève de la responsabilité du chef de département.

Certains "examining boards " choisissent des questions directes d'autres des questions plus élaborées. Le programme est le même pour chaque "Board" , ce qui peut changer c'est l'importance donnée à chacun des objectifs. Le pourcentage des questions portant sur l'un ou l'autre des domaines de connaissances exigibles (attainment target) est annoncé par avance.

Les connaissances exigibles dans le domaine "AT1 ""Using and applying Mathematics" sont à part et évaluées soit sous forme de "course work" soit en examen final. 20 % du GCSE peut être la note du "coursework" du candidat, corrigé par le professeur lui-même puis pondéré par le centre d'examen ou corrigé par le centre d'examen, suivant les cas.

Les établissements privés ne sont pas astreints au programme national ; ils peuvent ne pas faire appel à un "Board" et organiser eux-mêmes les examens.

Voici les pourcentages des grades obtenus en mathématiques au GCSE.

	A*	A	B	C	D	E	F	G	U	A* – C	A* – U

1999	2,4	8,1	16,2	21,3	18,2	15,3	9,4	5,0	4,1	48	672950
1998	2,1	7,8	15,7	21,4	17,4	16,3	9,2	5,1	5,2	47	670141
1997	2,1	7,5	14,6	23,1	16,5	15,6	12,2	6,3	2,1	47,3	681265
1997	2,0	7,0	14,3	23,2	16,4	15,8	12,6	6,5	2,2	46,5	691111
1995	1,9	6,5	13,4	23,1	17,1	16,1	12,8	6,7	2,4	44,9	678445
1994	1,8	6,7	15,8	22	17,2	15,5	12,5	6,3	2,2	46,3	640608

Résultats en % au GCSE Source Internet U : unclassified

Pour prétendre poursuivre jusqu'au "A Level" il faut au moins 5 notes entre A et C, sur l'ensemble des matières, pour poursuivre en maths il faut entre A et C pour cette matière. Pour le **A Level** préparé en deux ans l'étudiant passe 3 A Level différents (Anglais Maths Sciences par exemple) ; les grades obtenus pour chaque A Level vont de A à E. Les sujets d'examen sont rédigés par les "exams board" qui proposent des programmes "Syllabus" respectant les instructions officielles, mais les établissements ont totale liberté sur les programmes.

VIII - ENTREE A L'UNIVERSITE

Les élèves font un dossier pour l'université de leur choix (en général loin du domicile familial). Ce choix doit correspondre à leur niveau car il y a une sélection suivant les résultats scolaires.

IX – ORGANISATION DES ETABLISSEMENTS ET SERVICES DES PROFESSEURS

Un chef d'établissement "**The Headmaster**" est nommé par un conseil de direction.

Chaque matière est organisée en département , avec un chef de département "**Head of department**" qui est le chef hiérarchique de ses collègues. Le chef de département recrute les professeurs avec l'accord du chef d'établissement, il gère le budget de sa matière, il établit les répartitions des groupes, les emplois du temps. Il décide des lignes directrices sur les méthodes d'enseignement, il décide de la progression du programme pour sa matière et contrôle cette progression. C'est lui qui choisit les organismes qui font passer les examens.

Dans certains établissements les professeurs peuvent avoir à leur disposition une progression de l'ensemble du programme fournie par l'organisme d'examen et des tests d'entraînement en cours d'année. Cela implique que les groupes de niveau changent ensemble de chapitre, que le chapitre précédent ait été traité intégralement ou non.

Les professeurs ont des obligations que nous ne connaissons pas en France : présence dans l'établissement de 8h 30 à 15 h 30, 35 h de présence pour un service d'environ 25 heures par semaine, remplacement au pied levé des collègues absents. Les établissements emploient très peu de personnel administratif ou de personnel de surveillance, une partie des tâches sont effectuées par les enseignants. Les enseignants assurent le relevé des absences, des heures de surveillance appelées "**duty**" et un suivi des élèves (Tutorat),

En plus d'assurer ses cours et leurs préparations, le professeur ramasse les cahiers des élèves pour les corriger le soir (200 cahiers par semaine pour l'enseignante que nous avons rencontrée), le temps de correction en classe est plus court qu'en France.

Chaque professeur titulaire dispose d'une salle de classe qui sert de salle pour le tutorat, cette salle est agencée comme une salle spécialisée avec les travaux collectifs affichés aux murs et la documentation du professeur sous la main.

En 2000, le salaire annuel d'un enseignant au 6^{ième} échelon était de 18 000 livres avant les prélèvements sociaux (25 % du salaire pour les impôts et la sécurité sociale). Les salaires augmentent de 500 livres pour chacun des 9 échelons.

X - REPARTITION DES ECOLES SECONDAIRES EN ANGLETERRE EN JANVIER 1998 :

Etablissements secondaires anglais.

3567 établissements

Ecole 11-16	1 669
Ecole 16-18	1 578
Modern school	113
Grammar school	157
Technical	6
Autres écoles secondaires	44

Etablissements indépendants (independent school,Public school) : 2 227
Les établissements privés scolarisent environ 10% des élèves.

XI – EVALUATION DES ETABLISSEMENTS

OFSTED : OFFICE FOR STANDARDS IN EDUCATION

Les établissement scolaires sont inspectés par des équipes d'inspecteurs indépendants qui sont agréées "Registered Inspectors" par les services du ministère de l'éducation "HMCI" ("The office of Her Majesty's Chief Inspector of school in England"). Ces équipes doivent comprendre des personnes expertes (chefs d'établissement) mais aussi au moins un inspecteur profane n'ayant exercé aucune responsabilité d'établissement*). Ces inspecteurs ont pour mission d'analyser tous les aspects du fonctionnement d'un établissement.

L'inspection est un véritable "Audit", se déroulant suivant un protocole défini par le ministère, la durée et le nombre d'inspecteurs présents est fonction du niveau et de la taille de l'établissement (par exemple pour un établissement de 1200 à 1500 élèves le nombre de jours minimum d'inspection est de 57 (JxI = 57, J : nombre de jours par inspecteur, I : nombre d'inspecteurs).

Sont analysés suivant un protocole précis : la structure, l'équipe de direction, le budget, la population scolarisée, la protection de l'enfance, les relations éducatives, la discipline, les comportements et motivations des élèves, les activités extra scolaires, l'emploi du temps, les objectifs pédagogiques, le respect des programmes et des capacités de la population scolaire, les succès aux différents examens et les poursuites d'études, les récompenses honorifiques, le degré de satisfaction des élèves et de leurs parents.

Par exemple les cours des professeurs sont inspectés suivant une grille d'analyse qui inclut :

- Les réussites "Standards of achievement" en relation avec les programmes et avec les capacités des élèves.
- La qualité pédagogique de l'enseignant, la qualité des apprentissages.
- La satisfaction des parents et des élèves est mesurée à l'aide d'un questionnaire traduit dans une dizaine de langues pour les différentes communautés.

Un rapport est rendu qui doit permettre de décider du maintien ou non de l'établissement dans le système d'éducation (Référence : Handbook for the inspection of schools).

* Note : En fait la loi permet qu'un chef d'établissement ou un ancien chef d'établissement soit cet inspecteur sauf pour son établissement.

Interview de James, assistant d'anglais

James a débuté l'école primaire à 4 ans (puisqu'il est né en novembre), et il y est resté jusqu'à l'âge de 11 ans.

Il a commencé ses études secondaires à 11 ans, en septième année (Year 7), dans son école il appartenait à une division "class form". De la 7ième à la 9ième année l'enseignement a porté sur les apprentissages de base, de mathématiques, de sciences, d'anglais et de technologie, une langue étrangère était aussi obligatoire.

Pendant les 7ième et 8ième année (Y7, Y8), il a travaillé avec sa division. En mathématiques l'enseignement était individualisé, chaque élève travaillait en classe et à la maison dans des livrets "booklet" de la méthode SMP (différents suivant le niveau des élèves). En classe, le professeur ne s'adressait pas de manière collective à l'ensemble des élèves mais à chacun pour répondre à ses questions.

A partir de la 9ième année le professeur de mathématiques donnait des cours, la répartition des élèves de la "class form" se faisait par niveaux, James a fait 2h à 2 h 30 de mathématiques par semaine. La fin de l'année Y9 correspond à la fin du "Key stage 3" l'examen n'a pas d'autres fonctions pour les élèves que la répartition en groupes de niveau. Il peut par contre servir à connaître le niveau de l'enseignement ou de l'établissement.

C'est à la fin de la 9ième année qu'il a choisi ces matières pour le GCSE.

Anglais écrit (grammaire),
Anglais littérature,
* Double science,
* Maths,
* Français,
Espagnol,
Cuisine (pour la technologie),
Instruction religieuse,
Géographie.

Les matières notées * ont eu leur enseignement assuré en groupes de niveau

Un exemple de "coursework" en maths : "la plupart des voitures sont rouges, discuter". James a comptabilisé les voitures pendant une semaine à un carrefour, il a contacté des usines d'automobiles ainsi que le ministère des transports. Travaillant sur des données statistiques, il se devait d'utiliser par exemple l'écart type.

Chaque matière comporte des "courseworks" qui peuvent compter jusqu'à 30% dans les notes des GCSE et favorisent les élèves ayant des résultats faibles aux examens.

Certaines matières peuvent avoir leur GCSE en cours d'année, pour les maths l'examen a eu lieu en fin d'année.

Pour prétendre poursuivre jusqu'au A Level il faut au moins 5 notes entre A et C, pour poursuivre en maths il faut entre A et C pour cette matière.

James a poursuivi jusqu'au A Level dans le même établissement en "6th Form ", il a dû choisir 3 matières (il en a pris 4 au début). A raison de 4 heures par semaine pour chacune des trois matières il a étudié le français, les mathématiques et la géographie. Sa quatrième matière était la culture générale (philosophie; éducation religieuse, histoire de l'art). Les effectifs sont très petits ainsi ils étaient 13 en cours de mathématiques et pour ce qui concerne les cours de français ils étaient 5 au début et finalement il a eu trois professeurs par semaine pour lui seul.

En mathématiques, à Londres, en années Y12 et Y13 il a suivi un enseignement de mathématiques pures, de statistiques et de mécanique. Avec ses "A Level" il est rentré à l'université pour suivre les enseignements de français et gestion.

2

Compte rendu d'observation de cours

Quelques exemples de déroulements de « cours » dans des classes secondaires de Birmingham

Il s'agit de classes menant au GCSE (équivalent du brevet) donc de Y7 (équivalent de la 6ème) à 11 (équivalent de la 2nde). Dans ce qui suit, le plus souvent, un indice indique s'il s'agit de classes regroupant des élèves forts (1), moyens (2 ou 3 selon les niveaux) ou faibles (3, 4 ou 5 selon les niveaux).

Les classes observées appartiennent à trois établissements :

F.C. Frankley Community School.
F.D. Four Dwellings school.
W.G. Wood Green high school.

Toutes les séances vues durent de 50 minutes à 1 heure et les élèves ont, en général, trois séances de mathématiques par semaine.

Tous les exercices sont traités par les élèves sur des petits cahiers distribués en début de séance et ramassés, pour correction, à la fin de la séance.

1 – F .C. Y7 (équivalent de la 6ème). 27 élèves sans doute de niveau moyen

L'enseignante explique pendant 20 minutes environ, et sans que les élèves ouvrent leur livre ou prennent des notes, ce qu'est un quart de tour (direct ou indirect), un demi-tour, puis passe aux angles en degrés, parle un peu du triangle équilatéral, et termine en revoyant ce que l'on nomme angles aigus, obtus, saillants. Elle donne ses explications en se tournant vers deux assistants. Après distribution des cahiers, elle demande aux élèves de recopier les exemples du livre puis de faire une batterie d'exercices très répétitifs. Elle s'absente et abandonne sa classe à un des assistants qui aide les élèves travaillant seuls sur leur cahier.

2 – F .C. Y11. Classe de 18 élèves, très hétérogène

Le but de la séance est de faire résoudre, par chaque élève sur son cahier, des problèmes de constructions de triangles assez simples, avec règle, compas et rapporteur (tracés de médiatrices...). Deux adultes suivent cette séance et un autre enseignant vient en renfort, aider certains élèves. A la fin les élèves ont à tracer, grâce à un quadrillage, un polygone semblable à un polygone donné.

3 – F.C. Y9. Classe faible de 22 élèves avec, en particulier, des filles déchaînées, bruyantes et ne travaillant pas.

La séance consiste à calculer des différences de durée en heures et minutes. Après trois ou quatre exemples expliqués par le professeur, les élèves ont à traiter, sur leur cahier, de nombreux exemples.

4 – W.G. $Y11_1$: 30 élèves assez bons en mathématiques.

a) L'enseignement commence par quelques exercices du type « le compte est bon », les élèves répondant assez bien. Mais pour réaliser 98 avec 6, 7 et 8 le professeur n'arrive pas à obtenir qu'un élève viennent effectuer au tableau la multiplication 14 x 7 et finit par redécortiquer la façon de faire cette opération !

b) L'enseignant aborde ensuite un premier chapitre de probabilités : après avoir envisagé le tirage d'un billet de loterie il demande aux élèves, par deux, de lancer de nombreuses fois un dé (puis une pièce) et de noter les apparitions de nombres pairs ou impairs (respectivement pile ou face). Finalement peu de choses pour une bonne classe de fin de GCSE (16 ans). Dans cette classe les élèves réalisent tout au long de l'année un travail collectif sur les polygones (tracés, angles, ...) avec exposition des travaux sur les murs de la salle de mathématiques. Dans cette école (meilleure que FC ou FD) de 1200 élèves, c'est-à-dire 240 élèves par classe d'âge seulement 25% environ suivent le A-level (équivalent du bac) et seulement quinze à vingt choisiront les mathématiques pour leur A-level.

5 – W.G. $Y10_2$: classe de 26 élèves

Présentation, pendant une dizaine de minutes des relations entre les angles définis par une sécante à deux droites parallèles (alternes, correspondants...) puis les élèves, sur leur cahier, traitent environ 80 petits exercices sur ce sujet ; n'ayant pas fini à la fin de l'heure ils ont à terminer pour le prochain cours de mathématiques.

6 – W.G. $Y8_2$: classe de 28 élèves

La séance commence par le jeu de mastermind : deviner trois chiffres dans un certain ordre.

La plus grande partie du cours consiste ensuite à faire évaluer (à vue de nez puis au rapporteur) des angles tracés dans un livre et en particulier à faire constater, expérimentalement, que des angles sont supplémentaires.

7 – F.D. $Y10_5$

Cinq élèves très très faibles et sans doute difficiles à tenir, pris en charge par une professeur stagiaire et un autre enseignant venant en renfort !

Le cours commence par des explications sur un travail à faire pour la séance suivante, consistant à nommer des figures géométriques données (nombre de côtés, régularité, ...). Puis le professeur distribue un test de GCSE de 11 pages de niveau faible afin de les entraîner pour des tests prochains. Les questions sont d'ordre numérique, géométrique, ou mesures.
Seules les questions très faciles sont résolues par les élèves mais pas une question du type :
$? : 2 = 5$.

8 – F.D. $Y8_1$: 21 élèves assez bons en mathématiques

Le cours commence par des petits exercices d'échauffement sur le cahier. Résoudre $3x + 7 = 3 + x$, un calcul de densité, tracer $y = 2x + 1$ et préciser son gradient, calculer xy, $y - x$, $x - y$ et $2x + y$ pour $x = -2$, $y = 3$, immédiatement corrigés par le professeur. Ensuite à partir de distances entre 6 villes sur un schéma, il est demandé aux élèves de dresser un tableau de ces renseignements sur leur cahier, comme déjà fait dans un précédent cours. Le professeur répond aux questions, propose d'autres exercices analogues aux plus rapides, mais laisse passer des erreurs. Il corrigera les cahiers pour la prochaine séance.

9 - F.D. $Y11_1$: 25 élèves

Le professeur qui est le chef du département des mathématiques, propose, en rythme soutenu, de faire des exercices de révision d'abord pris dans un livre (niveau moyen) sur des aires et volumes concrets (piscines, plateau à rebord, gouttières, boites en carton contenant un tube cylindrique...) et il propose en plus :

- si $x < 2$ alors $x^2 < 4$ est-il vrai ?
- des formules $\pi a^2 + b$, $\pi(a^2 + b^2)$, $\frac{\pi a^3}{3a}$, $\frac{4}{3}\pi a^3$ sont-elles possibles pour des aires.
- aires de rectangles limités par deux demis cercles.

Il propose enfin un travail à faire à la maison, sur un autre cahier, portant sur un grand nombre de calculs d'aires et de transformations de mesures (cm^3 en ml...).

Deux élèves, paraît-il meilleures, ne suivent pas ce programme et font des tâches, très répétitives sur des statistiques.

10 - F.D. $Y9_1$: 25 élèves

Toujours avec le chef du département.

a) Test oral de 20 minutes environ. Les questions sont posées par enregistrement audio (répétées une fois) au début toutes les 5 secondes, puis 10 secondes et pour les dernières, 15 secondes ; les élèves remplissent une feuille de résultats. Le test est numérique avec, par exemple :

- combien vaut $\frac{48}{6}$?

5 secondes

- combien vaut 7,4 x 100 ?

- quelle est la moitié de 138 ?
- traduire $\frac{15}{20}$ en pourcentage. 10 secondes
- écrire 6.5 millions en chiffres.
- plus grand x tel que $x^2 < 144$

- 40% de N vaut 16. Combien vaut N ?
- combien vaut approximativement $\frac{80.18 \times 9.89}{1.96}$? 15 secondes
- 28.16 = 448, que vaut 448 divisé par 1,6.
- si x = 20 combien vaut y si $x = 2y\ (x + y)^2$?

b) Après correction du test (et de ses erreurs) le professeur demande d'effectuer les produits de 11 par les nombres 71 , 86 , 99 , 131 , 178 , 748 , 4132 et d'essayer de trouver une règle ... Les élèves ne trouvent rien.

3

Analyse d'un manuel anglais (niveau Lycée)

Présentation du livre anglais : Understanding Pure Mathematics

Introduction

Ce livre couvre le programme de mathématiques qui correspond au niveau A-Level (GCE advanced level Mathematics). Il contient 540 pages.

Au niveau du cours, il commence en général par un exemple introductif très succinct de manière à développer une idée très intuitive des notions. Ensuite les définitions et théorèmes sont énoncés, ces derniers étant le plus souvent, soit non démontrés, soit démontrés dans des cas particuliers.

Au niveau des exercices, ce livre contient beaucoup d'exercices très calculatoires d'applications directes du cours. Il contient aussi des textes issus des questions d'examens. Pour chaque chapitre, nous avons sélectionné quelques exercices significatifs soit qu'ils fassent partie des exercices répétitifs, soit qu'ils fassent partie de textes d'examen (marqués d'une astérisque), soit enfin qu'ils ne fassent pas partie des exercices donnés en France.

Description du contenu du cours

Chapter 0 : Introductory work (rappels)

- Présentation de $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$
  Commentaire : Démonstration par un raisonnement par l'absurde de « $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel ».
- Inégalité – inéquation du 1er degré – valeur absolue
- Manipulations algébriques (développement, factorisation, réduction au même dénominateur, division euclidienne de polynômes et application aux fonctions rationnelles)
- Racines carrées (propriétés – expression conjuguée)
- Equation du second degré
  Commentaire : Trois manières de résoudre une telle équation :
  - by inspection (par factorisation évidente)
  - by the formula $\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
  - by completing the square (mise sous forme canonique), méthode qui permet aussi d'avoir des informations sur le minimum ou le maximum
  Commentaire : pas de référence au signe de b^2-4ac *et démonstration des formules en exercice.*
- Trigonométrie (élémentaire dans le triangle rectangle, formules pour angles supplémentaires, angles en degré)
- Résolution de triangles
  Commentaire : La formule d'Al Kashi (cosine rule), la loi des sinus (sine rule) et la formule de l'aire sont démontrées. La formule de Héron est donnée sans démonstration.
- Trigonométrie en dimension 3 (calcul d'angles entre 2 plans, entre 2 droites, configuration de l'espace)

Chapter 1 : Function (fonction)

- Concepts de base (Définition - ensemble de définition - fonction injective (one-to-one) ou non (many-to-one)
- Composée(notée fg)
- Fonction réciproque - restriction d'une fonction
- Notion de couples, de produit cartésien d'ensembles
- Graphe d'une fonction
- Fonctions paires, impaires – graphe de f^{-1}.

Chapter 2 : Vectors (Vecteurs du plan)

- Concepts de base (Définition, égalité, colinéarité, indépendance linéaire de 2 vecteurs non colinéaires).
  commentaire : quantities involving both magnitude (longueur) and direction (direction et sens) are called vector quantities. $\overrightarrow{AB}$ *may be also written using single letter written(**a**) in heavy type or underlined(a)*
- Vecteur de position d'un point – composantes - vecteurs unitaires – addition et soustraction de vecteurs en composantes – changement de base
  commentaire : Une origine O étant fixée, un point P peut être repéré par ses coordonnées mais aussi par le vecteur $\overrightarrow{OP}$ *qui est appelé « position vector of P ».*
  commentaire : les notions de base et de repère ne sont pas définies
- Produit scalaire de deux vecteurs (définitions faisant appel à cos θ ou analytique) – propriétés (commutativité – bilinéarité) – carré scalaire – angle de deux vecteurs – projection d'un vecteur sur un autre
- Démonstration de géométrie par l'outil vectoriel
  commentaire (un exemple) : the mid-points of the sides of any quadrilateral form the vertices of a parallelogram : O is the origin and A, B and C have position vectors a, b and c respectively. Points P, Q, R and S are the mid-points of OA, AB, BC and CO respectively. Show that PQRS is a parallelogram.
- Equation paramétrique d'une droite

Chapter 3 : Coordinate geometry I (géométrie analytique)

- Lieux
  Si P(x,y) est un point dont la position est donnée par une loi, alors l'ensemble de toutes les positions de tels points obéissant à cette loi est appelé le lieu de P (locus of P).
  Exemples : (a) The point P is equidistant from the origin and the point A(2,0). Draw a diagram showing the locus of P.
  (b) ABCD is a square of side 3 cm. The point P(x,y) lies inside the square but is more than 2 cm from D. Draw the diagram showing ABCD and the locus of P.
- Distance entre deux points
- Coordonnées du milieu d'un segment
- Coefficient directeur d'une droite – propriétés (parallélisme et orthogonalité de droites)
- Equation réduite d'une droite
  commentaire : y = mx + c is the general cartesian equation of a straight line.
  commentaire : pas de référence aux droites d'équation x = k ni aux équations du type ax + by +c = 0.
- Résultats d'expérimentation et utilisation d'un modèle affine
  Ayant des résultats expérimentaux et supposant une relation du type P = aQ + b entre deux variables P et Q, on cherche à obtenir a et b.

Exemple1 : The force of wind resistance experienced by a particular car moving with velocity V was noted for various values of V and the results were tabulated

Wind resistance R (in Newton)	*26*	*60*	*122*	*135*	*180*	*270*
Velocity V (in metres/second)	*4*	*10*	*16*	*17*	*20*	*25*

By plotting a suitable graph, show that the figures agree approximately with the relationship of the form $R = a + bV^2$ and find values for the constant a and b.
Find the wind resistance experienced by the car when moving with velocity 15m/s.
Exemple2 : The sum of the first three even numbers is 12, of the first four even numbers is 20 and of the first seven is 56. These and other similar results are shown in the table below

The first n even numbers where n is :	*3*	*4*	*7*	*11*	*12*	*15*	*20*
The sum of these first n even numbers	*12*	*20*	*56*	*132*	*156*	*240*	*420*

It is thought that S and n are related by the formula $S = an + bn^2$. By plotting a suitable graph, show that such a relationship does exist and find the values of the constants a and b. Find the sum of the first fifty even numbers.

- Intersections de droites – intersection de droites et d'autres courbes

Chapter 4 : Trigonometry I (Trigonométrie)

- Définition de cos, sin et tan d'un angle de mesure x en degré
- Représentation graphique de fonctions trigonométriques en utilisant certaines valeurs
- Allure des représentations graphiques
- Résolutions d'équations trigonométriques où l'inconnue x est une mesure d'angle appartenant à un intervalle borné.
- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- Sécante, cosécante, cotangente
- Formules d'addition pour sinus, cosinus, tangente – Duplication
- Le radian – Longueur d'un arc – Aire d'un secteur angulaire

Chapter 5 : Algebra I (Algèbre)

- Puissance (exposant entier, fractionnaire)
- Introduction de la notion de variation de fonctions (affine, inverse) – variation conjointe – variation partielle
- Théorie élémentaire des logarithmes
  Commentaire : *la définition* utilisée est : *étant donnés deux nombres strictement positifs a et b, il existe un unique troisième nombre c tel que $a^c = b$; c est appelé le logarithme de b dans la base a !*
- Fonction inverse de la fonction logarithme – changement de base de logarithme
- Le second degré : Représentation graphique – Inéquations - Le discriminant et discussion de l'existence de racines – Somme et produit des racines
- Polynômes – Division par (x – a) et factorisation – relations coefficients-racines pour un polynôme de degré 3.

Chapter 6 : Matrices (Matrices)

- Généralités avec révision somme et produit
- Déterminant et inverse d'une matrice 2x2.
- Transformations
- Matrices de rotations et de réflexions : cas général

Chapter 7 : Permutations and combinations (dénombrement)

- Opérations successives
- Permutations et arrangements circulaires
- Combinaisons

Chapter 8 : Series and binomial theorem (séries et théorème du Binôme)

- Somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique
- Somme de termes consécutifs d'une suite géométrique
- Somme de termes d'autres suites en utilisant le raisonnement par récurrence (proof by induction)
- Formule du binôme
- Développement de $(1 + x)^{\alpha}$ en série entière pour α rationnel
  commentaire: pas de démonstration de cette formule mais indication de la condition $|x| < 1$ *)*

Chapter 9 : Probability

- Probabilité simple et notation ensembliste
- Somme et produit de lois – Notion d'indépendance – Tirages successifs
- Probabilité conditionnelle
- Calculs de probabilité utilisant les notions de permutations et de combinaisons

Chapter 10 : differentiation (dérivation)

- La pente d'une courbe en un point – Notion de tangente
  commentaire : $\frac{dy}{dx} = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x + \delta x) - f(x)}{\delta x}$ *; la notion de limite et le symbole* $\lim_{x \to}$ *sont utilisés mais n'ont pas été définis.*
- Fonction dérivée de $x \rightarrow a x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$
- Tangentes et normales en un point d'une courbe
- Maximum, minimum et point d'inflexion – Utilisation de la dérivée seconde – approximations
  commentaire : uniquement descriptif sur des dessins

Chapter 11 : Sketching functions I (allure de courbes)

- Points principaux (symétrie, intersection avec les axes de coordonnées, limites en $+\infty$ et $-\infty$, ensemble de définition, extrema, points d'inflexion) –composition avec la fonction valeur absolue
- Asymptotes
- Transformations simples ($y=f(x-a)$, $y=f(x)+a$, $y = f(ax)$, $y = af(x)$)
- $y = 1/f(x)$

Chapter 12 : Integration

- L'opération inverse de la dérivation –Le signe intégral - Résolution des équations différentielles du type $y' = f(x)$ et $y'' = g(x)$
- L'aire en dessous d'une courbe – entre deux courbes
- Calculs de volumes de révolution
- Deux applications :
  1) Vitesse – accélération
  2) Détermination du centre d'inertie d'un domaine plan
- Valeur moyenne

Chapter 13 : Further techniques (compléments sur la dérivation et l'intégration)

- Dérivation de la composée de 2 fonctions : cas de $x \rightarrow (f(x))^n$
- Intégration de $x \rightarrow f'(x)\,[f(x)]^n$
- Equations paramétriques de courbes
- Dérivée d'un produit de fonctions, d'un quotient de fonctions – fonctions implicites

Chapter 14 : Sketching functions II (allures de courbes)

- Cas des fonctions rationnelles ($f(x) = p(x)/q(x)$ avec p et q deux fonctions polynômes de degré inférieur ou égal à 2)
- Résolution d'inéquations en utilisant une méthode graphique ou une méthode calculatoire – Cas de $|f(x)|$

Chapter 15 : Trigonometry II

- Transformation de $\cos a \pm \cos b$, $\sin a \pm \sin b$, $2 \sin a \sin b$, $2 \sin a \cos b$, $2 \cos a \cos b$, $2 \cos a \sin b$
- Transformation de $a \cos x \pm b \sin x$
- $\sin x$ et $\cos x$ en fonction de $\tan \frac{x}{2}$.
- Fonctions réciproques : $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$
  commentaire : pas de justification de l'existence de ces fonctions – représentations graphiques.
- Résolution dans IR d'équtions du type : $\cos x = \cos \alpha$, $\sin x = \sin \alpha$, $\tan x = \tan \alpha$.
- Petits angles (θ en radian) $\sin \theta \sim \theta$, $\cos \theta \sim 1 - \frac{\theta^2}{2}$, $\tan \theta \sim \theta$.
- Dérivation des fonctions trigonométriques (avec en plus sec et cosec)
- Intégration des fonctions trigonométriques et exemples de linéarisation.
- Dérivées des fonctions $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$

Chapter 16 : Coordonate geometry II (géométrie analytique)

- Angle entre deux droites, entre deux courbes (tangentes)
- Distance d'un point à une droite
- Dessins sur les sections planes d'un cône
- Equations de cercles, intersections de cercles, d'une droite et d'un cercle, équations paramétriques
- La parabole : définition, équation ($y^2 = 4ax$), équation paramétrique
- L'ellipse et l'hyperbole : définition avec foyer et directrice, équations réduites, équations paramétriques (avec sec et tan pour l'hyperbole)
- Coordonnées polaires : définition et quelques exemples simples (droites et cercles)

Chapter 17 : Three-dimension work:vectors and matrices (vecteurs et matrices en dimension 3)

- Travail en dimension 3
  Dérivation et intégration de vecteurs
- Equation d'une droite
- Equation d'un plan : paramétrique et cartésienne
- Distance d'un plan à l'origine
- Matrice 3x3 et transformation linéaire – Déterminant 3x3 – Inverse d'une matrice 3x3
- Systèmes linéaires et interprétation géométrique par l'intersection de plans

Chapter 18 : Algebra II

- Décomposition de fractions rationnelles
- Développement en série entière de fractions rationnelles
- Exemples de séries télescopiques
- Introduction des nombres complexes
- Représentation des nombres complexes – module et argument – Formule de Moivre

Chapter 19 : Exponential and logarithmic functions

- Dérivation de la fonction exponentielle ($x \rightarrow a^x$) – Définition de "e" – Intégration des fonctions exponentielles
  commentaire : « An exponential function is one in which the variabe appears as an index. For example, $f(x) = 2^x$ or more generally, $f(x) = a^x$.
  For one value $\lim_{\delta x \to 0} \frac{a^{\delta x} - 1}{\delta x} = 1$ *: we call this number « e ».*
- Définition de la fonction ln – dérivée – Primitive de $\frac{f'(x)}{f(x)}$
  commentaire : on ne voit aucune référence à l'ensemble de définition des fonctions ni au domaine d'intégrabilité des fonctions données dans les exemples.
- Développement en série entière de e^x
  commentaire : L'existence de ce développement étant admis, il est fait mention du calcul des coefficients
- Développement en série entière de ln(1+x) (par intégration formelle de $(1 + x)^{-1}$).

Chapter 20 : Further integration (compléments sur l'intégration)

- Changements de variable pour le calcul de primitives
- Intégrations par parties
- Exemples de calculs de primitives simples
- Equations différentielles à variables séparées du premier ordre et du type $y' \pm k^2 y = c$

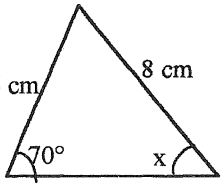
Chapter 21: Numerical methods

- Calcul approché d'intégrales pat la méthode des trapèzes ou de Simpson
- Développement en série de Taylor de f(h + x) et développement de Mac-Laurin
- Résolution approchée d'équations numériques
- Définition de $e^{i\theta}$, e^z , cos z , sin z pour $z \in \mathbb{C}$.

Quelques exercices

Chapter 0 :

- **Ex1** : (a) Find the remainder when $3x^2 + 13x - 1$ is divided by $x^2 + 4$.
  (b) Rearrange the following into expressions that do not involve improper algebraic fractions.
- **Ex2** : Find the angle x in the given triangle



  Solution : by the sine rule $\frac{8}{\sin 70°} = \frac{6}{\sin x}$

  So $\sin x = \frac{6 \sin 70°}{8} = 0.7048$. By calculator or tables $\sin^{-1} 0.7048 = 44.81$ but we must remember that $(180° - 44.81°)$ would also have a sine of 0.7048, and so $x = 44.81°$ or $180° - 44.81°$. $x = 44.81°$ or $135.19°$
  In this example the obtuse value of angle can be discarded as it is not possible when one angle of the triangle is already known to be 70°.
  Thus $x = 44.81°$. In some cases both answers will be possible.
- **Ex3** : Three points A, B and C lie on level ground with B due south of A. The point C lies 250 m from A on a bearing N55°E and C is 400 m from B. Find the bearing of C from B to the nearest degree.
- **Ex4*** : A road is to be constructed up a hillside which may be considered as a plane surface making an angle of 40° with the horizontal. At what angle to the line of greatest slope must the road be constructed if it is to make an angle of 20° with the horizontal ? (give your answer to the nearest degree)

Chapter 1 :

- **Ex1*** : the function $f : x \to a/x + b$ is such $f(-1)=1.5$ and $f(2)=9$.
  (i) State the value of x for which f is not defined. (ii) Find the value of a and of b.
  (iii) Evaluate f(4) and $f^{-1}(4)$.
- **Ex2*** : Given the functions $f : x \to 2x - 3$ and $g : x \to 8/x$, find the similar form
  (i) f^{-1} (ii) ff (iii) gg (iv) fg (v) $(fg)^{-1}$

Chapter 2 :

- **Ex1*** : (a) E is the centre of a rectangle ABCD and $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{b}$.
  Express in terms of a and b the vectors : (i) $\overrightarrow{AC}$ (ii) $\overrightarrow{CD}$ (iii) $\overrightarrow{BD}$ (iv) $\overrightarrow{EB}$ (v) $\overrightarrow{EA}$
  (b) The position vectors of P and Q are $5\mathbf{i}+3\mathbf{j}$, $\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ respectively referred to an origin $O\mathbf{i} + O\mathbf{j}$.
  Calculate the position vector of P relative to Q and hence the magnitude of $\overrightarrow{PQ}$.
  Calculate the magnitude of $2\overrightarrow{OP} - 4\overrightarrow{OQ}$.
- **Ex2*** : The position vectors of the point A and B with respect to the origin O are $2i+4j$ and $6i+7j$ respectively.
  (a) Find a vector equation for the line AB, and show that the line passes through the point with position vector $14\mathbf{i} + 13\mathbf{j}$.
  (b) The position vector of the point C is $3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$. Find a vector equation for the line OC, and show that OC is at right angles to AB.
  (c) Find the position vector of the point P of intersection of OC and AB, and hence find the perpendicular distance from O to AB.
- **Ex3** : (The medians of a triangle intersect at a point that is two-thirds of a way along each median measured from the vertex) two methods.....
- **Ex4** : (Apollonius' theorem : the sum of the squares on two sides of a triangle is equal to twice the square on half the third side plus twice the square on the median which bisects the third side)
  OAB is a triangle and C is the mid-point of AB. Show that :

(a) $4\,\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OC} = OA^2 + OB^2 + 2\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ (b) $4\,\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AC} = OA^2 + OB^2 - 2\,\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$
(c) $2\,OC^2 + 2\,AC^2 = OA^2 + OB^2$

- **Ex5*** : The points A, B and C have the position vectors **a**, **b** and **c** respectively referred to an origin O.
(a) Given that the point X lies on AB produced so that AB:BX = 2 :1, find **x**, the position vector of X, in terms of **a** and **b**.
(b) If Y lies on BC, between B and C so that BY:YC = 1:3, find y, the position vector of Y, in terms of **b** and **c**.
(c) Given that the Z is the mid-point of AC, show that X, Y and Z are collinear.
(d) Calculate XY:YZ.

Chapter 3 :

- **Ex1*** : Calculate the coordinates of the points of intersection of the straight line $x - y = 3$ and the curve $x^2 - 3xy + y^2 + 19 = 0$
Ex2* : ABCD is a parallelogram in which the coordinates of A, B and C are (1,2) , (7,-1), (-1,-2) respectively.
(i) Find the equations of AD and CD. (ii) Find the coordinates of D.
(iii) Prove that $\widehat{BAC} = 90°$. (iv) Calculate the area of the parallelogram.
(v) Find the length of the perpendicular from A to BC, leaving your answer in surd form

Chapter 4 :

- **Ex1*** : Solve for $-180° \leq x \leq 180°$, the following equations :
(a) $3 \tan x - 2 = 0$ (b) $3 \tan x - 2 \cos x = 0$
Ex2* : Sketch on the same diagram the curves $y = |\sin x|$ and $y = \cos 2x$ for the interval $0 \leq x \leq 2\pi$, labelling each curve clearly.
State the number of solutions, in this interval, of the equation $|\sin x| = \cos 2x$.
Ex3* : Prove the identities :
(a) $\tan(45 + A)° \tan(45 - A)° = 1$ (b) $\sin B° + \sin(B + 120)° + \sin(B + 240)° = 0$
(c) $\dfrac{1 - \cos 2C}{1 + \cos 2C} = \tan^2 C$

Chapter 5 :

- **Ex1*** :Given that $\log_2 x + 2\log_4 y = 4$, show that $xy=16$. Hence solve for x and y the simultaneous equations : $\log_{10}(x+y) = 1$, $\log_2 x + 2\log_4 y = 4$.
- **Ex2*** : The cubic polynomial $6x^3 + 7x^2 + ax + b$ has a remainder of 72 when divided by $(x - 2)$ and is exactly divisible by $(x + 1)$. Calculate a and b. Show that $(2x - 1)$ is also a factor of the polynomial and obtain the third factor.
- **Ex3*** : If α^2 et β^2 are the roots of $x^2 - 21x + 4 = 0$ and α and β are both positive, find :
(i) α^2 (ii) $\alpha + \beta$ (iii) the equation with the roots $\dfrac{1}{\alpha^2}$ and $\dfrac{1}{\beta^2}$.

Chapter 6 :

- **Ex1 :** Five football teams took part in a league competition in which they each played each other once in the first half of the season and again in the second half of the season. The results matrix for the first half of the season is shown below :

	Won	Drawn	Lost
Aces	1	1	2
Bruisers	2	1	1
City	0	4	0
Defenders	1	1	2
Exiles	1	1	2

The results of the matches played in the second half of the season were as follows :

Bruisers 3 : Aces 4	Exiles 2 : City 2
City 1 : Bruisers 0	Defenders 1 : Aces 0
Exiles 1 : Defenders 0	Exiles 3 : Bruisers 2
Defenders 2 : City 2	City 3 : Aces 0
Exiles 1 : Aces 5	Defenders 2 : Bruisers 3

Construct a results matrix for the whole season.

If points are awarded : 3 for a win, 1 for a draw or 0 for a loss, use the matrix $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ to determine the league positions at the end of the seasons. What would the league positions be if points were awarded : 2 for a win, 1 for a draw, 0 for a loss ?

- **Ex2** : By letting $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ and $B=\begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ prove that $(AB)^T=B^T A^T$ and $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- **Ex3** : If $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ find the values of m and n that $A^2 = mA + nI$ where I is the identity matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **Ex4*** : The matrices A, B and C of the single transformations A, B and C are

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

(i) Give a geometrical description of each of A, B and C.
(ii) Find the smallest values of m and n for which $B^m = C^n = I$.
(iii) Give a geometrical description of the inverse of each transformation.

Chapter 7 :

- **Ex1*** : It is given that the number of different ways in which n people can be seated at a round table is $(n - 1)!$. Two of the n people ($n>2$) are be kept separate in the seating arrangement. Find the number of different ways in which this can be done.

- **Ex2* :** Given that a triangle can be formed by joining three non-collinear points, find the number of different triangles that can be formed using the points A, B , C, D ,E ,F, G, I ,J, K , L if ABCDE and EFGHIJKL are two straight lines.

Chapter 8 :

- **Ex1 :** Use the binomial expansion of $(1 + x)^8$ to find $(1.01)^8$.
  Using the binomial theorem, find $\sqrt{9.18}$ correct to five places of decimals.
- **Ex2* :** (a) for all positive integral values of n, the sum of the first n terms of a series is $3n^2 + 2n$. Find the nth term in its simplest form.
  (b) Show that, for all positive integral values of n, $7^n + 2^{2n+1}$ is divisible by 3.
  (c) Prove by induction or otherwise, that
  $(1)(4)(7) + (2)(5)(8)+...+n(n+3)(n+6) = \frac{1}{4} n (n+1) (n+6) (n+7)$.
- **Ex3* :** Find the values of the constants a and b for which the expansions, in ascending powers of x, of the two expressions $(1 + 2x)^{1/2}$ and $\frac{1 + ax}{1 + bx}$, up to and including the term in x^2, are the same. With these values of a and b, use the result $(1 + 2x)^{1/2} \approx \frac{1 + ax}{1 + bx}$, with $x = -\frac{1}{100}$, to obtain an approximate value for $\sqrt{2}$ in the form p/q, where p and q are positive integers.

Chapter 9 :

- **Ex1* :** The probability that it will rain on a given morning is 1/4.
  If it rains the probability that Mr X misses his train is 1/3.
  If it does not rain the probability that Mr X catches his train is 5/6.
  If he catches his train the probability that he is early for work is 4/5.
  If he misses his train the probability that he is late for work is 3/5.
  Calculate the probability that, on a given morning,
  (i) it rains and Mr X is late for work.
  (ii) it does not rain and he is early for work.
- **Ex2* :** The probability that a marksman will hit a target is 4/5. He fires 10 shots. Calculate, correct to 3 decimal places, the probability that he will hit the target
  (i) at least 8 times (ii) no more that 7 times.
  If he hits the target exactly 7 times, calculate the probability that the 3 misses are with successive shots.
- **Ex3* :** Calculate the number of arrangements of 8 different books on a shelf. Calculate the probability that, in any one of these arrangements, 3 particular books are together.

Chapter 10 :

- **Ex1 :** A company that manufactures dog food wishes to pack the food in closed cylindrical tins. What should be the dimensions of each tin if each is to have a volume of $128\ \pi\ cm^3$ and the minimum possible surface area ?
- **Ex2 :** The time period , T, of a pendulum of length L is given by $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ where π et g are constants. Find approximate percentage increase in T when the length of the pendulum increase by 4%.

Chapter 11 :

- **Ex1** : Make the sketch of the curve given by $y = \frac{x+5}{x}$.
- **Ex2*** : Sketch the curve $y = \cos x + 2$ for the interval $0 \le x \le 2\pi$. On the same diagram, sketch the curve $y = \frac{1}{\cos x + 2}$ for the same interval.
- **Ex3*:** Write down the condition for the equation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) to have no real roots.
  Sketch the graph of $y = x^2 + 3x + 7$ and hence sketch the graph of $y=1/(x^2 + 3x +7)$.
  Sketch the graph of $y = (x - 1)(x + 5)$ and hence sketch the graph of
  $z = 1 / ((x-1)(x+5))$. By calculation find the range of values which z can take.

Chapter 12 :

- **Ex1 :** The kinetic energy k joules of 10 kg body depends on the velocity v m/s in accordance with the rule $k = 5v^2$. Find the mean kinetic energy possessed by the body as v increases from 1 m/s to 7 m/s.
- **Ex2* :** Find the equation of the chord which joins the point A (–2, 3) and B(0,15) on the curve $y = 15 - 3x^2$.
  (a) Show that the finite area enclosed by the curve and the chord AB is 4 square units.
  (b) Find the volume generated when this area is rotated through 360° about x-axis, leaving your answer in terms of π.
- **Ex3* :** A particle P moves in a straight line and passes a fixed point O with a velocity of V m/s. Its acceleration, a m/s^2, is given by $a=16 - 4t$ for $0 \le t \le 3$ and $a = t+1$ for $t \ge 3$, when t is the time in seconds after passing O. Given that the velocity of P when t = 3 is 38 m/s, find the value of V and the velocity of P when t = 4.

Chapter 13 :

- **Ex1 :** Oil is dripping onto a surface at the rate of $\frac{1}{10}\pi$ cm^3/s and forms a circular film which may be considered to have a uniform depth of 0.1 cm. Find the rate which the radius of the circular film is increasing when the radius is 5 cm.
- **Ex2 :** A closed right-circular cylinder has base radius r cm and height 3r cm. If r increased at rate of 1 millimetre per second, find expressions in terms of r for the rate of (a) the total external surface area and (b) the volume of the cylinder.
- **Ex3* :** Find the cartesian equations of the curves which defined parametrically by (i) $x = 2\sin\alpha$, $y = \cos^2\alpha$ (ii) $x = t(t-1)$, $y = 1 + t$.
- **Ex4* :** Find the gradient of the curve $x^2 + 6y^2 = 10$ at the point $(2, -1)$.
- **Ex5* :** Sketch the curve given parametrically by $x = t^2$, $y = t^3$.
  Show that an equation of the normal to the curve at the point A (4 , 8) is $x+3y-28 = 0$. This normal meets the x–axis at the point N. Find the area of the region enclosed by the arc OA of the curve, the line AN and the x-axis.

Chapter 14 :

- **Ex1 :** Find the solution set of the inequation $\frac{x+4}{x+1} < \frac{x-2}{x-4}$ by sketching and by calculation.
- **Ex2 *:** Prove that the function $y = \frac{9}{x+2} - \frac{1}{x}$ has a maximum value at $x = 1$.
  Find the value of x for which y has a minimum value.
  Sketch the graph of the function.(Graph paper is not required – a sketch showing the main relevant features will suffice.)
- **Ex3 *:** Given that $y(x^2 - 4) = 2x + 5$ where x is real, prove that y cannot take any value in the range $-1 < y < -\frac{1}{4}$.

  Sketch the graph of the curve with equation $y = \frac{2x+5}{x^2-4}$, indicating clearly the asymptotes.

  calculate the ranges of values of x for which $\left|\frac{2x+5}{x^2-4}\right| \geq \frac{1}{5}$.

Chapter 15 :

- **Ex1 :** Solve the equation : $\cos^{-1} x + \cos^{-1}(x\sqrt{3}) = \frac{\pi}{2}$.
- **Ex2 *:** Find the limit as $\theta \to 0$ of $\frac{\sin(x+\theta) - \sin(x-\theta)}{2\theta}$.
- **Ex3* :** (a) Differantiate with respect to x : (i) $\tan 2x$, (ii) $\sin^3 3x$, (iii) $(1 + \sin x)^5$
  (b) If $y = \frac{\sin x}{x}$, prove that $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + xy = 0$.
- **Ex4* :** Sketch the curve $y = 1 + \sin x$ for $0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$.

  show that $(1+\sin x)^2 = \frac{3}{2} + 2\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x$. Hence show that the volume of the solid of revolution formed when the region $(0 \leq x \leq \frac{3}{2}\pi)$ bounded by the curve $y=1+\sin x$, the y-axis and the x-axis is rotated through one revolution about the x-axis is $\frac{1}{4}\pi(9\pi + 8)$.

Chapter 16 :

- **Ex1* :** Find the values of m such that y = mx is a tangent from the origin O(0;0) to the circle whose equation is $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 1$. Find the cosine of the acute angle between these tangents.
- **Ex2* :** Prove that the equation of the tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0, b > 0)$ at the point P $(a\cos\theta, b\sin\theta)$ is $\frac{x}{a}\cos\theta + \frac{y}{b}\sin\theta = 1$.

  The tangent at P meets the axes Ox and Oy at X et Y respectively. Find the area of the triangle OXY.
  the point A and B have coordinates (a,0) and (0,b) respectively. Show that the area of triangle APB is $\frac{1}{2}ab(\cos\theta + \sin\theta - 1)$.

  Prove that, as θ varies in the interval $0 < \theta < \frac{1}{2}\pi$, the area of the triangle APB is a maximum when the tangent to the ellipse at P is parallel to AB. Prove that the triangle OXY has its minimum area when triangle APB has its maximum area.
- **Ex3* :** Find a polar equation of the curve $x^2 + y^2 = 4x$ and calculate the polar coordinates of the two points P and Q where the curve intersects the line $r = 2\sqrt{2}\sec(\frac{\pi}{4} - \theta)$.

  Find the polar equation of the two half-lines from the origin which are tangents to the circle which has PQ as diameter.

Chapter 17 :

- **Ex1 :** Find the distance between the pairs of parallel lines listed below

  (a) $r = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ and $r = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

  (b) $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2}$ and $\frac{x+1}{1} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-1}{2}$.
- **Ex2 :** A plane P has cartesian equation $5x + 2y - 4z = -22$. Find the cartesian equation of the plane parallel to P and containing the point A (2 , 1 , 1). Find the perpendicular distance from the point A to the plane P.
- **Ex3* :** The coordinates of the points A and B are (0,2,5) and (–1, 3,1) respectively, and the equations of the line L are $\frac{x-3}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-2}{-1}$.

  (i) Find the equation of the plane π which contains A and is perpendicular to L, and verify that B lies π.
  (ii) Show that the point C in which L meets π is (1,4,3), and find the angle between CA and CB.
  (iii) Find the coordinates of the two points P and Q on L which are such that the volume of each of the tetrahedral PABC and QABC is 9.
- **Ex4* :** Find values of a, b, c, d, e, f, so that the linear transformation $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ with the matrix M, where $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{pmatrix}$ maps the points with position vectors $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ to the points with position vectors $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- **Ex5* :** Show that $x + a + y$ is a factor of the determinant $\begin{vmatrix} a & x & y \\ x & a & y \\ x & y & a \end{vmatrix}$

  Express the determinant as a product of three factors. Hence find all value of α in the range

  $0 \le \alpha \le \pi$ which satisfy the equation $\begin{vmatrix} 1 & \cos\alpha & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & 1 & \cos 2\alpha \\ \cos\alpha & \cos 2\alpha & 1 \end{vmatrix} = 0$

- **Ex6* :** Show that the simultaneous equations $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ 2x + ky - 2z = -1 \\ x - 2y + kz = -2 \end{cases}$ have a unique solution except for three values of k which are to be found.
  Show that, when k = 1, the planes represented by the equations meet at a point P which lies in the plane y = 1 and that, when k = – 1, the planes meet in a line L which also lies in the plane y = 1. Find the perpendicular distance of P from L.

Chapter 18 :

- **Ex1 :** Express $\frac{2}{(2x-1)(2x+1)}$ in partial fractions.
- **Ex2 :** If the point P in the complex plane corresponds to the complex number z, find the locus of P (by geometry and algebra) when (a) $|z-4| = |z|$ (b) $\arg(z+1) = \frac{3\pi}{4}$.
- **Ex3* :** Express the function $f(x) = \frac{4-3x}{(1-2x)(2+x)}$ in partial fractions. Find the first terms in the expansion of f(x) in ascending powers of x and show that the coefficient of x^n is $\frac{4^n + (-1)^n}{2^n}$.
- **Ex4* :** Show that $\frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!} = \frac{r}{(r+1)!}$ and find the corresponding expression for $\frac{1}{r!} - \frac{1}{(r+1)!}$. S_n and T_n are the sums of the first n terms of the series whose rth terms are $\frac{r}{(r+1)!}$ and $\frac{(-1)^r(r+2)}{(r+1)!}$ respectively. Find S_{2n} and T_{2n} and show that $S_{2n} = -T_{2n}$.
- **Ex5* :** Prove that the non-real cube roots of unity are $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. These roots are represented in Argand diagram by the points A, B and the number z = – 2 is represented by the point C. Show that the area of the sector of the circle with centre C through A and B which is bounded by CA, CB and the minor arc AB is $\frac{\pi}{2}$.
- **Ex6* :** Prove that, when n is a positive integer, $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$.
  Given that $z = \cos\alpha + i\sin\alpha$, and assuming that the result above is also true for negative integers, show that $z^n - z^{-n} = 2i\sin n\alpha$.
  Hence, or otherwise, prove that $16\sin^5\alpha = \sin 5\alpha - 5\sin 3\alpha + 10\sin\alpha$. Find all the solutions of the equation $4\sin^5\alpha + \sin 5\alpha = 0$ which lie in the interval $0 \le \alpha \le 2\pi$.

Chapter 19 :

- **Ex1* :** Obtain the expansion in ascending powers of x of the function $f(x) = \ln\frac{(1-3x)^2}{1+2x}$. Give the values of coefficients of the powers of x up to and including x^3, and give an expression for the coefficient of x^n. For what range of values of x is this expansion valid ?

- **Ex2* :** Given that $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{1+x^2} - 2x\,e^{-x^2}$ and that y=0 when x=0, express y in terms of x.
  Show that, for small values of |x|, $y \approx px^6 + qx^8$ finding the values of the constants p and q.
- **Ex3 :** Find expressions for
  (a) $1 - 3 + \frac{9}{2!} - \frac{27}{3!} + \frac{81}{4!} - \frac{243}{5!} + \ldots$. (b) $\ln 6 + \frac{1}{3} - \frac{1}{9 \times 2} + \frac{1}{27 \times 3} - \frac{1}{81 \times 4} + \ldots..$

Chapter 20:

- **Ex1 :** By substituting x = X – 1 and y = Y + 3 reduce the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y + 7}{2x + y - 1}$ to homogeneous equation and hence find the general solution in terms of x and y.
- **Ex2 :** Find the general equation of the family of curves for which the gradient at any point on the curve is the same as the y-coordinate at that point.
- **Ex3* :** Find the volume generated when the region bounded by the curve $y = (\frac{1-x^2}{1+x^2})^{1/2}$ and the x-axis is rotated through four right-angles about the x-axis.
- **Ex4* :** In a certain type of chemical reaction a substance A is continuously transformed into a substance B. Throughout the reaction the sum of the masses of A and B remains constant and equal to m. The mass of B present at time t after the commencement of the reaction is denoted by x. At any instant the rate increase of the mass of B is k times the mass of A, where k is a positive constant.
  Write down the differential equation relating t and x. Solve this differential equation , given that x = 0 when t = 0. Given also that $x = \frac{1}{2}m$ when t = ln 2, determine the value of k, and show that , at time t, $x = m(1 - e^{-t})$. Hence find (i) the value of x (in terms of m) when t = 3 ln 2. (ii) the value of t when $x = \frac{3}{4}m$.

Chapter 21:

- **Ex1* :** Find and determine the nature of the turning points on the graph of $y = e^x - x^2e$.
  Show that the equation $(2x^2 + 1)\,e^{x^2} = e$ has a root near x = 0.6 and use Newton's method once to find a second approximation to the root. Hence, find to two decimals places, the coordinate of the points inflexion on the graph of $y = e^x - x^2e$, and mark them clearly on a sketch of this graph.

  Ex2* : Find an approximate value for $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{\sec x}\,dx$, by using Simpson's Rule with five equally spaced ordinates. Write down the least value of sec x for $0 \le x < \frac{\pi}{2}$.

  Hence show that $\int_0^{\alpha} \sqrt{\sec x}\,dx > \alpha$ for $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
- **Ex3* :** Show, by means of a sketch graph, or otherwise, that the equation $e^{2x} + 4x - 5 = 0$ has only one real root, and that this root lies between 0 and 1.
  Starting with the value 0.5 as a first approximation to this root, use the Newton-Raphson method to evaluate successive approximations, showing the stages of your work and ending when two successive approximations give answers which, when rounded to two decimal places, agree.

4

Textes d'examens et de « course work »

Nous présentons :

Trois sujets de GCSE.

"Foundation" page 43
"Intermediate" page 67
"Higher" page 87

Quatre textes de A-Level

Mathématiques pures pages 104 et 108
Statistiques page 112
Mécanique page 116

Des sujets de Courseworks page 121

Un coursework réalisé par un élève, commenté par le professeur

Lines lengths in a pinboard page 123

Les trois sujets de GCSE correspondent aux trois niveaux déjà évoqués , avec pour chacun un formulaire significatif du degré de connaissance attendu.

Ces sujets proviennent du SEG : "**Southern Examining Group**" session de juin 1998.

La durée de chacune des épreuves est de 1 h 30 ou 2 h suivant le niveau.

Chaque organisme en respectant les directives nationales, établit son programme "Syllabus" et la progression pour l'étude de ce programme.

SEG annonce que pour le niveau central "intermediate" l'épreuve est commune pour environ 25 % de celle-ci avec le niveau "Foundation" et 25 % avec le niveau "Higher"

Avec cet organisme le GCSE est délivré après deux épreuves valant chacune 37,5 % de la note finale, un test oral de 20 minutes valant 5 %. Ces sujets correspondent à deux parties du programme, appelées 2500T et 2500X. Pour le programme 2500T la réalisation personnelle de l'élève, "coursework" est notée par le professeur et pondérée par le centre d'examen , pour le programme 2500X c'est le centre d'examen qui note le "coursework"

SURNAME	INITIALS	CENTRE NO.					
SIGNATURE		CANDIDATE NO.					

Leave blank

Foundation

SOUTHERN EXAMINING GROUP

General Certificate of Secondary Education

Summer 1998

MOCK EXAM
YEAR 11 SETS 4, 5, 6, 7

MATHEMATICS

(2500T, 2500X)

2500/12

FOUNDATION TIER

Paper 12

MARK SCHEME

Tuesday 9 June 9.30 am to 11.00 am

Time allowed: 1 hour 30 minutes

In addition to this paper you will require:
1. a ruler;
2. a protractor;
3. a calculator.

You may use tracing paper.

For Examiner's use			
Number	Mark	Number	Mark
1		13	
2		14	
3		15	
4		16	
5		17	
6		18	
7		19	
8		20	
9		21	
10			
11			
12			
Total (Column 1) →			
Total (Column 2) →			
TOTAL			
Examiner's Initials			

Instructions

Fill in the boxes at the top of this page.

Answer **all** questions in the spaces given.

Do all rough work in this booklet. Cross through any work you do not want marked.

In questions involving π, take π to be 3.14 or use the π key on your calculator.

Information

The maximum mark for this paper is 100.

Mark allocations are shown in brackets.

You are expected to use a calculator where appropriate.

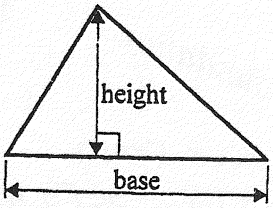
Advice

In all calculations, show clearly how you work out your answer.

Foundation

You may need to use the following formulae:

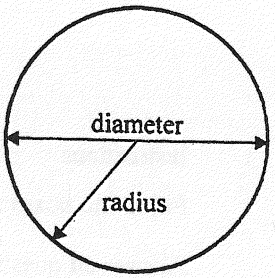
Area of triangle $= \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height



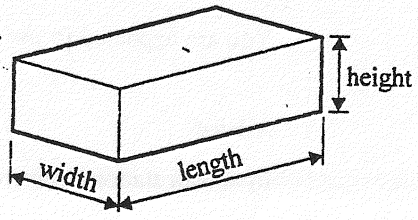
Circumference of circle $= \pi \times$ diameter

$= 2 \times \pi \times$ radius

Area of circle $= \pi \times (\text{radius})^2$



Volume of cuboid = length $\times$ width $\times$ height



Leave margin blank

Answer **all** questions.

1. (a) Write the time 1410 in 12 hour clock time.

A1

2.10 PM

A1

Answer ..... *(2 marks)*

A bus timetable for journeys between Doncaster and York is shown.

Doncaster – York

Doncaster			0910	1210	1410	1610	1810	1910
Bentley			0916	1216	1416	1616	1816	1916
Askern			0933	1233	1433	1633	1833	1933
Selby	0820	0920	1020	1320	1520	1720	1920	2020
York	0905	1005	1105	1405	1605	1805	2005	2105

(b) Usuf travels from Doncaster to York on the 1410 bus.

How long does his journey take?

14.10 → 16.05

M1

A1

Answer 1 hours 55 minutes *(2 marks)*

In York, Usuf visits the Jorvik Centre.
The admission prices are shown.

JORVIK CENTRE

Prices

ADULTS £8.00

UNDER 16 years old .... $\frac{3}{4}$ of the Adult Price

Usuf is 15 years old.

(c) Work out how much Usuf paid to get in.

$\frac{3}{4} \times 8$ or $8 \div 4 \times 3$

M1

A1

Answer £ 6 *(2 marks)*

6

Leave margin blank

2. The height of Mount Ararat is 16 805 feet.
The height of Mont Blanc is 15 771 feet.

(a) (i) How much is Mount Ararat higher than Mont Blanc?

16 805 − 15771

.....

Answer 1034 feet *(1 mark)* A1

(ii) Write the height of Mont Blanc to the nearest thousand feet.

Answer 16000 feet *(1 mark)* A1

(iii) Mount Ararat is 5 times as high as Snowdon.
What is the height of Snowdon?

16805 ÷ 5 M1

.....

Answer 3361 feet *(2 marks)* A1

The table shows the temperature at certain places on the mountains.

	Temperature at Top	Temperature at Bottom
Mount Ararat	–25 °C	12 °C
Mont Blanc	–18 °C	12 °C

(b) (i) How much warmer is the temperature at the top of Mont Blanc than at the top of Mount Ararat?

.....

Answer 7 degrees *(1 mark)* A1

(ii) What is the difference in temperature between the top and the bottom of Mont Blanc?

.....

Answer 30 degrees *(1 mark)* A1

6

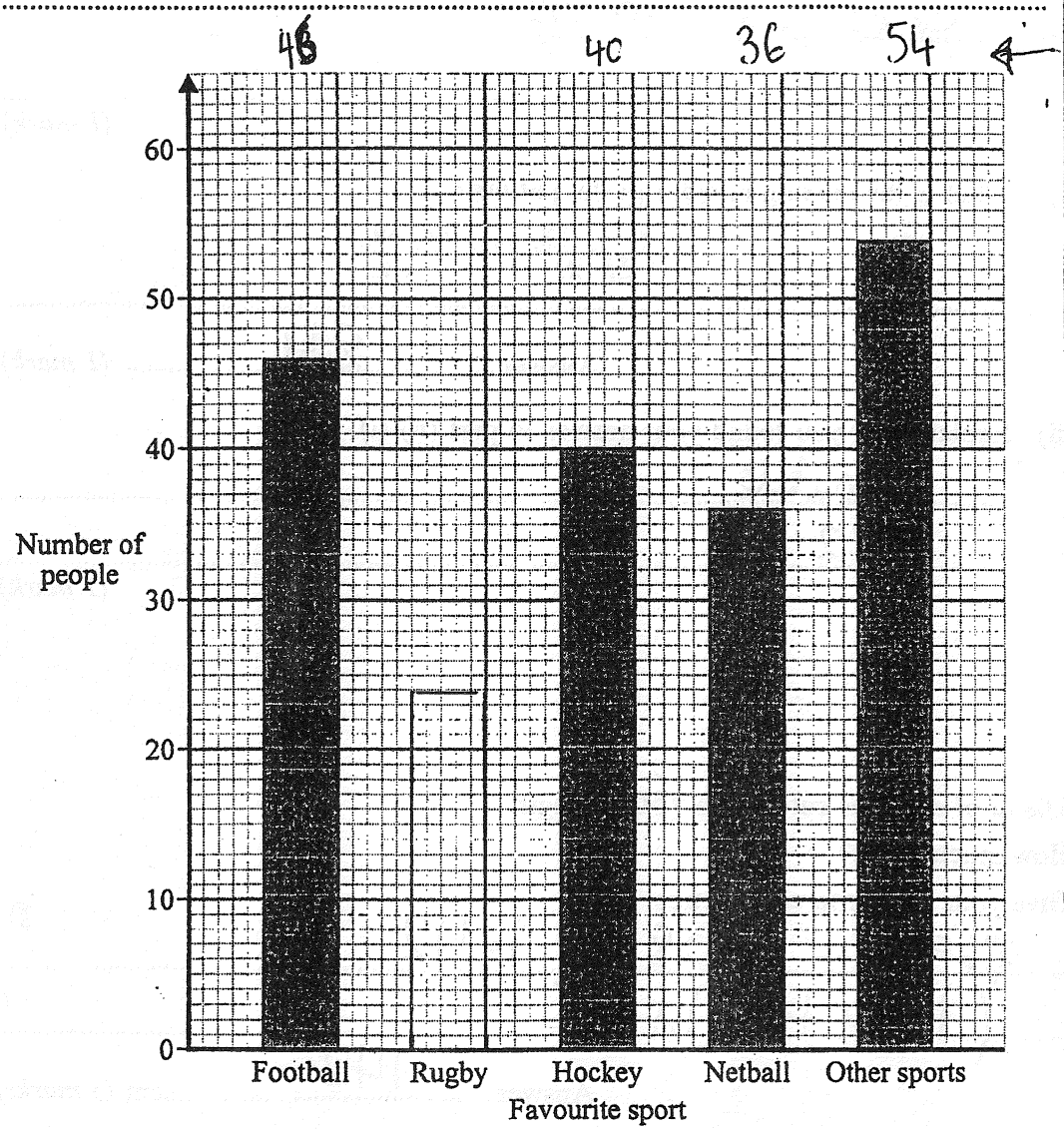
Leave margin blank

3. In a survey, 200 people were asked what their favourite sport was.
The graph shows some of the results.
On the graph draw the bar for Rugby.

46 + 40 + 36 + 54 = 176 total M1

200 - 176 = 24 ch. Rugby M1

read off M1



drawin A1

(4 marks)

4

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

4. (a) (i) What is the next number in the pattern?

28, 23, 18, 13, ...
−5 −5 −5

.....

Answer 8 *(1 mark)* A1

(ii) Explain how you found your answer to part (i).

eg. goes up in 5s A1

.....

(1 mark)

(b) (i) What is the missing number in the pattern?

3, 6, 12, ..., 48, 96.
×2 ×2 ×2

.....

Answer 24 *(1 mark)* A1

(ii) Explain how you found your answer to part (b) (i).

double A1
X2

.....

(1 mark)

4

5. (a) 6.08 m of carpet is cut from a 7.50 m length.

How much is left?

Give your answer in centimetres.

7.50 − 6.08 = 1.42 M1 A1

(their 1.42) X 100 M1

Answer 142 cm *(3 marks)*

(b) A bookcase is 1.65 m long.

How many bookcases can be put along a wall which is 6.08 m long?

6.08 ÷ 1.65 = 3.684848 M1

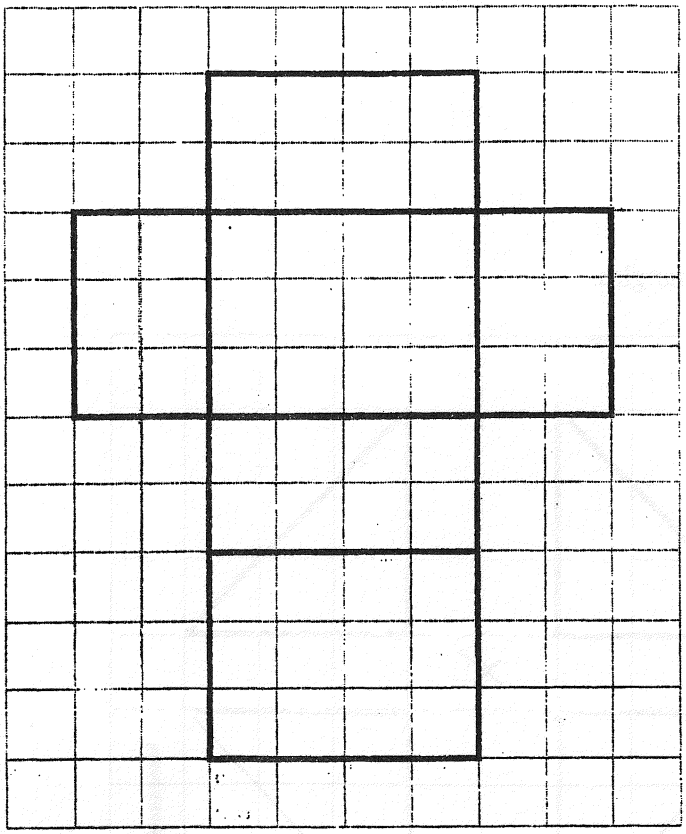
.....

Answer 3 *(2 marks)* A1

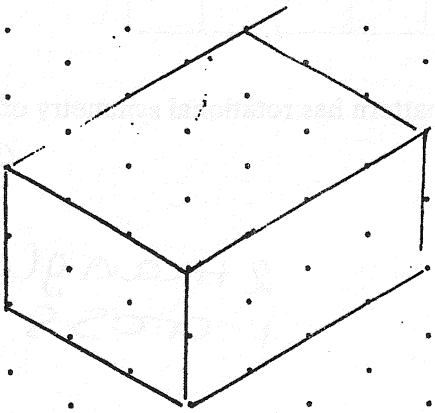
5

Leave margin blank

6. The diagram shows a net of a cuboid.



Use the grid below to show what the cuboid looks like when the net is folded.



3 by 2 by 4 cuboid (2 marks)

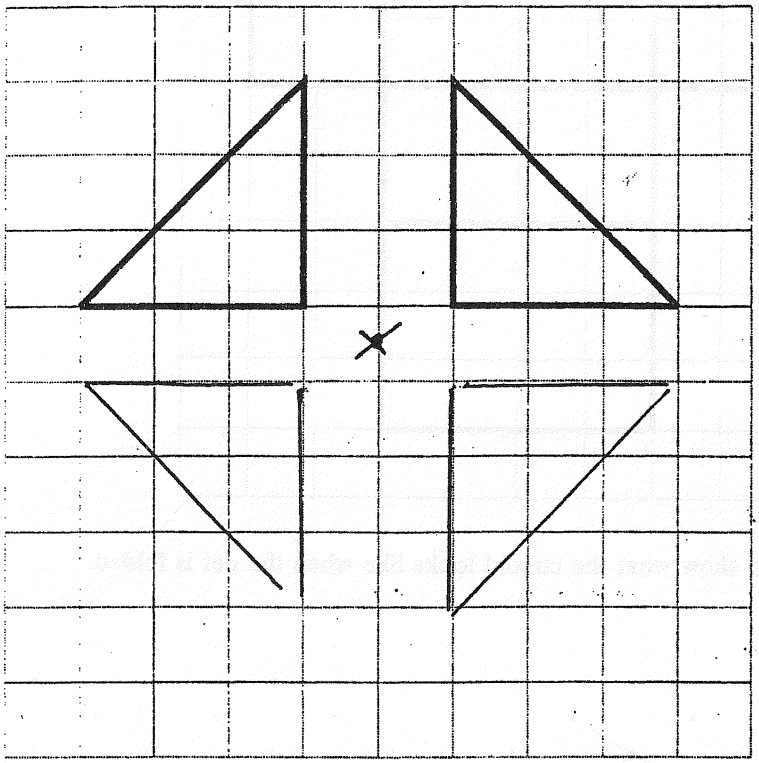
ONE ERROR SCORES 1 mark

A2

2

Leave margin blank

7. The diagram shows two triangles.



Draw two more triangles so that the **complete** pattern has rotational symmetry of order 4.
Mark the centre of rotation on the pattern. *(3 marks)*

2 triangles A2
1 cross A1

3

Leave margin blank

8. (a) In a school, $\frac{3}{5}$ of the pupils are girls.

(i) What percentage of the pupils are girls?

$\frac{3}{5} = \frac{?}{100}$

Answer 60 % *(1 mark)* A1

There are 660 pupils in the school.

(ii) How many pupils are girls?

$\frac{3}{5}$ of 660 or $\frac{60}{100} \times 660$ M1

Answer 396 *(2 marks)* A1

(b) Work out which of the fractions $\frac{3}{5}$ or $\frac{2}{3}$ is bigger.

You **must** show all your working.

$\frac{3}{5} = \frac{9}{15}$ $\frac{2}{3} = \frac{10}{15}$ M1

or $3 \div 5 = 0.6$ $2 \div 3 = 0.66666\dot{}$

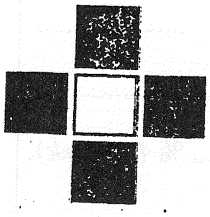
Answer $\frac{2}{3}$ *(2 marks)* A1

5

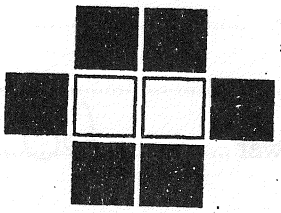
TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

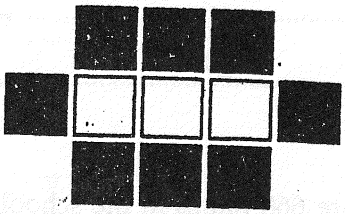
9. Black tiles and white tiles are used to make tiling patterns.



Pattern 1



Pattern 2



Pattern 3

(a) How many black tiles will Pattern 4 have?

4, 6, 8 (10)

Answer 10 *(1 mark)* A1

(b) (i) Explain the rule for finding the number of black tiles in a Pattern when you know the Pattern number.

Number x 2 + 2 or (number + 1) x 2

2n + 2 or 2(n + 1)

(2 marks)

(ii) How many black tiles will Pattern 50 have?

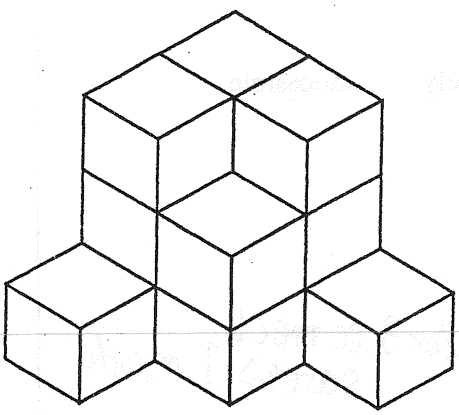
50 x 2 + 2 or (50 + 1) x 2

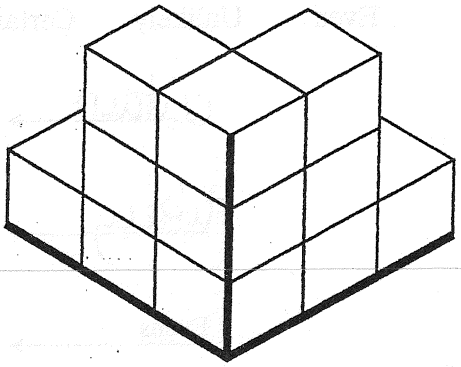
Answer 102 *(2 marks)*

5

Leave margin blank

10. Jane uses one centimetre cubes to make a model.
Two views of her model are shown.





(a) How many cubes has Jane used?

.....

Answer 13 *(1 mark)* A1

Jane places her model inside a box.
The box is in the shape of a cube with sides 3 cm.

(b) Calculate the volume of space left in the box, stating your units.

$3 \times 3 \times 3 = 27$ M1

$27 - 13 = 14$ M1

A1

Answer 14 cm^3 *(4 marks)* A1

5

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

11. (a) Below are five words that describe probability.
Write each word in the right place next to the probability scale.
The first one is done for you.

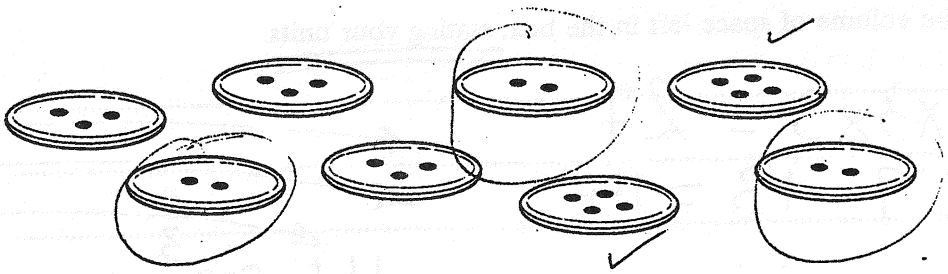
Evens Unlikely Certain Likely Impossible

certain → 1
likely →
Evens →
unlikely →
impossible → 0

2 or 3 correct scores 1 mark

(2 marks)

(b) Yvonne has eight buttons as shown.
Each button has 2 holes or 3 holes or 4 holes.



Yvonne takes a button at random.

(i) What is the probability that she takes a button with 2 holes?

counts 3 buttons M1

Answer 3/8 *(2 marks)* A1

(ii) What is the probability that she takes a button with 2 holes **or** with 4 holes?

3/8 + 2/8 M1

Answer 5/8 *(2 marks)* A1

Leave margin blank

A bag contains red, blue, white and yellow buttons only.

A button is taken at random from the bag.

The probability of getting each colour is shown in the table.

Colour	Probability
Red	0.2
Blue	0.1
White	0.4
Yellow	

(c) What is the probability of getting a yellow button?

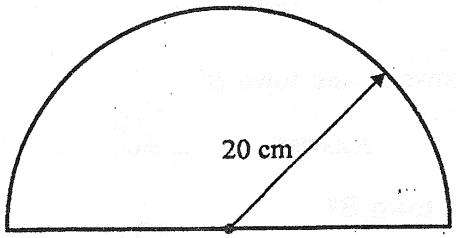
$0.2 + 0.1 + 0.4 = 0.7$ M1

A1

Answer 0.3 *(2 marks)*

8

12. Calculate the area of a semi-circle, radius 20 cm.



$\pi \times 20 \times 20 \div 2$ M1

M1

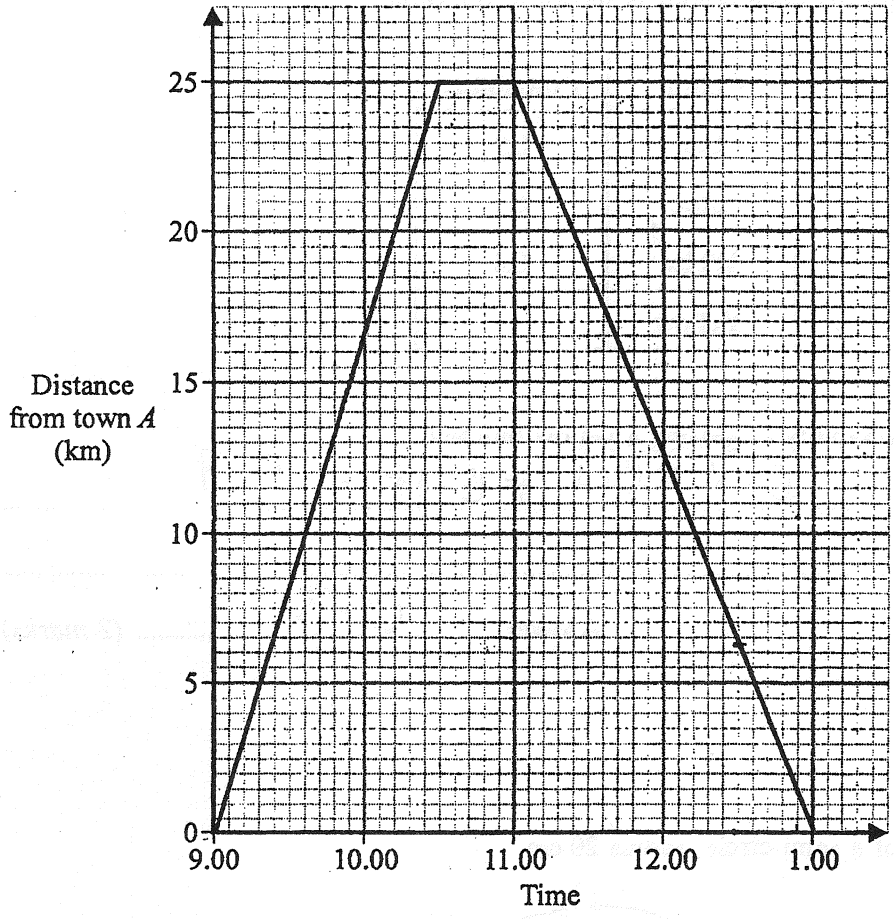
A1

Answer 628 → 628.5 cm² *(3 marks)*

3

Leave margin blank

13. A cyclist leaves town *A* at 9.00 am, cycles to town *B*, then returns to town *A*. The distance-time graph of the cyclist's journey is shown.



(a) What is the distance between town *A* and town *B*?

Answer ..... 25 ..... km *(1 mark)* A1

(b) How long did the cyclist stay in town *B*?

Answer ..... 30 ..... minutes *(1 mark)* A1

(c) How far was the cyclist from town *B* at 12.30 pm?

eg 6½ km from A M1

25 − 6½ km from B M1

A1

Answer ..... 18 − 19 ..... km *(3 marks)*

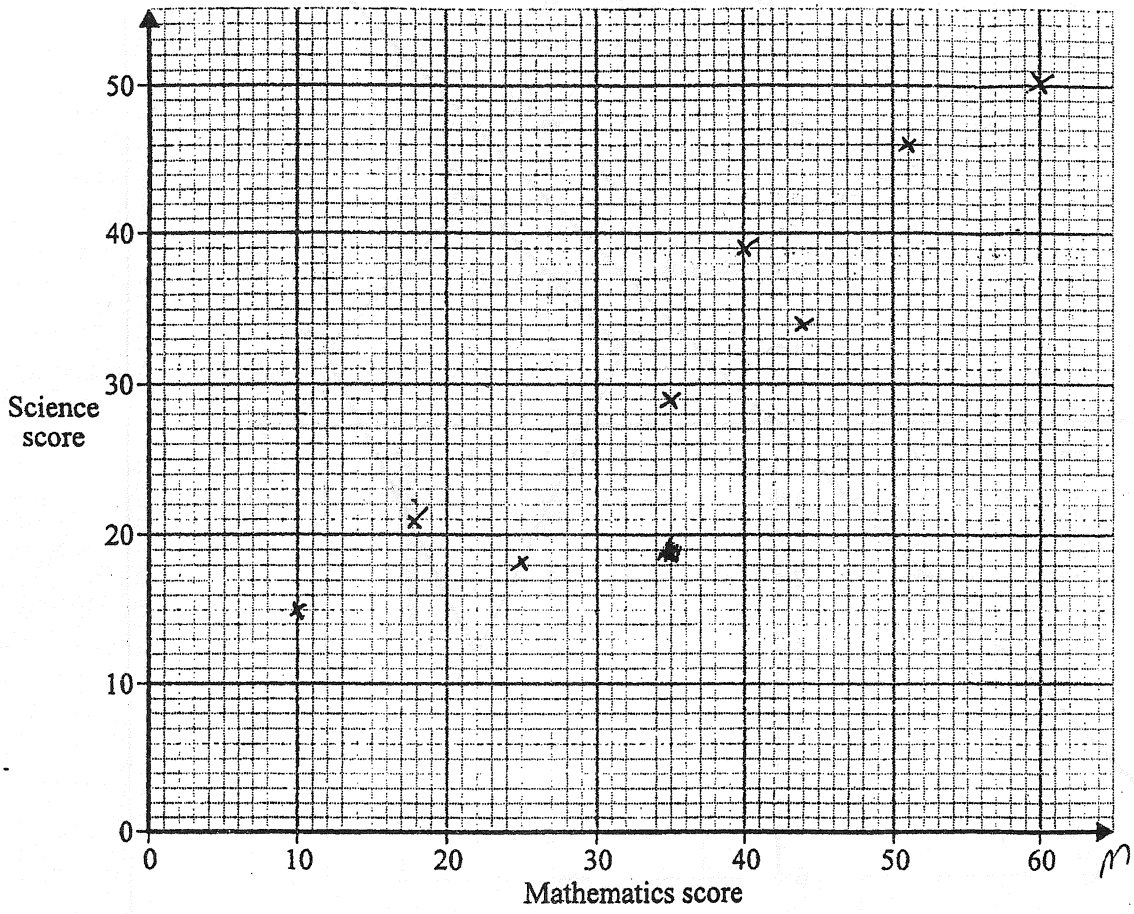
5

Leave margin blank

14. The Mathematics scores and Science scores of 8 students are shown in the table.

Student	A	B	C	D	E	F	G	H
Mathematics score	44	18	51	60	25	10	35	40
Science score	34	21	46	50	18	15	29	39

(a) Use the data to plot a scatter diagram.



(2 marks)

MAX 3 errors scores 1 mark

(b) What does the scatter diagram suggest about the connection between the scores in Mathematics and Science?

eg good scores in maths/science are linked as maths improves so does science.

(1 mark)

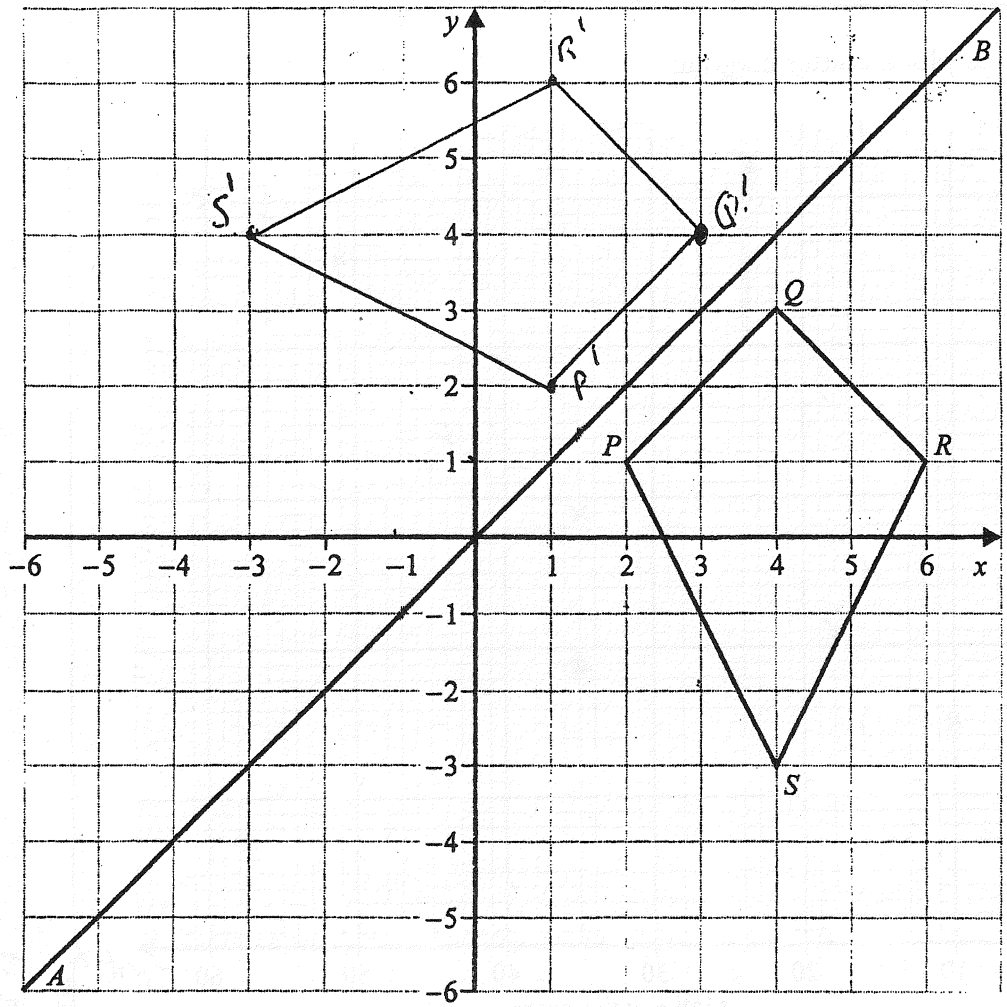
A1

"positive correlation" alone is not enough

3

Leave margin blank

15. The grid shows a quadrilateral $PQRS$ and a line AB.



(a) What type of quadrilateral is $PQRS$?

Answer Kite *(1 mark)* A1

(b) The quadrilateral $PQRS$ is reflected in line AB.
Draw the reflected quadrilateral on the grid. *(3 marks)*

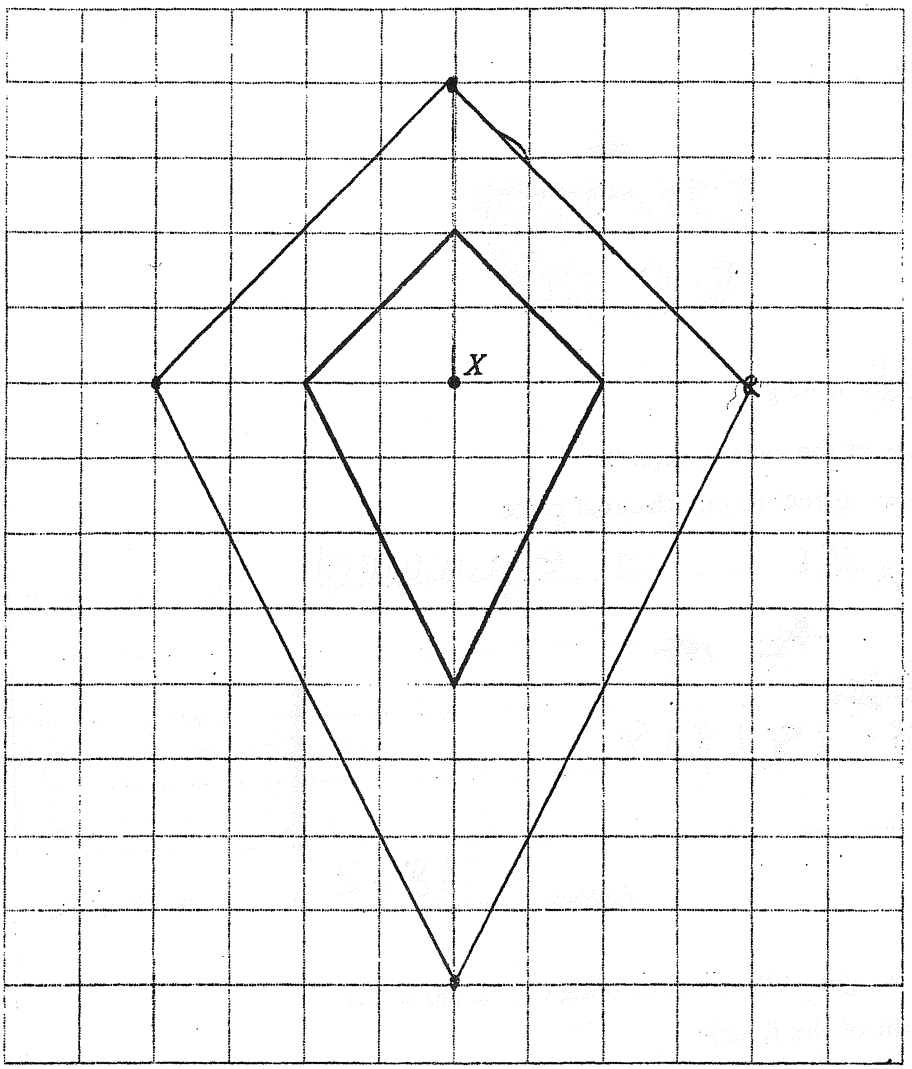
2 points = 1
3 points = 2
3 correct = 3

(c) Write down the equation of line AB.

Answer $y = x$ *(1 mark)* A1

Leave margin blank

(d) Enlarge the shape below by a scale factor of 2, centre X.



(2 marks)

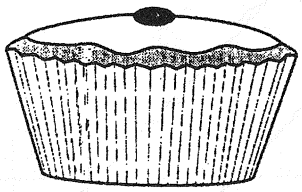
2 or 3 points correct scores 1 mark

7

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

16. A cake is made from fat, flour and sugar.



The cake weighs 110 g.
The weight of the sugar is 42 g.

(a) What percentage of the cake is sugar?

Give your answer correct to one decimal place.

42 / 110 × 100 or equivalent M1

= 38.181818 M1

Answer 38.2 % *(3 marks)* A1

(b) The ratio of the weight of flour to the weight of sugar is 3:2.

What is the weight of the flour?

? : 42

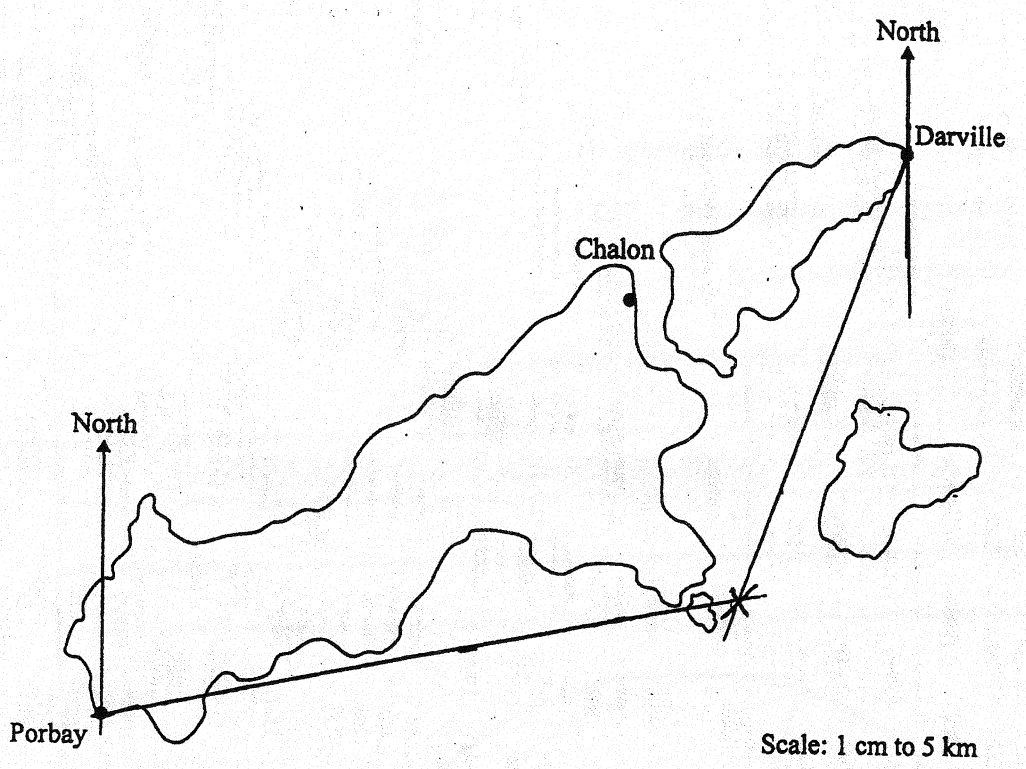
3 : 2 42 ÷ 2 × 3 M1

Answer 63 g *(2 marks)* A1

5

Leave margin blank

17. The diagram shows a map of a group of islands.
The map has been drawn to a scale of 1 cm to 5 km.



(a) A straight road joins Porbay to Chalon.

(i) Use the map to find the length of this road in kilometres.

measures 9.2 → 9.8 cm M1

multiplies ans by 5 (however wrong!!) M1

.....

Answer 46 – 49 km *(3 marks)* A1

(ii) Brian cycles from Porbay to Chalon along this road.
He sets off at 0930 and cycles at an average speed of 18 kilometres per hour.
At what time does he arrive in Chalon?

their(a) ÷ 18 = hours M1

= hours mins M1

0930 + ...

.....

Answer 1206 - 1210 *(3 marks)* A1

(b) A lighthouse is on a bearing of 080° from Porbay and 200° from Darville.
Mark, with a cross, the position of the lighthouse on the map. *(2 marks)*

evidence of reasonable 080 & 200 but no cross or wrong cross scores 1 mark

/8

Leave margin blank

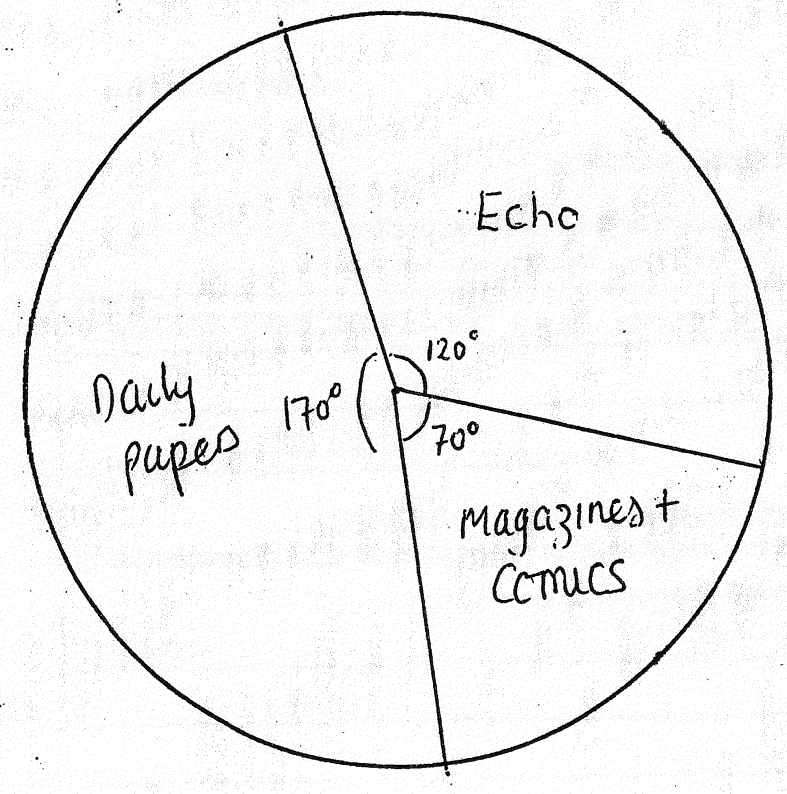
18. One Saturday a newsagent sells the following:

National daily newspapers	510	170°
Echo	360	120°
Magazines and comics	210	70°
		360 ✓

Draw a clearly labelled pie chart to represent these sales.

510 + 360 + 210 = 1080 papers

1080 ÷ 360 = 3 papers per degree M1



A3
fully labelled

(4 marks)

4

Leave margin blank

19. The table shows information about a group of children.

		Boys	Girls
Wears glasses	**Yes**	5	3
	No	14	10

(a) A boy in the group is chosen at random.

What is the probability that he wears glasses?

19 boys

Answer 5/19 *(2 marks)* M1 A1

(b) A child in the group is chosen at random.
The probability that the child wears glasses is 0.25.

What is the probability that the child does **not** wear glasses?

1 − 0.25

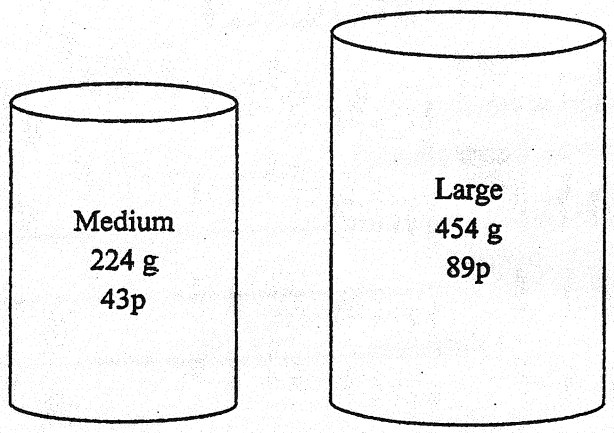
Answer 0.75 *(1 mark)* A1

3

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

20. The weights and prices of two different sizes of tomato soup are shown.



Which size of soup gives more grams per penny?
You **must** show all your working.

224 ÷ 43 = 5.209 g per penny M1

454 ÷ 89 = 5.1011 g per penny M1

Answer Medium (3 marks) A1

3

Leave margin blank

21. (a) On the diagram draw and label the following lines.

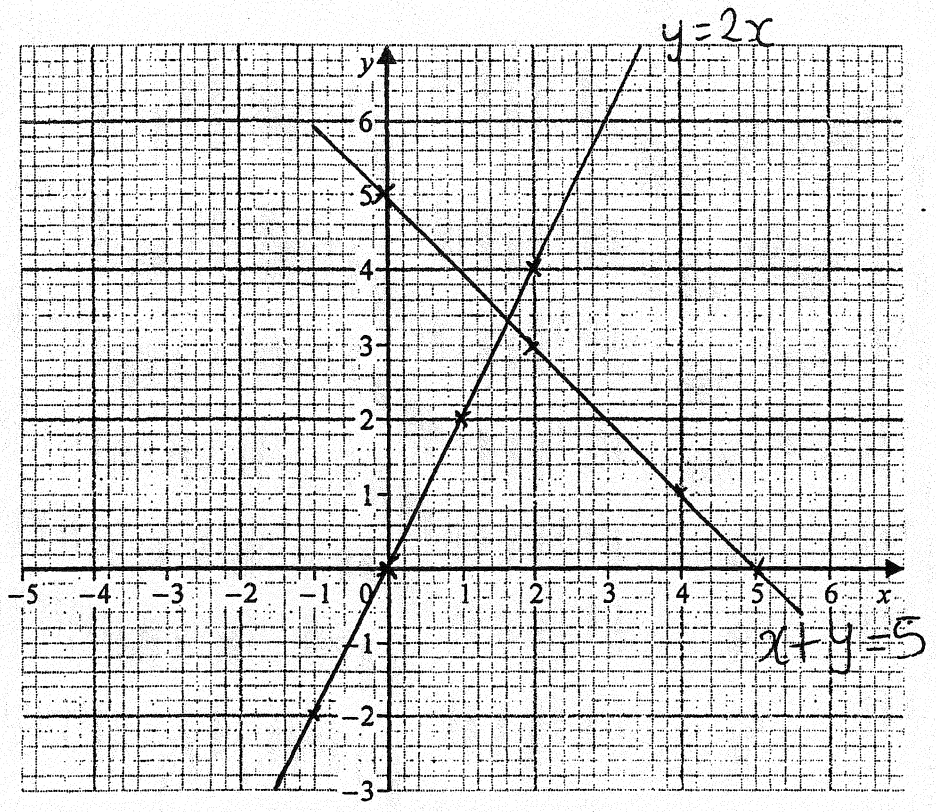
$y = 2x$ and $x + y = 5$

x	−5	−3	0	2	4
$2x$	−10	−6	0	4	8
$5-x$	10	8	5	3	1

(if no graph allow 1 method per 3 plus correct calculations)

M1

M1



transfer marks to correct graphing method shown

A1

A1

(4 marks)

(b) Solve the equation $2x = 5 - x$.

graph or recall

$3x = 5$

$\Rightarrow x = 5/3$

Answer 5/3 1.7 (1.6 → 1.75) graphical. *(2 marks)*

6

END OF EXAMINATION

SURNAME	INITIALS

CENTRE NO. | | | | | |

SIGNATURE

CANDIDATE NO. | | | | |

Leave blank

Intermediate

SOUTHERN EXAMINING GROUP

General Certificate of Secondary Education

Summer 1998

MATHEMATICS 2500/14

(2500T, 2500X)

MOCK EXAM
YEAR 11 SETS 2,3
SIXTH FORM

INTERMEDIATE TIER

Paper 14

Tuesday 9 June 9.30 am to 11.30 am

Time allowed: 2 hours

In addition to this paper you will require:
1. a ruler;
2. a protractor;
3. a calculator.

You may use tracing paper.

For Examiner's use			
Number	Mark	Number	Mark
1		13	
2		14	
3		15	
4		16	
5		17	
6		18	
7			
8			
9			
10			
11			
12			
Total (Column 1) →			
Total (Column 2) →			
TOTAL			
Examiner's Initials			

Instructions

Fill in the boxes at the top of this page.

Answer **all** questions in the spaces given.

Do all rough work in this booklet. Cross through any work you do not want marked.

In questions involving π, take π to be 3.14 or use the π key on your calculator.

Information

The maximum mark for this paper is 100.

Mark allocations are shown in brackets.

You are expected to use a calculator where appropriate.

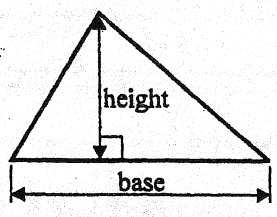
Advice

In all calculations, show clearly how you work out your answer.

Intermediate

You may need to use the following formulae:

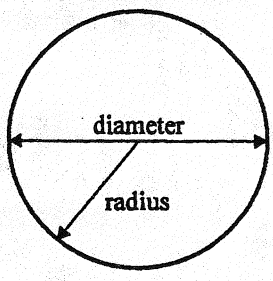
Area of triangle $= \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height



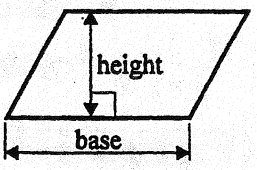
Circumference of circle $= \pi \times$ diameter

$= 2 \times \pi \times$ radius

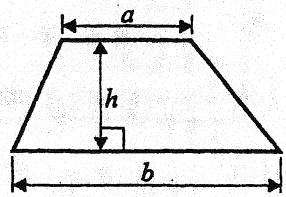
Area of circle $= \pi \times (\text{radius})^2$



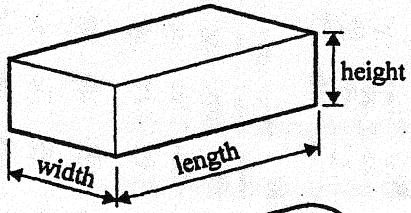
Area of parallelogram = base $\times$ height



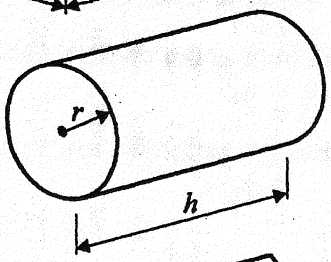
Area of trapezium $= \frac{1}{2}(a+b)h$



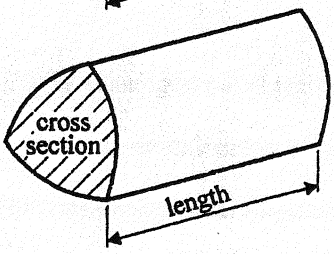
Volume of cuboid = length $\times$ width $\times$ height



Volume of a cylinder $= \pi r^2 h$

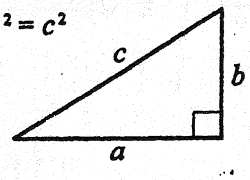


Volume of prism = area of cross section $\times$ length

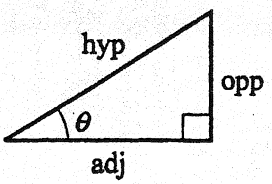


Pythagoras' Theorem

$a^2 + b^2 = c^2$



Trigonometry



$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$

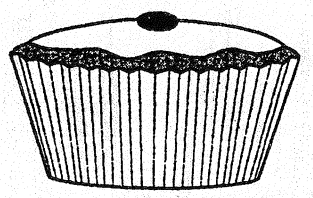
$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$

$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$

Leave margin blank

Answer **all** questions.

1. A cake is made from fat, flour and sugar.



The cake weighs 110 g.
The weight of the sugar is 42 g.

(a) (i) What percentage of the cake is sugar?
Give your answer correct to one decimal place.

.....

.....

.....

.....

.....

Answer .....% *(3 marks)*

(ii) The ratio of the weight of flour to the weight of sugar is 3:2.
What is the weight of the flour?

.....

.....

.....

.....

Answer .....g *(2 marks)*

(b) The weight of the cake has been given to the nearest 10 g.
What is the minimum weight of the cake?

Answer ..... g *(1 mark)*

6

Leave margin blank

2. One Saturday a newsagent sells the following:

National daily newspapers	510
Echo	360
Magazines and comics	210

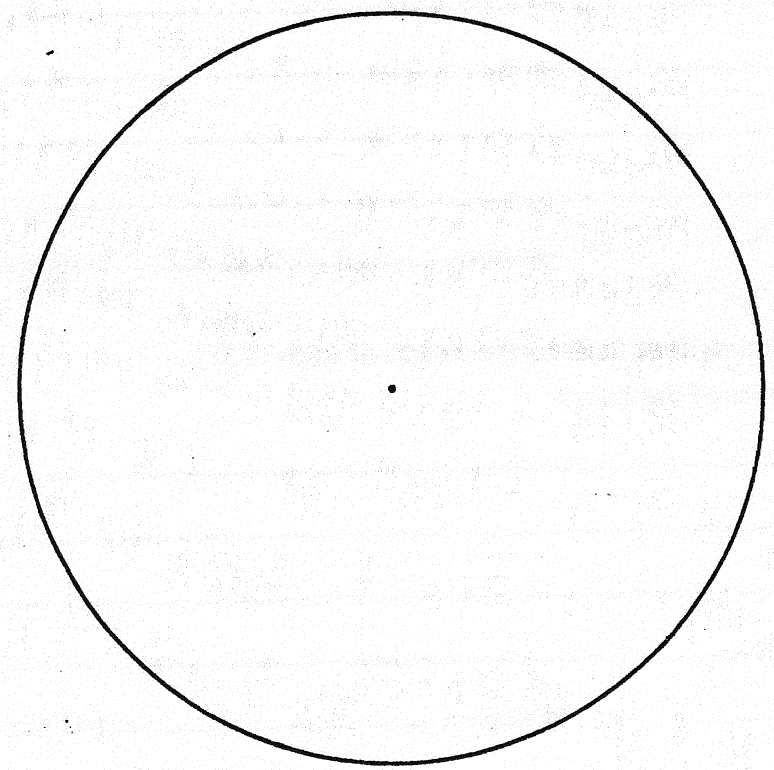
(a) Draw a clearly labelled pie chart to represent these sales.

.....

.....

.....

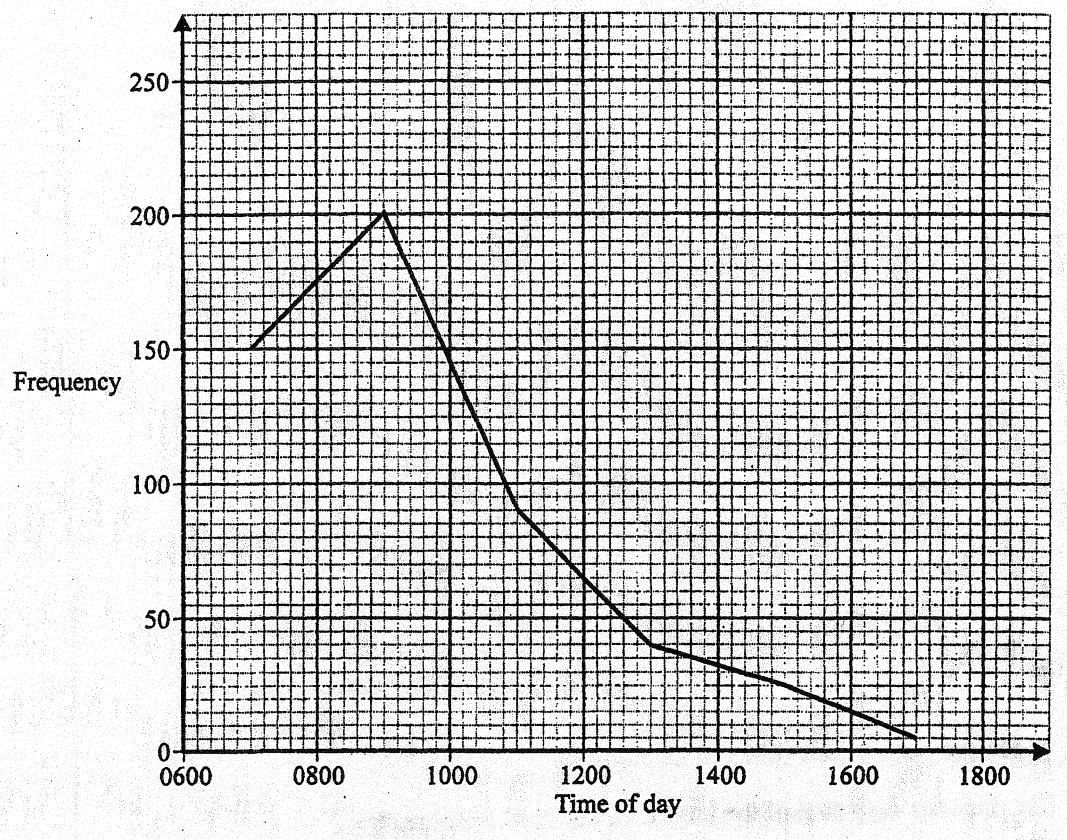
.....



(4 marks)

Leave margin blank

The frequency polygon shows the sales of national daily newspapers.



(b) (i) How many of these papers were sold between 1000 and 1400?

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

The table shows the sales of the Echo.

Time of day	0600–	0800–	1000–	1200–	1400–	1600–1800
Frequency	0	0	0	20	125	215

(ii) On the diagram above draw a frequency polygon to show the sales of the Echo. *(2 marks)*

(iii) Compare and comment on the sales of these two types of paper.

.....

.....

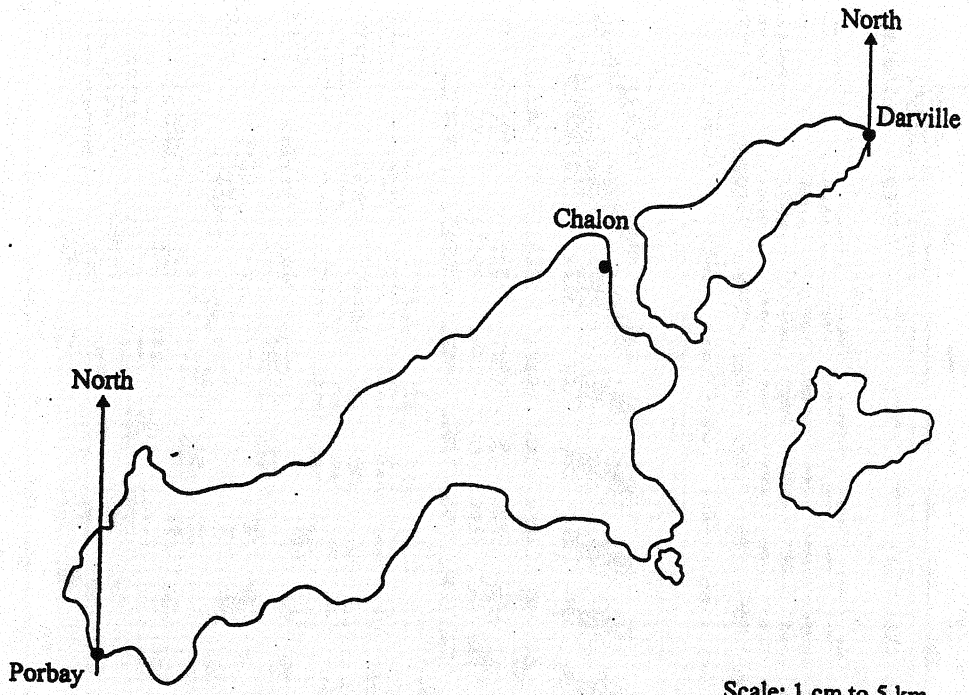
.....

(1 mark)

9

Leave margin blank

3. The diagram shows a map of a group of islands.
The map has been drawn to a scale of 1 cm to 5 km.



(a) A straight road joins Porbay to Chalon.

(i) Use the map to find the length of this road in kilometres.

.....

.....

.....

Answer ..... km *(3 marks)*

(ii) Brian cycles from Porbay to Chalon along this road.
He sets off at 0930 and cycles at an average speed of 18 kilometres per hour.
At what time does he arrive in Chalon?

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(3 marks)*

(b) A lighthouse is on a bearing of 080° from Porbay and 200° from Darville.
Mark, with a cross, the position of the lighthouse on the map. *(2 marks)*

8

Leave margin blank

4. The table shows information about a group of children.

		Boys	Girls
Wears glasses	**Yes**	5	3
	No	14	10

(a) A boy in the group is chosen at random.
What is the probability that he wears glasses?

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) A child in the group is chosen at random.
The probability that the child wears glasses is 0.25.
What is the probability that the child does **not** wear glasses?

.....

.....

.....

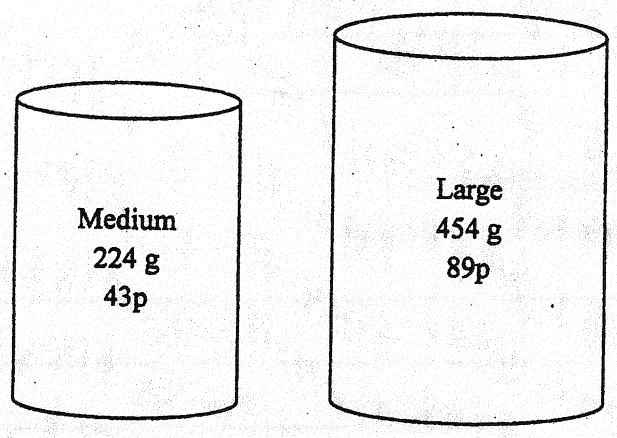
Answer ..... *(1 mark)*

3

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

5. The weights and prices of two different sizes of tomato soup are shown.



Which size of soup gives more grams per penny?
You **must** show all your working.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(3 marks)*

3

Leave margin blank

6. (a) On the diagram draw and label the following lines.

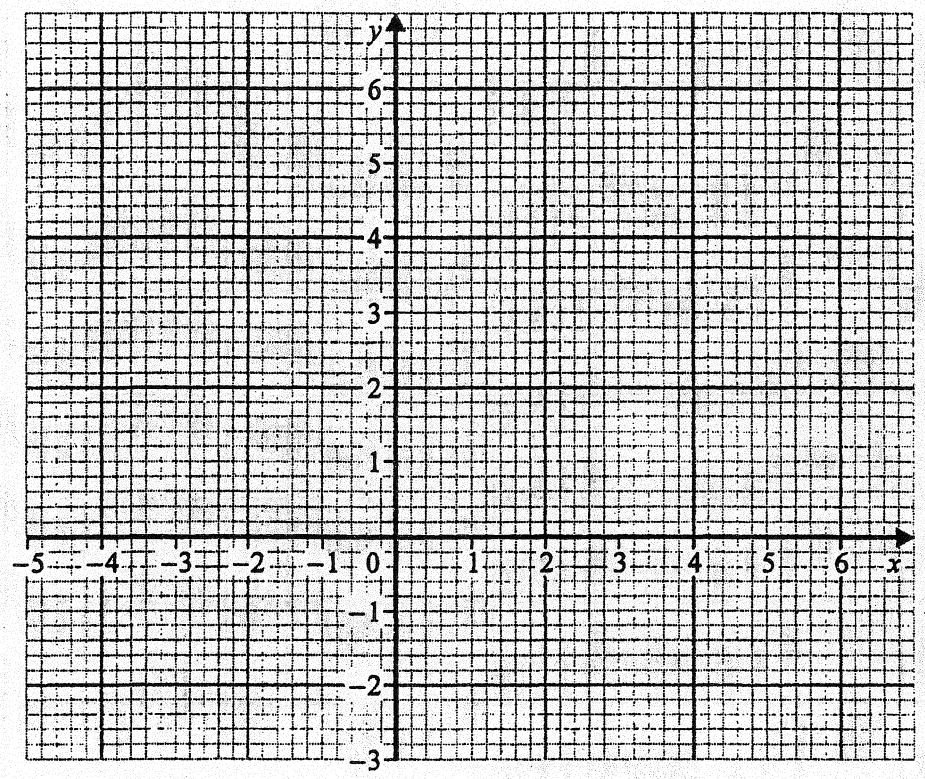
$y = 2x$ and $x + y = 5$

.....

.....

.....

.....



(4 marks)

(b) Explain how to use your graph to solve the equation $2x = 5 - x$.

.....

.....

.....

(1 mark)

(c) Show clearly the single region that is satisfied by **all** of these inequalities.

$x + y \leqslant 5$ $\quad y \geqslant 2x$ $\quad x \geqslant 0$

Label this region R. *(1 mark)*

6

Leave margin blank

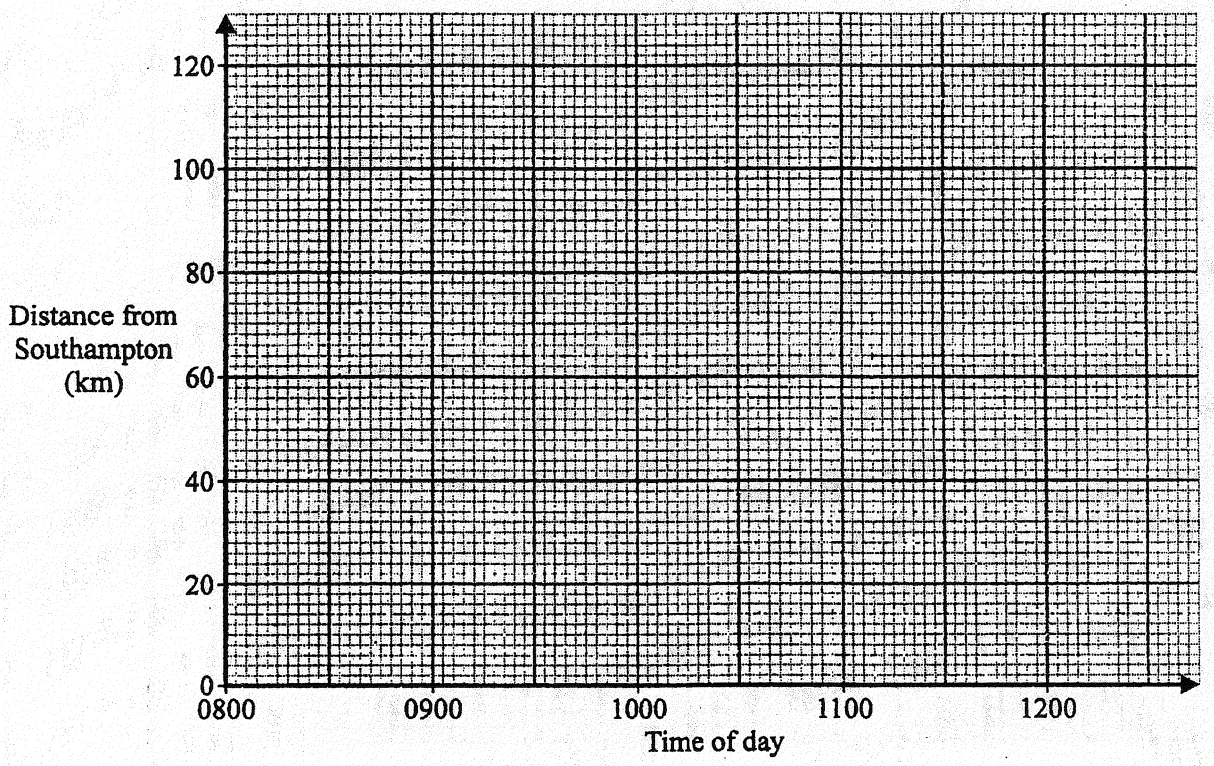
7. The distance between Southampton and London is 120 km.

A coach leaves Southampton at 0800 to travel to London.

The coach travels 60 km at an average speed of 80 kilometres per hour and then stops for 30 minutes. It then continues its journey arriving in London at 1100.

At 1115 the coach leaves London and returns to Southampton, without stopping. It arrives in Southampton at 1230.

(a) Draw a travel graph for the journey of the coach.



(3 marks)

(b) What was the average speed of the coach on the return journey?

.....

.....

.....

.....

Answer .....km/h *(2 marks)*

5

Leave margin blank

8. John and Sarah are each asked to continue a sequence which begins

2, 5, ...

(a) John writes 2, 5, 8, 11, ...

Write down the *n*th term of John's sequence.

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) Sarah writes 2, 5, 10, 17, ...

Write down the *n*th term of Sarah's sequence.

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

4

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

9. A "Travel Saver Card" entitles the holder to 40% off the normal price of a journey.

(a) A particular journey normally costs £28.50.
How much would it cost with a Travel Saver Card?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer £..... *(2 marks)*

(b) The Travel Saver Card price for another journey is £18.60.
What is the normal price of this journey?

.....

.....

.....

.....

.....

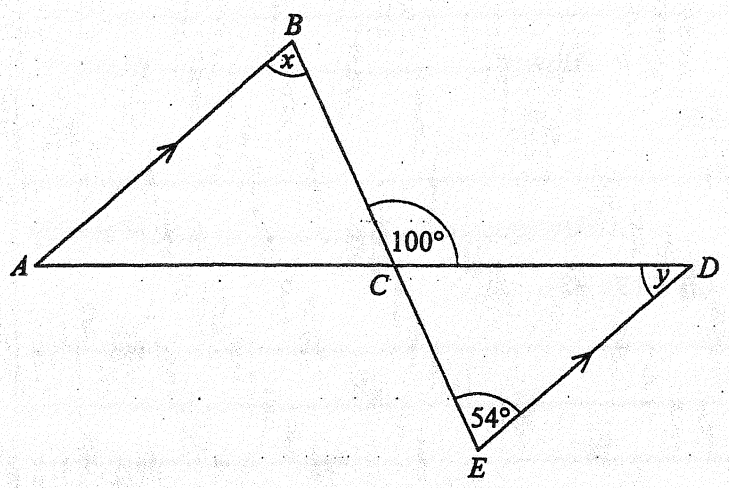
.....

Answer £..... *(3 marks)*

5

Leave margin blank

10. In the diagram AB is parallel to ED.
Angle $CED = 54°$ and angle $BCD = 100°$.



Not to scale

(a) (i) Write down the size of angle x.

Answer ..... degrees *(1 mark)*

(ii) Find the size of angle y.

.....

.....

Answer ..... degrees *(2 marks)*

(b) Triangle ABC is similar to triangle DEC.
$AC:CD$ is 3:2.
$AB = 5.4$ cm.
Calculate the length of DE.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... cm *(3 marks)*

6

Leave margin blank

11. (a) Simplify $x^2 - 2x - 3 + x - 5$.

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) Factorise completely $3a^2 - 6a$.

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(c) Multiply out and simplify $(2x - 1)(x - 3)$.

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

6

12. Light travels at 186 284 miles per second.

(a) Write 186 284 in standard form.

Answer ..... *(2 marks)*

The planet Jupiter is 483.6 million miles from the Sun.

(b) (i) Calculate how long light takes to travel from the Sun to Jupiter.
Give your answer to the nearest minute.

.....

.....

.....

.....

Answer .....minutes *(3 marks)*

(ii) Use approximation to check that your answer is of the right order of magnitude.
You **must** show all your working.

.....

.....

.....

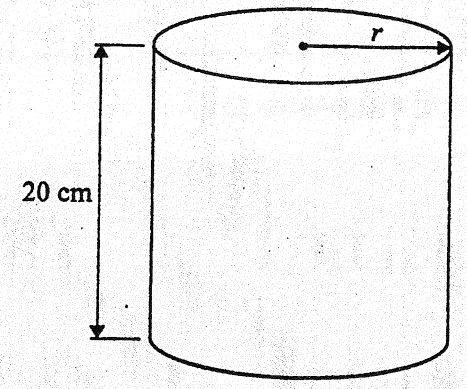
.....

(2 marks)

7

Leave margin blank

13. The cylinder is 20 cm high and holds 1000 cm^3 of water.



Not to scale

Find the radius of the cylinder.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer .....cm *(4 marks)*

4

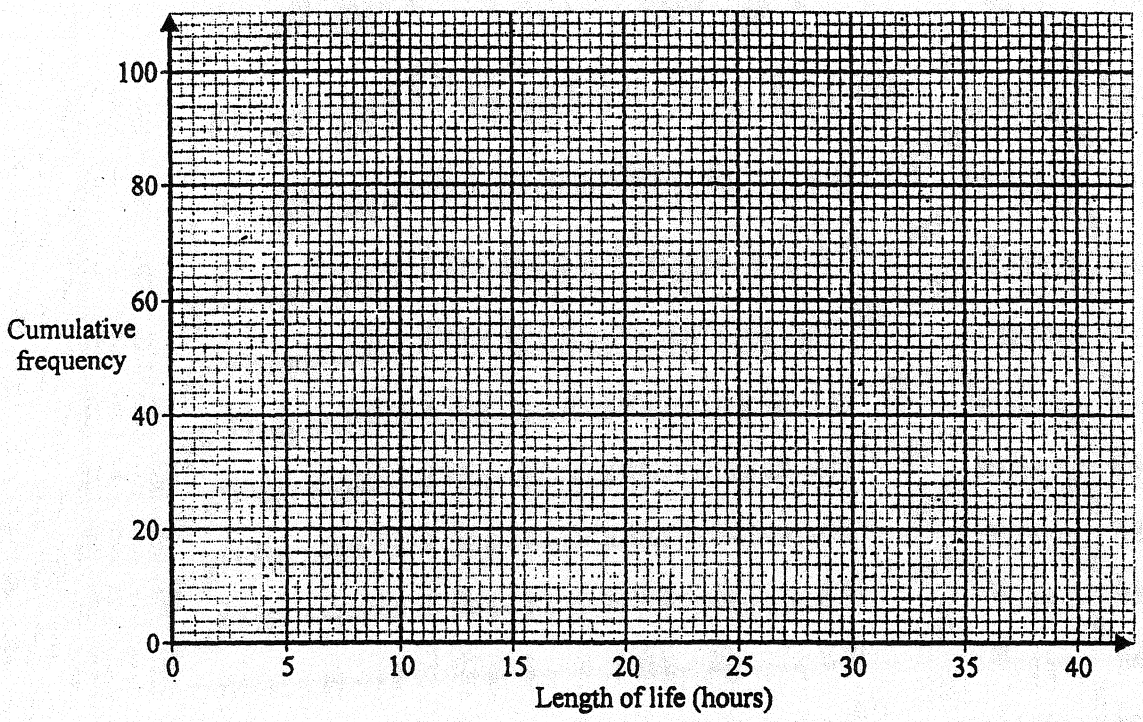
TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

14. The length of life of 100 batteries of a certain make was recorded.
The table shows the results.

Length of life (hours)	<10	<15	<20	<25	<30	<35	<40
Cumulative frequency	0	2	9	50	86	96	100

(a) Draw a cumulative frequency graph to illustrate these data.



(2 marks)

(b) How many batteries had a life of more than 32 hours?

.....

Answer ..... *(1 mark)*

(c) Use your graph to estimate:

(i) the median;

.....

Answer .....hours *(1 mark)*

(ii) the interquartile range.

.....

.....

Answer .....hours *(3 marks)*

Leave margin blank

(d) Another make of battery has a median length of life of 25 hours and an interquartile range of 7 hours.

Is this make of battery likely to be more reliable than the first?

Circle your answer. yes/no

Give a reason for your answer.

.....

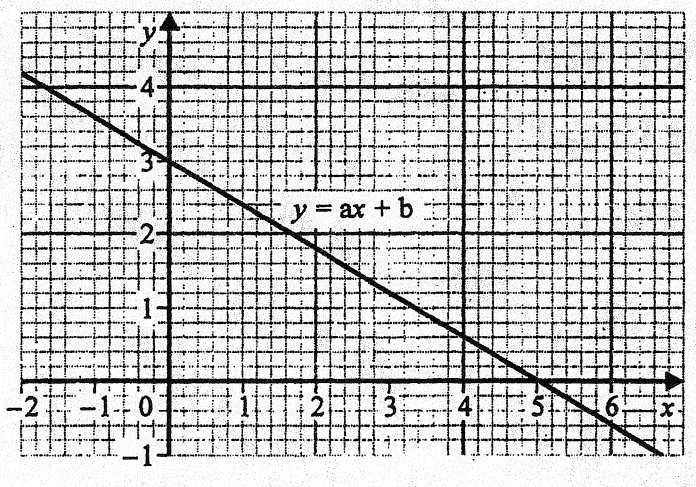
.....

.....

(1 mark)

8

15. A graph of the equation $y = ax + b$ is shown.



Find the values of a and b.

.....

.....

.....

Answer a = ... b = ... *(3 marks)*

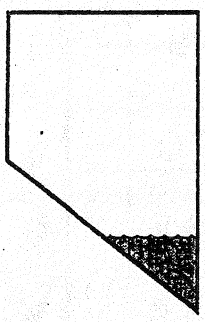
3

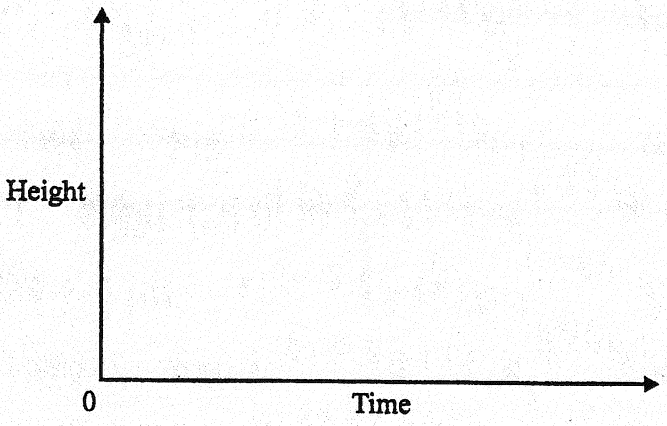
Leave margin blank

16. (a) Water is being poured at a constant rate into a container which has the shape of a prism.

The diagram shows the cross-section of the container.

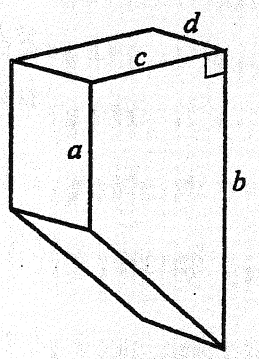
Sketch a graph to show the height of water in the container as it is being filled.





(2 marks)

(b) Another view of the container is shown.



Not to scale

The following formulae represent certain quantities connected with the container.

$$2(a+b) \qquad \tfrac{1}{2}(a+b)c \qquad \tfrac{1}{2}(a+b)cd$$

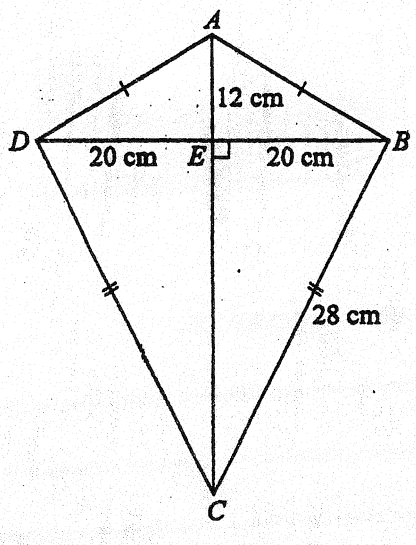
Which of these formulae represents area?

Answer ..... *(1 mark)*

3

Leave margin blank

17. The diagram shows a kite, $ABCD$.



Not to scale

$AE = 12$ cm, $DE = EB = 20$ cm and $BC = 28$ cm.

(a) Calculate the size of angle EBC.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... degrees *(3 marks)*

(b) Calculate the length of EC and hence find the area of the kite.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

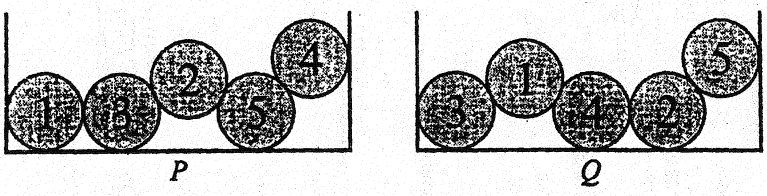
.....

Answer ..... cm^2 *(5 marks)*

8

Leave margin blank

18. Boxes P and Q each contain five numbered balls.
The balls in each box are numbered as shown.



A ball is taken from each box at random.

(a) What is the probability that both balls are numbered 2?

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) What is the probability that both balls have the same number?

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(c) What is the probability that the number on the ball from box P is greater than the number on the ball from box Q?

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

6

END OF EXAMINATION

SURNAME	INITIALS

CENTRE NO.

SIGNATURE

CANDIDATE NO.

Leave blank

Higher

SOUTHERN EXAMINING GROUP

General Certificate of Secondary Education

Summer 1998

MATHEMATICS 2500/15

(2500T, 2500X)

HIGHER TIER

Paper 15

Wednesday 3 June 1.30 pm to 3.30 pm

Time allowed: 2 hours

In addition to this paper you will require:
1. a ruler;
2. a protractor;
3. a pair of compasses;
4. a calculator.

You may use tracing paper.

For Examiner's use			
Number	Mark	Number	Mark
1		13	
2		14	
3		15	
4		16	
5		17	
6			
7			
8			
9			
10			
11			
12			
Total (Column 1) →			
Total (Column 2) →			
TOTAL			
Examiner's Initials			

Instructions

Fill in the boxes at the top of this page.

Answer **all** questions in the spaces given.

Do all rough work in this booklet. Cross through any work you do not want marked.

In questions involving π, take π to be 3.14 or use the π key on your calculator.

Information

The maximum mark for this paper is 100.

Mark allocations are shown in brackets.

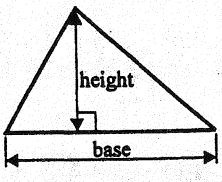
You are expected to use a calculator where appropriate.

Advice

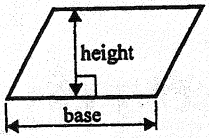
In all calculations, show clearly how you work out your answer.

You may need to use the following formulae:

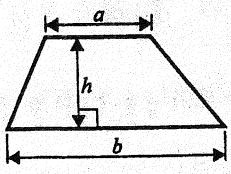
Area of triangle $= \frac{1}{2} \times$ base $\times$ height



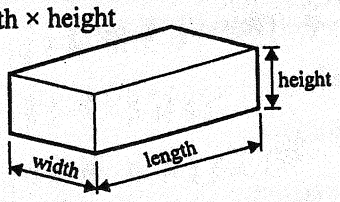
Area of parallelogram = base $\times$ height



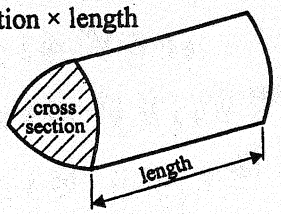
Area of trapezium $= \frac{1}{2}(a+b)h$



Volume of cuboid = length $\times$ width $\times$ height

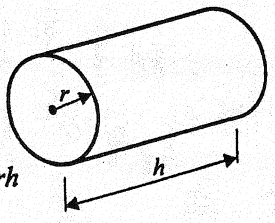


Volume of prism = area of cross section $\times$ length



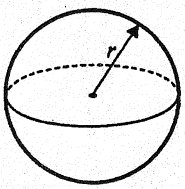
Volume of a cylinder $= \pi r^2 h$

Curved surface area of cylinder $= 2\pi rh$



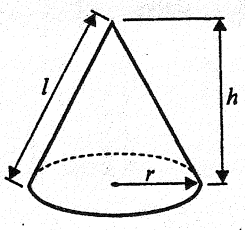
Volume of sphere $= \frac{4}{3}\pi r^3$

Surface area of sphere $= 4\pi r^2$



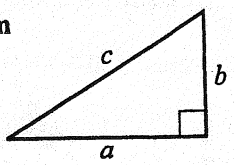
Volume of cone $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Curved surface area of cone $= \pi rl$



Pythagoras' Theorem

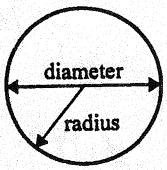
$a^2 + b^2 = c^2$



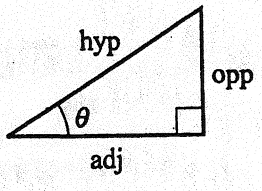
Circumference of circle $= \pi \times$ diameter

$= 2 \times \pi \times$ radius

Area of circle $= \pi \times (\text{radius})^2$



Trigonometry



$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}}$$

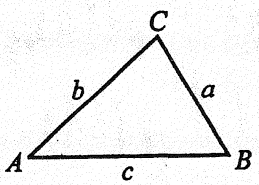
In any triangle ABC

Sine rule $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$

Cosine rule $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Area of triangle $= \frac{1}{2}ab\sin C$



The Quadratic Equation

The solutions of $ax^2 + bx + c = 0$ where $a \neq 0$, are given by

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Standard Deviation

Standard deviation for a set of numbers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, having a mean of $\bar{x}$ is given by

$$s = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}} \quad \text{or} \quad s = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - \left\{\frac{\Sigma x}{n}\right\}^2}$$

Leave margin blank

Answer **all** questions.

1. Some women walked one mile.

The time taken by each was recorded.

The results are as follows.

Time t minutes	$12 \leqslant t < 16$	$16 \leqslant t < 20$	$20 \leqslant t < 24$	$24 \leqslant t < 28$	$28 \leqslant t < 32$
Number of women	1	9	43	22	5

(a) (i) What is the modal class for the time taken?

Answer ..... *(1 mark)*

(ii) Calculate an estimate of the mean time taken.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer .....minutes *(4 marks)*

One mile is approximately 1.6 km.

(b) Use the data to calculate an estimate of the mean time taken by these women to walk one kilometre.

.....

.....

.....

.....

.....

Answer .....minutes *(2 marks)*

7

Leave margin blank

2. A solution of the equation

$$x^4 + 2x = 200$$

lies between $x = 3$ and 4.

Use the method of trial and improvement to find this solution.

Give your answer to one decimal place. You **must** show all your trials.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(4 marks)*

4

3. You are given the formula $v = u + at$.

(a) Work out the value of v when $u = 20$, $a = -6$ and $t = \frac{9}{5}$.

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) Rearrange the formula to give t in terms of v, u and a.

.....

.....

.....

.....

.....

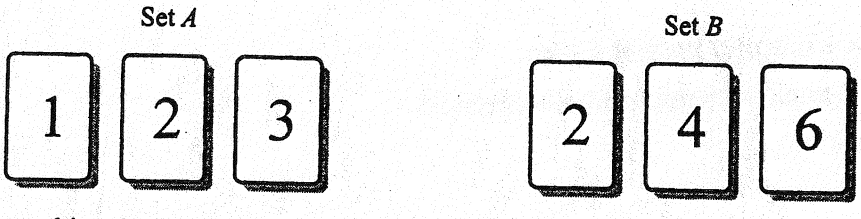
.....

Answer $t =$..... *(2 marks)*

4

Leave margin blank

4. The diagram shows two sets of cards.



(a) A card is taken at random from set A and another from set B.

(i) List all the possible outcomes.

.....

.....

.....

.....

(2 marks)

The numbers on the two cards taken are added together to give a score.

(ii) What is the probability of getting a score which is an odd number?

.....

Answer ..... *(1 mark)*

(b) The cards in set A are red.
The cards in set B are blue.
All the cards are shuffled together.

(i) One card is taken at random.
What is the probability that it is red or 2 or both?

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(ii) One card is taken at random and is then replaced.
Another card is then taken at random.
What is the probability that both cards are red or 2 or both?

.....

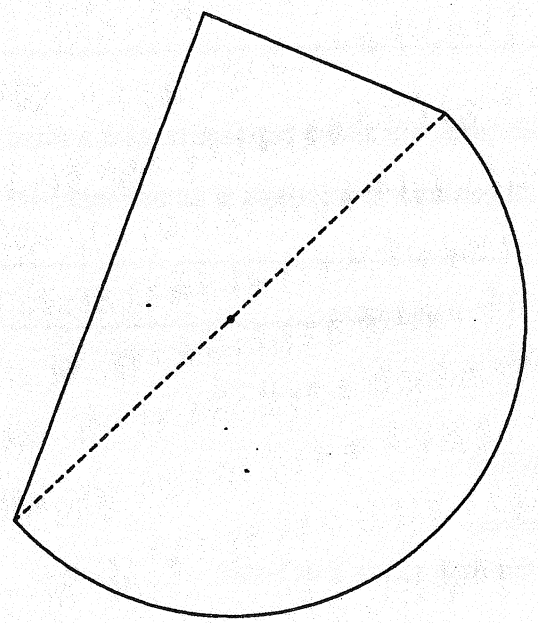
.....

Answer ..... *(2 marks)*

7

Leave margin blank

5. The diagram shows a penguin pool at a zoo.
It consists of a right-angled triangle and a semi-circle.
The scale is 1 cm to 1 m.



(a) A safety fence is put up around the pool.
The fence is always 2 m from the pool.
Draw accurately the position of the fence on the diagram.

(4 marks)

Leave margin blank

(b) The water in the pool is kept at a constant depth of 3.4 m.
By making appropriate measurements calculate the volume of water in the pool.
Give your answer to an appropriate degree of accuracy.
State clearly the units in which your answer is given.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(5 marks)*

9

6. Solve the simultaneous equations

$$2x + y = 9$$
$$x - 2y = 7.$$

You **must** show all your working.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer $x =$ ..... $y =$ ..... *(3 marks)*

3

Leave margin blank

7. (a) In Britain there are 5.80×10^7 people.
The number of retired people is 1.04×10^7.
What percentage of people in Britain are retired?
Give your answer to an appropriate degree of accuracy.

.....

.....

.....

.....

.....

Answer .....% *(3 marks)*

(b) 13.8% of the world's population live in Europe.
The population of the world is 5.72×10^9.
Calculate the population of Europe.

.....

.....

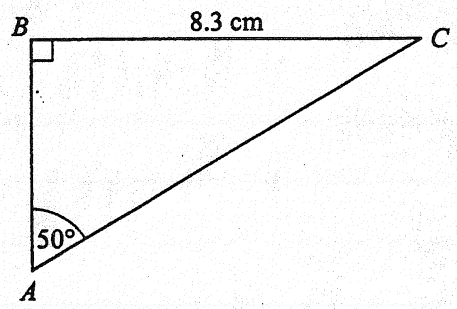
.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

5

8. Triangle ABC has a right angle at B.
Angle $BAC = 50°$ and $BC = 8.3$ cm.



Not to scale

Calculate the length of AC.

.....

.....

.....

.....

Answer .....cm *(3 marks)*

3

Leave margin blank

9. (a) Complete the table of values for $y = x^2 - 2x - 2$.

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	6		–2			1	

(2 marks)

.....

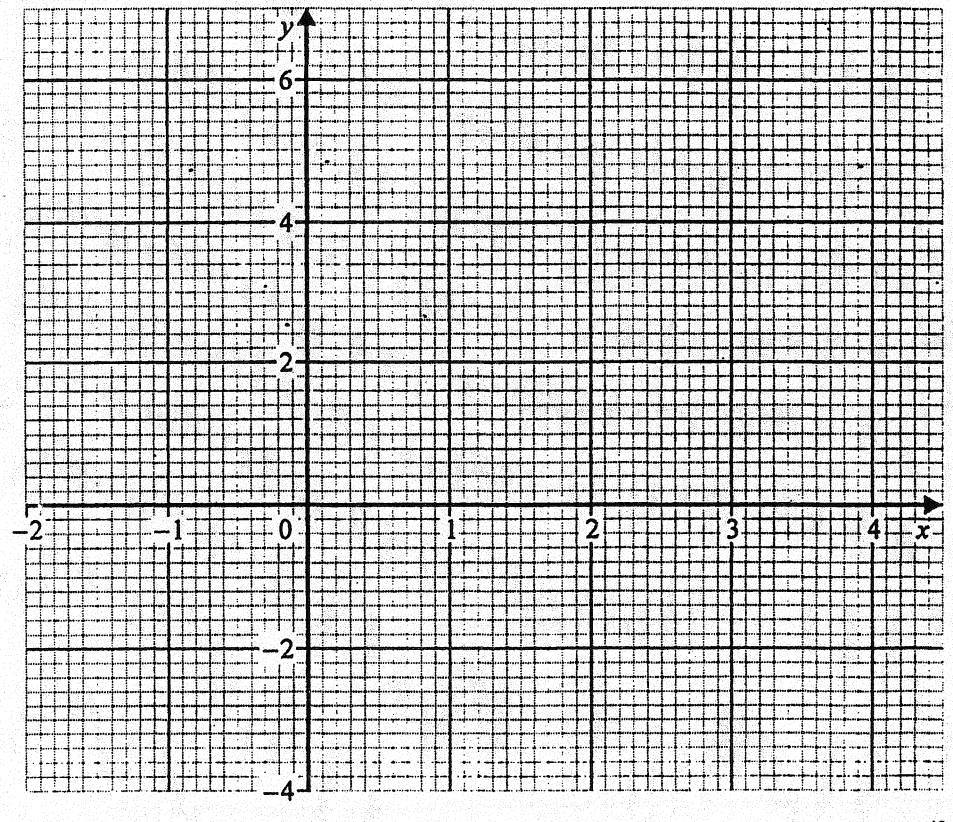
.....

.....

.....

.....

(b) On the axes draw the graph of $y = x^2 - 2x - 2$ for values of x from –2 to 4.



(2 marks)

(c) (i) Use your graph to solve the equation $x^2 - 2x - 2 = 0$.

Answer ..... *(2 marks)*

(ii) Estimate the gradient of the curve $y = x^2 - 2x - 2$ at the point where $x = 2$.

.....

.....

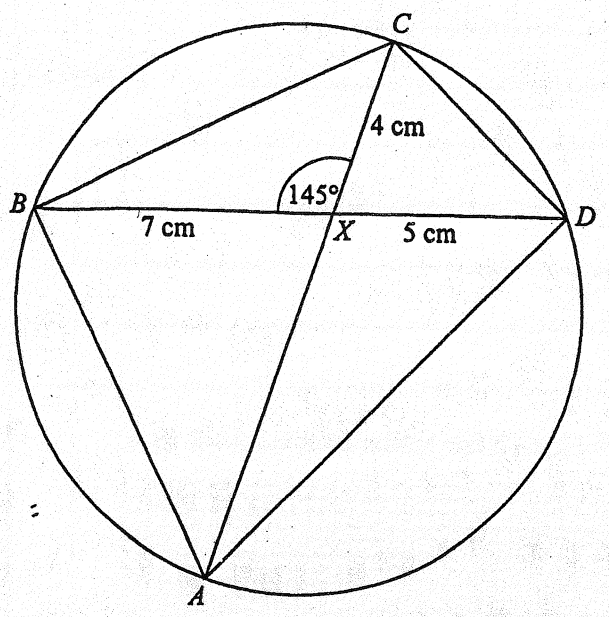
.....

Answer ..... *(3 marks)*

9

Leave margin blank

10. $ABCD$ is a cyclic quadrilateral.



Not to scale

The diagonals AC and BD intersect at X.
$BX = 7$ cm, $CX = 4$ cm, $DX = 5$ cm and angle $CXB = 145°$.

(a) Explain why triangles BXC and AXD are similar.

.....

.....

.....

(2 marks)

(b) Calculate the length of AX.

.....

.....

.....

.....

Answer .....cm *(2 marks)*

(c) Calculate the length of BC.

.....

.....

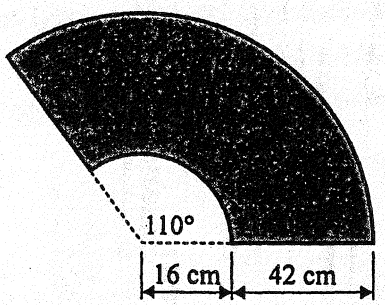
.....

Answer .....cm *(3 marks)*

7

Leave margin blank

11. A wiper blade on a windscreen cleans the shaded area as shown.



Not to scale

Calculate the area of the windscreen cleaned by the wiper.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... cm^2 *(4 marks)*

4

12. Given that y is proportional to x^2, complete the table.

x	5		20
y	45	180	

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(5 marks)

5

Leave margin blank

13. Tom takes blocks at random from a bag containing 7 red (R) and 3 white (W) blocks.
As he takes them from the bag, he puts the blocks one on top of the other.
Here are some examples of possible piles of blocks that Tom could make.

Pile A

W
W

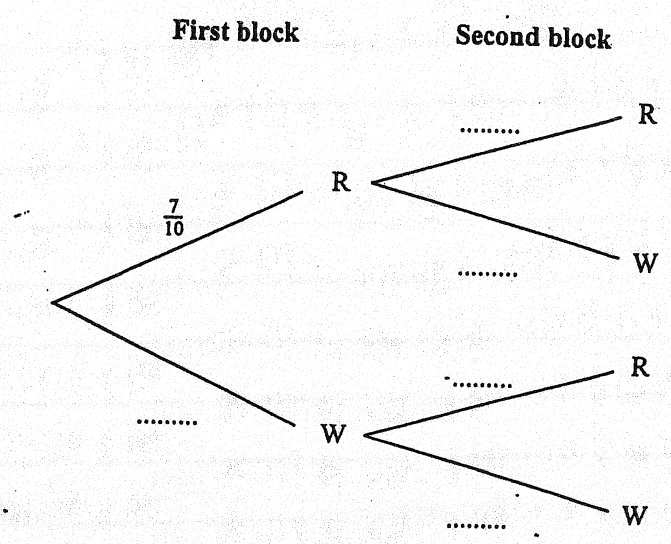
Pile B

R
W
R

Pile C

W
R
W

(a) The tree diagram shows the ways that the first two blocks can be taken from the bag.



(i) Complete the probabilities on the tree diagram. *(2 marks)*

(ii) Calculate the probability that Tom makes **Pile A** with the first two blocks that he takes.

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) Calculate the probability that Tom makes either **Pile B** or **Pile C** with the first three blocks that he takes.

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(3 marks)*

7

Leave margin blank

14. (a) The sides of a rectangle have dimensions 20 cm and 30 cm each measured to the nearest centimetre.

Calculate the smallest possible area of the rectangle.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... cm^2 *(2 marks)*

(b) The sides of a square have length x cm measured to the nearest centimetre.

Write down and simplify an expression, in terms of x, for the difference between the largest and smallest possible areas of the square.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

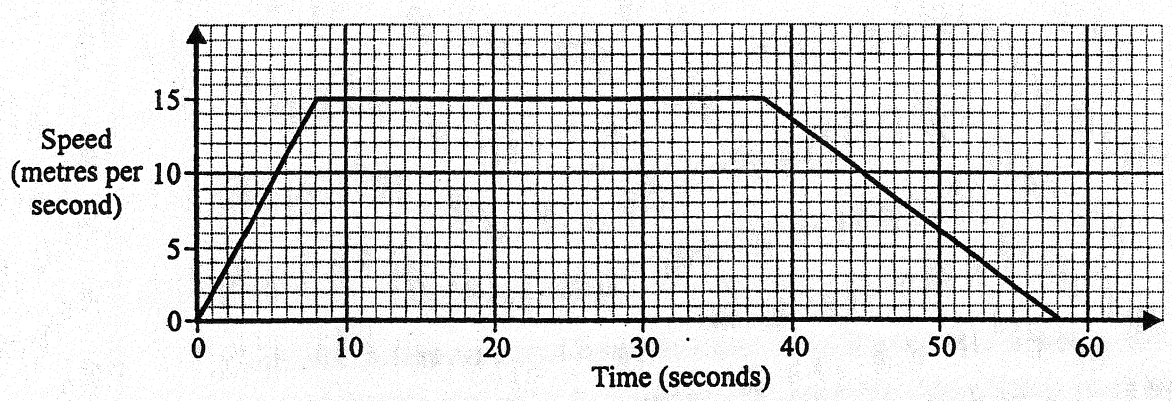
Answer ..... cm^2 *(3 marks)*

5

TURN OVER FOR THE NEXT QUESTION

Leave margin blank

15. The diagram shows the speed/time graph of a bus as it travels between two bus stops.



Calculate the time it takes to travel **half** the distance between the bus stops.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... seconds *(5 marks)*

5

Leave margin blank

16. The delivery times in days of a sample of 20 first class letters are shown.

1	1	3	1	1	1	1	1	2	1
1	2	4	1	1	1	1	1	2	1

(a) Calculate the mean and the standard deviation of the delivery times.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer Mean ..... days

Standard deviation..... days

(3 marks)

The delivery times of a sample of 20 second class letters have a mean of 3.1 days and a standard deviation of 1.2 days.

(b) Comment on the differences between the delivery times for first and second class letters.

.....

.....

.....

(1 mark)

During bad weather delivery times for second class letters are increased by one day.

(c) How does bad weather change the mean and the standard deviation of the delivery times for second class letters?

.....

.....

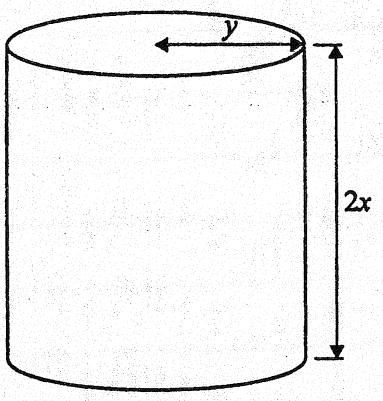
.....

(2 marks)

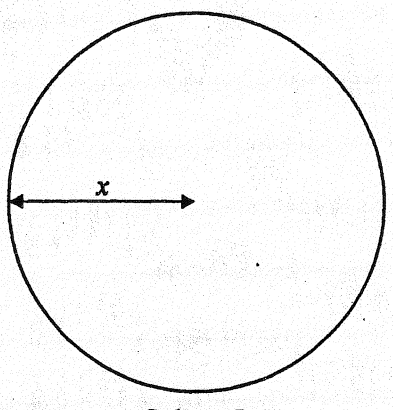
6

Leave margin blank

17. Cylinder A has radius y and height $2x$.
Sphere B has radius x.



Cylinder A



Sphere B

(a) The total surface area of cylinder A is given by the expression

$$2\pi y^2 + 4\pi xy.$$

Factorise this expression completely.

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(2 marks)*

(b) Cylinder A has the same surface area as sphere B.
Show that $y^2 = 2x(x - y)$.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

(3 marks)

Leave margin blank

(c) Calculate the value of x when $y = 3$.

Give your answer to an accuracy of 1 decimal place.

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Answer ..... *(5 marks)*

10

END OF EXAMINATION

Paper Reference
6406

London Examinations GCE

Monday 11 January 1999 – 2nd Morning Session

Advanced Level/Advanced Supplementary

Pure Mathematics P2

Time: 1 hour 30 minutes

Instructions to Candidates

Full marks may be obtained for answers to ALL questions.

In the boxes on the Answer Book, write the name of the examining body (London Examinations), your centre number, candidate number, the module title (Pure Mathematics P2), the paper reference (6406), your surname, other names and signature.

Information for Candidates

A booklet 'Mathematical Formulae including Statistical Formulae and Tables' is provided.

In calculations you are advised to show all the steps in your working, giving your answer at each stage.

This paper has 9 questions.

N9606 R6406 3/3/3/6/1
© 1999 Edexcel Foundation

This publication may only be reproduced in accordance with Edexcel Foundation copyright policy.

London Examinations is a division of Edexcel Foundation and is a trade mark of the University of London.

Edexcel Foundation is a Registered Charity.

EDEXCEL FOUNDATION

1.

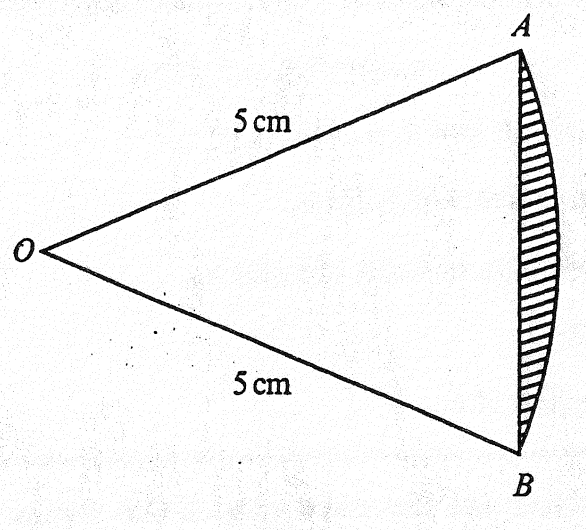


Fig. 1

Figure 1 shows a sector OAB of a circle, centre O, of radius 5 cm and a shaded segment of the circle. Given that $\angle AOB = 0.7$ radians, calculate

(a) the area, in cm^2, of the sector OAB, **(2 marks)**

(b) the area, in cm^2 to 2 significant figures, of the shaded segment. **(3 marks)**

---

2. Find the set of values of x for which $(x - 1)(x - 4) < 2(x - 4)$. **(6 marks)**

---

3. A formula used to calculate the power gain of an amplifier has the form

$$G = h \ln\left(\frac{p_2}{p_1}\right).$$

Given that $G = 16$, $h = 4.3$ and $p_1 = 8$,

(a) calculate, to the nearest whole number, the value of p_2. **(4 marks)**

Given that the values of G and p_1 are exact but that the value of h has been given to one decimal place,

(b) find the range of possible values of p_2. **(4 marks)**

---

4. A curve has equation $y = f(x)$ and passes through the point with coordinates $(0, -1)$. Given that $f'(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 6x$,

(a) use integration to obtain an expression for $f(x)$, **(5 marks)**

(b) show that there is a root α of the equation $f'(x) = 0$, such that $1.41 < \alpha < 1.43$. **(3 marks)**

5. A sequence of terms $\{u_n\}$ is defined, for $n \geqslant 1$, by the recurrence relation

$$u_{n+2} = 2ku_{n+1} + 15u_n,$$

where k is a constant. Given that $u_1 = 1$ and $u_2 = -2$,

(*a*) find an expression, in terms of k, for u_3. **(2 marks)**

(*b*) Hence find an expression, in terms of k, for u_4. **(2 marks)**

Given also that $u_4 = -38$,

(*c*) find the possible values of k. **(4 marks)**

---

6. (*a*) Using the same scales and the same axes, sketch the graphs of $y = |2x|$ and $y = |x - a|$, where $a > 0$. **(3 marks)**

(*b*) Write down the coordinates of the points where the graph of $y = |x - a|$ meets the axes. **(2 marks)**

(*c*) Show that the point with coordinates $(-a, 2a)$ lies on both graphs. **(2 marks)**

(*d*) Find the coordinates, in terms of a, of a second point which lies on both graphs. **(3 marks)**

---

7. The second term of a geometric series is 80 and the fifth term of the series is 5.12.

(*a*) Show that the common ratio of the series is 0.4. **(4 marks)**

Calculate

(*b*) the first term of the series, **(1 mark)**

(*c*) the sum to infinity of the series, giving your answer as an exact fraction, **(2 marks)**

(*d*) the difference between the sum to infinity of the series and the sum of the first 14 terms of the series, giving your answer in the form $a \times 10^n$, where $1 \leqslant a < 10$ and n is an integer. **(4 marks)**

---

8. The straight line l_1 passes through the points A and B with coordinates (2, 2) and (6, 0) respectively.

(*a*) Find an equation of l_1. **(3 marks)**

The straight line l_2 passes through the point C with coordinates (–9, 0) and has gradient $\frac{1}{4}$.

(*b*) Find an equation of l_2. **(2 marks)**

The lines l_1 and l_2 intersect at the point D.

(*c*) Calculate, to 2 decimal places, the length of AD. **(6 marks)**

(*d*) Calculate the area of $\triangle DCB$. **(2 marks)**

9.

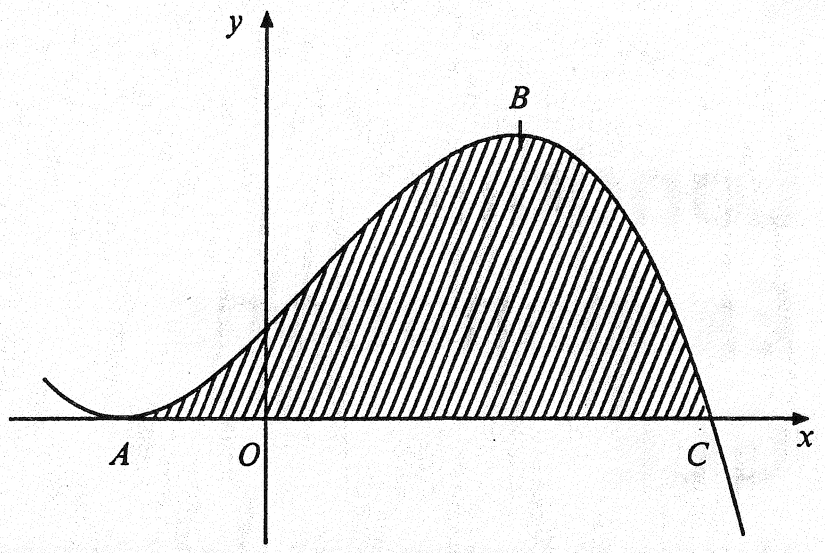


Fig. 2

Figure 2 shows part of the curve with equation $y = 3 + 5x + x^2 - x^3$. The curve touches the x-axis at A and crosses the x-axis at C. The points A and B are stationary points on the curve.

(a) Show that C has coordinates (3, 0). **(2 marks)**

Using calculus and showing all your working, find

(b) the coordinates of A and B, **(7 marks)**

(c) the area of the shaded region, shown in Fig. 2, bounded by the curve and the x-axis. **(5 marks)**

---

10. $$f(x) \equiv 3 + 2 \sin (2x + k)°, \ 0 \leqslant x < 360,$$

where k is a constant and $0 < k < 360$. The curve with equation $y = f(x)$ passes through the point with coordinates $(15, 3 + \sqrt{3})$.

(a) Show that $k = 30$ is a possible value for k and find the other possible value of k. **(4 marks)**

Given that $k = 30$,

(b) solve the equation $f(x) = 1$, **(6 marks)**

(c) find the range of f, **(2 marks)**

(d) sketch the graph of $y = f(x)$, stating the coordinates of the turning points and the coordinates of the point where the curve meets the y-axis. **(5 marks)**

END

Paper Reference
6406

London Examinations GCE

Monday 11 January 1999 – 2nd Morning Session

Advanced Level/Advanced Supplementary

Pure Mathematics P2

Time: 1 hour 30 minutes

Instructions to Candidates

Full marks may be obtained for answers to ALL questions.

In the boxes on the Answer Book, write the name of the examining body (London Examinations), your centre number, candidate number, the module title (Pure Mathematics P2), the paper reference (6406), your surname, other names and signature.

Information for Candidates

A booklet 'Mathematical Formulae including Statistical Formulae and Tables' is provided.

In calculations you are advised to show all the steps in your working, giving your answer at each stage.

This paper has 9 questions.

N9606 R6406 3/3/3/6/1
© 1999 Edexcel Foundation

This publication may only be reproduced in accordance with Edexcel Foundation copynght policy.

London Examinations is a division of Edexcel Foundation and is a trade mark of the University of London.

Edexcel Foundation is a Registered Charity.

EDEXCEL FOUNDATION

1. The equation $x^x = 2$ has a solution near $x = 1.5$.

(*a*) Use the iteration formula

$$x_{n+1} = 2^{\frac{1}{x_n}}$$

with $x_0 = 1.5$ to find the approximate solution x_5 of the equation. Show the intermediate iterations and give your final answer to 4 decimal places. **(3 marks)**

(*b*) Use the iteration formula

$$x_{n+1} = 2x_n^{(1-x_n)}$$

with $x_0 = 1.5$ to find x_1, x_2, x_3, x_4. Comment briefly on this sequence. **(3 marks)**

---

2. (*a*) Show that $(x - 2)$ is a factor of

$$f(x) \equiv x^3 + x^2 - 5x - 2.$$ **(2 marks)**

(*b*) Hence, or otherwise, find the exact solutions of the equation $f(x) = 0$. **(5 marks)**

3.

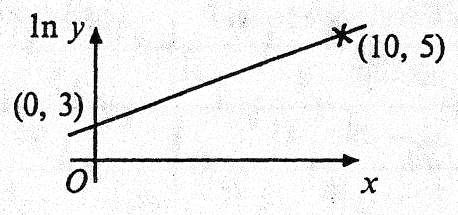


Fig. 1

A student performs an experiment and collects two sets of data, x and y. She plots a graph of ln y against x and obtains a straight line as shown in Fig. 1. This line passes through the points (0, 3) and (10, 5).

(*a*) Show that an equation of the line is $\ln y = 3 + kx$, and state the value of the constant k. **(3 marks)**

(*b*) Show that the relationship between x and y may be written in the form $y = pq^x$, where p and q are constants. **(3 marks)**

(*c*) Find the value of p and the value of q, giving your answers to 3 significant figures. **(2 marks)**

---

4. Relative to an origin O, points A, B and C have coordinates (3, 0, 0), (3, 6, 2) and (0, 6, 0) respectively.

(a) Find the lengths, to 3 significant figures, of AB, BC and AC. **(4 marks)**

(b) Find, to the nearest degree, the size of $\angle ABC$. **(4 marks)**

---

5. (a) Use the binomial theorem to expand $(3 + 10x)^4$, giving each coefficient as an integer. **(6 marks)**

(b) Use your expansion, with an appropriate value for x, to find the exact value of $(1003)^4$. State the value for x which you have used. **(3 marks)**

---

6. A house to house collection was organised on behalf of a well known charity. 200 of the envelopes collected by one volunteer were opened and the amount which each contained is summarised in the table below.

Amount in envelope (pence)	Number of envelopes
0 – 20	40
21 – 49	90
50 – 100	50
101 – 499	18
500 – 1000	2

(a) Calculate an estimate of the mean amount in each envelope. **(3 marks)**

(b) Calculate an estimate of the standard deviation of the amount collected in each envelope. **(2 marks)**

(c) Explain why the mean and standard deviation may not be the best summary statistics to use with these data. **(2 marks)**

(d) Without drawing a graph, calculate estimates for the median, the quartiles, and the semi-interquartile range for these data. **(5 marks)**

(*a*) Find the values of x for which $f(x) = 0$, giving your answers in terms of π. **(3 marks)**

(*b*) Use calculus to find the coordinates of the turning points on the graph of $y = f(x)$. **(9 marks)**

(*c*) Show that $f''(x) = 8e^{2x}\cos 2x$. **(2 marks)**

(*d*) Hence, or otherwise, determine which turning point is a maximum and which is a minimum. **(2 marks)**

---

8. (*a*) Find $\int x(x^2 + 3)^5 \, dx$. **(3 marks)**

(*b*) Show that $\int_1^e \frac{1}{x^2} \ln x \, dx = 1 - \frac{2}{e}$. **(6 marks)**

(*c*) Given that $p > 1$, show that $\int_1^p \frac{1}{(x+1)(2x-1)} dx = \frac{1}{3} \ln \frac{4p-2}{p+1}$. **(8 marks)**

9.

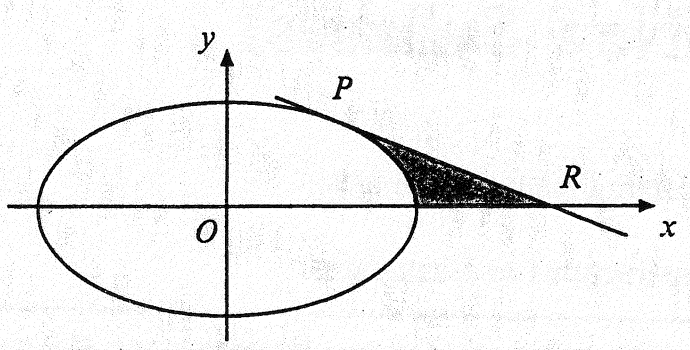


Fig. 2

The curve shown in Fig. 2 has parametric equations

$$x = 5\cos\theta, \; y = 4\sin\theta, \quad 0 \leqslant \theta < 2\pi.$$

(*a*) Find the gradient of the curve at the point P at which $\theta = \frac{\pi}{4}$. **(4 marks)**

(*b*) Find an equation of the tangent to the curve at the point P. **(2 marks)**

(*c*) Find the coordinates of the point R where this tangent meets the x-axis. **(1 mark)**

The shaded region, shown in Fig. 2, is bounded by the tangent PR, the curve and the x-axis.

(*d*) Find the area of the shaded region, leaving your answer in terms of π. **(10 marks)**

END

London EXAMINATIONS
UNIVERSITY OF LONDON EXAMINATIONS & ASSESSMENT COUNCIL

GCE

Tuesday 13 June 1995 – 1st Morning Session

Advanced Level/Advanced Supplementary

Statistics T1 (New Syllabus)

Time: 1 hour 30 minutes

Instructions to Candidates

Full marks may be obtained for answers to ALL questions.

In the boxes on the Answer Book, write you centre number, candidate number, the syllabus title (Statistics), syllabus number (6413), the paper number (T1), your surname and initials, signature and date.

Information for Candidates

A booklet 'Mathematical Formulae including Statistical Formulae and Tables' is provided.

In calculations you are advised to show all the steps in your working, giving your answer at each stage.

This paper has 9 questions.

D5818 HL-140-0-6413 3/3/10
© 1995 ULEAC
This publication may only be reproduced in accordance with ULEAC copyright policy.

1. The committee of a squash club are discussing whether or not to incorporate a sauna as part of the club's facilities. It is decided to ask a sample of members for their views.

(*a*) Suggest a suitable sampling frame.

(*b*) Explain the difference between a sample and a census, using this example to illustrate your answer.

(*c*) State why you think the committee might have decided to take a sample in this case rather than a census.

(4 marks)

---

2. In a survey of the part-time earnings of some sixth form students the median wage was £24.50. The 75th percentile was £35 and the interquartile range was £23.50.

Use the quartiles to describe the skewness of the distribution.

(5 marks)

---

3. A multiple choice test consists of 20 questions. There are 5 choices for each question and only one choice is correct. A certain candidate made a random guess for each question.

(*a*) Suggest a suitable model to describe the number of questions the candidate guessed correctly and give suitable values for any parameters required.

Find the probability that the candidate obtained

(*b*) no correct answers,

(*c*) more than 7 correct answers.

(7 marks)

---

4. An urn A contains 5 red balls and 3 green balls and a similar urn B contains 3 red balls and 5 green balls. One ball is selected at random from A and placed in B. One ball is then selected at random from B. Let R_i and G_i, $i = 1, 2$, represent the events that the ith ball selected is red and green respectively.

(*a*) Show that $P(R_1 \cap R_2) = \frac{5}{18}$.

(*b*) Find the probability that the second ball selected is red.

(*c*) Calculate $P(G_1 | G_2)$.

(10 marks)

---

5. The table gives the ages, in completed years, of the population in a particular region of the United Kingdom.

Age	0 – 4	5 – 15	16 – 44	45 – 64	65 – 79	80 and over
Number (in thousands)	260	543	1727	756	577	135

A histogram of this data was drawn with age along the horizontal axis. The 0 – 4 age group was represented by a bar of horizontal width 0.5 cm and height 5.2 cm.

(*a*) Find the widths and heights, in cm to 1 decimal place, of the bars representing the following age groups:

(i) 16 – 44, (ii) 65 – 79.

(*b*) Taking the mid-point of the last group to be 90 years write down the mid-points of the other age groups and estimate the mean age of the population in this region of the United Kingdom.

(11 marks)

---

6. A biologist is studying the behaviour of sheep in a large field. The field is divided into a number of equally sized squares and the average number of sheep per square is 2.5. The sheep are randomly spread throughout the field.

(*a*) Suggest a suitable model for the number of sheep in a square and give a suitable value for any parameter or parameters required.

Calculate the probability that a randomly selected square contains

(*b*) no sheep,

(*c*) more than 4 sheep.

A sheep dog has been sent into the field to round up the sheep.

(*d*) Explain why the model may no longer be applicable.

In another field the average number of sheep per square is 20 and the sheep are scattered randomly throughout the field.

(*e*) Using a suitable approximation, find the probability that a randomly selected square contains fewer than 15 sheep.

(15 marks)

---

7. A gardener is attempting to light a bonfire. The time, in minutes, for which a taper will stay alight on a calm day is modelled by the random variable T. The cumulative distribution function of T is given by

$$F(t) = P(T \leqslant t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{2}t^3 - \frac{3}{16}t^4, & 0 \leqslant t \leqslant 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

(*a*) Find $P(T \leqslant 1)$.

(*b*) Verify that the median m of T satisfies $1.22 < m < 1.23$.

(*c*) Find the probability density function $f(t)$ of T.

(*d*) Find the modal time for which a taper will stay alight.

(*e*) Sketch the probability density function of T.

(*f*) Give a reason why this model may not be applicable on a windy day and give a sketch of a probability density function that may be more suitable in such conditions.

(15 marks)

---

8. The discrete random variables A and B are independent and have the following probability distributions:

a	1	2	3
$P(A = a)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

b	1	2
$P(B = b)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

The random variable Q is the product of one observation from A and one observation from B.

(a) Show that $P(Q = 2) = \frac{1}{3}$.

(b) Find the probability distribution for Q.

(c) Hence, or otherwise, show that $E(Q) = \frac{10}{3}$.

(d) Find $Var(Q)$.

(15 marks)

---

9 Some children are measuring leaves. The lengths of leaves from a particular bush are normally distributed with a mean of 2.1 cm and a standard deviation of 0.25 cm.

(a) Find the probability of obtaining a leaf from the bush which is shorter than 2.4 cm.

(b) Show that the probability of the total length of 5 randomly chosen leaves from the bush being less than 12 cm is 0.996, to 3 decimal places.

The lengths of leaves from a certain tree are normally distributed with a mean of 5.5 cm and a standard deviation of 0.4 cm.

(c) Find the probability that the total length of 5 randomly chosen leaves from the bush is more than twice the length of a single randomly chosen leaf from the tree.

(18 marks)

END

London EXAMINATIONS
UNIVERSITY OF LONDON EXAMINATIONS & ASSESSMENT COUNCIL

GCE

Wednesday 7 June 1995 – 1st Morning Session

Advanced Level/Advanced Supplementary

Mechanics M1 (New Syllabus)

Time: 1 hour 30 minutes

Instructions to Candidates

Full marks may be obtained for answers to ALL questions.

In the boxes on the Answer Book, write you centre number, candidate number, the syllabus title (Mechanics), syllabus number (6409), the paper number (M1), your surname and initials, signature and date.

Whenever a numerical value of g is required, take $g = 9.8$ m s^{-2}.

Information for Candidates

A booklet 'Mathematical Formulae including Statistical Formulae and Tables' is provided.

In calculations you are advised to show all the steps in your working, giving your answer at each stage.

This paper has 9 questions.

D5817 MA-140-1-6409 3/3/3/10/10
© 1995 ULEAC
This publication may only be reproduced in accordance with ULEAC copyright policy.

1. A lorry of mass 5000 kg moves at a constant speed of 15 m s^{-1} up a hill inclined at an angle α to the horizontal, where $\sin \alpha = \frac{1}{15}$. The resistance experienced by the lorry is constant and has magnitude 2500 N.

Find, in kW, the rate of working of the lorry's engine.

(5 marks)

2.

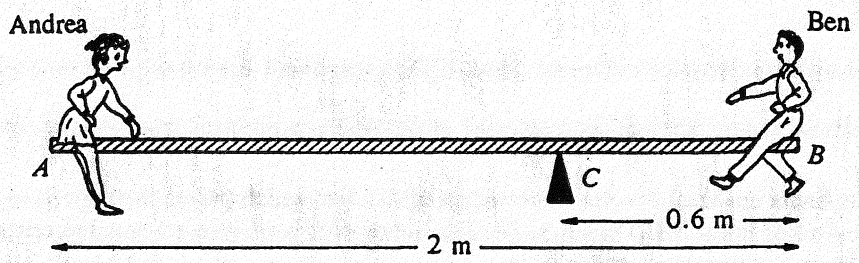


Fig. 1

A uniform plank of wood AB, of mass 15 kg and length 2 m, is supported by a smooth pivot at the point C, where $BC = 0.6$ m. Andrea, whose mass is 30 kg, sits at one end of the plank at A, and Andrea's father Ben sits at the other end of the plank at B, as shown in Fig.1. The plank remains horizontal in equilibrium.

(*a*) Suggest suitable models for the plank and for Andrea and Ben in order to determine the mass of Ben.

(*b*) Find the mass of Ben.

(7 marks)

---

3. A train accelerates from rest at a station A with constant acceleration 2 m s^{-2} until it reaches a speed of 36 m s^{-1}. It then cruises at this speed for 90 s before braking to stop at the next station B. The line from A to B is straight. During the braking period the train decelerates with constant deceleration 3 m s^{-2}.

(*a*) Sketch a speed-time graph to illustrate this information.

(*b*) Find the total time taken for the train to travel from A to B.

(*c*) Find the distance from A to B.

(8 marks)

4.

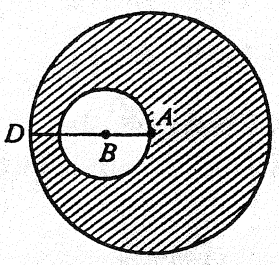


Fig. 2

Figure 2 shows a machine component made from a thin uniform circular disc, centre A and radius 5 cm, from which a circular hole, centre B, has been cut out. The hole has radius 2 cm and $AB = 2$ cm.

(*a*) Give a reason why the centre of mass of the component lies on the line through A and B.

(*b*) Show that the distance of the centre of mass of the component from A is $\frac{8}{21}$ cm.

The component has mass M. AD is the radius of the disc which passes through B, as shown in Fig. 2. A small stud of mass kM is fixed at D. The value of k is chosen so that the centre of mass of the component with the added stud is at A.

(*c*) Find the value of k.

(10 marks)

5.

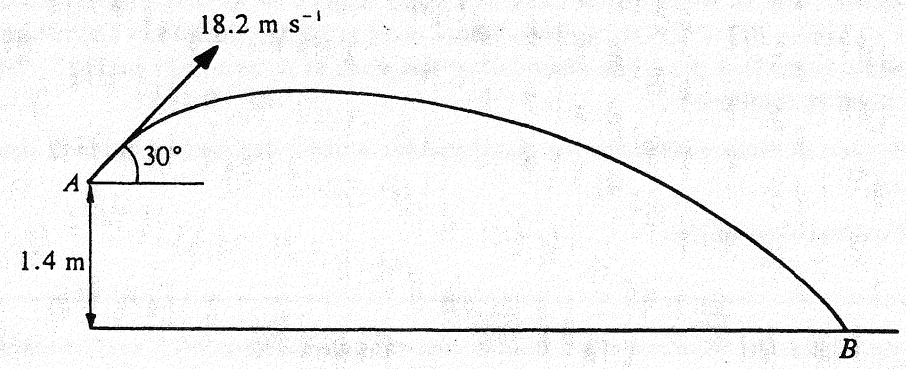


Fig. 3

A batsman hits a cricket ball, giving it a speed of 18.2 m s^{-1} at an angle of elevation of 30°. The point A where he hits the ball is 1.4 m above the ground, which is horizontal. The ball then moves freely under gravity and hits the ground at the point B, as shown in Fig. 3. By modelling the ball as a particle and ignoring air resistance, find

(*a*) the time taken by the ball to travel from A to B,

(*b*) the horizontal distance of B from A, giving your answer in m to 1 decimal place.

(11 marks)

6. A particle P of mass 0.1 kg moves so that, at time t seconds, its acceleration $\mathbf{a}$ m s^{-2} is given by

$$\mathbf{a} = 5t\mathbf{i} - 15t^{\frac{1}{2}}\mathbf{j}, \ (t \geqslant 0),$$

where the unit vectors $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ are directed due east and north respectively.

(*a*) Find the magnitude of the resultant force acting on P when $t = 4$, giving your answer in N to 2 decimal places.

Given that P has velocity $10\mathbf{i}$ m s^{-1} when $t = 0$, find

(*b*) an expression for the velocity of P in terms of t,

(*c*) the direction of motion of P when $t = 4$, giving your answer as a bearing to the nearest degree.

(14 marks)

---

7. A football pitch is a horizontal plane and O is a fixed point on the pitch. The vectors $\mathbf{i}$ and $\mathbf{j}$ are perpendicular unit vectors in this horizontal plane. Colin and David are two players on the pitch. At time $t = 0$, David kicks the ball from the origin O with a constant velocity $8\mathbf{i}$ m s^{-1} and runs thereafter with constant velocity $(3\mathbf{i} + 5\mathbf{j})$ m s^{-1}. When David kicks the ball, Colin is at the point with position vector $(10\mathbf{i} + 8\mathbf{j})$ m and starts running with constant velocity $(3\mathbf{i} - 4\mathbf{j})$ m s^{-1}.

(*a*) Write down the position vectors of Colin and David at time t seconds.

(*b*) Verify that Colin intercepts the ball after 2 seconds.

As soon as Colin intercepts the ball he kicks it, giving it a constant velocity of $(\lambda\mathbf{i} + \mu\mathbf{j})$ m s^{-1}. He aims to pass it to David who maintains his constant velocity. Given that David intercepts the ball 2 seconds after Colin has kicked it,

(*c*) find the values of λ and μ.

(14 marks)

---

8. A truck A of mass 900 kg moving on a straight horizontal railway line with speed 7 m s^{-1} collides with a second truck B of mass 500 kg which is stationary. At the collision the trucks are automatically coupled and move off together. By modelling the trucks as particles,

(*a*) show that the speed of the trucks immediately after the collision is 4.5 m s^{-1}.

(*b*) Find the magnitude of the impulse exerted on B by A in the collision.

(*c*) Find the kinetic energy lost in the collision.

After the collision, the trucks continue to move with a constant speed of 4.5 m s^{-1}. They crash into some buffers which bring the trucks to rest. The buffers provide a total constant force of 95 000 N as they are compressed.

(*d*) Find the total distance by which the buffers are compressed in bringing the trucks to rest.

(14 marks)

9.

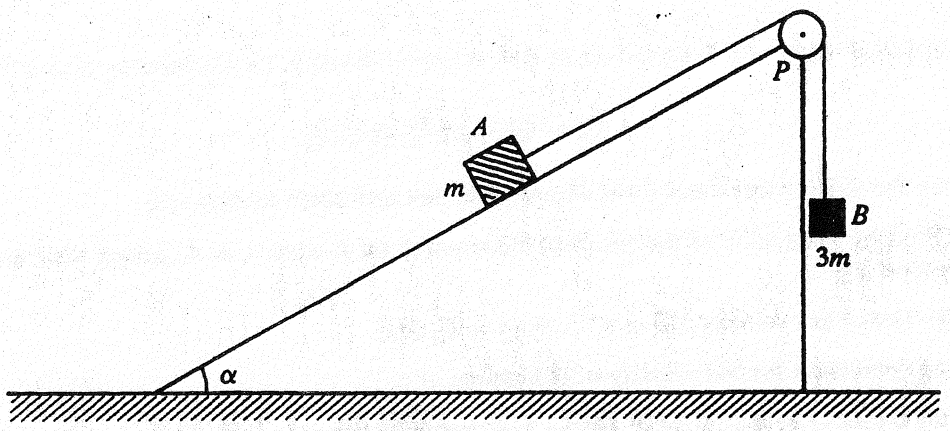


Fig. 4

A block A of mass m can move on the rough face of a wedge inclined at an angle α to the horizontal, where $\sin \alpha = 0.6$. The wedge is fixed to horizontal ground. A rope is attached to A and passes over a small smooth pulley fixed at P. The other end of the rope is attached to a block B of mass $3m$ which hangs freely vertically below P, as shown in Fig. 4. The blocks are modelled as particles and the rope is assumed to be light and inextensible and sufficiently long for A not to hit the pulley in the subsequent motion. The coefficient of friction between A and the plane is $\frac{3}{4}$. The system is released from rest with the rope taut and with B initially 1 m above the ground.

(*a*) Find the acceleration of A in the period before B hits the ground.

When B hits the ground, the rope becomes slack and A continues to move up the slope.

(*b*) Calculate the total distance moved by A before it first comes to rest.

(17 marks)

END

Exemples

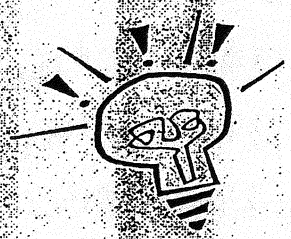
de

Courseworks

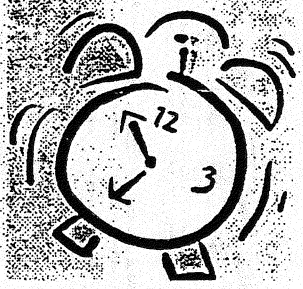
YEAR 10 COURSEWORK-DESIGN/STATISTICAL TASK

Choose one task from the following list:-

1. "Most cars are red." Investigate.



2 Using a piece of A4 paper, design a container to hold as much sand as possible.



3 "Cubies are a brand new cube-shaped sweet. Each sweet is 1cm long, 1cm wide and 1cm high and weighs 1g. They are sold in packets of 140. Design a package for these new sweets.

4. "The flavour of crisps is the most important factor in deciding its popularity." Investigate.

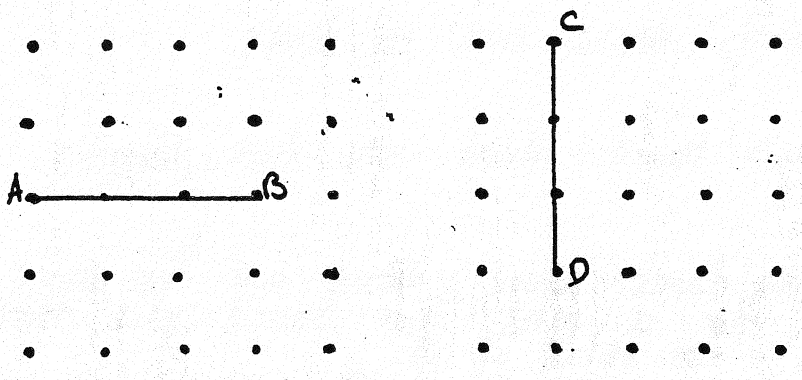
RTIN COOMBES 11C

TASK 4 - LINE LENGTHS

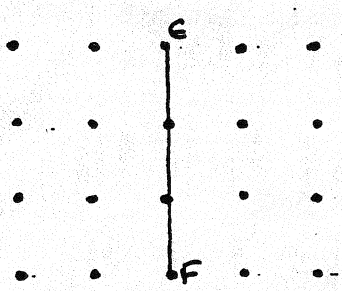
This investigation enquires into the number of different line lengths that can be formed on square pin-boards of varying sizes.

Coursework task set by Exam board 2 weeks unaided work.

i)



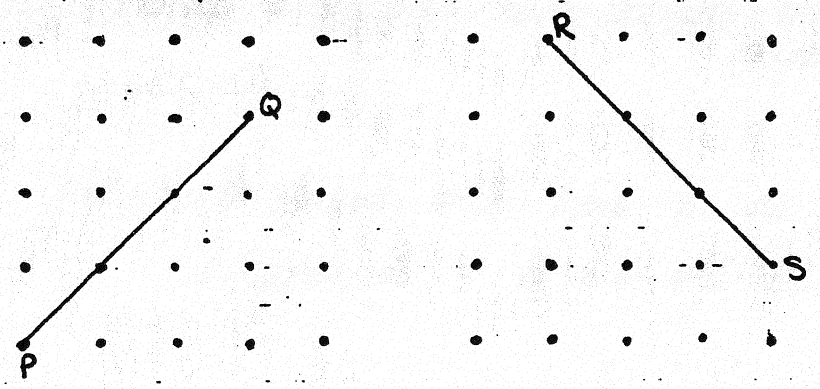
Line AB is equal to line CD - both are 3 units long.



Line EF is also 3 units long

$EF = AB = CD$

ii)

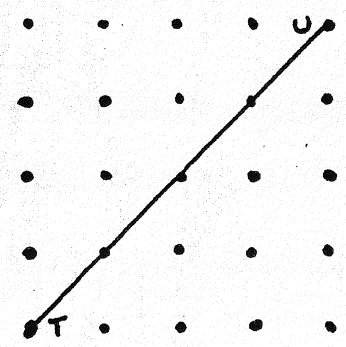


Line PQ is equal to RS

$PQ = RS$

$PQ > AB$ because it is a diagonal.

iii)



$TU \neq AB = CD = EF$

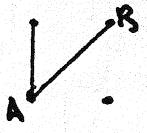
$TU \neq PQ = RS$

NB: If I reuse the letters above in the rest of this investigation, they bear no relevance. I may well reassign these letters to other functions.

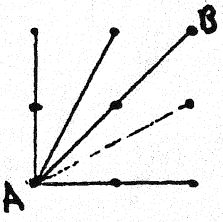
② How many different line lengths are there on a size 5 pinboard?

To work this out I will use a progressive method:

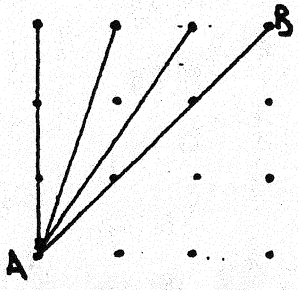
A. On a size one board, there are no lines.



On a size two board, there are two lengths.



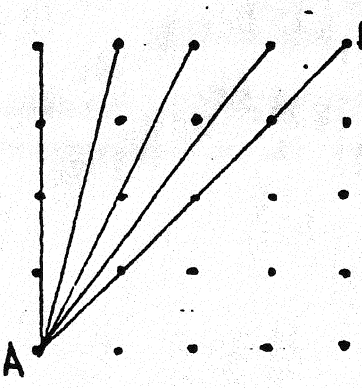
Within a size three board, there are the same lengths as for a size two board plus three more lines. → total of 5.
Each new line must sprout from corner A, and reach the additional pins. The lines in red are additional lines, but are reflections of those in blue across the diagonal of the square so are the same length.



On a size four board there are

$2 + 3 + 4 = 9$ lengths

ie. All the lengths that have gone before, plus 4 more.

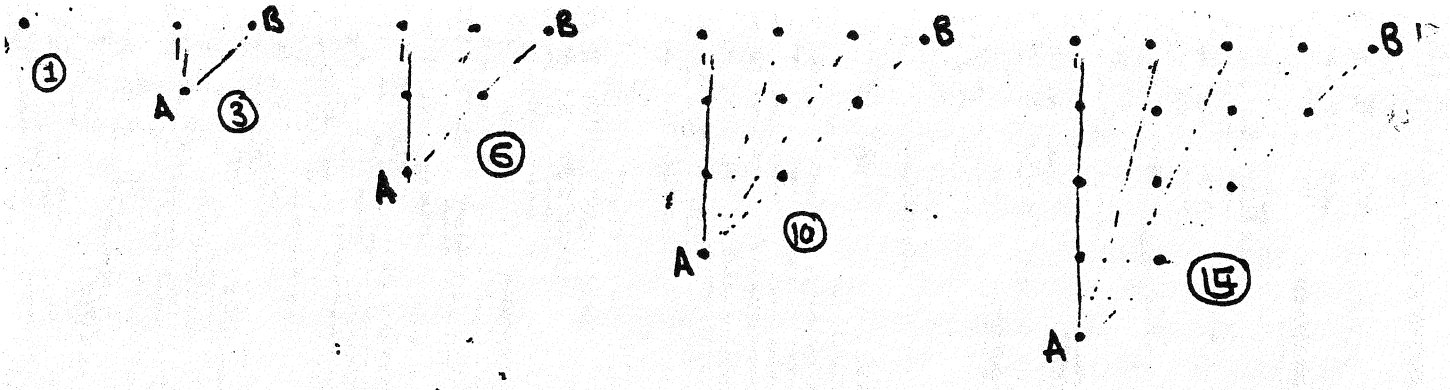


So on a size five board, there are

$2 + 3 + 4 + 5 = 14$ lengths.

This progression must be linked to the triangle numbers formula $\frac{n(n+1)}{2}$ because each time you increase the board size, the new number of line lengths increases in the manner shown above (ie $2 + (2+1) + (2+2)$ and so on..)

Because the pins below right of the diagonal AB will just produce reflections of previously accounted for lengths, I could ignore them to give the triangle numbers progression:



I could say that each pin represents a line length sprouting from point A; and because no line sprouts from A in a size one board, the progression is like that of triangle numbers minus one:

So

where p = size of pinboard
l = number of different line lengths

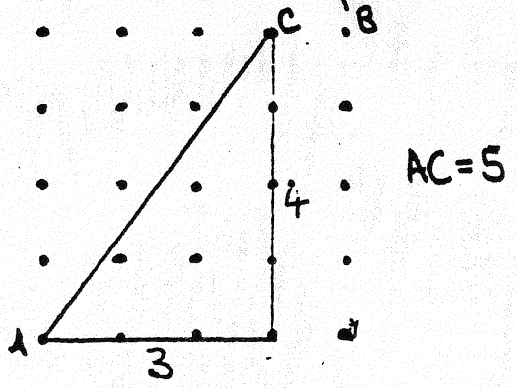
$$\frac{p(p+1)}{2} - 1 = l$$

So how about in larger pinboards: what happens then...?

There appears to be a large problem in pinboards of larger sizes, because some line lengths are the same as those that went before.

For example:

In a size 5 pinboard:



AC = 5

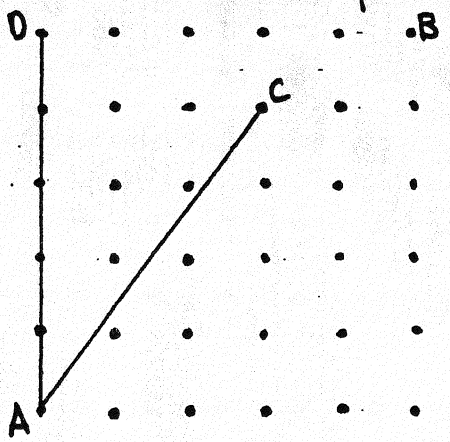
Using Pythagoras,

$3^2 + 4^2 = 25$.

So the line length shown is $\sqrt{25} = 5$.

(This happens to be a Pythagorean triple.)

In a size 6 pinboard:



The length AD is equal to the length AC → both are 5 units long; so AD is not a new line length. There will be other examples like this, but most will not be whole numbers.

I can spot no easy way to single out these repetitions of line lengths except to work each one out as I go along. However, I will make things slightly easier by sticking to whole numbers Eg in my previous diagram I wrote the line length as 5 units, but I could have written it from Pythagoras as $\sqrt{25}$. So in the following diagram, to get the actual line length just square root the number. All values are line lengths from point A. Remember that lengths to the right of AB are the same as those to the left...

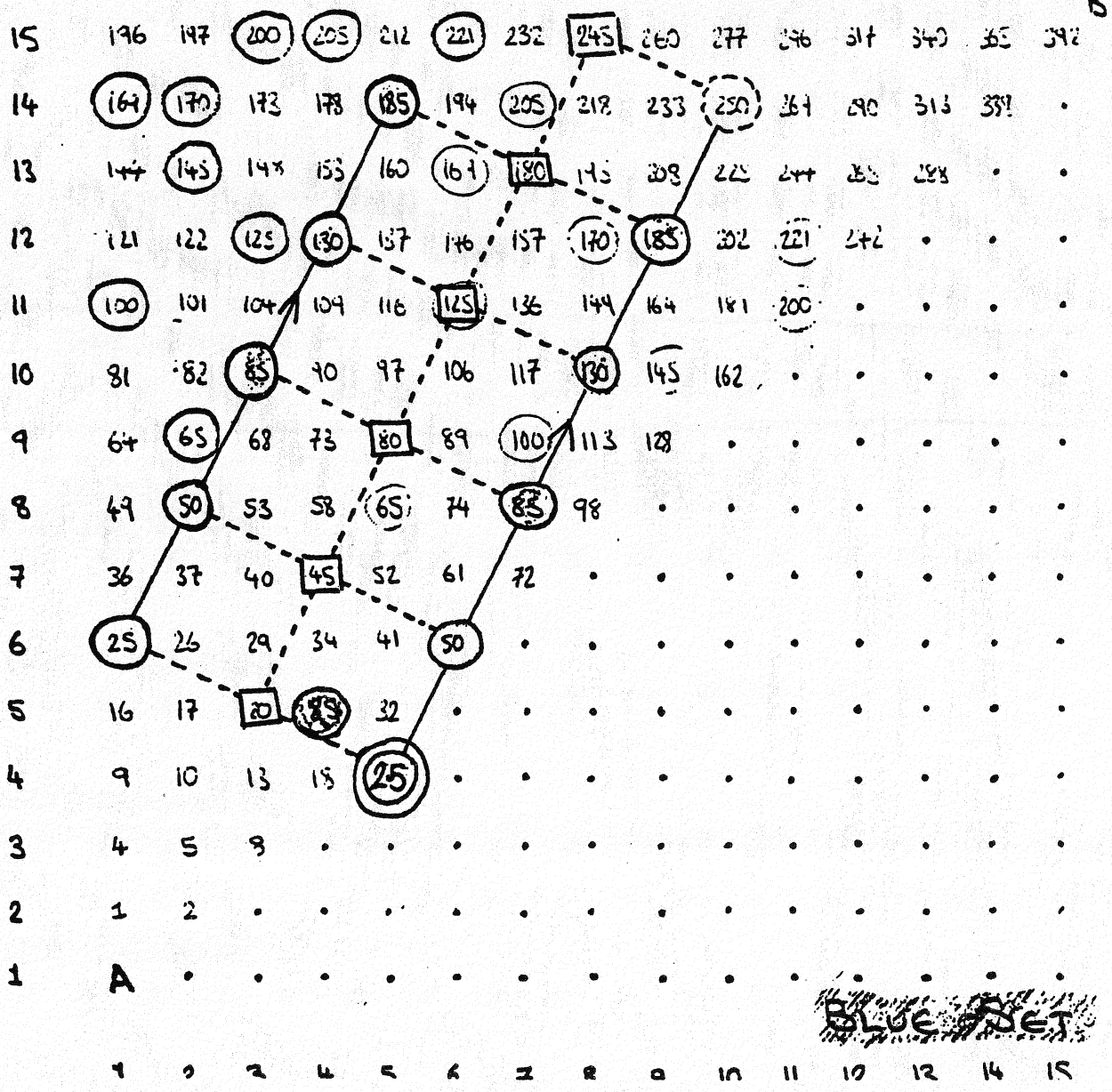
															B
15	196	197	(200)	(205)	212	(221)	232	245	260	277	296	317	340	365	392
14	(169)	(170)	173	178	(185)	194	(205)	218	233	250	269	290	313	338	·
13	144	(145)	148	153	160	(169)	180	193	208	225	244	265	288	·	·
12	121	122	(125)	(130)	137	146	157	(170)	(185)	202	(221)	242	·	·	·
11	(100)	101	104	109	116	(125)	136	149	164	181	(200)	·	·	·	·
10	81	82	(85)	90	97	106	117	(130)	(145)	162	·	·	·	·	·
9	64	(65)	68	73	80	89	(100)	113	128	·	·	·	·	·	·
8	49	(50)	53	58	(65)	74	(85)	98	·	·	·	·	·	·	·
7	36	37	40	45	52	61	72	·	·	·	·	·	·	·	·
6	(25)	26	29	34	41	(50)	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	16	17	20	(25)	32	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	9	10	13	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	4	5	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	1	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	A	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

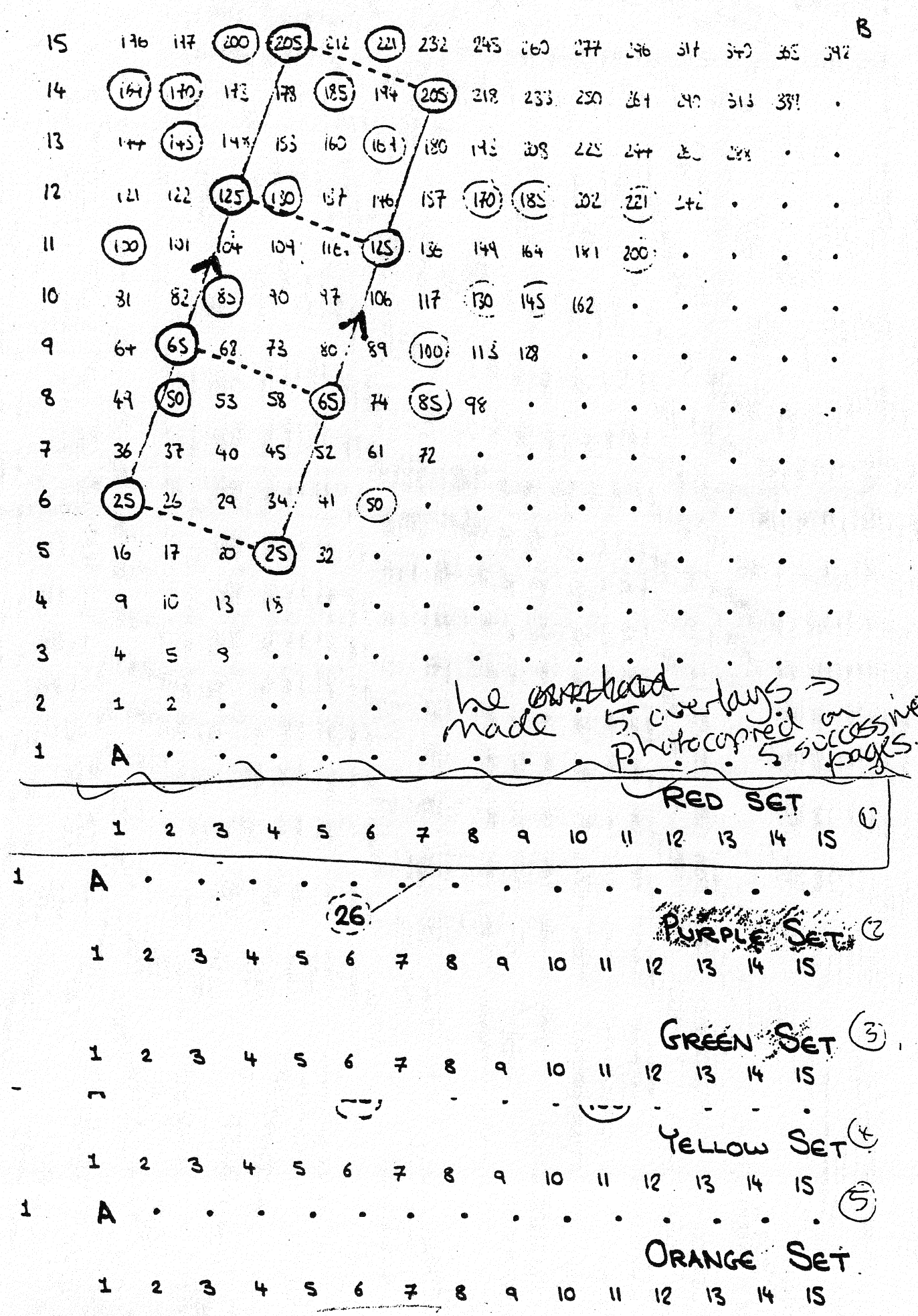
The numbers circled in red are repetitions of lines that have gone before.
Those numbers circled in (pencil) are the first occurances of these numbers.

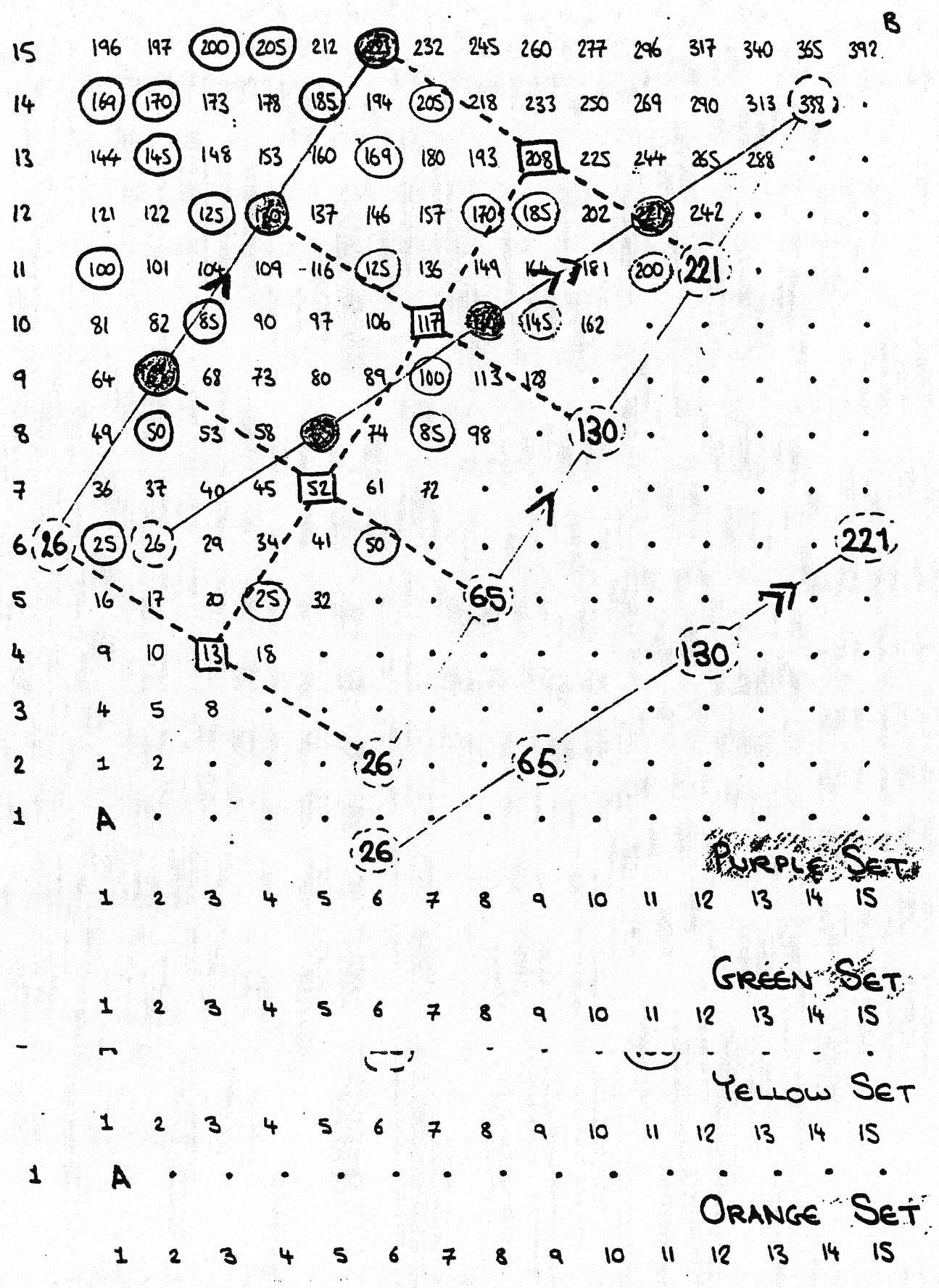
Therefore, I can from this diagram give the number of different line lengths for pinboards up to 15 square

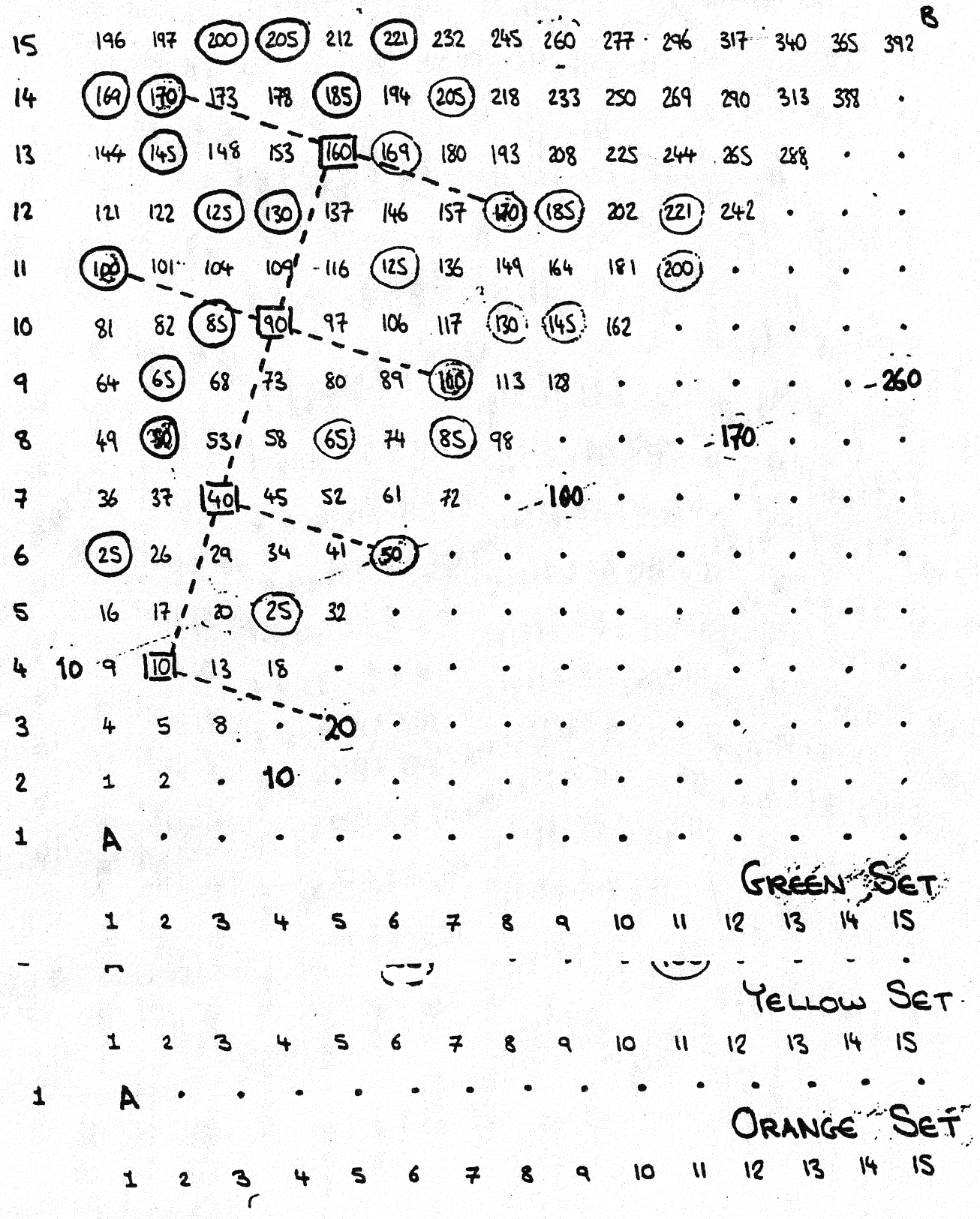
Size of pinboard (p)	Number of different line lengths (l)
1	0
2	2
3	5
4	9
5	14
6	19
7	26
8	33
9	41
10	50
11	60
12	70
13	82
14	93
15	105

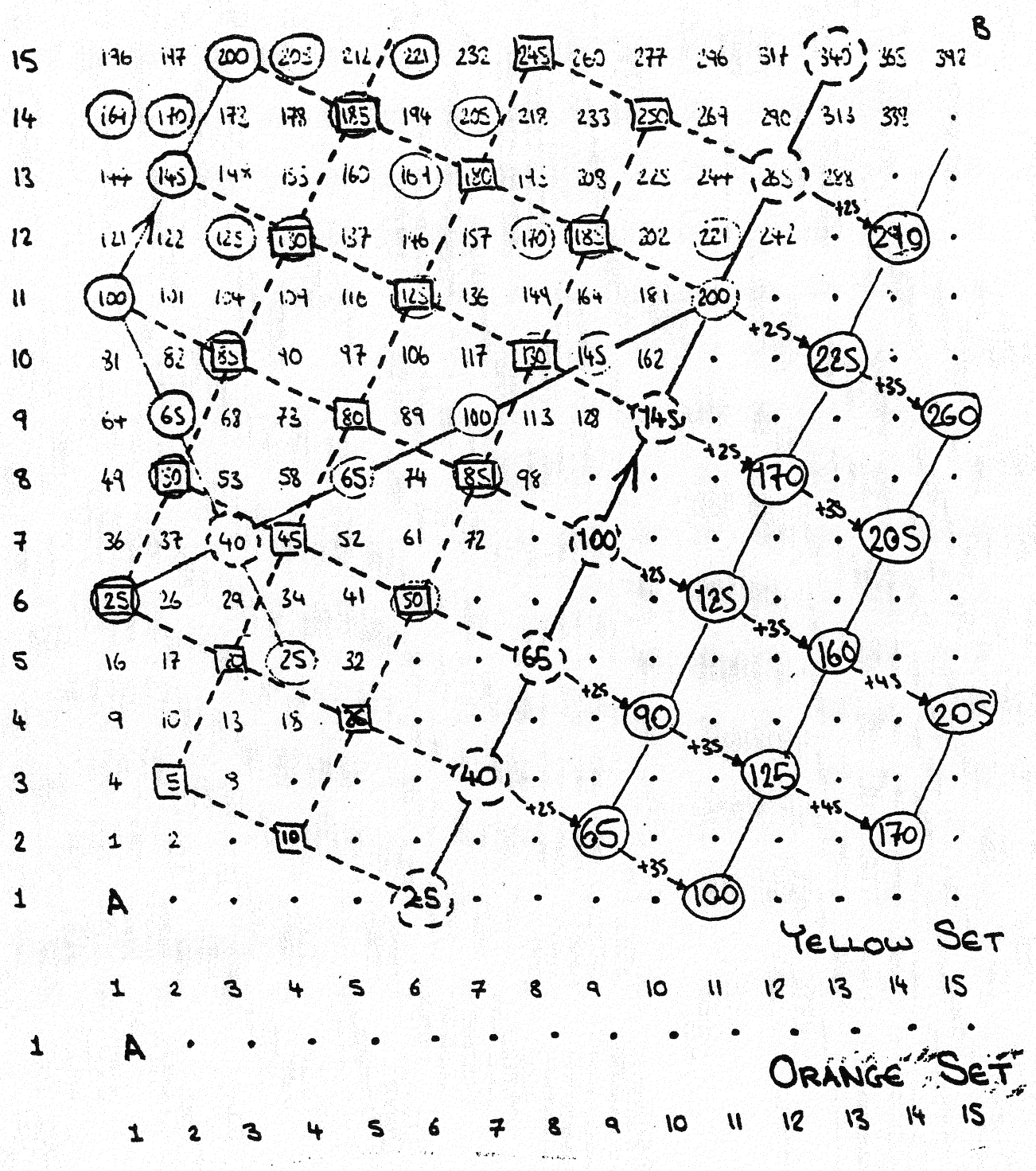
There appears to be no pattern through these numbers, but I think that I can see patterns within my diagram.




B
he overhead
made 5 overlays →
Photocopied on
5 success
pages.
RED SET
C
PURPLE SET
GREEN SET
YELLOW SET
ORANGE SET


B
PURPLE SET
GREEN SET
YELLOW SET
ORANGE SET


B
15 196 197 200 205 212 221 232 245 260 277 296 317 340 365 392
14 169 170 173 178 185 194 205 218 233 250 269 290 313 338
13 144 145 148 153 160 169 180 193 208 225 244 265 288
12 121 122 125 130 137 146 157 170 185 202 221 242
11 100 101 104 109 116 125 136 149 164 181 200
10 81 82 85 90 97 106 117 130 145 162
9 64 65 68 73 80 89 100 113 128 260
8 49 50 53 58 65 74 85 98 170
7 36 37 40 45 52 61 72 100
6 25 26 29 34 41 50
5 16 17 20 25 32
4 10 9 10 13 18
3 4 5 8 20
2 1 2 10
1 A
GREEN SET
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
YELLOW SET
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
1 A
ORANGE SET
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15


B
A
+25
+35
+45
YELLOW SET
ORANGE SET

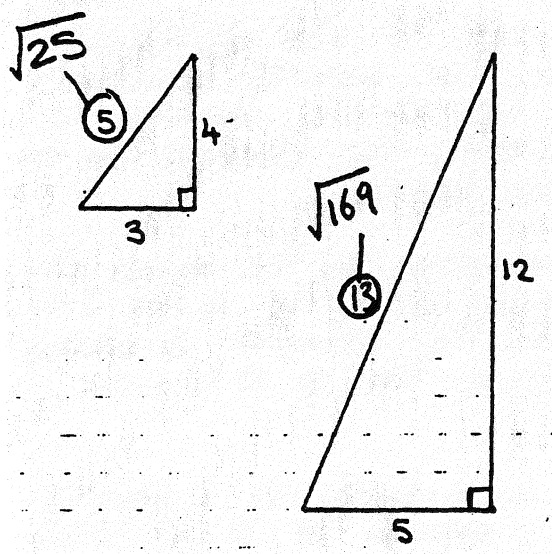
B

15	196	197	200	205	212	221	232	245	260	277	296	317	340	365	392
14	169	170	173	178	185	194	205	218	233	250	269	290	313	338	·
13	144	145	148	153	160	169	180	193	208	225	244	265	288	·	·
12	121	122	125	130	137	146	157	170	185	202	221	242	·	·	·
11	100	101	104	109	116	125	136	149	164	181	200	·	·	·	·
10	81	82	85	90	97	106	117	130	145	162	·	·	·	·	·
9	64	65	68	73	80	89	100	113	128	·	·	·	·	·	·
8	49	50	53	58	65	74	85	98	·	·	·	·	·	·	·
7	36	37	40	45	52	61	72	·	·	·	·	·	·	·	·
6	25	26	29	34	41	50	·	·	·	·	·	·	·	·	·
5	16	17	20	25	32	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
4	9	10	13	18	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
3	4	5	8	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
2	1	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
1	A	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15

ORANGE SET

There appear to be many lines through the repetitions, and there are also patterns along these lines.
In the blue set (over the page) the line connecting the repeats (which I will refer to in future as the R-line) and the line connecting the original numbers (the O-line) are parallel.
The R-line and the O-line are also parallel in the red set, but at first sight they are not parallel in the purple set. However, drawing in the reflection of the O-line across AB reveals a line with the same values along it, and is also a reflection of the R-line. A reflection of the R-line across AB is therefore parallel to the O-line.
With the exception of the orange set which I will come to later, forming reflections across AB, or the X or Y-axis, always reveals a line which is parallel if one was not obvious before.

Drawing in all these lines covers all the pairs of repeats up to a ~~square~~ size 15 pinboard except for two, 25 and 169. These two numbers are connected by pythagorean triples (right-angled triangles with whole number lengths).



On a right angled triangle, if the length along the hypotenuse is a whole number (ie part of a pythagorean triple), then it is bound to be a repeat because you have whole lengths up one side of a pinboard.

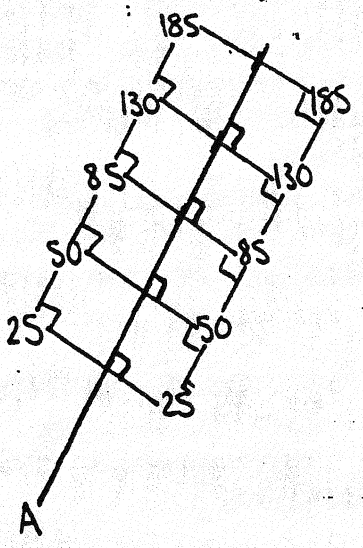
These two triangles are pythagorean triples, and these repeats are shown in the orange set above. I can predict future repeats, therefore, by finding other pythagorean triples:

7, 24, 25 → $\sqrt{625}$
9, 12, 15 → $\sqrt{225}$
20, 48, 62 → $\sqrt{2704}$

; for example, so 625 would be a repeated value.

There is also another type of pattern in these lines. Joining the pairs across parallel R and O-lines forms lines at right angles (like rungs on a ladder). These can be split again to form lines that create squares between these gaps.

For example on blue set, the pairs are joined to form the 'ladder' formation. Splitting the rungs in half and joining these points all the way up forms another line parallel to the R- and O-lines (the perpendicular-bisector of each pair of repeats). This bisector in each case I have drawn always runs through the origin A, and forms squares between the R-line, the bisector, and the O-line.



The red set has no bisector joining values like in the blue set, and squares are already formed by joining the pairs (shown by the black dashed line). However, if the bisector was drawn in anyway, it would still run through the origin.

The yellow set is also slightly different, as there are four squares between the R-line and the O-line. However, the two inside lines are actually the blue set; the bisectors of the blue and yellow set are therefore the same.

I think that there is also a pattern in the values along the bisector in comparison to the values along the R and O-lines. In the blue set the value in the bisector is always 5 less than the value of the pair. Along the R/O-line, the pattern of values is:

25 50 85 130 185 250

+25 +35 +45 +55 +65

+10 +10 +10 +10

...And there are 2 squares between the R and O-lines

In the purple set, the value in the bisector is always 13 less than the value of the pair. Along the R/O-line, the pattern of values is:

26 65 130 221

+39 +65 +91

+26 +26

...And there are 2 squares between the R and O-lines..

In the green set, the value in the bisector is always 10 less than the value of the pair. Along the R/O-line, the pattern of values is:

10 20 50 100 170

+10 +30 +50 +70

+20 +20 +20

...And there are 2 squares between the R and O-lines..

It seems to me that:

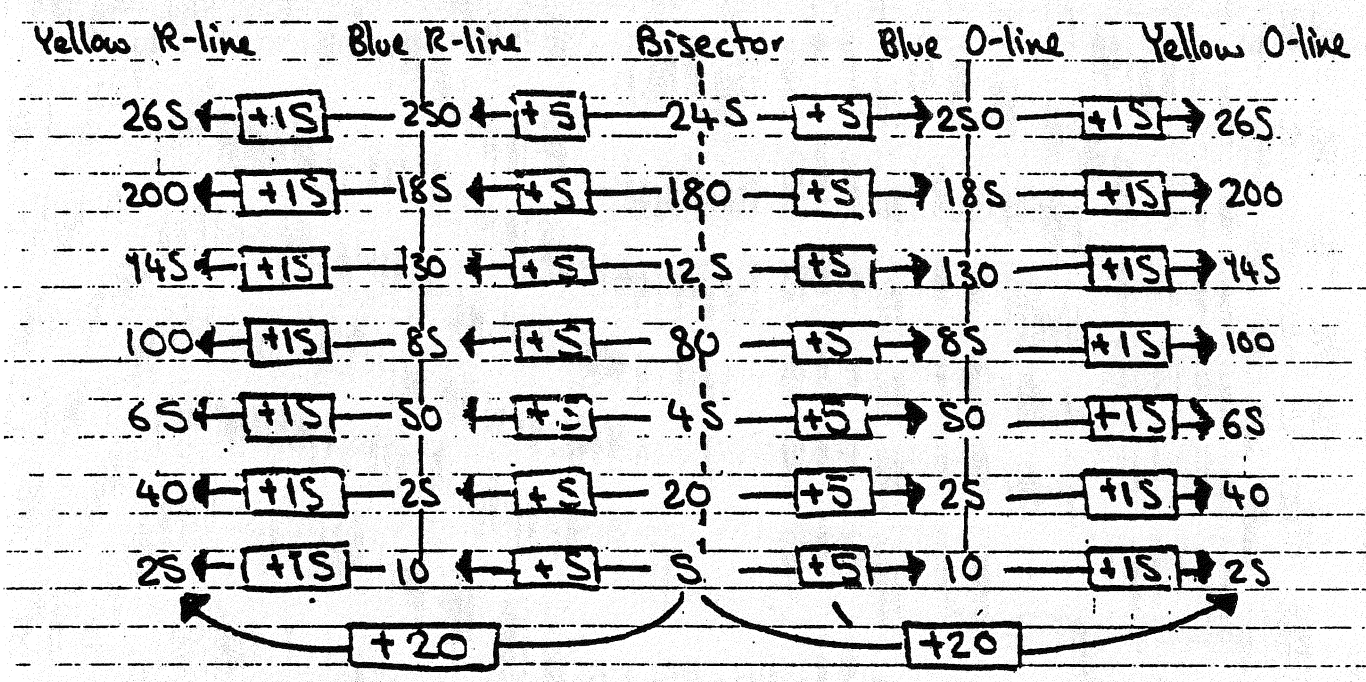
$$\frac{\text{the number less the values along the bisector are than the value of the pairs}}{\text{the number of squares between the R and O-lines.}} = \text{the difference between the differences of the values along the R and O-lines}$$

in the blue set.

the number less = 5
the difference is = 10
the nº of squares = 2

so... $5 = \frac{10}{2}$

But things are different in the yellow set. The blue set fits inside the yellow set and in the middle is then the bisector. The values of the blue set are 15 less than those in the yellow set, but the difference is 10 in the yellow set.



I believe that I could keep building new sets of repeats outside the existing sets. The difference between the increases in the table above is ten, which is the same as the "difference between the differences of the values along the R and O-lines" as my formula says above. (I do not believe the formula now to be correct).

If these 4 sets built on the outside of the blue and yellow sets are formed in the same way as the ~~increases~~ values along the R/O line increase, this would explain why there are squares between the lines (ie, the differences are ten moving out forming new sets, or moving along the R/O-line ~~in~~ in this case).

So, a new set could possibly be formed by adding 15+10=25 to each value in the yellow set. I have drawn in blue on the yellow set what I predict.

Adding these lines produces values that are correct on the grid, but some are not repeats. For example, the value 90 at (9, 3) is the same line length as (3, 9) only because it is a reflection across AB.

It appears that in this case there is a pattern between the lines of repeats, but using this pattern doesn't show us more repeats. We can easily search for possible values by using the patterns to follow the R/O line further up, so that new pinboard sizes can be investigated, but there appears to be no easy way to find them all as new lines may begin in larger sizes of pinboard.
The fact that pythagorean triples form new repeats means that there is no formula to find the number of line lengths for any pinboard size. This is because there are infinitely many triples that turn up; there is as far as I am aware no formula to find these triples, so the number of different line lengths will remain unknown...

This got two grades...
but it would have been better if
he'd tried to apply the generality
algebraically rather than geometrically...
I think,
because his description isn't concise &
precise... or should I say I found his
~~descriptions~~ descriptions hard to follow.
I also think he knows more about
this aspect of the problem than I do.

CHAPITRE 2

ALLEMAGNE

1

Présentation du système scolaire allemand

Le système scolaire et la formation des enseignants en Allemagne

Nous allons donner ici un bref aperçu du système scolaire allemand, ainsi que quelques éléments sur la formation des enseignants et l'enseignement des mathématiques, issus de deux interviews d'étudiantes allemandes, lectrices dans des lycées et collèges rennais durant l'année 1999-2000. Le lecteur intéressé par une description plus détaillée est invité à consulter les documents de L'IREM de Strasbourg (notamment : Ouvert n°91, juin 1998: "mathématiques dans un lycée allemand").

I- Le système éducatif et l'enseignement des mathématiques en Bavière[1]

Le système éducatif décrit ici est celui en vigueur en Bavière ; il peut présenter d'importantes différences avec ceux des autres Länder, car la politique d'éducation relève de l'autorité du Land.

1) -Description générale de la structure de l'enseignement primaire et secondaire

L'enseignement primaire s'effectue dans les « Grundschule », qui regroupent les classes de 1 à 4 (élèves de 6 à 10 ans). La préscolarisation (jardin d'enfant) est très peu développée.
Dès la cinquième classe, diverses possibilités se présentent :

Hauptschule :

Les Haupschule proposent un enseignement couvrant les classes de 5 à 9.
Il est possible d'effectuer toutes ces classes dans le Hauptschule, puis de partir en apprentissage.
Mais les élèves peuvent également suivre les classes 5 et 6 du Hauptschule, puis entrer dans un Realschule pour les classes 7 à 10. Les Realschule permettent à certains élèves de poursuivre sur un enseignement universitaire technique ; ces élèves doivent effectuer les classes 11 et 12 dans un Fachoberschule (FOS), et peuvent ensuite suivre une formation universitaire dans un Fachhochschule (FH).

Gymnasium :

L'enseignement des Gymnasium couvre les classes de 5 à 13, et est sanctionné par l'équivalent du baccalauréat (général) : l'Abitur.
Tous les élèves entrant au Gymnasium (à l'âge de 10 ans) ne poursuivent pas jusqu'à l'Abitur : il y a plusieurs possibilité de bifurcations, en particulier les élèves peuvent rejoindre le Realschule, ou le FOS.
Il est également possible, pour des élèves ayant de bons résultats au Realschule, d'intégrer un Gymnasium ; toutefois ce cas est très peu répandu.

Seuls 35 % des élèves bavarois obtiennent l'Abitur.

[1] Compte rendu de l'interview de Tania, lectrice au Lycée Ile de France à Rennes

2) - Déroulement de la scolarité au Gymnasium

La scolarité comporte un tronc commun allant des classes 5 à 11.

Pour les classes 12 et 13, il faut ensuite choisir 2 matières qui feront l'objet d'un enseignement renforcé. Ainsi Tania a choisi alors Mathématiques et Français ; elle avait 6 heures hebdomadaires dans chacune de ces deux matières.

En Bavière, les sujets de l'Abitur sont communs à l'ensemble du Land, ce qui n'est pas toujours le cas : dans certains Länder, le sujet est donné par l'établissement lui-même.

Tania a passé lors de l'Abitur 3 matières à l'écrit : Français, Mathématiques et Religion.

Elle a également passé 2 matières à l'oral.

Certaines notes de contrôle continu, obtenues pendant les années 12 et 13, sont également prises en compte pour l'Abitur.

Enseignement des mathématiques

Les cours de mathématiques ont un déroulement très classique : définitions, théorèmes, démonstrations... Les élèves ont des exercices à faire à la maison ; rarement des devoirs.

Les enseignants utilisent des manuels, prêtés par les établissements ; les calculatrices sont obligatoires dès la classe de septième.

3)- Un exemple de programmes pour le Gymnasium

Nous présentons ici une description rapide des programmes de mathématiques pour le Gymnasium dans le Land de Hambourg (nous nous appuyons sur un document datant de 1990). Ces programmes concernent les années 11, 12 et 13. Ils décrivent d'une part un enseignement qui sera commun à tous les élèves, et d'autre part, un enseignement destiné à ceux qui désirent se spécialiser en mathématiques. Ici comme en Bavière, les élèves choisissent 2 matières renforcées pour les classes 12 et 13 (Leistungkurse).

Onzième classe

La onzième classe est appelée « Vorstufe ». L'enseignement des mathématiques comprend un tronc commun : « Pflichtbereich », et une partie destinée aux élèves souhaitant ensuite se spécialiser : « Ergänzungkurs ». Afin de permettre une réorientation, le contenu de ce cours supplémentaire doit être déconnecté du reste de l'enseignement ; il semblerait que cette consigne soit rarement suivie dans les faits.

Pflichtbereich

Le thème central de ce tronc commun est l'analyse, avec l'étude des fonctions et plus particulièrement de la dérivation. Le programme met l'accent sur les idées de modélisation et d'approximation.

Ergänzungkurs

Le programme suggère différents thèmes pour ce cours, qui doit être l'occasion pour les élèves de se livrer à des recherches en autonomie. Voici quelques exemples de ces thèmes :

- Géométrie du pentagone régulier.
- Le nombre d'or.
- Symétries des figures, groupes de symétries.

Douzième et Treizième classes

Les programmes de ces deux classes sont présentés simultanément ; à charge pour l'enseignant d'effectuer une répartition appropriée. L'ensemble des deux classes est appelé « Studienstufe ». Elles comportent chacune un tronc commun : « Grundkurs », et une partie destinée aux élèves spécialisés : « Leistungkurs ».
Trois thèmes sont développés dans le tronc commun comme dans le cours avancé :

- Analyse.
- Algèbre linéaire et géométrie.
- Probabilités et statistiques.

Le cours d'analyse porte essentiellement sur le calcul différentiel et intégral, la partie plus théorique et structurelle est développée dans le cours avancé, tandis que le tronc commun accentue les applications, notamment à la physique.
L'algèbre linéaire et la géométrie analytique sont étudiées simultanément. Les notions de famille libre, famille génératrice, base, et le calcul matriciel sont vus en tronc commun. La présentation axiomatique des espaces vectoriels est réservée au cours avancé.
En probabilité, l'aspect modélisation est souligné ; une liste de problèmes concrets est proposée : contrôle de qualité, loterie, menant à des calculs d'intervalles de confiance, et de probabilités conditionnelles avec la formule de Bayes (ce programme s'applique au tronc commun et au cours avancé).

II - Formation des enseignants

Interview de Lisa Jungman
Professeur stagiaire à la Realschule de Neufahrn

Comment devient-t-on professeur en Bavière ?

Tout d'abord, il faut obtenir l'Abitur (baccalauréat) qui sanctionne l'issue de la treizième année la fin des études secondaires.

Remarque : depuis deux ans l'examen se fait sur cinq matières au lieu de quatre précédemment. Trois matières obligatoires (allemand, mathématiques et une langue vivante) et deux matières choisies par l'élève (par exemple : histoire et chimie). Il y a toujours 71% de contrôle continu sur les deux dernières années dans la composition de la note globale.

Il faut ensuite entrer à l'université. Contrairement à certaines matières comme le droit ou la médecine, il n'y a pas de numerus clausus et donc pas d'attente pour les études qui préparent au professorat.
Dès l'inscription, il faut choisir le niveau auquel on désire enseigner. On peut souhaiter être professeur en Grundschule (primaire), Hauptschule (primaire supérieur), Realschule (collège technique) ou Gymnasium (lycée).

Les matières étudiées sont les suivantes :

Pour la Grundschule :
Trois matières :
- Une discipline de base (exemple : maths).
- Erziehungswissenschaften (sciences de l'éducation : Psychologie, pédagogie, religions, etc...).
- Pédagogie adaptée aux très jeunes élèves.

Pour la Hauptschule :
Trois matières :
- Sciences de l'éducation.
- Une discipline de base.
- Trois disciplines à un niveau faible (ex : maths, biologie, sport.

Pour la Realschule :
Trois matières :
- Sciences de l'éducation (avec examen final).
- Deux disciplines de base.

Pour le Gymnasium :
- Sciences de l'éducation (sans examen final).
- Deux disciplines de base (niveau élevé).

Validation des études

L'année universitaire se partage en deux semestres : du 1er novembre au 28 février puis du 1er mars au 31 juillet.

Les études pour être professeur durent en théorie huit semestres.
En réalité les étudiants mettent en moyenne 5 ans pour obtenir leur diplôme.
Le contrôle continu se compose de "Scheine" (billets), validant des modules. Tous les scheine sont obligatoires. Il y a en principe 5 par semestre. Ils se présentent sous la forme de tests, d'exposés ou de mémoires de 10–20 ou 30 pages. Ils sont notés de 0 à 6, l'étudiant doit obtenir une note supérieure ou égale à 4. En cas d'échec l'étudiant doit redoubler le module. Il ne peut pas s'inscrire à un module "algèbre 2" s'il n'a pas le module "algèbre 1" mais il peut continuer sa progression dans d'autres cours sans rapport avec le module où il a échoué. Certains "Scheine" sont très difficiles, d'autres une simple formalité.

Stage en responsabilité

Les examens d'état sont difficiles mais ne sont pas des concours.

Tous les étudiants reçus sont nommés dans un établissement scolaire pour y être stagiaires deux ans sous la responsabilité d'un professeur tuteur.
Ils doivent, comme les titulaires, 24 séquences d'enseignement par semaine (une séquence dure 45 minutes), effectuer la surveillance dans les cours de récréation et à l'arrivée des cars scolaires, assurer le remplacement des professeurs absents et participer à une multitude de réunions de toutes sortes.

Ces stagiaires sont payés (après impôt prélevé à la source) 1375 DM mensuels en primaire, 1475 DM en Realschule et 1575 DM en Gymnasium. Ces stagiaires, peu payés par rapport à un professeur titulaire (en Realschule un professeur titulaire en milieu de carrière perçoit entre 4000 et 5000 DM suivant ses responsabilités) sont relativement nombreux dans les établissements. Allez savoir pourquoi ?

Le stagiaire enseigne un semestre dans son établissement d'affectation, puis deux semestres dans un autre établissement de même type puis à nouveau un semestre dans son établissement. A chaque étape il subit une inspection notée par trois personnes : le principal du collège où il se trouve, son professeur tuteur et un professeur neutre d'un autre établissement et souvent d'une autre discipline.

Fin des études

A l'issue des deux ans de stage, le deuxième "Staatexamen" va donner enfin à l'étudiant le grade de professeur.
Cet examen comporte trois parties :

- Les trois inspections déjà mentionnées.
- Un mémoire qui doit se nourrir de l'expérience acquise par l'élève-professeur dans sa classe. Le sujet est généralement proposé par l'étudiant et accepté par le professeur tuteur.
- Un examen final écrit et oral portant sur la pédagogie, la psychologie, le vécu dans une classe.

Dans chaque Land indépendant, une liste des professeurs reçus pour chaque combinaison de disciplines est établie par ordre de mérite. Les principaux ayant besoin d'un professeur obtiennent en principe dans l'ordre de leurs demandes le mieux noté.

Je le répète, les examens d'état ne sont pas des concours de recrutement. Le chômage des professeurs dans certaines disciplines est très important. Les nouveaux professeurs de Realschule ayant choisi les combinaisons anglais-histoire sont à 90% au chômage. Pour l'instant pas de problème pour les enseignants en mathématiques ou en informatique.

Après trois ans de bons et loyaux services, les nouveaux professeurs entrent au paradis et deviennent officiellement "**Fonctionnaires**".

Annexes

Un des stagiaires en mathématiques venu à Broons, en 1998 avait fait des études en Realschnule et à 16 ans était parti travailler dans une entreprise pendant plusieurs années. Il existe dans toutes les grandes villes allemandes des écoles publiques appelées "Berufoberschulen" qui permettent aux adultes ayant exercé une profession et titulaires du "Mittelreife" (examen de fin de cycle en Realschule) de préparer l'Abitur. Ces écoles ont de plus en plus d'élèves qui doivent arrêter de travailler car l'enseignement s'y fait à plein temps. Après la fréquentation d'une de ces écoles notre stagiaire a pu décrocher l'Abitur et cinq ans après le premier examen d'état.

Après avoir obtenu un magister à l'université (équivalent de notre maîtrise), certains étudiants, pendant deux semestres passent les "Scheine" en sciences de l'éducation pour se présenter au premier examen d'état permettant d'enseigner en Gymnasium les deux disciplines de leur magister. Leur réussite est rarissime car les examens d'état sont dans toutes les disciplines d'un niveau très supérieur aux examens internes à l'université.

Lisa qui est professeur de "français-anglais" n'a pas voulu assister à des cours de mathématiques. Après deux semaines passées dans notre collège dans les classes de français et d'anglais, je lui ai simplement demandé si le métier de professeur lui semblait plus agréable en France ou en Allemagne.

"En Allemagne sans hésitation, car nos élèves sont cent fois plus impliqués dans leur travail que les vôtres".
"Pour deux raisons, me semble-t-il :

- *la première est que chez nous, ils ont tous le niveau requis pour suivre (sinon ils sont chassés" dans l'école d'exigence moindre).*
- *La seconde est que vos séquences sont trop longues et vos journées interminables. Une grande partie de vos élèves semblent trop souvent en "Stand-by" et l'après-midi à moitié endormis.*

Après 15 heures, je pense que vous faites un peu d'enseignement et beaucoup de gardiennage, pour permettre aux femmes françaises de travailler à plein temps en sacrifiant peut-être l'avenir de leurs enfants".

2

Exemples de manuels

Manuel "Lambacher Schweizer" à l'usage des élèves de classes 8[1] dans les Länder Nordrhein et Westfalen

Exemple d'une activité proposée dans le manuel

A la fin d'une leçon intitulée "Droites et cercles", où l'on trouve par exemple le théorème de Thalès version allemande (Si le point C appartient au cercle de diamètre [AB], le triangle ABC est rectangle en C), on trouve cette activité intitulée : ***un cercle peut-il être un carré ?***

Tu trouves sûrement cette question bizarre ? On peut inscrire un carré dans un cercle ou inscrire un cercle dans un carré, mais un cercle n'est pas un carré et vice-versa...

Cette question a été posée par le mathématicien autrichien Karl Menger, professeur à Chicago, dans un petit livre publié en 1961 **"Vous allez aimer la Géométrie"**.

Le cercle de centre M et de rayon R est l'ensemble des points situés à la distance R de M. Autrement dit, tout point partant de M et s'éloignant d'une distance R, va arriver sur ce cercle. Karl Menger s'imagine en un point M dans le centre de Chicago et demande à un chauffeur de taxi : "Quels sont tous les endroits que je peux atteindre pour la somme de 1,50 dollars ?"

Le plan de cette ville est schématisé par un quadrillage régulier (figure 3). Il en coûte 25 cents pour parcourir le côté d'un petit carré. Dessine les points que tu peux atteindre en partant de M avec 1,50 dollars en poche. Les points obtenus sont sur un cercle qui est ... ? Mais oui, un carré !

Dans cette géométrie, nommée "Taxigeometrie" par Karl Menger, il se passe beaucoup de choses vraiment bizarres.

Avant d'aller plus loin, pour clarifier la situation, notons que cette géométrie repose sur une définition nouvelle de la distance entre deux points : $P_1P_2 : |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|$ voir figure1'.

Questions :

1) Au début du chapitre nous avons défini la tangente à un cercle. Peux-tu tracer une tangente en chaque point d'un "taxicercle" ?

2) Sur la figure 2' nous avons marqué tous les points situés à la même taxidistance des extrémités des segments. Pour [AB] nous retrouvons la médiatrice habituelle, mais ni pour [CD] ni pour [EF].
En taxigéométrie certains triangles ou carrés ont de nombreux cercles circonscrits, d'autres n'en ont aucun. Cela dépend de la position des sommets, comme tu peux le voir sur la figure 3'.

3) Sur la figure 4' on a d'abord tracé un triangle équilatéral en géométrie classique par la méthode habituelle à partir du segment [AB]. On a ensuite réalisé la même construction sur un quadrillage en "taxigéométrie". Vérifie que les côtés de ce triangle équilatéral ont bien les mêmes longueurs (en taxigéométrie bien sûr).

4) On procède même pour l'hexagone régulier de la figure 5'.

[1] La classe 8 correspond à la classe de quatrième en France.

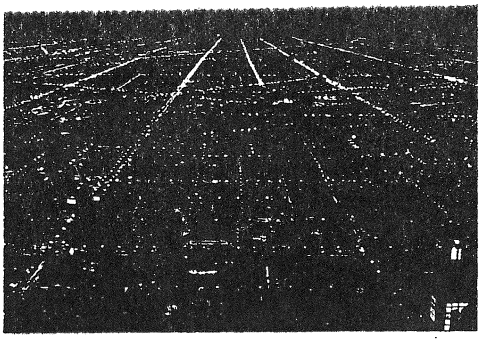


Fig. 1

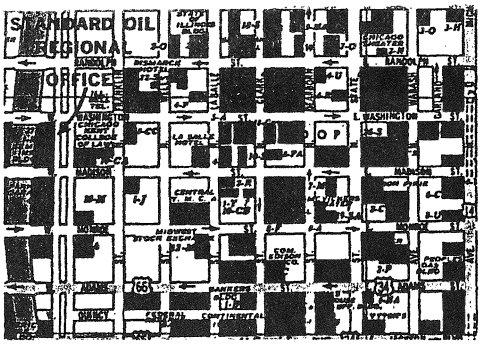
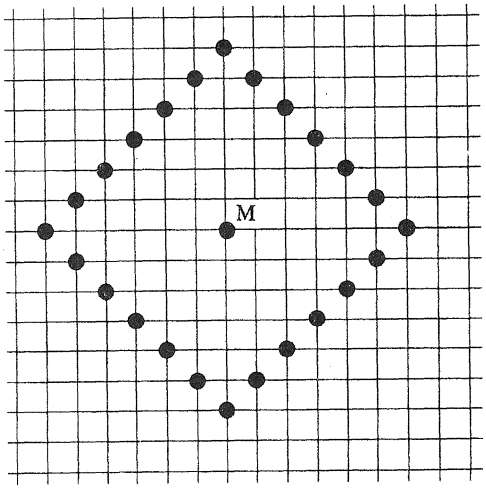


Fig. 2

Fig. 3



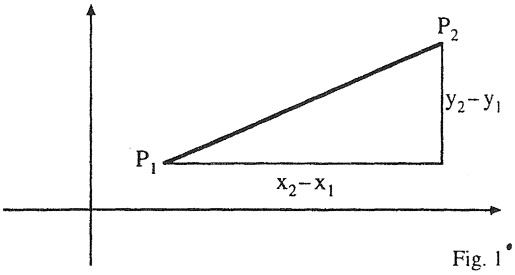
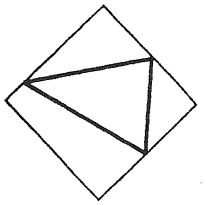
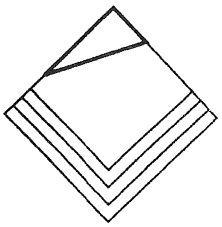


Fig. 1





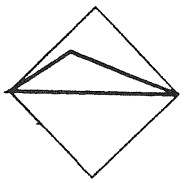


Fig. 3

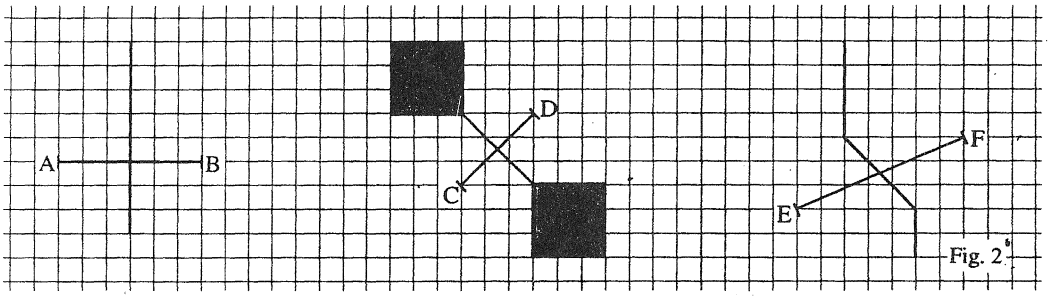
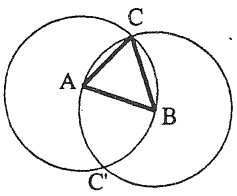


Fig. 2



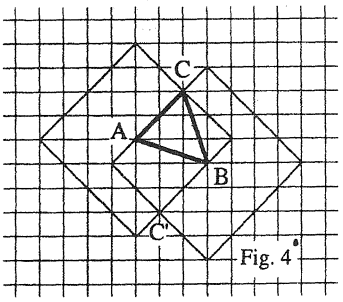
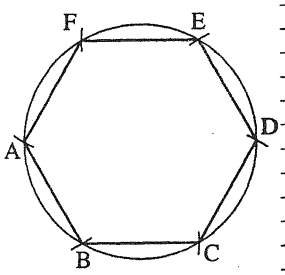


Fig. 4



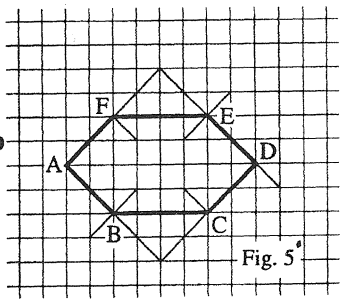


Fig. 5

Extraits d'un manuel bavarois de géométrie à l'usage des élèves de classe 10[1]

(Auteurs : Mrs Kratz et Schweiger. Editions : Bayerischer Schulbuch-Verlag)

Page 1
Mesure sur le cercle :

Activités à l'aide de papier millimétré.
- Périmètre.
- Aire du disque et d'un secteur circulaire.

Mesure approchée de π :

- Méthode de Grégory qui amène après un raisonnement géométrique à l'étude de la suite de terme $U_{2n} = \frac{2u_nUn}{u_n + U_n}$ avec $u_{2n} = \sqrt{u_nU_{2n}}$ et à la programmation d'une calculatrice pour trouver la limite.
- Historique de π

Page 34
Solides avec surfaces courbes :

Formules d'aires et de volumes (boule, cylindre, cône).

Page 56
Points, droites et plans en projection orthogonale :

Géométrie descriptive et notation ensembliste.
Construction d'intersections (plan et droite ; deux plans).
Projection orthogonale (parallèlement à un fil à plomb.
Représentations d'ensembles simples de points sur les plans verticaux et horizontaux.
Constructions d'intersections entre ces ensembles.
Différentes vues d'un solide (cône), de triangles dans l'espace.
Perspectives et ombres.

Page 84
Trigonométrie

Repérage d'un point dans un plan :
Coordonnées cartésiennes (plan de New York).
Coordonnées polaires (plan de Paris vers la place de l'Etoile).

Sinus et cosinus :
Définition à l'aide du cercle trigonométrique.
Usage des tables (angles aigus, obtus, négatifs, complémentaires, supplémentaires.
Relation entre cosinus et sinus.
Usage d'une calculatrice.
Equations trigonométriques (exemples : $\sin x \cos x + \sin x = 0$ ou $\cos 3x = -1$ ou $(\cos x)^2 + 2 \sin x + 2 = 0$.

[1] La classe 10 correspond à la classe de seconde en France.

Sinus et cosinus dans le triangle rectangle.
Nombreux modèles d'exercices avec solution.

Une nouvelle unité d'angle le radian :
Introduction par l'exemple d'un poney trottant en gardant sa longe tendue.
Travail à la calculatrice.

Fonctions sinus et cosinus :
Tracé des courbes.
Etudes de relations et tracés des graphes
Exemple : $y < \cos x$ ... et ... $y \leq -2$ ... et .. $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$

Tangente :
Définition et formules.
Application au triangle rectangle.
Construction du graphe de la fonction.

Page 139
Produit scalaire de deux vecteurs :

Coordonnées d'un vecteur (addition, produit par un scalaire, norme).
Introduction du produit scalaire par un exemple de mécanique (deux forces de directions différentes s'exerçant sur un wagon de chemin de fer).
Propriétés et applications.

Remarques :
Les vecteurs sont souvent donnés par leurs coordonnées polaires.
Dans les exercices on propose de démonter des propriétés évidentes (exemple : un triangle isocèle a deux médianes égales) mais aussi d'étudier des notions nouvelles comme par exemple la puissance d'un point par rapport à un cercle.

Page 151
Calculs dans un triangle quelconque :

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,ab \cos \alpha$

$\frac{a}{b} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$

Page 159
Trigonométrie :

Produit sclaire et coordonnées.
Cos (a + b) etc...
Sin 2a.
Cos 2a
Tan (a + b) etc...

Page 166
Fonction sinusoïdales :

Ex : $y = a \sin x$ ou $y = \sin bx$ ou $y = \sin (x + c)$

Page 173
Rappels

Définitions importantes.
Théorèmes importants.
Théorèmes fondamentaux.

CHAPITRE 3

ESPAGNE

1

Présentation du système scolaire espagnol

Système scolaire espagnol

Le système éducatif espagnol dans son état actuel remonte essentiellement, pour les enseignements primaires secondaires, à la Loi Générale sur l'Education (LGE) de 1970.

Dans les années de transition politique, puis avec l'arrivée des socialistes lors des élections d'octobre 1982, une réforme a été entreprise qui aboutit à la **Loi Organique sur le Droit à l'Education (LODE)** et à la **Loi de mise en Ordre Général du Système Educatif (LOGSE)**, approuvée en 1990 et mise en place à partir de l'année scolaire 1991-92. Cette mise en place du nouveau système se fait de façon progressive à partir du primaire.

I – ORGANISATION DES CURSUS

<table>
<tr><th colspan="2">Avant la réforme</th><th>Age</th><th colspan="2">Après la réforme</th></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>3</td><td colspan="2" rowspan="3">Enseignement préscolaire (facultatif)</td></tr>
<tr><td colspan="2">Enseignement</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Préscolaire (facultatif)</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="8">Enseignement général De base (collège)</td><td rowspan="2">Cycle préparatoire</td><td>6</td><td colspan="2" rowspan="5">Enseignement Primaire</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Cycle moyen</td><td>8</td></tr>
<tr><td>9</td></tr>
<tr><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Cycle supérieur</td><td>11</td></tr>
<tr><td>12</td><td colspan="2" rowspan="3">Enseignement Secondaire Obligatoire (ESO)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Filière professionnelle 1</td><td rowspan="3">Baccalauréat Unité et Polyvalent (BUP)</td><td>13</td></tr>
<tr><td>14</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Filière professionnelle 2</td><td>15</td></tr>
<tr><td>16</td><td rowspan="3">Formation Professionnelle</td><td rowspan="3">BUP + COU</td></tr>
<tr><td>Cours d'Orientation Universitaire (COU)</td><td>17</td></tr>
<tr><td></td><td>18</td></tr>
</table>

Avant la réforme, le choix d'orientation entre la filière professionnelle et la filière d'enseignement général se faisait à l'issue de l'enseignement général de base, à l'âge de 14 ans.

Après la réforme, cette orientation est retardée de 2 ans.

Il est à noter que la formation professionnelle débouche sur le monde du travail.

II – LES ENSEIGNANTS

Les enseignants sont des fonctionnaires de l'Etat recrutés sur concours.

En primaire : 3 années d'études universitaires (en école normale). Le service est de 25 heures de cours et de 5 heures de présence dans l'établissement.

En secondaire : il y a trois catégories de professeurs :

- Professeur du secondaire : 5 années d'études universitaires.
- Catedratico : professeur du secondaire avec un salaire amélioré et ayant des tâches d'animation et de coordination pédagogique.
- Maître d'atelier : 3 années d'études universitaires. Ce sont les professeurs de disciplines technologiques.

Tous ont un service de 18 heures de cours et de 12 heures de présence dans l'établissement. Dans ce temps, ils assistent aux réunions de professeurs, effectuent des tâches de tutorat assurent l'accueil des parents d'élèves.

Ils reçoivent une formation continue de 100 heures toutes les 6 années scolaires (nécessaire pour améliorer le salaire).

III - PROGRAMMES

PRIMAIRE (6 à 12 ans) : six années divisées en trois cycles de deux ans chacun. (3 h par semaine de mathématiques chaque année scolaire).

1. Nombres et opérations.
2. La mesure.
3. Formes géométriques et situation dans l'espace.
4. Organisation de l'information.

SECONDAIRE (12 - 16 ans) : pour tout le pays, à partir de 1996-1997 (3 h par semaine de mathématiques chaque année scolaire).

1. Nombres et opérations : sens, stratégies et symbolisation.
2. Mesure, estimation et calcul des grandeurs.
3. Représentation et organisation dans l'espace.
4. Interprétation, représentation et traitement de l'information.
   a) Information sur des phénomènes déterministes.
   b) Information sur des phénomènes aléatoires.
5. Traitement du hasard.
6. A titre d'exemple nous développons ce cinquième titre du Curriculum, avec savoirs, savoirs-faire et aptitudes :

- Concepts : (savoirs)
  1. Phénomènes aléatoires et terminologie pour les décrire.
  2. Assignation des probabilités à des événements : fréquence et probabilité d'un événement. Loi de Laplace. Expériences dépendantes et indépendantes.
  3. Assignations des probabilités à des expériences composées : probabilité conditionnelle.

- Procédures (savoir-faire).

- Utilisation des différents langages :

1. Utilisation du vocabulaire adéquat pour décrire et quantifier des situations où intervient le hasard.
2. Réalisation de tables de fréquences et de graphiques pour représenter le comportement des phénomènes aléatoires.

- Algorithmes et adresses :

1. Obtention de nombres aléatoires avec différentes techniques.
2. Emploi de techniques variées pour modéliser avec des probabilités.
3. Utilisation d'informations diverses pour assigner des probabilités à des événements.
4. Calcul de probabilités dans des cas simples avec la Loi de Laplace.
5. Utilisation de différents procédés pour le calcul des probabilités dans le cas des « événements composés.
6. Détection des erreurs fréquentes dans l'interprétation du hasard.

- Stratégies générales :

1. Reconnaissance des phénomènes aléatoires dans la vie courante, et dans la connaissance scientifique.
2. Formulaire et vérification des conjectures sur le comportement des phénomènes aléatoires simples.
3. Utilisation de la probabilité pour prendre des décisions fondamentales dans des contextes divers.
4. Planification et réalisation d'expériences simples pour étudier le comportement des phénomènes du hasard.

- Aptitudes :

Relatives à l'appréciation des mathématiques :

1. Reconnaissance et valorisation des mathématiques pour interpréter, décrire et prédire dans des situations incertaines.
2. Disposition favorable pour prendre en compte les informations probabilistes dans la prise de décisions sur des phénomènes aléatoires.
3. Curiosité et intérêt pour la recherche sur des phénomènes liés au hasard.
4. Valorisation critique des informations probabilistes dans les « médias », en y rejetant les abus et les usages incorrects.
5. Ruse et sens critique face à des pensées populaires sur les phénomènes aléatoires.

Relatives à l'organisation et aux habitudes de travail :

6. Sensibilité et précision dans l'observation des expériences relatives aux phénomènes du hasard.

De même pour le déroulement en quatrième année (15-16 ans) de deux options qui peuvent être choisies par les élèves, j'explicite les contenus de la statistique et des probabilités : (ici

je précise le nombre de semaines car le Ministère a déjà publié une série de matériels didactiques pour « fermer » s'ils ne le sont déjà, les contenus de chaque année).

OPTION B (plus lourde) pour les personnes qui suivront un Bac de Sciences :

1. Statistique.

    a. Phénomènes statistiques : Population et échantillons. Variable statistique continue : tableau de fréquences, graphiques et paramètres statistiques (2 semaines).
    b. Distributions bidimensionelles. Lien entre deux variables : nuage de points, droite de régression. Corrélation (2 semaines).

OPTION A (plus légère) pour les personnes sui suivront un Bac des Sciences Sociales :

1. Traitement statistique de l'information (7 semaines).

2. Les lois du hasard (7 semaines).

Tant en primaire qu'en secondaire, les contenus sont **suivis des critères pour l'évaluation**.

BACCALAUREAT (16-18 ans) : Sa finalité est la formation générale des élèves ainsi que leur préparation à des études universitaires. Il y aura quatre modalités :

a) Arts.
b) Sciences de la Nature et de la Santé.
c) Humanités et Sciences Sociales.
d) Technologie.

« Les mathématiques au Baccalauréat jouent un triple rôle : comme outils, comme formation et comme théorie de base. C'est la première fois que l'élève est confronté avec la théorie des mathématiques » (BOE) (4 heures de classe par semaine).

Mathématiques I et II (filières scientifiques b et d) :

Premier cours

1. Statistique et probabilité.
    a. Distributions bidimensionnelles. Corrélation et régression (2 semaines).
    b. Probabilité. Probabilité composée, conditionnelle, totale et « a posteriori » (3 semaines).
    c. Distributions de probabilité. Distributions binomiale et normale (3 semaines).

2. Géométrie.
    a. Trigonométrie. Résolution de triangles rectangles (3 semaines).
    b. Théorèmes du sinus et du cosinus. Résolution de triangles quelconques (3 semaines).
    c. Géométrie plane : Equation d'une droite. Résolution de problèmes de droites, angles et distances (2 semaines).

3. Fonctions (9 semaines) (traitement intuitif).
   a. Familles de fonctions : polynômes, du type k/x, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques.
   b. Interprétation des propriétés globales : domaine, croissance, décroissance, points « remarquables », périodicité.
   c. Traitement intuitif des branches infinies, continuité, dérivabilité et aire en dessous d'une courbe.

4. Arithmétique et algèbre.
   a. Nombres factorielles et combinatoires. Binôme de Newton (2 semaines).
   b. Introduction au nombre réel. Notation scientifique (2 semaines).
   c. Introduction au nombre complexe. Forme binomique et polaire. Opérations (2 semaines).

5. Résolution de problèmes.

Second cours :

1. Algèbre linaire.
   a. Matrices. Opérations sur des matrices.
   b. Application de l'étude des matrices à la résolution de systèmes d'équations linéaires.
   c. Déterminant d'une matrice. Propriétés. Application au calcul des produits vectoriel et mixte.

2. Analyse.
   a. Introduction aux concepts de limite et dérivée d'une fonction en un point.
   b. Calcul de limites et de dérivées. Etude locale des fonctions.
   c. Introduction à l'intégrale définie à partir des aires définies sous une courbe.
   Techniques élémentaires d'intégration. Application au calcul d'aires.

3. Géométrie.
   a. Vecteurs. Opérations à partir de problèmes de physique concrète.
   b. Application du calcul vectoriel à la résolution de problèmes physiques et géométriques dans le plan et dans l'espace. Produit scalaire, vectoriel, mixte.
   c. Etude de certaines formes géométriques (droites, courbes, plans et surfaces) en mettant en rapport les équations avec leurs caractéristiques géométriques.
   d. Idée de lieu géométrique. Initiation à l'étude des coniques, tant synthétique qu'analytique.

MATHEMATIQUES POUR LES SCIENCES SOCIALES

Premier cours :

1. Arithmétique et algèbre.
   a. Etude de systèmes de deux équations avec deux inconnues et d'équations de deuxième degré (2 semaines).
   b. Introduction au nombre irrationnel. Notation scientifique (3 semaines).

2. Fonctions (8 semaines).
   a. Fonctions en forme de tables et graphiques. Interpolation et extrapolation linéaire. Interprétation de phénomènes fonctionnels.

b. Familles de fonctions : polynômes, du type k/x, trigonométriques, exponentielles, logarithmiques.
c. Interprétation des propriétés globales : domaine, croissance, décroissance, points « remarquables », périodicité et « tendances ».

3. Statistique et probabilité.
a. Distributions bidimensionnelles. Interprétations de phénomènes sociaux et économiques où interviennent deux variables (2 semaines).
b. Etude du degré de relation entre deux variables. Corrélation et régression (3 semaines).
c. Distributions de probabilité. Distributions binomiale et normale (3 semaines).
d. Normalisation d'une distribution binomiale et ajustement d'un ensemble de données à une distribution binomiale ou normale (2 semaines).

4. Statistique et probabilité.

Second cours :
1. Algèbre.
a. Matrices. Opérations sur des matrices. Application à la résolution de problèmes extraits des Sciences Sociales.
b. Application de l'étude des matrices à la résolution de systèmes d'équations linaires.
c. Initiation à la programmation linéaire bidimensionnelle. Optimisation d'expressions linéaires soumises à des contraintes exprimées par des équations, avec des méthodes graphiques.

2. Analyse.
a. Introduction aux concepts de limite à partir de l'interprétation des tendances d'une fonction. Branches infinies.
b. Dérivée d'une fonction en un point.
c. Application de limites et de dérivées à la détermination des propriétés locales des fonctions. Etude locale des fonctions.
d. Application du calcul des dérivées élémentaires à des problèmes d'optimisation.
e. Approche de l'intégrale définie à partir des aires définies sous une courbe.

3. Statistique et probabilité.
a. Etude approfondie des probabilités composées, conditionnelles, totales et a posteriori. Emploi des techniques élémentaires.
b. Introduction au concept statistique et usage : comment choisir un échantillon, ...
c. Etude d'un test d'hypothèse basé sur la distribution normale et appliqué en situations simples.

Tous les programmes sont suivis de critères pour l'évaluation.

2

Compte rendu d'observation de cours

I – EXTRAITS DE SEANCES

En février 2000, nous avons pu assister à quelques cours dans un Institut d'Etudes Secondaires (IES) à Càceres dans la province d'Extramadure.

Nous allons présenter ici 3 séances qui traitent, entre autres, de la notion de limite :

1 - Première séance de cours : 4° ESO (Cuarto de Educacion Secundaria Obligatoria) âge : 15 ans

LE NOMBRE e

$e = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{1}{n})^n$ et $e^x = \lim_{n\to\infty} (1+\frac{x}{n})^n$

Ces égalités servent dans l'indétermination 1^∞ .

Exemples d'exercices associés :

1. $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n^2+3n+5}{5n^2+1}\right)^{\frac{n+1}{2n-3}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$. (pas de problème)

2. Calcul de $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n}$: indétermination 1^∞

$\frac{2n+1}{2n+5} = 1+\left(\frac{2n+1}{2n+5}-1\right) = 1-\frac{4}{2n+5}$ et $3n = \left(\frac{2n+5}{-4}\right)\left(\frac{-4}{2n+5}\right)(3n)$ d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{4}{2n+5}\right)^{\left(\frac{2n+5}{-4}\right)\left(\frac{-12n}{2n+5}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1-\frac{4}{2n+5}\right)^{\left(\frac{2n+5}{-4}\right)}\right]^{\left(\frac{-12n}{2n+5}\right)}.$$

La limite du terme entre crochets est e, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{3n} = e^{-6}$.

3. Calcul de $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-5}\right)^{4n}$:

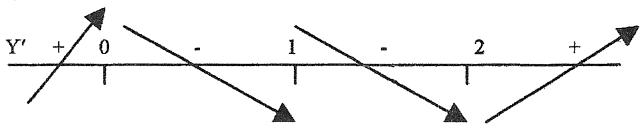
$\frac{3n+2}{3n-5} = 1+\left(\frac{3n+2}{3n-5}-1\right) = 1+\frac{7}{3n-5}$ et $4n = \left(\frac{3n-5}{7}\right)\left(\frac{7}{3n-5}\right)(4n)$ d'où

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-5}\right)^{3n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{7}{3n-5}\right)^{\left(\frac{3n-5}{7}\right)\left(\frac{28n}{3n-5}\right)} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{7}{3n-5}\right)^{\left(\frac{3n-5}{7}\right)}\right]^{\left(\frac{28n}{3n-5}\right)}$$

. La limite du terme entre crochets est e, donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3n+2}{3n-5}\right)^{4n} = e^{\frac{28}{3}}$.

3 - Troisième séance : 3° ESO (Tercero de Educacion Secundaria Obligatoria) 16 ans option sciences

Au cours de cette séance, les élèves ont poursuivi l'étude de $Y = \frac{X^2}{X-1}$. La dérivée étant $Y' = \frac{X^2-2X}{(X-1)^2}$. Le tableau de variations est de la forme suivante :
(nous conservons les mêmes notations)



Pour connaître la nature des points de dérivée nulle, on a recours à la méthode suivante :

$Y'=0 \rightarrow Y'' < 0$ Max
$Y'' > 0$ Min
$Y'' = 0 \rightarrow Y''' \neq 0$ point d'inflexion
$Y''' = 0 \rightarrow Y'''' \neq 0$ max ou min
$Y'''' = 0 \rightarrow$ étude de Y^v

Pour l'étude des limites, on a recours à la règle de L'Hopital :
$\lim_{x \to +\infty} \frac{X^2}{X-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2X}{1} = +\infty$ puis recherche des asymptotes.

La séance se termine avec des problèmes d'optimisation comme par exemple :

Calculer le rayon de la base du cylindre de volume maximum inscrit dans un cône de rayon de base 3 et de hauteur 4.

Notre commentaire :

Pas de différence notable avec les méthodes utilisées en France sauf pour l'utilisation de la règle de L'Hopital (qui semble quasi systématique en Espagne). Nous reviendrons sur ce dernier point.

II - PRESENTATION D'UN THEME : ETUDE DE LIMITES DONT LA FORME EST INDETERMINEE

1 - Introduction

Comme nous l'avons constaté ci-dessus, l'étude de la limite a été effectuée à l'aide de la règle de L'Hopital. Rappelons cette règle :

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et dérivables sur I\{a}telles que
(i) $f(a)=g(a)=0$
(ii) $\forall x \in I\{a\}, g'(x) \neq 0$
Si $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe alors $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (a réel fini ou infini)

Corollaire :

Si f et g sont n fois dérivables, que les n -1 premières dérivées de f et de g sont nulles en a et que $\forall x \in I\backslash\{a\}$, $g^{(n)}(x) \neq 0$, on a : $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$.

Ceci est la règle de L'Hopital telle qu'elle est enseignée en France. Elle sert à lever les indéterminations du type $\frac{0}{0}$.

Les espagnols utilisent également une version adaptée qui a été baptisée "Règle de L'Hopital généralisée" :

Ils utilisent la règle de L'Hopital en remplaçant la condition (i) par :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = +\infty.$$

Ceci leur permet de lever les indéterminations du type $\frac{\infty}{\infty}$. C'est cette version adaptée qui a été utilisée pour la limite vue au paragraphe précédent que nous rappelons :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{X^2}{X-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2X}{1} = +\infty$$

En fait, et comme nous allons le voir au paragraphe suivant qui reproduit un extrait de manuel, cette règle est l'outil principal, dans les lycées espagnols, pour étudier les formes indéterminées. Comme l'écrivent les auteurs du manuel :

" Estamos en condiciones de resolver todos los tipos de indeterminaciones".

2 - Extraits de manuels

Voir page ci-après

3 - Commentaires

On remarquera que :

- la règle de L'Hopital n'est pas démontrée (nécessité du théorème de Rolle).
- elle est utilisée pour les formes indéterminées :

  $\frac{0}{0}$ bien sûr , $\frac{\infty}{\infty}$ sous sa forme adaptée, mais également toutes les autres F.I. ($0\times\infty$, $\infty-\infty$, etc...) en se ramenant à l'un des 2 cas précédents, et au prix d'une certaine gymnastique, comme vous pouvez le constater dans le paragraphe : "*Actividad desarollada*" que nous vous invitons à parcourir attentivement car c'est assez surprenant, habile, astucieux ou lourd suivant les cas.

En France, cette règle n'est pas enseignée au lycée et n'est plus enseignée en classes préparatoires sauf à titre d'exercice.
Elle ne figure pas dans tous les ouvrages second cycle.
Nous n'avons pas trouvé de trace dans les manuels français de la version adaptée au cas $\frac{\infty}{\infty}$.

Par contre cette règle est également utilisée en Allemagne, en lycée (Gymnasium), comme en témoigne l'extrait de manuel suivant (voir ci-après) et seulement pour les indéterminations $\frac{0}{0}$:

Références du manuel : Mathematicas II – Editex – 2 Bachillerato – Carlos Gonzales Garcia – 1997



Johann Bernoulli (1667-1748).

Johann Bernoulli obtuvo la titulación en Medicina en 1690. Fue instruido por su hermano Jakob en el Cálculo Infinitesimal de Leibniz.

En París fue profesor particular del francés marqués de L'Hôspital o L'Hôpital, al cual le enseñó el Cálculo Infinitesimal y sus propios descubrimientos en ese campo.

En 1696, L'Hôspital publicó un tratado de Cálculo Diferencial titulado *Analyse des infiniment petits* (Análisis de las cantidades infinitamente pequeñas) en el cual figuraba la regla de L'Hôpital.

En 1704, tras la muerte del marqués, Bernoulli, reivindicaría como propia la célebre regla. La Historia de las Matemáticas ha conservado esta regla con el nombre de regla de L'Hôpital.



Guillaume François Antoine de L'Hôpital (1661-1704).

8 APLICACIONES DE LAS DERIVADAS AL CÁLCULO DE LÍMITES

En la Unidad Didáctica número 10 vimos algunos procedimientos para resolver los distintos tipos de indeterminaciones, excluidos los tipos o casos 0° y ∞°.

CASOS DE INDETERMINACIONES						
$\frac{\infty}{\infty}$	$0\cdot\infty$	$\frac{0}{0}$	$\infty-\infty$	0^0	∞^0	1^∞

En esta Unidad Didáctica estamos en condiciones de resolver todos los tipos de indeterminaciones incluidos en los casos 0° y ∞° haciendo uso de las derivadas, mediante la regla de Bernoulli-L'Hôpital, más conocida como regla de L'Hôpital.

Regla de L'Hôpital. Caso $\frac{0}{0}$

Sean f y g dos funciones continuas que verifican las siguientes hipótesis:

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
- En un cierto entorno reducido de x_0, $g(x)\neq 0$
- Existen $f'(x)$ y $g'(x)$, que ni son cero ni infinito a la vez, en un entorno de x_0
- Existe el límite $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ finito o infinito

Entonces se tienen:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Esta regla es válida para cuando x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

A veces ocurre que en $x = x_0$ se anulan las funciones $f(x)$ y $g(x)$; así como las primeras derivadas, segundas, ..., $(n-1)$-ésimas, y existen $f^{(n)}(x_0)$ y $g^{(n)}(x_0)$. En este caso se aplica la regla de L'Hôpital generalizada, que equivale a aplicar la regla de L'Hôpital reiteradamente.

Regla de L'Hôpital generalizada

Si cuando x tiende a x_0 se anulan $f(x)$, $g(x)$ y sus respectivas derivadas primeras, segundas, ..., $(n-1)$-ésimas, y existen $f^{(n)}(x_0)$ y $g^{(n)}(x_0)$, que ni son cero ni infinitas a la vez, entonces se verifica:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

Esta regla es válida para cuando x_0 es un número real, $+\infty$ o $-\infty$.

Dividiendo numerador y denominador por $f(x)\cdot g(x)$, la indeterminación se transforma en una del caso $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)-g(x)\right]\left(\infty-\infty\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right)$$

- **Caso 0°, ∞°, 1^∞**

Estas indeterminaciones aparecen en límites de la forma:

$$M = \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

y se resuelven tomando logaritmos neperianos:

$$\ln M = \ln\left\{\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}\right\}$$

$$\ln M = \lim_{x\to x_0}\left[g(x)\cdot\ln\left[f(x)\right]\right] = \lambda$$

Al calcular el límite, nos aparece una indeterminación del tipo $0\cdot\infty$, que ya sabemos resolver. Por tanto, el límite buscado es:

$$\ln M = \lambda \Rightarrow M = e^\lambda = \lim_{x\to x_0}\left[f(x)\right]^{g(x)}$$

- **Caso $\frac{\infty}{\infty}$**

La regla de L'Hôpital y la regla de L'Hôpital generalizada son también aplicables cuando:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$$

- **Caso $0\cdot\infty$**

Este caso se resuelve por la regla de L'Hôpital una vez transformado el límite correspondiente en uno del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]\left(0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Actividad desarrollada

1 Calcula los límites que figuran a continuación:

- $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim_{x\to 0}\frac{2x^3}{x-\operatorname{sen} x}\left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital generalizado $= \lim_{x\to 0}\frac{6x^2}{1-\cos x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{12x}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{12}{\cos x} = 12$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2+2}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{e^{2x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital generalizado $= \lim_{x\to+\infty}\frac{4x}{2e^{2x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{4}{4e^{2x}} = 0$
- $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x\left(0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$
- $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{tg} x\left(0\cdot\infty\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{-2}} =$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x}\left(\frac{0}{0}\right)\text{ L'Hôpital generalizado } = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)}{-2\operatorname{sen} x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x} = -1$$

- $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x}{\sqrt{x+4}-2}\left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x\to 0}\frac{2x-1}{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

2 Calcula los límites que se indican a continuación:

- $\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{\ln x}\right]\left(\infty-\infty\right) = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x\ln x-3x+3}{(x-1)\ln x}\left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital

En muchos casos como éste, la indeterminación del caso $\infty-\infty$ se transforma en la del tipo $\frac{0}{0}$ sin más que operar convenientemente, no siendo necesario usar la transformación que hemos indicado arriba.

$$\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{2x}{x-1}-\frac{3}{\ln x}\right] = \lim_{x\to 1^+}\frac{2\ln x+\frac{2x}{x}-3}{\ln x+\frac{x-1}{x}} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

- $\lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right]\left(\infty-\infty\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x-x}{x\operatorname{sen} x}\left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital generalizado $=$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\operatorname{sen} x+x\cos x}\left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos x-x\operatorname{sen} x} = -\frac{0}{2} = 0$$

3 Calcula los límites que se indican a continuación:

- $\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

Este límite pertenece al caso (1^∞). Para resolver esta indeterminación tomamos logaritmos neperianos:

$$M = \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} \Rightarrow \ln M = \ln\left\{\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}\right\} = \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{1-x}\cdot\ln x\right]$$

Este límite pertenece al caso $(0\cdot\infty)$ y, operando convenientemente, lo transformamos en el caso $\left(\frac{0}{0}\right)$

$$\ln M = \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{1-x}\left(\frac{0}{0}\right)\text{ L'Hôpital } = \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{-1} = \lim_{x\to 1}-\frac{1}{x} = -1$$

Luego el límite pedido vale: $\ln M = -1 \Rightarrow M = e^{-1} \Rightarrow \lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$

- $\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen} x\right]^x$

Operando de forma análoga a la anterior, se tiene:

$$M = \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen} x\right]^x\left(0^0\right);\ \ln M = \ln\left[\lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen} x\right]^x\right] = \lim_{x\to 0}\left[x\cdot\ln\operatorname{sen} x\right]\left(0\cdot\infty\right)$$

$$\ln M = \lim_{x\to 0}\frac{\ln\operatorname{sen} x}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ L'Hôpital } = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x/\operatorname{sen} x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}-\frac{x^2\cos x}{\operatorname{sen} x}\left(\frac{0}{0}\right)\text{ L'Hôpital } =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-2x\cos x+x^2\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

Por tanto, el límite pedido vale: $\ln M = 0 \Rightarrow M = e^0 = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\left[\operatorname{sen} x\right]^x = 1$

- $\lim_{x\to+\infty}\left[2^x-1\right]^{\frac{2}{x+1}}$

Operando como lo hemos hecho anteriormente, tenemos:

$$M = \lim_{x\to+\infty}\left[2^x-1\right]^{\frac{2}{x+1}}\left(\infty^0\right);\ \ln M = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x+1}\cdot\ln\left(2^x-1\right)\right] = \left(0\cdot\infty\right)$$

$$\ln M = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\ln\left(2^x-1\right)}{x+1}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)\text{ L'Hôpital generalizado } = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot\frac{2^x\cdot\ln 2}{2^x-1}}{1} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2^x\cdot\ln 2}{2^x-1}\left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{2\cdot 2^x\cdot(\ln 2)^2}{2^x\cdot\ln 2} = \lim_{x\to+\infty} 2\ln 2 = \ln 4$$

Por tanto, el límite pedido vale: $\ln M = \ln 4 \Rightarrow M = 4 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left[2^x-1\right]^{\frac{2}{x+1}} = 4$

9.5. Ein handliches Verfahren für knifflige Grenzwerte

Bei der Berechnung des Grenzwerts $x \to 0$ von $\frac{\sin x}{x}$ erhält man bei »naivem Einsetzen« den unbestimmten Quotienten $\frac{0}{0}$. Der französische Mathematiker Guillaume-François-Antoine de L'Hospital (1661–1704) formulierte in seinem Lehrbuch der Differentialrechnung 1696 Regeln zur Bestimmung solcher Grenzwerte. In manchen schwierigen Fällen hilft uns schon die folgende einfache Variante:

Sind die Funktionen f und g differenzierbar bei x_0 mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x_0) \neq 0$, so ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Diesen Satz wollen wir gleich einmal erproben:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$$

Es ist dasselbe Ergebnis, das wir nach mehreren Anläufen und viel Rechenaufwand ebenfalls erhalten haben. Um diese Regel auch in anderen Fällen guten Gewissens anwenden zu dürfen, beweisen wir sie:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Noch einige **Beispiele:**

a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \frac{-\sin 0}{1} = 0$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^9 - x^2} = \frac{3 \cdot (1)^2 - 2}{9 \cdot (1)^8 - 2 \cdot 1} = \frac{1}{7}$

c) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{1 - \cos(1 - x)}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sin(1 - 1) \cdot (-1)}{\frac{1}{2\sqrt{1}}} = 0.$

Mit unserer Methode können wir auch Grenzwerte bestimmen, die zunächst nicht die Form $\frac{0}{0}$ haben, z. B.

d) $\lim\limits_{x \leq \frac{\pi}{2}} (2x - \pi) \cdot \tan x = \lim\limits_{x \leq \frac{\pi}{2}} \frac{(2x - \pi) \sin x}{\cos x} =$

$$= \frac{\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} - \pi\right) \cdot \cos \frac{\pi}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\pi}{2}}{-\sin \frac{\pi}{2}} = -2.$$

III - PRESENTATION D'UN THEME: INTRODUCTION DES FONCTIONS LOGARITHMES ET EXPONENTIELLES

Rappelons le cas de la France :

- La fonction ln est introduite par $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$.
- Le nombre e est l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$.
- Les fonctions logarithme de base a (en particulier de base 10) sont proportionnelles à la fonction logarithme de base e.
- La fonction $x \longmapsto \exp(x)$ est la réciproque de $x \longmapsto \ln x$.
- La fonction $x \longmapsto a^x$ est la réciproque de $x \longmapsto \log_a x$.
- Le lien est fait entre les fonctions $x \longmapsto a^x$ et les suites géométriques a^n. (Ce dernier point est parfois délicat).

Présentons la manière espagnole :

- Le nombre e est introduit très tôt dans le cursus scolaire (au même titre que π). C'est un irrationnel parmi d'autres.
- Les suites géométriques sont présentées. La raison est quelconque : Ce peut être 2, 10, $\sqrt{2}$, ou ... e.
- La suite $n \longmapsto a^n$ de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ est prolongée sur $\mathbb{R}$ en la fonction exponentielle $x \longmapsto a^x$. Ceci est fait naturellement à partir du graphe de $n \longmapsto a^n$.
- Les fonctions $x \longmapsto \log x$ et $x \longmapsto \ln x$ sont les réciproques respectives de $x \longmapsto 10^x$ et de $x \longmapsto e^x$.
- La fonction $x \longmapsto \ln x$ admet pour dérivée $x \longmapsto \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commentaires :

- Les deux systèmes de présentation sont cohérents et permettent de démontrer, dans les deux cas, la propriété fondamentale des logarithmes ($\ln ab = \ln a + \ln b$).
- Le système espagnol est conforme à la façon dont, historiquement, les logarithmes ont été introduits :
  Les logarithmes ont été introduits par la mise en relation de suites géométriques et de suites arithmétiques (XVII^{ème} siècle). Le lien entre la quadrature de l'hyperbole et les logarithmes népériens est apparu plus tard et ne s'est pas fait immédiatement.
- Le système de présentation français est plus rigoureux mathématiquement.

IV - CONCLUSION

En France, la règle de l'Hopital est tombée en désuétude. En premier cycle les développements limités et les équivalents sont un outil plus puissant et plus explicite. Cependant elle permettrait de résoudre par exemple $\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$ ou $\lim_{x \to \frac{1}{2}} \frac{\cos \pi x}{\ln 2x}$ qui sont inaccessibles, en France, au niveau lycée.

La présentation du cours sur les logarithmes en Espagne, bien que totalement opposée à la méthode française n'en est pas moins tout aussi cohérente et présente l'avantage d'être beaucoup plus conforme à la réalité historique.

Cela étant dit, pour l'essentiel, il n'y a pas de différence notable de conception entre les systèmes éducatifs espagnols et français. Historiquement, le système espagnol s'est largement inspiré du système français et la similitude perdure de nos jours.

3

Exemples de fiches d'exercices et de sujet d'examens

PRUEBA DE ACCESO (COU)
UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA
CURSO 98/99

Asignatura: MATEMÁTICAS I Tiempo máximo de la prueba: 2 horas

El alumno elegirá uno de los dos repertorios que a continuación de proponen.
Cada una de las cuatro cuestiones del repertorio elegido se calificará con un máximo de 2,5 puntos.
Las respuestas deberán ser razonadas.

REPERTORIO A

1.- (a) Decir para qué valores de a no tiene inversa la matriz $\begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(b) ¿Cuál es el rango de la matriz para dichos valores?.

2.- Calcular el volumen del tetraedro cuyos vértices son las intersecciones 3 a 3 de los planos $x+y+z=1$, $x+y-z=1$, $x-y+z=1$, $-x+y+z=1$.

3.- Demostrar que si la función f es tal que $|f(x)| \leq x^2$, entonces es derivable en 0. ¿Cuánto vale $f'(0)$?.

4.- ¿Para qué valores de a es mínimo el valor de la integral

$$\int_0^{\pi} acosaxdx$$

REPERTORIO B

1.- (a) Concepto de dependencia e independencia lineal de vectores.
(b) ¿Para qué valores de a son linealmente dependientes los vectores $(a,1,1),(1,a,1),(1,1,a)$.

2.- (a) Hallar las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $(1,1,1)$ y es paralela a la determinada por los planos $x+y+z=0$, $x-y+z=1$.
(b) Calcular la distancia entre ambas rectas.

3.- (a) Concepto de función derivable en un punto.
(b) Representar la función $y=|x-3|$.
(c) Probar que dicha función no es derivable en el punto 3.

4.- Calcular

$$\int_2^4 |x-3|dx$$

3º BUP. Integrales. Mayo 98

1.- Calcular

a) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx$ b) $\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx$ c) $\int \sqrt{16-x^2} dx$ d) $\int \frac{x}{\sqrt{2+3x^2}} dx$

2.- Dadas las funciones $y=x^2$, $x=y^2$

a) Aree limitada por dichas funciones

b) Volumen engendrado al girar dicha superficie alrededor del eje OX

3.- Dada la función $y = -\frac{x}{x^2-4}$

a) Dibujarla: Puntos de corte con los ejes, asíntotas, crecimiento y máximos y mínimos

b) Area limitada por dicha función y las rectas x=-1 , x=1

NOTA: Puntuación: 1º: **6 puntos**, 2º y 3º: **2 puntos**

EXPONENCIALES Y LOGARITMOS- 2º BUP

1.- Conocido lg 2=0,3010, calcular $\lg \frac{3,2^3 \, (0,64)^5}{0,,125 \sqrt[4]{80^3}}$

2.- Resolver

$\lg_y (9-x) = \frac{1}{2}$

$3^x + 3^{1-x} = 4$

3.- Resolver $\lg(x-1) - \lg\sqrt{5+x} - \lg\sqrt{5-x} = 0$

4.- Resolver $3^{x-1} + 3^{2x+1} - 3^{x+1} = 219$

5.- Resolver $\frac{\lg 2 + \lg (11-x^2)}{\lg (5-x)} = 2$

1º BUP. Marzo 97

1.- Resolver: $x-1-\frac{x-2}{2}+\frac{x-3}{3}=0$

2.- Una persona realiza 3/5 partes de un viaje en tren, los 7/8 del resto en coche y los 26 km restantes andando. ¿Cuántos kms ha recorrido?

3.- Resolver
$$x+y+z=2$$
$$2x+3y+5z=11$$
$$x-5y+6z=29$$

4.- Una vasija está llena de vino por valor de 15.600 pts. Se extraen 135 litros y lo que queda vale 1.155 pts. Calcular el número de litros y el precio de cada litro.

5.- Resolver $\frac{2x-4}{5-x}>0$

2º BUP- 1ª EVALUACIÓN. XII-95

1.- a) Definir Sistema ligado, Sistema generador y Base un espacio vectorial

b) Ver si el sistema {(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)} forman una base del espacio R^3 y hallar las componentes del vector (0, 1, 5) en función de dichos vectores

(2)

2.- a)Ecuación de la recta que pasa por los puntos A=(1, 2) y B=(-1, 3)

b) Ecuación de la recta paralela a la AB que pasa por el origen

c) Ecuación de la recta perpendicular a la AB que pasa por el origen

d) mediatriz del segmento AB

(2)

3.- Dada la sucesión -3/4, 1/6, 5/8, 9/10, ... Calcular

a) Término general

b) Ver si es creciente o decreciente

b) El límite y demostrarlo

c) Ver si está acotada

(2)

4.- Calcular

a) $\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2-n^2+3}{3n+5}$ b) $\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2-3n+1}-\sqrt{n^2+1}\right)$

(4)

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n-2}{3}-\frac{4n^2+n}{4n+1}\right)$ c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2^n+3^n+4^n}{5^n}$

3º de E. S. O. (Geometría- Abril 1999)

1.- La hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo miden 26 cm y 10 cm. Calcular el valor del otro cateto.

2.- Tres pueblos A, B y C, forman un triángulo acutángulo. Se quiere hacer un basurero que equidiste de los tres. ¿Cómo hacerlo?. ¿Cómo se llama dicho punto?

A •

B •

• C

3.- Un constructor, para promocionar un bloque de viviendas en forma de ortoedro que mide 100 m. de largo, 60 m. de ancho y 40 m. de alto, ha hecho una maqueta a escala 1:100. Calcular el área de la fachada (cara mayor) y el volumen de la maqueta.

4.- La torre más alta de la Sagrada Familia de Barcelona tiene 160 m. y la torre Eiffel 300 m. Se dibujan las dos a la misma escala. ¿Cuánto medirá la torre Eiffel si la torre de la Sagrada Familia mide 60 cm.?

5.- En las figuras siguientes

Fig a): Dibujar los puntos A=(3, 1), B=(1, 5) y sus simétricos respecto de los ejes OX y OY

Fig b): Dibujar el simétrico del triángulo ABC respecto del origen de coordenadas

Fig c): Dar las coordenadas del triángulo resultante de aplicar una traslación de vector v=(3, 2)

Fig d): Dar el simétrico del segmento AB respecto del eje e

FINAL JUNIO 1º BUP 97

1.- Efectuar $\dfrac{2}{\sqrt{2}}-\dfrac{1}{3-\sqrt{2}}+\dfrac{\frac{1}{2}-\sqrt{2}}{3}$

2.- Resolver $\begin{matrix} y+x^2=4x+5 \\ 2x+y-5=0 \end{matrix}$

3.- En una clase, los 2/3 del nº de alumnas es igual a los 5/7 del nº de alumnos. Si el nº de alumnas aumenta en 26, entonces es igual al doble del nº de alumnos. ¿Cuántas alumnas y alumnos hay?

4.- Resolver a) $\dfrac{2x-4}{5-x}<0$ b) $\dfrac{x-1}{5}-\dfrac{2x-3}{2}>1-\dfrac{x}{3}$

5.- Operar y simplificar $\dfrac{1}{x^2-1}+\dfrac{2x+1}{x-1}-\dfrac{x-2}{x+1}-\dfrac{x+1}{x}$

6.- Simplificar $\dfrac{4x^3y-4xy}{2x^3y-2x^2y-4xy}$

7.- Hallar la ecuación de la recta cuya pendiente es 2 y pasa por el punto P=(2, 1)

8.- Resolver $\binom{x}{3}+4\binom{x+1}{3}+\binom{x+2}{3}=8$

9.- Dada la progresión 4/3, 2/3, 1/3, ... Calcular la suma y el producto de las 20 primeros términos

CHAPITRE 4

COMPARAISONS

1

Enseignement de l'analyse

Fonctions exponentielles et fonctions logarithmes dans les enseignements anglais et allemand

Remarque : l'étude s'appuie sur un manuel allemand et sur un livre de révisions pour le A-Level anglais[1] (livre de 360 pages avec beaucoup de rappels de cours). Ces deux livres n'étant pas de même nature, l'étude est biaisée. Néanmoins, on peut penser que les exigences de démonstration et de rigueur sont bien plus grands en Allemagne qu'en Angleterre.

Dans les deux enseignements, on utilise le même type de démarche, démarche qui est assez éloignée de celle que nous utilisons en classe de terminale.

Première étape :

On commence par admettre l'existence des fonctions $x \to a^x$, pour a réel strictement positif. On définit alors la fonctions $x \to \log_a x$ comme étant la fonction réciproque de la précédente.

Dans le livre anglais, on lit : Définition : If $y = a^x$, $a > 0$, then $x = \log_a y$. Dans un manuel allemand, il est explicitement questions de fonction réciproque d'une fonction monotone. Il est à remarquer que, dans les deux cas, ces notions sont abordées avant la notion de dérivation. On étudie alors les propriétés algébriques des fonctions logarithmes. Dans le manuel allemand, on parle aussi du sens de variation et de la représentation.

Deuxième étape :

Cette étape est complètement dissociée de la première.

On revient sur les représentations des fonctions $x \to a^x$. On remarque que les représentations passent toutes par le point (0 ; 1) mais que les coefficients directeurs des tangentes en ce point sont différents. Le livre anglais remarque que, pour $a = 2$, ce coefficient directeur est environ 0,7 et que pour $a = 3$, il est d'environ 1,1. Il en déduit qu'il doit bien exister une valeur de a telle que le coefficient directeur soit 1. Ce nombre est noté e et il est dit que l'on peut démonter que e est la somme de la série infinie $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots$

Dans le manuel allemand, il est fait la démonstration suivante. Elle n'est pas entière, mais les parties non développées sont posées en exercices au-dessous, avec des indications. Le nombre e est alors la limite de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

NB : On peut remarquer qu'il n'y a pas de différence entre = et ≈.

La fonction logarithme népérien est alors la fonction réciproque de la fonction $x \to e^x$.

Nous donnons ci-après l'extrait de manuel allemand correspondant.

---

[1] Livres utilisés : A-Level and AS-Level Mathematics. Logman revise guides (Edition longman). Analysis. LS Mathematik. (Edition Ernst Klett Schulbuchverlag).

Eine Exponentialfunktion f mit $f(x)=a^x$ hat an der Stelle x_0 den Differenzenquotienten

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\frac{a^{x_0+h}-a^{x_0}}{h}=a^{x_0}\cdot\frac{a^h-1}{h}.$$

Wenn $\frac{a^h-1}{h}$ für $h\to 0$ gegen einen Grenzwert g strebt, so ist die Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0)=a^{x_0}\cdot g$. Dieses Ergebnis würde im Falle $g=1$ offenbar besonders einfach. Speziell für $x_0=0$ wäre dann $f'(0)=1$. Damit stellt sich die Frage: Gibt es eine Basis a so, daß die zugehörige Exponentialfunktion für $x_0=0$ die Ableitung 1 hat, ihr Schaubild also die Gerade mit der Gleichung $y=x+1$ in A(0|1) berührt?

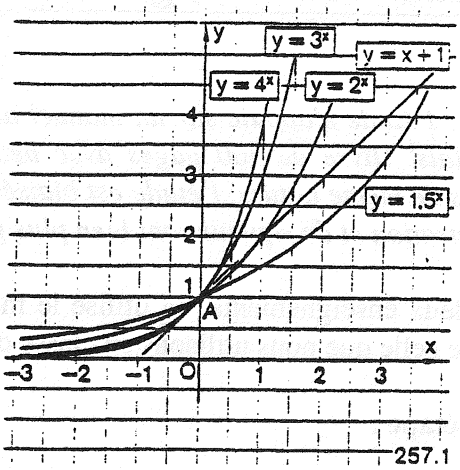
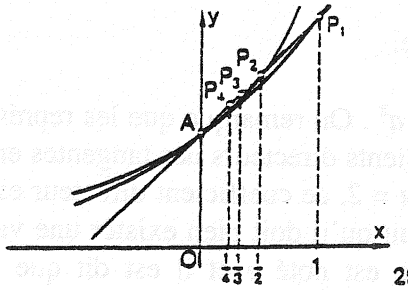


Fig. 257.1 läßt vermuten, daß es eine solche Exponentialfunktion gibt, und daß deren Basis eine Zahl zwischen 2 und 3 ist. Um näheren Aufschluß zu gewinnen, betrachten wir auf der Geraden $t: y=x+1$ die Punktfolge (Fig. 258.1)

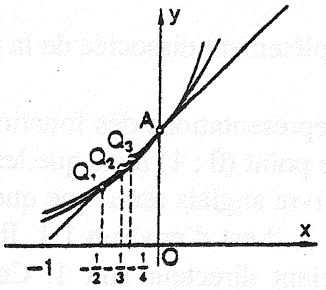
$$P_1(1|1+1);\quad P_2\left(\tfrac{1}{2}|1+\tfrac{1}{2}\right);\quad P_3\left(\tfrac{1}{3}|1+\tfrac{1}{3}\right);\quad \ldots;\ P_n\left(\tfrac{1}{n}|1+\tfrac{1}{n}\right);\ldots,$$

deren Punkte sich dem Punkt A(0|1) nähern. Durch jeden dieser Punkte geht eine Exponentialkurve; wir berechnen die zugehörigen Basen. Für die Kurve durch P_n gilt $1+\frac{1}{n}=a^{\frac{1}{n}}$; also $a=(1+\frac{1}{n})^n$. Zu den angegebenen Punkten gehören daher die Basen

$$a_1=(1+1)^1;\quad a_2=(1+\tfrac{1}{2})^2;\quad a_3=(1+\tfrac{1}{3})^3;\quad \ldots;\ a_n=(1+\tfrac{1}{n})^n;\ldots$$
$$=2\qquad =2{,}25\qquad =2{,}37\ldots$$



258.1



258.2

Betrachten wir entsprechend in Fig. 258.2 die Folge der Punkte Q_n mit

$$Q_1(-\tfrac{1}{2}|1-\tfrac{1}{2});\quad Q_2(-\tfrac{1}{3}|1-\tfrac{1}{3});\quad Q_3(-\tfrac{1}{4}|1-\tfrac{1}{4});\quad \ldots;\ Q_n(-\tfrac{1}{n+1}|1-\tfrac{1}{n+1});\ldots$$

und berechnen wieder die Basen b_n der zugehörigen Exponentialkurven, so ist

$$b_1=(1+1)^2;\quad b_2=(1+\tfrac{1}{2})^3;\quad b_3=(1+\tfrac{1}{3})^4;\quad \ldots;\ b_n=(1+\tfrac{1}{n})^{n+1};\ldots$$
$$=4\qquad =3{,}375\qquad =3{,}16\ldots$$

Die Folge (b_n) ist monoton abnehmend, während die Folge (a_n) monoton zunimmt (Aufgabe 4, S. 259); außerdem gilt $b_n>a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$ und $b_n-a_n\to 0$ für $n\to+\infty$ (Aufgabe 4, S. 259). Dies zeigt: Beide Folgen sind konvergent und haben denselben Grenzwert. Man kann zeigen, daß der Grenzwert eine irrationale Zahl ist.

Satz 1: Die Folge (a_n) mit $a_n=(1+\frac{1}{n})^n$ ist konvergent.

Ihr Grenzwert heißt **Eulersche Zahl** und wird mit e bezeichnet; es ist

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e=2{,}71828$$

L'exemple de la dérivée de la fonction sinus, et du calcul de la limite de $\frac{sinx}{x}$

Nous avons voulu ici aborder un point précis, mais qui nous a semblé significatif ; la présentation faite de la dérivée de la fonction sinus, et en particulier du calcul de la limite de $\frac{sinx}{x}$. Nous expliquerons tout d'abord comment les résultats correspondants sont présentés dans des manuels français, anglais, allemand et espagnol (dans cet ordre). Puis nous donnerons des éléments de comparaison des différentes approches, ainsi que les extraits de manuels correspondants.

I – Présentation adoptée

Un manuel français, classe de Première S
(Dimathème, analyse, Première S).

Une activité, portant sur le nombre dérivé en zéro des fonctions sinus et cosinus, précède le cours. Dans un premier temps, on suggère une lecture graphique :

Le graphe de la fonctions sinus est tracé de $-\pi$ à π, ainsi que la droite d'équation $y = x$. Les élèves doivent donc constater visuellement le fait que la droite est tangente à la courbe en zéro, et en déduire que le nombre dérivé vaut 1.

Ils doivent ensuite utiliser leur calculatrice pour remplir un tableau de valeurs de la fonction $\frac{sinx}{x}$ autour de zéro, et en déduire ce que « semble » être la valeur de la limite, qu'ils sont amenés à confronter avec la valeur lue sur le graphique.

Une activité semblable est ensuite proposée pour la fonction cosinus.

On passe alors à la partie cours ; les résultats, qui ont été conjecturés dans l'activité, sont alors admis :

« La fonction sinus est dérivable en zéro et son nombre dérivé est un ».
« La fonction cosinus est dérivable en zéro et son nombre dérivé est zéro ».

Ces résultats sont utilisés pour démontrer (à l'aide des formules d'addition) qu'en un réel x quelconque, la fonction sinus est dérivable, son nombre dérivé valant $cos\ x$.

On retient donc de la démarche adoptée :

L'emploi d'une activité, présentée comme source de conjectures, à l'aide d'un graphique et de la calculatrice ;
Un résultat explicitement admis ;
Une démonstration pour le cas général, reposant sur le résultat admis.

Un manuel anglais, niveau A-Level
(Core maths for A-Level, éd. Stanley Thornes)

Dans ce manuel anglais, on trouve également une activité précédant le cours. Toutefois le contenu de celle-ci est sensiblement différent de ce que nous avons observé dans le livre français. En effet, l'activité porte sur la dérivée de la fonction sinus de 0 à 2π ; les élèves sont amenés à tracer des tangentes « approximatives » au graphe de la fonction sinus sur cet intervalle ; les résultats obtenus n'apparaissent pas comme simple source de conjectures, ils sont censés convaincre l'élève de la validité du résultat obtenu.

Plus précisément, on demande à l'élève de tracer un graphe de la fonction sinus entre 0 et 2π, suffisamment grand et avec la même échelle sur les deux axes.

Pour les valeurs entières de x allant de 0 à 6, il doit alors placer approximativement la tangente au graphe en x, et calculer la pente de celle-ci. Il dresse ainsi un tableau de valeurs, qu'il compare avec les valeurs de la fonction cosinus aux mêmes points.

Une activité semblable est ensuite proposée pour la fonction cosinus.

On passe alors au cours, qui repose sur les résultats de l'activité :

« The results from the last exercise demonstrate that, when x is measured in radians the gradient function of *sin x* is *cos x* ... ».

Le mot « demonstrate » ne signifie pas « démontrer », mais plutôt « donner la conviction que... ». Ceci nous paraît significatif de l'esprit dans lequel cette présentation est faite : on ne souhaite pas prouver rigoureusement un résultat, mais plutôt avoir suffisamment d'éléments pour être raisonnablement convaincu de celui-ci.

Un manuel allemand, classe de onzième
(Analysis eins, éd. Lambacher Scweizer).

La notion de limite est définie en Allemagne avec les quantificateurs, et tout d'abord pour les suites. La définition de limite de fonction repose sur les suites (une fonction f tend vers g (Grezwert) quand x tend vers x_0 si pour toute suite (x_n) d'éléments de D_f tendant vers x_0, la suite $(f(x_n))$ tend vers g).

Pour aborder la dérivée de la fonction sinus en zéro, on se ramène au calcul de la limite de $\frac{sinx}{x}$ en zéro ; on démontre que cette limite vaut 1, en interprétant $\frac{x}{2}$ comme l'aire d'un secteur angulaire, aire comprise entre celles de deux triangles.

Cette limite est alors utilisée comme en France pour démontrer qu'aux autres points, sinus est dérivable et de dérivée cosinus.

Un manuel espagnol, niveau bachillerato
(Mathematicas II, éd. Editex).

En Espagne comme en Allemagne, la définition de limite est donnée avec les quantificateurs (sans toutefois passer par les suites).

Aucune démonstration, ou approche intuitive, de la dérivabilité de la fonction sinus n'est proposée ; le résultat « La dérivée de la fonction sinus est cosinus » est donné sans accompagnement.

En revanche, dans la partie consacrée à la règle de l'Hôpital[1], cette règle et le résultat cité ci-dessus sont utilisés pour prouver que la limite de $\frac{sinx}{x}$ en zéro vaut 1 ; ceci pose un réel problème de rigueur, puisque la plupart du temps cette limite est utilisée pour montrer que la dérivée de sinus est cosinus.

II - Comparaison des différentes présentations

Parmi les différences observées, nous avons pu noter dans un premier temps des différences portant sur les programmes d'enseignement.

En Allemagne, la notion de limite est vue avec les quantificateurs ; en France, cette approche a été abandonnée au profit d'une notion intuitive de limite ; en Angleterre, la notion de limite est très peu abordée et ne fait pas l'objet d'une étude spécifique, en Espagne, de nombreux résultats sont donnés au sujet des limites, y compris la règle de l'Hôpital qui n'est vue dans aucun des autres pays.

Cependant, ce qui ressort de cette comparaison de manuels, effectuée sur un point très précis, va au-delà de simples écarts dans les programmes ; il s'agit de manières différentes d'aborder les mathématiques, avec en particulier des exigences de rigueur différentes.

Le manuel allemand semble adopter des vues très formalistes, avec d'importantes exigences de démonstration au moins en ce qui concerne le cours.

Le manuel anglais met l'accent sur l'intuition, les moyens de se convaincre qu'un résultat est vrai ; il n'apparaît dans le manuel aucune exigence portant sur les démonstrations.

Le manuel espagnol contient un grand nombre de résultats, mais très peu de justifications ; sur le point particulier que nous avons étudié, l'approche proposée pourrait conduire à une erreur de raisonnement, si on l'utilise pour démontrer la dérivabilité de la fonction sinus. Notons que le manuel étudié est destiné à des classes de l'enseignement technique, ce qui explique peut-être la densité de résultats et le manque de justifications.

Le manuel français semble proposer une approche intermédiaire entre les points de vues allemand et anglais. Une activité précède le cours ; le contenu de cette activité semble plus « rigoureux » que celui de l'activité anglaise, puisqu'elle ne repose pas sur un tracé approximatif de l'élève, mais sur des valeurs approchées données par la calculatrice.

Dans le cours, il est dit que le résultat est admis ; on ne mentionne pas le rôle éventuel de l'activité, doit-on en tirer une conjecture, ou une conviction ? Le manuel ne précise rien sur ce point, et les interprétations différeront sans doute selon les élèves et selon les enseignants.

[1] Au sujet de l'emploi fait de la règle de L'Hopital en Espagne, voir le chapitre correspondant.

III – Extraits de manuels

Nous ne donnons pas d'extrait du manuel français, en supposant que le lecteur connaît ou peut aisément retrouver le manuel mentionné.
On trouvera donc ci-après, dans cet ordre :

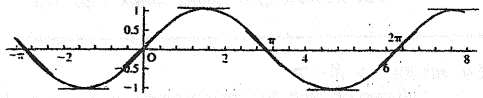
- Un extrait du manuel Core maths for A-Level, éd. Stanley Thornes ;
- Un extrait du manuel Analysis eins, éd. Lambacher Scweizer ;
- Un extrait du manuel Mathematicas II, éd. Editex

CHAPTER 25

DIFFERENTIATION OF TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

INVESTIGATING THE GRADIENT FUNCTION WHEN $y = \sin x$

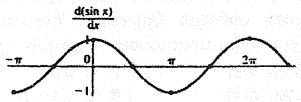
The diagram shows the graph of $y = \sin x$ for values of x between $-\pi$ and $\frac{5}{2}\pi$. It is drawn with equal scales on the axes.



The tangents to the curve are drawn by eye and their gradients used to complete the following table.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$
approximate gradient of $\sin x$, i.e. $\frac{d(\sin x)}{dx}$	−1	0	1	0	−1	0	1	0

Plotting these approximate values of $\frac{d(\sin x)}{dx}$ against x, and drawing a smooth curve through them, gives a curve that looks remarkably like the cosine wave.



The next exercise explores this relationship further.

EXERCISE 25a

For this exercise you will need a large plot of the graph of $y = \sin x$ for values of x in the range $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$ drawn with equal scales on the axes.

There is a copy of this on p. 868, but if you have access to the appropriate hardware and software, a landscape print of this plot on A4 paper is easier to use.

1. Draw tangents to the curve $y = \sin x$ at each value of x given in the table and then find the gradient of each tangent to complete the second row of the table.

x	0	1	2	3	4	5	6
approximate gradient							
$\cos x$							

Now use your calculator to complete the third row of the table. Comment on the values in the last two rows of the completed table.

2. Repeat question 1 using a plot of $y = \sin x°$ for values of x from 0° to 360° at intervals of 60° in the table.

Is $\frac{d}{dx}(\sin x°)$ approximately equal to $\cos x°$?

3. (a) Use a *sketch* graph of $y = \cos x$ for $-\pi \leqslant x \leqslant 3\pi$ to fill in the second row of the table.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π	$\frac{5\pi}{2}$	3π
gradient of $\cos x$									

(b) Plot these values of the gradient of $\cos x$ against x and draw a curve through the points.

(c) Deduce the equation of the curve.

(d) State, with a reason, whether the result for (c) is valid when x is measured in degrees.

THE DERIVATIVES OF $\sin x$ AND $\cos x$

The results from the last exercise demonstrate that, when x is measured in radians the gradient function of $\sin x$ is $\cos x$, and the gradient function of $\cos x$ is $-\sin x$.

i.e. if $y = \sin x$ then $\frac{dy}{dx} = \cos x$

In a similar way it can be shown that

if $y = \cos x$ then $\frac{dy}{dx} = -\sin x$

These two results can be quoted whenever they are needed.

It is important to realise that they are valid only when x is measured in radians.

These results can be obtained by differentiating from first principles, but the trigonometric knowledge needed to simplify the expressions is beyond the scope of this book and throughout all subsequent work on the calculus of trig functions, the angle is measured in radians unless it is stated otherwise.

Examples 25b

1. Find the smallest positive value of x for which there is a stationary value of the function $x + 2\cos x$

$f(x) = x + 2\cos x \Rightarrow f'(x) = 1 - 2\sin x$

where $f'(x) = \frac{d}{dx}f(x)$

For stationary values $f'(x) = 0$

i.e. $1 - 2\sin x = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2}$

The smallest positive angle with a sine of $\frac{1}{2}$ is $\frac{1}{6}\pi$

NOTE that the answer *must* be given in radians because the rule used to differentiate $\cos x$ is valid only for an angle in radians.

18 Grenzwerte bei beliebigen Folgen

1 Veranschauliche die Folgen (a_n) auf der Zahlengeraden. Sind die Folgen monoton? Bei welchen der Folgen könnte man trotzdem von einem „Grenzwert" sprechen?

a) $a_n=(-1)^n\cdot\frac{3}{n}$ b) $a_n=(-1)^n\cdot n$ c) $a_n=(-1)^n+\frac{1}{n}$ d) $a_n=\frac{\cos(n\cdot\pi)}{n}$

Bisher haben wir uns mit monotonen Folgen beschäftigt. Im weiteren untersuchen wir auch nicht-monotone Folgen. Auch sie können einen „Grenzwert" haben.
Bei monotonen Folgen (Fig. 69.1/2) nannten wir eine Zahl g Grenzwert, wenn für jedes (noch so kleine) $\varepsilon>0$ von einem Glied an für alle weiteren Glieder

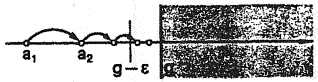
$g-\varepsilon<a_n\leqq g$ (Fig. 69.1)

bzw. $g\leqq a_n<g+\varepsilon$ (Fig. 69.2)

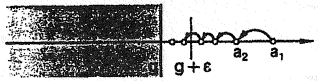
gilt. Da bei nicht-monotonen Folgen die Annäherung beidseitig erfolgen kann, müssen wir dementsprechend fordern: Wie klein wir auch die Zahl $\varepsilon>0$ wählen, stets müssen von einem Glied an alle weiteren Folgenglieder zwischen $g-\varepsilon$ und $g+\varepsilon$ liegen, muß also gelten:

$g-\varepsilon<a_n<g+\varepsilon$ (Fig. 69.3)

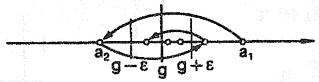
oder $|a_n-g|<\varepsilon$.



69.1



69.2

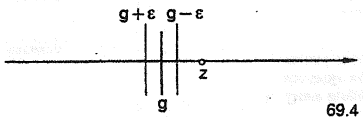


69.3

Definition: (Grenzwert bei beliebigen Folgen)
Eine Zahl g heißt **Grenzwert** der Zahlenfolge (a_n) genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon>0$ eine Gliednummer n_0 gibt, so daß gilt:

$|a_n-g|<\varepsilon$ für alle $n\geqq n_0$.

Fig. 69.4 zeigt: Wenn g Grenzwert von (a_n) ist und $z\neq g$, dann kann man ε so klein wählen, daß z nicht mehr zwischen $g-\varepsilon$ und $g+\varepsilon$ liegt. Also kann z nicht ebenfalls Grenzwert von (a_n) sein.



69.4

Satz 1: Eine Zahlenfolge kann höchstens **einen** Grenzwert haben.

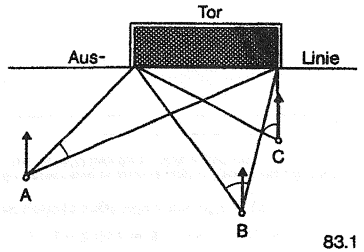
Beispiel 1: (Nachweis, daß eine vermutete Zahl Grenzwert ist.)
Wir untersuchen $\left(\frac{(-1)^n+n}{n}\right)$, also die Folge $0;\frac{3}{2};\frac{2}{3};\frac{5}{4};\frac{4}{5};\frac{7}{6};\frac{6}{7};\ldots$. Da die Glieder abwechselnd größer oder kleiner als 1 sind, könnte 1 der Grenzwert sein.
Nachweis: Wir müssen zeigen, daß für jedes $\varepsilon>0$ die Ungleichung

(*) $\left|\frac{(-1)^n+n}{n}-1\right|<\varepsilon$

für ein n_0 und alle folgenden n erfüllt ist.

22 Grenzwerte von Funktionen für $x\to x_0$

1 Drei Fußballspieler A, B, C laufen wie in Fig. 83.1 auf die gegnerische Aus-Linie zu. Wird dabei der Einschußwinkel dieser Spieler günstiger oder ungünstiger? Welchem Grenzwinkel nähert sich der Einschußwinkel des Spielers A (B; C)?



83.1

Bei Funktionen können Grenzwerte nicht nur für $x\to+\infty$ oder $x\to-\infty$ auftreten. Als Beispiel betrachten wir die Funktion

$f:x\mapsto\frac{x^2-4}{5x-10}$;

sie ist für alle $x\neq2$ definiert, für $x=2$ ist kein Funktionswert vorhanden. Um Auskunft über das Verhalten der Funktion f für $x\to2$ zu erhalten, betrachten wir Folgen (x_n) mit $x_n\to2$ und untersuchen, wie sich die dazugehörenden Bildfolgen $(f(x_n))$ verhalten. Die Tabellen a) und b) zeigen einige Glieder solcher Folgen.

a)

x_n	1,5	1,8	1,9	1,99	1,999
$f(x_n)$	0,7	0,76	0,78	0,798	0,7998

b)

x_n	2,1	1,95	2,01	1,99	2,0001
$f(x_n)$	0,82	0,79	0,802	0,798	0,80002

Beide Bildfolgen scheinen gegen den Grenzwert 0,8 zu konvergieren. Wir untersuchen deshalb für $x\neq2$ die Differenz $f(x)-0{,}8$.

$$\frac{x^2-4}{5x-10}-\frac{4}{5}=\frac{x^2-4x+4}{5(x-2)}=\frac{(x-2)^2}{5(x-2)}=\frac{x-2}{5}$$

Daran erkennen wir, daß für jede Folge (x_n) mit $x_n\to2$ die Differenzfolge $(f(x_n)-0{,}8)$ eine Nullfolge ist. Das bedeutet: Für alle Folgen (x_n) mit $x_n\to2$ haben die Bildfolgen $(f(x_n))$ den gleichen Grenzwert 0,8.

Definition: Eine Zahl g heißt **Grenzwert der Funktion f für $x\to x_0$**, wenn bei jeder Folge (x_n) mit $x_n\in D_f$, $x_n\neq x_0$ und $x_n\to x_0$ die Bildfolge $(f(x_n))$ denselben Grenzwert g hat. Man schreibt dann

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=g.$$

Bemerkungen: a) Damit man überhaupt Folgen (x_n) mit $x_n\to x_0$ bilden kann, muß es beliebig nahe bei x_0 Zahlen $(\neq x_0)$ geben, die zur Definitionsmenge D_f gehören. Das ist z. B. der Fall für $D_f=\mathbb{R}\setminus\{x_0\}$ oder $D_f=\mathbb{Q}\setminus\{x_0\}$; x_0 selbst braucht nicht zur Definitionsmenge zu gehören.
b) Ist (h_n) eine Nullfolge, so ist (x_0+h_n) eine Folge mit $x_0+h_n\to x_0$. Man schreibt deshalb statt $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=g$ auch

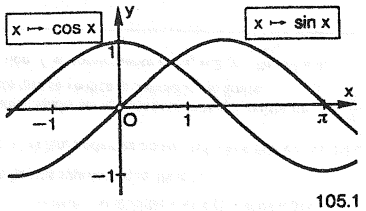
$$\lim_{h\to0}f(x_0+h)=g.$$

Fig. 84.1 zeigt das Schaubild einer Funktion f mit $D_f=\mathbb{R}\setminus\{2;7\}$. Es verdeutlicht unterschiedliche Verhaltensweisen der Funktion bei Annäherung an eine Stelle x_0.
An der Stelle $x_0=2$ ist kein Funktionswert vorhanden, aber $\lim\limits_{x\to2}f(x)=1$.

28 Ableiten der Funktionen sin und cos

28.1 Die Ableitungen an der Stelle $x_0=0$

1 Welche Vermutung über die Ableitung der Funktion sin (der Funktion cos) an der Stelle $x_0=0$ legt das Schaubild der Funktion (Fig. 105.1) nahe?



105.1

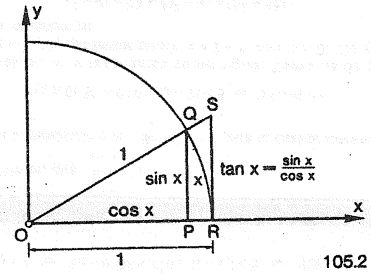
An der Stelle $x_0=0$ hat die Funktion

$$x \mapsto \sin x$$

den Differenzenquotienten

$$m_s = \frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \frac{\sin x}{x}.$$

Um das Verhalten von m_s für $x \to 0$ zu untersuchen, deuten wir $x (x>0)$ und $\sin x$ am Einheitskreis (Fig. 105.2). Ein Flächenvergleich zeigt, daß das Dreieck OPQ kleiner ist als der Kreisausschnitt ORQ und dieser kleiner als Δ ORS; d. h.,



105.2

$$\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos x} \quad | :\tfrac{1}{2}\sin x$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad | \text{Kehrwerte}$$

$$\frac{1}{\cos x} > \frac{\sin x}{x} > \cos x.$$

Dies gilt auch für $x<0$, weil dann die Ungleichung für $-x$ $(-x>0)$ erfüllt ist und $\sin(-x) = -\sin x$ und $\cos(-x) = \cos x$. Damit folgt wegen $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$ und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ für die Ableitung der Sinusfunktion an der Stelle $x_0=0$

$$\boldsymbol{\sin'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

Die Funktion $x \mapsto \cos x$ hat an der Stelle $x_0=0$ den Differenzenquotienten

$$m_s = \frac{\cos x - \cos 0}{x-0} = \frac{\cos x - 1}{x}$$

$$= \frac{(\cos x - 1)(\cos x + 1)}{x(\cos x + 1)} = \frac{\cos^2 x - 1}{x(\cos x + 1)} = \frac{-\sin^2 x}{x(\cos x + 1)} = -\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x + 1}.$$

Für $x \to 0$ geht der erste Faktor gegen -1, der zweite gegen 0. Damit folgt (vgl. S. 87) für die Ableitung der Kosinusfunktion an der Stelle $x_0=0$

$$\boldsymbol{\cos'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.}$$

2 a) Deute die im vorangehenden betrachteten Differenzenquotienten in Fig. 105.2.

b) Bestimme mit Hilfe der obigen Ergebnisse $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$ und $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x}$.

c) Begründe: Für kleine $|x|$-Werte gelten die Näherungen $\sin x \approx x$ und $\tan x \approx x$. Vergleiche 0,1 mit sin 0,1 und mit tan 0,1; ebenso 0,3 mit sin 0,3 und tan 0,3.

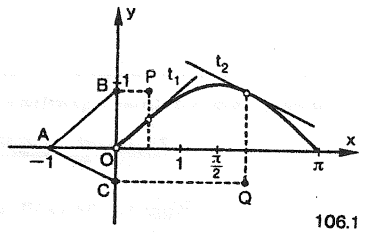
d) Zeichne für $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$, $x \neq 0$, ein Schaubild der Funktion $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.

3 Bestimme a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x}{\sin ax}$.

28.2 Die Ableitung an einer beliebigen Stelle x_0

4 a) Fig. 106.1 zeigt das Schaubild der Funktion $f: x \mapsto \sin x$ für $x \in [0; \pi]$. AB ist parallel zur Tangente t_1, AC ist parallel zur Tangente t_2. Begründe: Die Punkte P und Q liegen auf dem Schaubild von f'.

b) Zeichne ein Schaubild der Funktion $f: x \mapsto \sin x$ für $x \in [0; 2\pi]$. Konstruiere wie in Teilaufgabe a) für $x = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6$ die Punkte des Schaubildes von f'. Vergleiche mit Fig. 105.1. Vermutung?



106.1

Durch graphisches Differenzieren der Sinusfunktion (vgl. Aufg. 4) gewinnt man die Vermutung, daß ihre Ableitungsfunktion die Kosinusfunktion ist. Dies wollen wir durch eine Rechnung nachweisen:

Die Funktion $f: x \mapsto \sin x$ hat an der (beliebigen) Stelle x_0 den Differenzenquotienten

$$m_s = \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h}.$$ Mit Hilfe des Additionstheorems (S. 31) folgt:

$$m_s = \frac{\sin x_0 \cos h + \cos x_0 \sin h - \sin x_0}{h} = \sin x_0 \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x_0 \frac{\sin h}{h}.$$

Aufgrund der Ergebnisse von S. 105 folgt: $\lim\limits_{h\to 0} m_s = \cos x_0$.

Auf gleiche Weise zeigt sich, daß die Funktion $x \mapsto \cos x$ an der Stelle x_0 die Ableitung $-\sin x_0$ hat.

Satz 1: Für $\boldsymbol{f(x)=\sin x}$ ist $\boldsymbol{f'(x)=\cos x}$; für $\boldsymbol{f(x)=\cos x}$ ist $\boldsymbol{f'(x)=-\sin x}$.

Beispiel 1: a) $f(x) = 3\sin x$, $f'(x) = 3\cos x$ b) $f(x) = 4\cos x + 1$, $f'(x) = -4\sin x$ c) $f(x) = \sin x + \cos x$, $f'(x) = \cos x - \sin x$

Auch die Ableitungen von $x \mapsto \sin(kx)$ $(k \in \mathbb{R})$ und $x \mapsto \cos(kx)$ lassen sich auf die angegebene Weise ermitteln. Für $x \mapsto \sin(kx)$ ist

$$m_s = \frac{\sin[k(x_0+h)] - \sin(kx_0)}{h} = k \cdot \frac{\sin[kx_0+kh] - \sin(kx_0)}{kh}$$

Da für $h \to 0$ auch $kh \to 0$ gilt, folgt nach Satz 1: $\lim\limits_{h\to 0} m_s = k \cdot \cos(kx_0)$. Entsprechend schließt man bei der Funktion $x \mapsto \cos(kx)$.

Satz 2: Für $\boldsymbol{f(x)=\sin(kx)}$ ist $\boldsymbol{f'(x)=k\cdot\cos(kx)}$;
für $\boldsymbol{f(x)=\cos(kx)}$ ist $\boldsymbol{f'(x)=-k\cdot\sin(kx)}$.

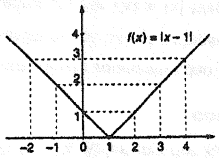
Beispiel 2:

a) $f(x) = \sin(3x)$, $f'(x) = 3\cos(3x)$, $f''(x) = -9\sin(3x)$

b) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x)$, $f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$, $f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

c) $f(x) = \sin(-\frac{1}{2}x) + 3\cos(-x)$, $f'(x) = -\frac{1}{2}\cos(-\frac{1}{2}x) + 3\sin(-x)$, $f''(x) = -\frac{1}{4}\sin(-\frac{1}{2}x) - 3\cos(-x)$

DESARROLLO DE CONTENIDOS



$\lim_{x \to 3} |x - 1| = 2$

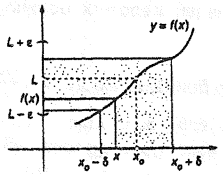
1 LÍMITE DE UNA FUNCIÓN. FUNCIONES CONVERGENTES

Intuitivamente la idea que tenemos de límite de una función en un punto es el número hacia el que *tienden o se aproximan* los valores que toma la función cuando la variable independiente se acerca o se aproxima a ese punto.

Así, la función $f(x) = |x - 1|$ *tiende* a 2 cuando x *tiende* o *se aproxima* a 3. Decimos que esta función tiene por límite 2 cuando x tiende a 3.

La idea de tendencia o aproximación queda recogida mediante el uso de entornos.

Función convergente en x_0



$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$

Una función f tiene por límite L cuando x tiende a x_0 si para todo entorno $E(L, \varepsilon)$ existe un entorno $E(x_0, \delta)$, de modo que para todo x perteneciente al entorno reducido $E^*(x_0, \delta)$ se cumple que $f(x)$ pertenece al entorno $E(L, \varepsilon)$. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall E(L, \varepsilon);\ \exists E(x_0, \delta) \mid \forall x \in E^*(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in E(L, \varepsilon)$$

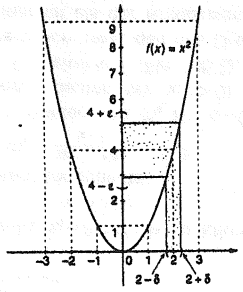
Para que una función tenga límite en un punto de abscisas x_0, o sea, convergente en ese punto, no es necesario que la función esté definida en ese punto.

Por la definición de entorno simétrico y entorno reducido, la convergencia o definición de límite se puede escribir de la siguiente forma:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Actividad desarrollada

1 **Demuestra, usando la definición de límite, que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$.**



Vamos a demostrar que $\lim_{x \to 2} x^2 = 4$, para lo cual probaremos que:

$$\forall \varepsilon > 0;\ \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

Fijamos un ε y razonamos como sigue. Como ha de ser $0 < |x - 2| < \delta$, podemos poner $x = 2 + h$ con $h \neq 0$. De esta forma, obtenemos:

$$|x^2 - 4| = |(2 + h)^2 - 4| = |h^2 + 4h| = |h||h + 4| \leq |h|(|h| + 4) \leq (1 + 4)|h| = 5|h|$$

donde hemos supuesto que $|h| < 1$.

Como ε es fijo, podemos poner: $|x^2 - 4| \leq 5|h| < \varepsilon \Rightarrow |h| < \frac{\varepsilon}{5}$.

Por tanto, fijado un ε, encontramos que existe un $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$ de manera que se verifica la definición de límite.

Hemos probado, entonces, que la función f es convergente en $x_0 = 2$ y $\lim_{x \to x_0} x^2 = 4$.

Función seno

- Función simple:
  $D[\text{sen } x] = \cos x$
- Función compuesta:
  $D[\text{sen } f] = \cos f \cdot f'$

Función coseno

- Función simple:
  $D[\cos x] = -\text{sen } x$
- Función compuesta:
  $D[\cos f] = -\text{sen } f \cdot f'$

Función tangente

- Función simple:
  $D[\text{tg } x] = 1 + \text{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
- Función compuesta:
  $D[\text{tg } f] = (1 + \text{tg}^2 f) \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$

Función cotangente

- Función simple:
  $D[\text{cotg } x] = -1 - \text{cotg}^2 x = \frac{-1}{\text{sen}^2 x}$
- Función compuesta:
  $D[\text{cotg } f] = (-1 - \text{cotg}^2 f) \cdot f' = \frac{-f'}{\text{sen}^2 f}$

■ Derivadas de las funciones circulares

- **Derivada de la función seno**

  La derivada de la función simple *sen x* es *cos x*.

  La derivada de la función compuesta *sen f* es *cos f* por la derivada de la función *f*.

- **Derivada de la función coseno**

  La derivada de la función simple *cos x* es menos *sen x*.

  La derivada de la función compuesta *cos f* es menos el seno de la función *f* por la derivada de la función *f*.

- **Derivada de la función tangente**

  La derivada de la función simple *tg x* es igual a uno más el cuadrado de la tangente.

  La derivada de la función compuesta *tg f* es igual a uno más el cuadrado de la tangente de la función y, todo ello, multiplicado por la derivada de la función *f*.

- **Derivada de la función cotangente**

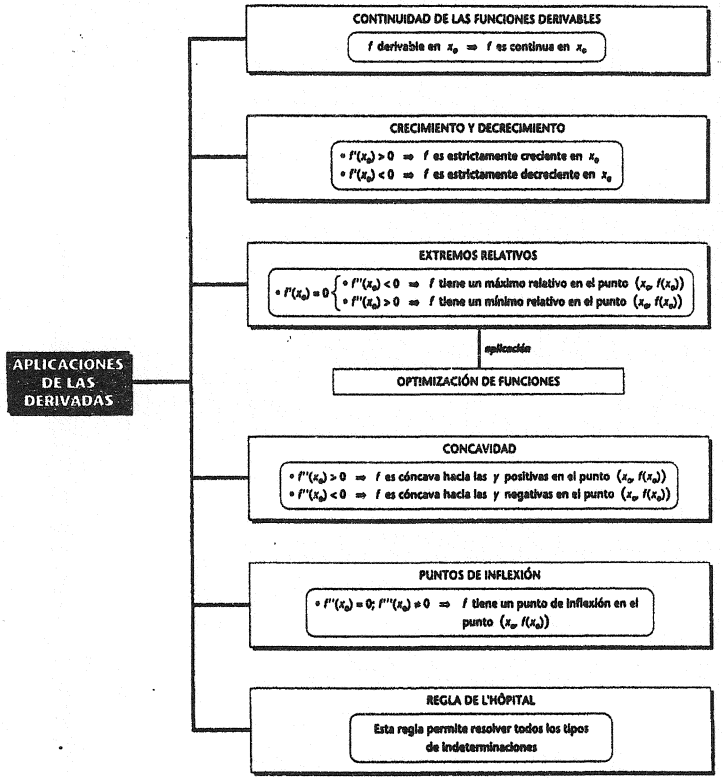
  La derivada de la función simple *cotg x* es igual a menos uno menos el cuadrado de la cotangente.

  La derivada de la función compuesta *cotg f* es igual a menos uno menos el cuadrado de la cotangente de la función y, todo ello, multiplicado por la derivada de la función *f*.

Actividad desarrollada

1 **Calcula las derivadas que se indican en los siguientes ejercicios:**

- $D[\text{sen } 3x] = \cos 3x \cdot 3 = 3 \cos 3x$
- $D[3 \text{ sen } x] = 3 \cdot D[\text{sen } x] = 3 \cos x$
- $D[\text{sen } x^3] = \cos x^3 \cdot 3x^2 = 3x^2 \cos x^3$
- $D[\text{sen}^3 x] = D[(\text{sen } x)^3] = 3 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x$
- $D[\text{sen } 2x + \cos 5x^2] = 2 \cos 2x - 10x \text{ sen } 5x^2$
- $D[3 + \text{tg}^5 x^3] = D[(\text{tg } x^3)^5] = 5 \text{ tg}^4 x^3 (1 + \text{tg}^2 x^3) \cdot 3x^2 = 15x^2 \text{ tg}^4 x^3 (1 + \text{tg}^2 x^3)$
- $D[\sec f] = D\left[\frac{1}{\cos f}\right] = D[\cos^{-1} f] = -1 \cdot \cos^{-2} f \cdot (-\text{sen } f) \cdot f' = \frac{\text{sen } f \cdot f'}{\cos^2 f}$
- $D[\text{cosec } f] = D\left[\frac{1}{\text{sen } f}\right] = D[\text{sen}^{-1} f] = -1 \cdot \text{sen}^{-2} f \cdot \cos f \cdot f' = \frac{-\cos f \cdot f'}{\text{sen}^2 f}$
- $D[\text{cotg } \sqrt{3x^2 + 2}] = \frac{-D[\sqrt{3x^2 + 2}]}{\text{sen}^2 \sqrt{3x^2 + 2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{3x^2 + 2} \cdot \text{sen}^2 \sqrt{3x^2 + 2}}$
- $D[\text{sen } (\cos x^2)] = \cos (\cos x^2) \cdot D[\cos x^2] = \cos (\cos x^2) \cdot (-\text{sen } x^2) \cdot 2x = -2x \text{ sen } x^2 \cdot \cos (\cos x^2)$



ACTIVIDADES INICIALES

1. **Estudia la continuidad y derivabilidad de las funciones $f(x) = x \cdot |x|$ y $g(x) = \sqrt[3]{x^2}$.**
2. **Demuestra que la función $f(x) = 3^x$ es estrictamente creciente.**
3. **Expresa, en función de la longitud de la base, el área de un rectángulo cuyo perímetro vale 20 m. ¿Para qué valor de la base el área es máxima?**

- **Caso $\frac{\infty}{\infty}$**

La regla de L'Hôpital y la regla de L'Hôpital generalizada son también aplicables cuando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

- **Caso $0 \cdot \infty$**

Este caso se resuelve por la regla de L'Hôpital una vez transformado el límite correspondiente en uno del tipo $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] \ (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$$

Actividad desarrollada

1 Calcula los límites que figuran a continuación:

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$
- $\lim_{x \to 0} \frac{2x^3}{x - \operatorname{sen} x} \left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital generalizado $= \lim_{x \to 0} \frac{6x^2}{1 - \cos x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{12x}{\operatorname{sen} x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to 0} \frac{12}{\cos x} = 12$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 2} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 - 1}{e^{2x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital generalizado $= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{2e^{2x}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{4e^{2x}} = 0$
- $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln x \ (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{tg} x \ (0 \cdot \infty) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^{-2}} =$

$$= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{\cos^2 x} \left(\frac{0}{0}\right)$$ L'Hôpital generalizado $= \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{-2\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{-2 \operatorname{sen} x \cos x} \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{1}{-\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x} = -1$

- $\lim_{x \to 0} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+4} - 2} \left(\frac{0}{0}\right)$ L'Hôpital $= \lim_{x \to 0} \frac{2x - 1}{\frac{1}{2\sqrt{x+4}}} = \frac{-1}{\frac{1}{4}} = -4$

2

Exercices

Echange d'exercices avec l'Angleterre et l'Allemagne

I – INTRODUCTION

Nous avons souhaité soumettre à des élèves anglais et allemands des exercices extraits de manuels français, correspondant à différents niveaux allant de la quatrième à la terminale, et concernant différents thèmes : géométrie, proportionnalité, analyse…

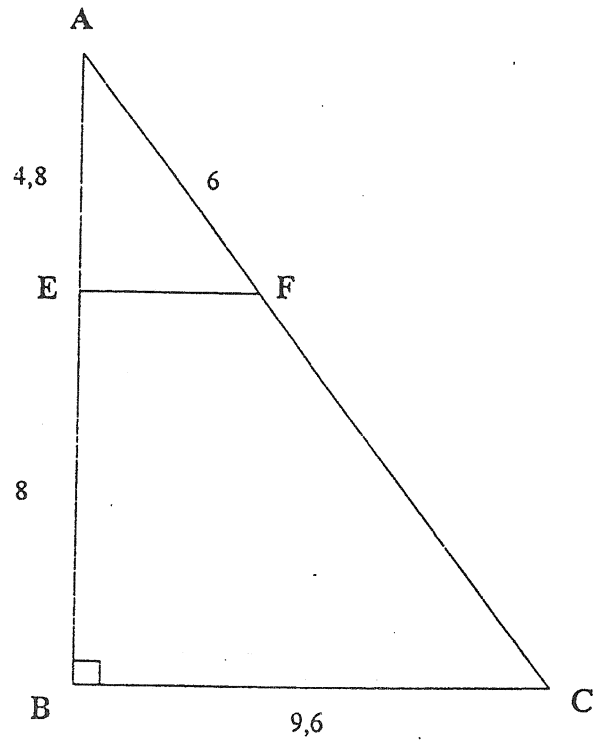
Nous donnons en annexe le texte en français des neufs exercices proposés ainsi que les textes anglais et allemands correspondants (sur ces textes on verra également des exemples de réponses d'élèves).

Nous demandions aux enseignants auxquels nous avons fait parvenir la liasse d'exercices de choisir dans celle-ci les exercices qui leur semblaient abordables pour leurs élèves, de soumettre ceux-ci en classe et de nous faire parvenir les copies, mais également de commenter tous les énoncés, et d'évaluer la réussite de leurs élèves.

Dans l'état actuel des documents qui nous sont revenus, seul l'exercice 2 a été proposé en Allemagne, dans une classe de neuvième. En Angleterre, tous les exercices ont été soumis dans une classe de dixième et dans une classe de onzième ; mais les trois derniers exercices, portant sur la géométrie, n'ont pratiquement pas été abordés par les élèves. En vue d'effectuer des comparaisons, nous avons donc proposé les exercices 1 à 6 à des élèves français. L'étude des productions des élèves nous a conduit à retenir pour une comparaison approfondie uniquement les exercices 1 et 2 de la liasse.

Cette comparaison ne nous conduira pas à tirer des conclusions générales sur les comportements respectifs des élèves français, allemands et anglais ; les renseignements que nous ont fournis les enseignants ne peuvent en particulier pas nous permettre de connaître suffisamment le contexte dans lequel s'est déroulé le test dans leurs classes. Nous ignorons en particulier si ce type d'exercice avait déjà été rencontré, combien de temps auparavant, etc. Nous nous contenterons donc ci-dessous de rapporter certains faits qui nous ont semblés marquants dans l'analyse des copies.

II - EXERCICE DE GEOMETRIE



Soit un triangle ABC rectangle en B.
E est sur le segment [AB] et F est sur le segment [AC].
AE = 4,8 cm; AF = 6 cm; EB = 8cm ; BC = 9,6 cm.
La droite (EF) est-elle parallèle à la droite (BC) ?
Calculer la mesure du segment EF.

Cet exercice de géométrie provient d'un livre de troisième. Nous en avons modifié l'énoncé ; en effet celui-ci ne comportait que la question portant sur le calcul de la distance EF. Or sur la figure qui accompagne l'énoncé, les droites (EF) et (BC) semblent parallèles (c'est d'ailleurs effectivement le cas, puisque la figure respecte les vraies dimensions du triangle ; la question se pose de donner plutôt une figure fausse). Ceci peut donc inciter les élèves à utiliser directement le théorème de Thalès pour calculer les longueurs, sans justifier le parallélisme. Nous avons donc ajouté une question intermédiaire, demandant explicitement de démontrer le parallélisme.

La résolution de cet exercice exige dans un premier temps d'effectuer le calcul de la distance AC, en utilisant le théorème de Pythagore ; le recours au théorème peut être mentionné explicitement, ou rester implicite. La démonstration de : (EF) est parallèle à (BC) peut se faire en employant la réciproque du théorème de Thalès, ou les triangles semblables.

Puis, une fois que ce parallélisme est démontré, le calcul de la distance EF peut être fait en appliquant le théorème de Thalès, ou celui de Pythagore, ou des triangles semblables.

Nous donnons en annexe un tableau récapitulant les résultats, et des exemples de réponses d'élèves. L'examen comparatif des copies nous conduit aux constatations suivantes :

- Méthodes employées : on trouve fréquemment mention de triangles semblables (similar triangles) dans les copies anglaises (les français testés ne connaissaient pas cette notion) ; les français utilisent Thalès pour montrer le parallélisme, mais également pour calculer EF (ce qui est naturel, puisqu'il s'agit de poursuivre une démarche engagée avec Thalès).

- Rédaction : il y a un effort de rédaction plus net dans les copies françaises. Il est très rare de trouver dans les copies anglaises des expressions du type « d'après le théorème de Thalès... ». Certaines copies anglaises ne comportent d'ailleurs aucun mot complet, les élèves se limitent à des abréviations.

- Erreurs de raisonnement : c'est en revanche dans les copies françaises que l'on peut noter des erreurs de raisonnement sur la première partie de l'exercice. Malgré la modification apportée à l'énoncé, certains élèves utilisent tout d'abord Thalès pour calculer la distance EF, et emploient cette distance pour montrer ensuite le parallélisme sans se rendre compte que celui-ci faisait partie des hypothèses nécessaires pour appliquer Thalès.

III - EXERCICE DE PROPORTIONNALITE

Un avion a décollé de Rennes à 7 h, a volé en ligne droite jusqu'à la ville de X, a fait demi-tour immédiatement et a atterri à Rennes à 10 h 30 min.
A l'aller, sa vitesse était égale à 960 km/h, au retour à 720 km/h.

Calculer la durée du trajet aller et celle du trajet retour.

Cet exercice, qui met en jeu une proportionnalité inverse, peut être proposé dès la classe de quatrième. Toutefois il peut poser problème à des élèves beaucoup plus avancés, comme le confirment les tests. Le fait que la proportionnalité inverse soit difficile pour les élèves est bien connu ; de plus, les vitesses choisies : 960 et 720 km/h ne laissent pas

apparaître de rapport de proportionnalité évident (l'exercice aurait sans doute été mieux réussi avec 400 et 300 km/h).

Différentes méthodes sont envisageables pour résoudre cet exercice :

On pose dans tout l'exposé : d la distance de Rennes à la ville X.
t_1 la durée du trajet aller et t_2 la durée du trajet retour.

Commençons par les six méthodes pouvant conduire à la bonne solution :

M1) Méthode graphique.
M2) Les durées sont inversement proportionnelles aux vitesses.

Aller	Retour	Total
t_1	t_2	3,5
720	960	1680

A l'aide de produits en croix on trouve : $t_1 = 1{,}5$ h et $t_2 = 2$ h

M3) Résolution d'un système à deux inconnues

$t_1 + t_2 = 3{,}5$
$960\ t_1 - 720\ t_2 = 0$
$t_1 = 1{,}5$ h et $t_2 = 2$h

M4) Résolution d'une équation à une inconnue

Sachant que $t = d / v$ et que la somme des durées est égale à 3,5 :

$$\frac{d}{960} + \frac{d}{720} = 3{,}5$$

Je calcule d = 1440 km et j'en déduis $t_1 = 1{,}5$ h et $t_2 = 2$ h

M5) L'élève « devine » la solution et vérifie.

M6) L'élève présente la solution sans explication ni vérification.

Suivent deux raisonnements erronés.

M7) Les durées sont proportionnelles aux vitesses.

Aller	Retour	Total
t_1	t_2	3,5
720	960	1680

A l'aide de produits en croix ont trouve : $t_1 = 2$h et $t_2 = 1{,}5$ h.

M8) La vitesse moyenne est la moyenne des vitesses.

$V_m = (960 + 840) : 2 = 840$ km/h
$d = (3{,}5 \times 840) : 2 = 1470$ km

$t_1 = 1470 : 840 = 1{,}53$ h et $t_1 = 1470 : 720 = 2{,}04$ h

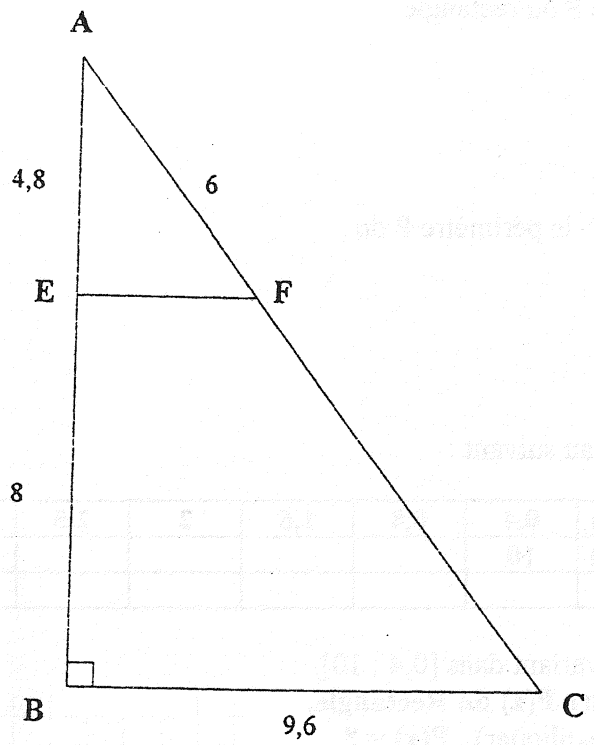
---

Nous donnons dans les tableaux figurant en annexe les méthodes employées dans une classe de neuvième allemande ; une classe de onzième anglaise ; une classe de quatrième et une classe de seconde françaises.

L'examen des copies montre une réelle différence dans les méthodes employées selon les pays. Les élèves anglais se dirigent vers les systèmes ; les élèves allemands emploient la proportionnalité, souvent sans aucune justification de leur résultat. On trouve des démarches plus variées chez les français, qui ne semblent pas (au collège comme au lycée) avoir de méthode spécifique pour résoudre un tel problème. Les tentatives d'explication de la méthode adoptée, et de justification, sont nettement plus nombreuses dans les copies des élèves français. Malgré cette variété dans les attitudes adoptées, le taux d'échec est semblable d'un groupe à l'autre : environ la moitié des élèves interrogés.

3
Annexes

EXERCICES EN FRANÇAIS



Soit un triangle ABC rectangle en B.
E est sur le segment [AB] et F est sur le segment [AC].
AE = 4,8 cm; AF = 6 cm; EB = 8cm ; BC = 9,6 cm.
La droite (EF) est-elle parallèle à la droite (BC) ?
Calculer la mesure du segment EF.

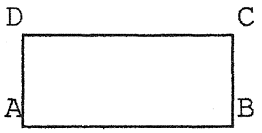
Un avion a décollé de Rennes à 7 h, a volé en ligne droite jusqu'à la ville de X, a fait demi-tour immédiatement et a atterri à Rennes à 10 h 30 min.
A l'aller, sa vitesse était égale à 960 km/h, au retour à 720 km/h.

Calculer la durée du trajet aller et celle du trajet retour.

Exercice n ° 3...

Nom .....Classe :.....

On s'intéresse à tous les rectangles ABCD dont l'aire est égale à 4 cm². Le but du problème est d'étudier les variations du périmètre P, de ces rectangles, en fonction de la mesure d'un des côtés.



1) **ABCD est un rectangle d' aire 4 cm²**

a) Si AB = 2,5 cm calculer AD.

Calculer le périmètre P du rectangle.

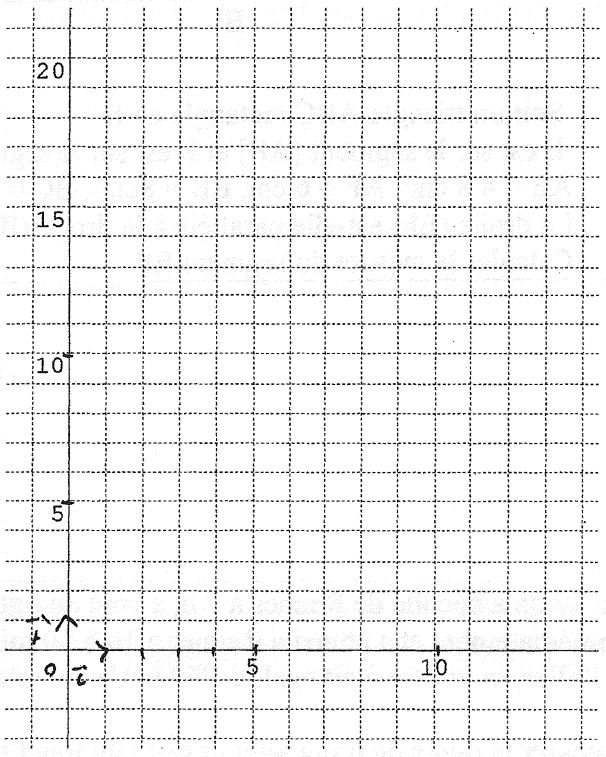
(expliquer)

b)Si AB = 3 , calculer le périmètre P du rectangle obtenu ;

2) compléter le tableau suivant :

Mesure de AB (en cm)	**0,4**	**0,8**	**1,6**	**2**	**2,5**	**3**	**8**	**10**
Mesure de AD (en cm)	**10**							
Périmètre P (en cm)								

3) Si **AB = x** avec x variant dans [0,4 ; 10], **exprimer le périmètre P(x) du Rectangle, en fonction de x.** (expliquer) **P(x) = ?**



4) Tracer ci-contre (C) la courbe représentative de la fonction P.

5) **Démontrer ,par le calcul**, que la fonction P a un minimum et préciser la valeur de x correspondante.

2d Exercice rectangle d'aire donnée 2 français.

Exercice n ° ...4..

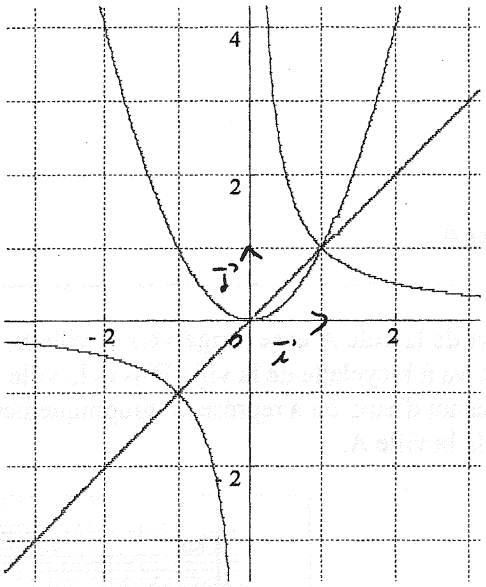
Nom .....Classe :.....

On a tracé dans le repère ci-contre les courbes représentatives des trois fonctions suivantes :

f définie pour tout réel x par f(x) = x,

g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2$,

h définie pour tout réel x non nul par $h(x) = \frac{1}{x}$.



1) Répondre par vrai ou par faux aux affirmations suivantes , en utilisant les représentations graphiques. Vrai : V Faux : F

Affirmations	Vrai ou faux.
x étant réel, si $x > 2$ alors $x^2 > 4$.	
x étant réel, si $x < -1$ alors $x < \frac{1}{x}$	
x étant réel, si $-1 < x < 2$ alors $1 < x^2 < 4$.	
x étant réel, si $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$ alors $x < -2$.	

2) Répondre par vrai ou par faux à l'affirmation suivante, en expliquant la réponse .

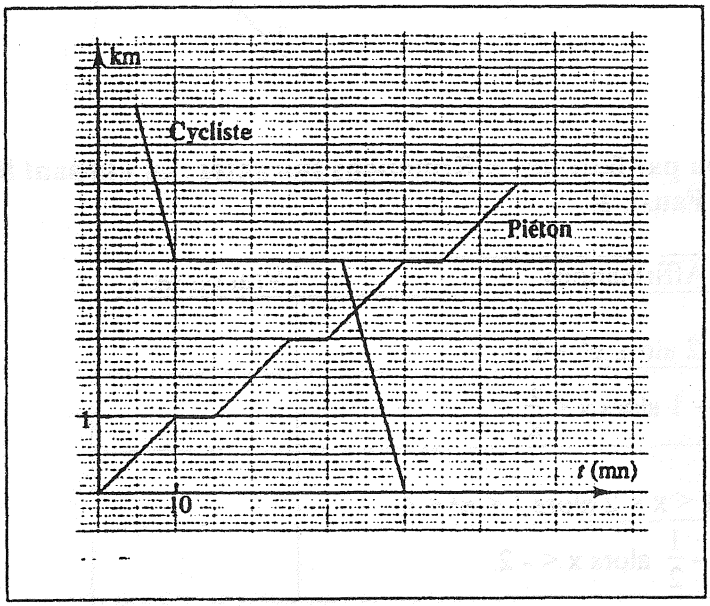
x étant un nombre réel, si $x < 2$ alors $x^2 < 4$.

3) Répondre à la question suivante en justifiant à l'aide d'un calcul.
Quel est l'ensemble des nombres réels x tels que : « **x est inférieur ou égal à son carré.** » ?

Nom :
Classe :

Exercice 5

Jean part de la ville A et se dirige vers la ville B.
Frédéric va à bicyclette de la ville B vers la ville A.
Pour chacun d'eux, on a représenté graphiquement la distance(en km) qui, à l'instant t (en min) le sépare de la ville A.



1) Compléter l'énoncé suivant :
Deux villes A et B sont distantes de .....km. Le piéton part de la ville A à 10 heures et marche vers B à la vitesse de .....$km.h^{-1}$ en se reposant ..... minutes tous les .....km.
Le cycliste part de B à .....(heures et minutes) et roule en direction de A à la vitesse de .....$km.h^{-1}$. Victime d'une crevaison à .....(heures et minutes), ...minutes lui sont nécessaires pour réparer. Il termine son parcours à la vitesse de .....$km.h^{-1}$.

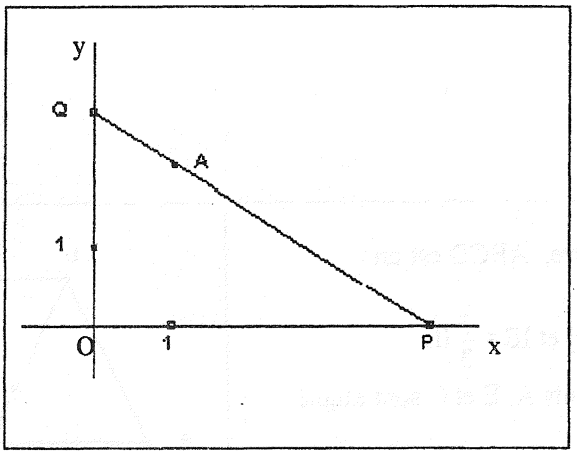
2) A quelle heure Jean et Frédéric se sont-ils rencontrés ?

Nom :
Classe :
Exercice 6 :

Le périmètre d'un rectangle est compris entre 84 m et 90 m.
Sa largeur est comprise entre 5m et 6m.
1) Donner un encadrement :
a) de sa longueur. b) de son aire. c) de sa diagonale.
2) Dans chaque cas, donner une valeur approchée et sa précision.

Exercice 7

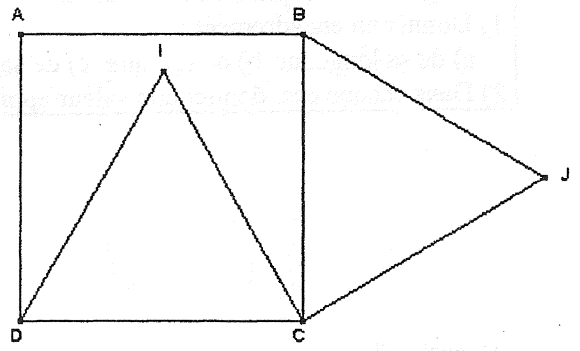
On considère le point A(1;2).
A chaque point P de l'axe (Ox) d'abscisse x (x>1), on associe le point Q de l'axe (Oy) de façon que les points A, P et Q soient alignés.



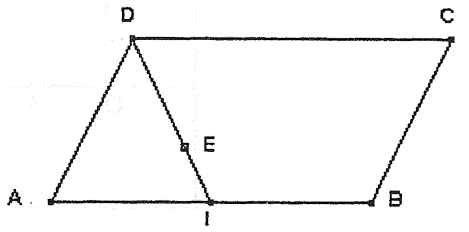
On désigne par S(x), l'aire du triangle OPQ.
1) Calculer OQ et montrer que $S(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
2) Dresser un tableau de valeurs de S jusqu'à conjecturer un minimum de S sur l'intervalle $]1; +\infty[$. Préciser en quel point il est atteint.
3) Soit m le minimum conjecturé. Démontrer que, pour $x > 1$, $\frac{x^2}{x-1} \geq m$.

Nom :
Classe :

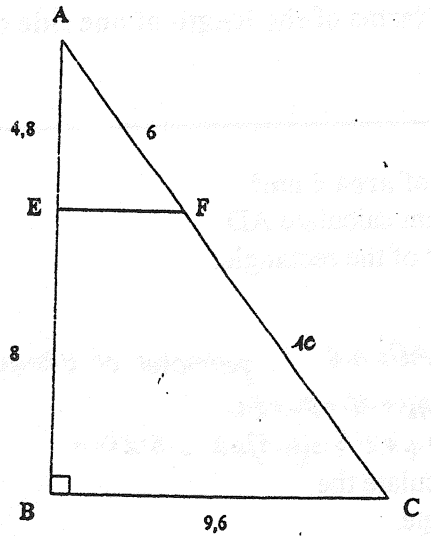
Exercice 8

Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré et les triangles BJC et CID sont équilatéraux. Démontrer que les points A, I et J sont alignés.	

Exercice 9

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [AB] et $IE = \frac{1}{3} ID$. Démonter que les points A, E et C sont alignés.	

Exercise n° 1



ABC is a right-angled triangle : ABC = 90°
AE = 4.8 cm; AF = 6 cm; EB = 8 cm; BC = 9.6 cm.
Is the straight line (EF) parallel to the straight line (BC) ?
Find the value of EF .

Write your answers on this paper. Give reasons for your answers.

We know that ΔABC is a right angle triangle $\therefore$ to find the length of the side AC, we can use Pythagora's theorem:

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = 12.8^2 + 9.6^2$

$AC^2 = 256$

$AC = \sqrt{256}$

$AC = 16$ $\therefore$ FC = 16 - 6 = 10 cm

If $\frac{12.8}{6.8} = \frac{16}{c}$ then ΔABC is similar to ΔAEF

$\therefore 2.7 : 2.7$ $\therefore \Delta ABC$ is similar to ΔAEF is a right angle Δ at E.

So $EF // BC$.

From this we can find the length EF using Pythagoras's theorem:

$AF^2 = EF^2 + AE^2$

$36 = 23.04 + EF^2$

$12.96 = EF^2$

$EF = \sqrt{12.96}$ $\quad EF = 3.6$ cm

Exercise n° 2

A plane took off from Rennes at 7 O'clock AM and flew in a straight line up to an unknown city named " X ". It didn't land and flew back straight away and landed in Rennes at half past ten.

On the way there its speed was equal to 960 km / h, on the way back to 720 km / h..

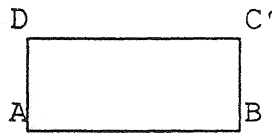
Calculate the time it took on the way there and on the way back.

Write your answer on this paper.

Exercise n ° 3.

Name :.....Class : :.....

Every rectangle ABCD has an area equal to 4 cm². The objective of the problem is to study the variation of the perimeter P in terms of the length of one side of ABCD denoted by x.



1) **ABCD is a rectangle of area 4 cm²**

a) Given that AB = 2.5 cm calculate AD.

Calculate the perimeter P of the rectangle.

(explain)

$4 = 2.5 \times AD$ $\quad AD = 1.6$ ∴ perimeter of triangle is

$\frac{4}{2.5} = AD$ $\quad P = AB + AD + DC + BC$

$P = 1.6 + 2.5 = (4.1) \times 2 = 8.2$ cm

b)Given that AB = 3, calculate the perimeter P of the rectangle.

$4 = 3 \times AD$ ∴ $P = AB + AD + DC + BC$

$\frac{4}{3} = 1.33$ $\quad P = 3 + 1.3) \times 2$

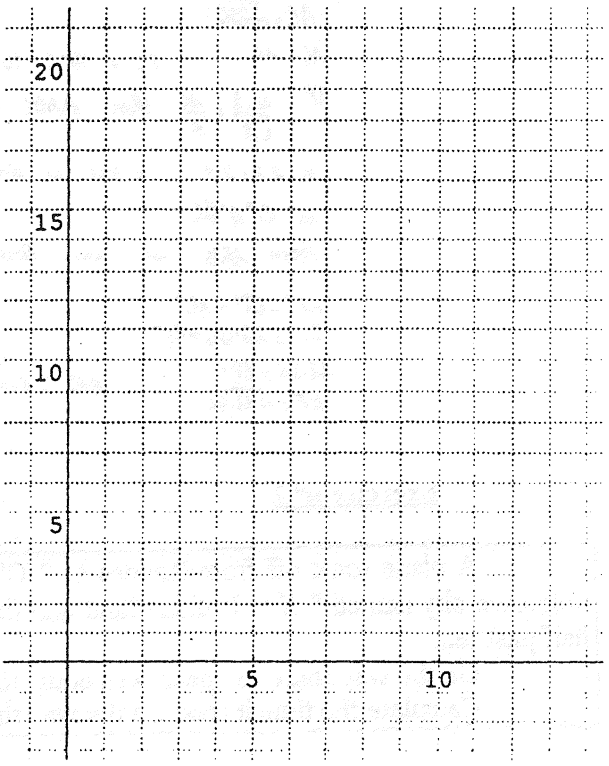
$P = 8.6$ cm

2) Full the following table.

Length of AB (cm)	0,4	0,8	1,6	2	2,5	3	8	10
Length of AD (cm)	10	5	2·5	2	1·6	1·3	0·5	0·4
Perimeter P (cm)	20·8	11·6	8·2	8	8·2	8·7	17	20·8

3) Given that **AB = x** varying from 0.4 to 10.

Express the perimeter P(x) of the rectangle, in terms of x. (explain).



4) Sketch the graph y = P(x)..

5) **Solving by calculation.**

Show that there's a minimum point and find the corresponding value of x.

Exercise n ° ..4..

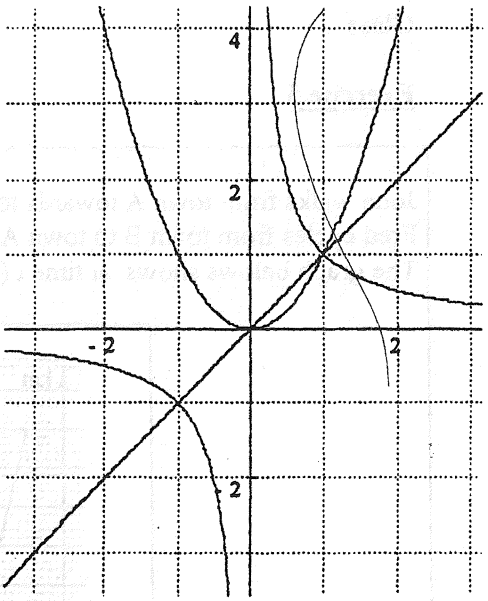
Name : .....Class :.....

Three different curves have been sketched in the same system of axis :

$y = x$,

$y = x^2$,

$y = \frac{1}{x}$.



1) Answer Wrong or True to the following statements (using the curves). Wrong W , True , T.

Affirmations	W or T.
x is a real number, if $x > 2$ then $x^2 > 4$.	
x is a real number, if $x < -1$ then $x < \frac{1}{x}$	
x is a real number, if $-1 < x < 2$ then $1 < x^2 < 4$.	
x is a real number, if $\frac{1}{x} > -\frac{1}{2}$ then $x < -2$.	

2) Answer Wrong or True and justify your answer.

x is a real number, if $x < 2$ then $x^2 < 4$.

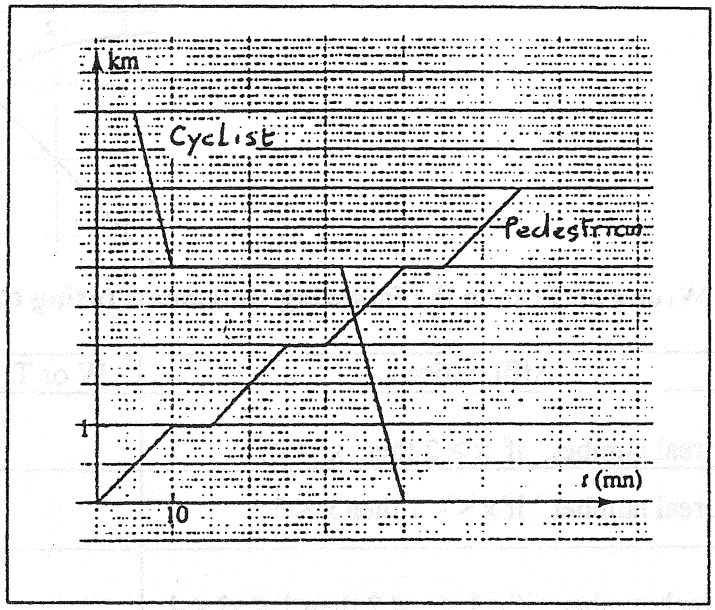
3) Solving by calculation.

Find the set of x which are smaller than their square.
(Justify your answer).

Name :
Class :

Exercise 5

John walks from town A towards town B.
Fred cycles from town B to town A.
The graph belows shows, at time t (in minutes), how far they are from town A (in kms).



1) Complete the following sentences :
Two towns A and B are .....5.....kms apart. The pedestrian leaves town A at 10 o'clock and walks to B at the speed of .....6.....km.h^{-1}. He has a .....5..... minutes rest every.....1.....kms.

The cyclist leaves B at ..10:05.....(hours and minutes) and rides towards A at the speed of .....24.....km.h^{-1}. Because of a puncture at .....10:10.....(hours and minutes), he needs .....12.....minutes to repair it. Then, he completes his ride at the speed of .....14.....km.h^{-1}.

2) At what time did John and Fred pass each other ? 10:34

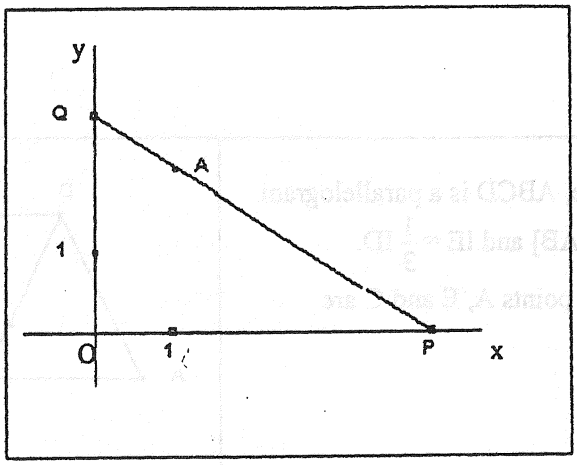
Name :
Class :
Exercise 6 :

The perimeter of a rectangle is between 84m and 90 m.
Its width is between 5m and 6m.
1) Give a range
a) of its length. b) of its area. c) of its diagonal.
2) In each case, give an approximate value with its precision.

1) a.

Name :
class :
Exercise 7

Let us consider the point A(1;2).
For each point P of the axis (Ox) with the abscisse x (x>1), let us associate the point Q of the axis (Oy) so that the points A, P and Q are collinear.



Let us consider S(x), the area of the triangle OPQ.

1) Calculate OQ and prove that $S(x) = \frac{x^2}{x-1}$.

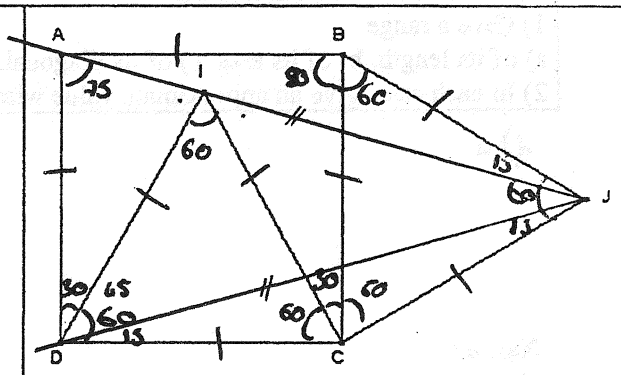
2) Give a table of values of S so that to estimate the minimum of S on the interval $]1; +\infty[$.
Specify at what point it is obtained.

3) Call m the estimated minimum. Demonstrate that for $x > 1$, $\frac{x^2}{x-1} \geq m$.

Name :
Class :

Exercise 8

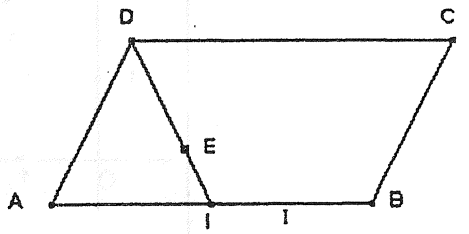
In the opposite figure, ABCD is a square and the triangles BJC and CID are equilateral.
Demonstrate that the points A, I and J are collinear.



Name :
Class :

Exercise 9

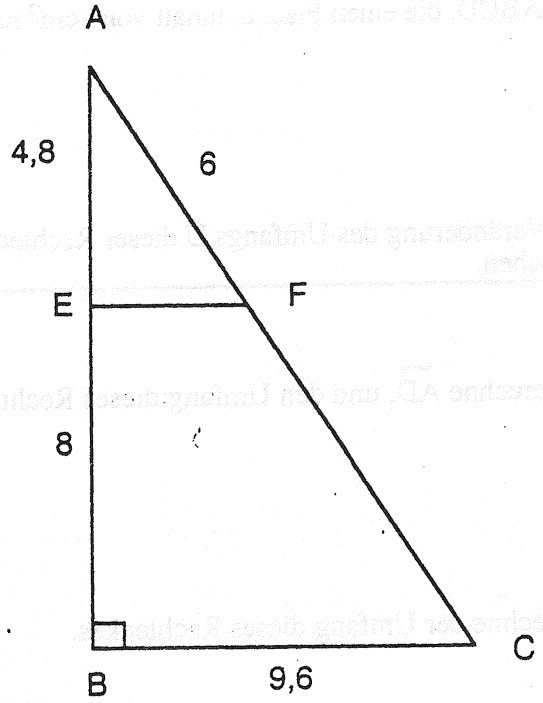
In the opposite figure, ABCD is a parallelogram.
I is the midpoint of [AB] and $IE = \frac{1}{3} ID$.
Demonstrate that the points A, E and C are collinear.



Name :
Klasse :

Übung n°1

Das Dreieck ABC hat einen rechten Winkel bei B.



$\overline{AE}$= 4,8 cm ; $\overline{AF}$= 6 cm ; $\overline{EB}$= 8 cm ; $\overline{BC}$= 9,6 cm.
Sind die Geraden g_{EF} und g_{BC} zueinander parallel ?

Berechne $\overline{EF}$.

Gebe eine begründete Antwort.

Name :
Klasse :

Übung n°2

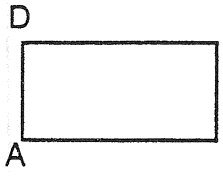
Ein Flugzeug fliegt von Rennes zur Stadt X, und sofort nach Rennes zurück.
Abflug von Rennes um 7 Uhr, Anflug um 10.30 Uhr.
Während des Hinfluges fliegt es mit einer Geschwindigkeit von 960km/h, während des Rückfluges fliegt es mit einer Geschwindigkeit von 720km/h.
Berechne die Dauer der Hin-und Rückreise.

Schreibe deine Antwort auf.

Name :
Klasse :

Übung n°3

Thema der Aufgabe :
Alle möglichen Rechtecke ABCD, die einen Flächeninhalt von $4cm^2$ haben.



Das Ziel besteht darin, die Veränderung des Umfangs U dieser Rechtecke, je nach der Länge x einer der Seiten, zu untersuchen.

I. 1) a) Sei $\overline{AB}$= 4,8 cm. Berechne $\overline{AD}$, und den Umfang dieses Rechteckes.
(Erkläre)

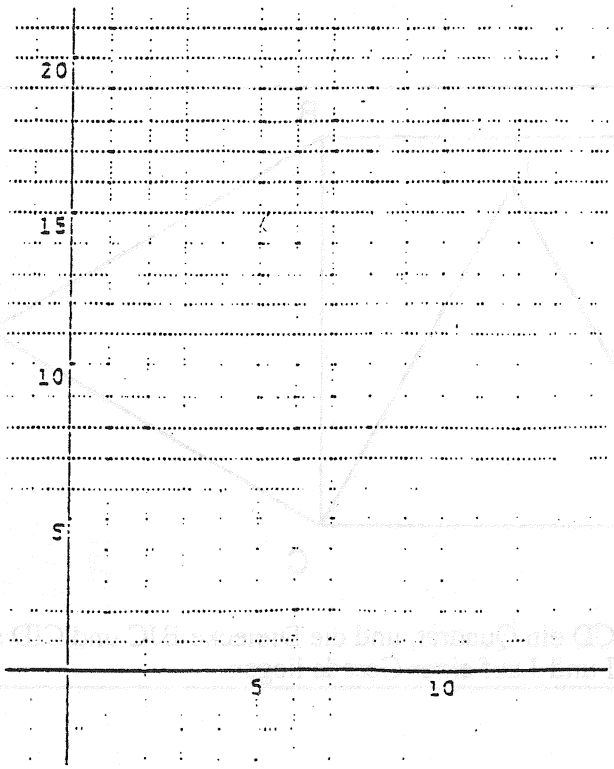
b) Sei $\overline{AB}$= 3 cm. Berechne der Umfang dieses Rechteckes.

2) Vervollständige die folgende Wertetabelle.

$\overline{AB}$(cm)	0,4	0,8	1,6	2	2,5	3	8	10
$\overline{AD}$(cm)	10							
Umfang U (cm)								

3) Betrachte die Länge $\overline{AB}$ des Rechteckes ($\overline{AB}$=x) für beliebige x-Werte zwischen 0,4 und 10.
Gib den Umfang U in Abhängigkeit von x an (Erkläre).
Bestimme die Funktionvorschrift U(x). U(x) = ?

4) Zeichne den Graphen dieser Funktion.



5) Beweise durch Berechnung, dass diese Funktion ein Minimum hat.
Bestimme U für diesen Wert.

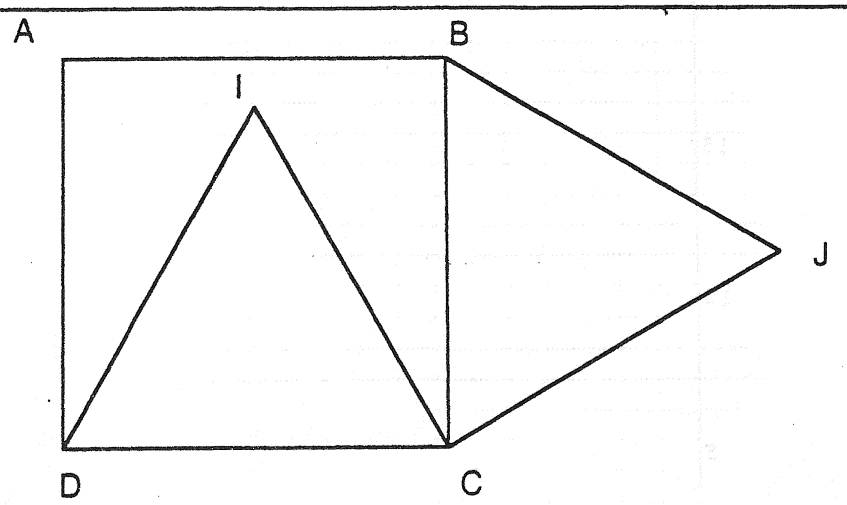
Name :
Klasse :

Übung n°4

Der Umfang eines Rechteckes liegt zwischen 84m und 90m.
Die Breite des Rechteckes liegt zwischen 5m und 6m.
1) Schätze :
a) die Länge,
b) den Flächeninhalt,
c) die Länge der Diagonale des Rechteckes.
2) Gib für jeden Fall einen approximierten Wert und den Approximationsfaktor an.

Name :
Klasse :

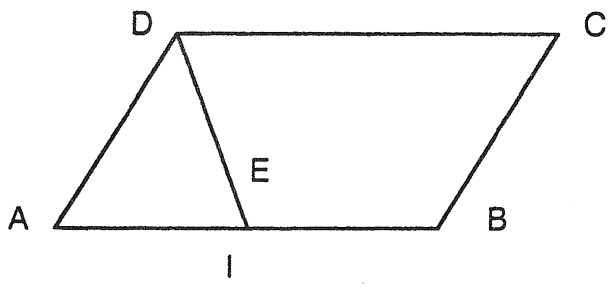
Übung n°5



In der obigen Figur ist ABCD ein Quadrat, und die Dreiecke BJC und CID sind gleichseitig.
Zeige, dass die Punkte A, I und J auf einer Gerade liegen.

Name :
Klasse :

Übung n°6



In der obigen Figur ist ABCD ein Parallelogramm.

I ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ und $\overline{IE} = \frac{1}{3}\overline{ID}$.

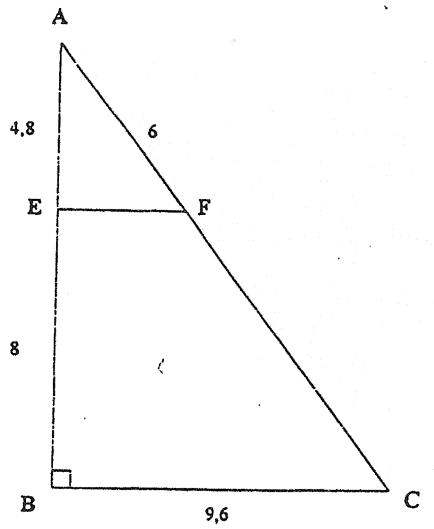
Zeige, dass die Punkte A, E und C auf einer Gerade liegen.

EXEMPLES

DE

PRODUCTIONS D'ELEVES

Exercise n° 1



ABC is a right-angled triangle : ABC = 90°
AE = 4.8 cm; AF = 6 cm; EB = 8 cm; BC = 9.6 cm.
Is the straight line (EF) parallel to the straight line (BC) ?
Find the value of EF .

Write your answers on this paper. Give reasons for your answers.

② D'après le théorème de Thalès du triangle rectangle ABC :

$\frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AF}{AC}$

$\frac{EF}{9,6} = \frac{4,8}{12,8}$ $\quad EF \times 12,8 = 4,8 \times 9,6$

$EF = \frac{4,8 \times 9,6}{12,8} = 3,6$

$EF = 3,6$ cm.

① $\cos \widehat{EAF} = \frac{EA}{AF} = \frac{4,8}{6} = 0,8$ $\quad \sin \widehat{AFE} = \frac{AE}{AF} = \frac{4,8}{6} = 0,8$

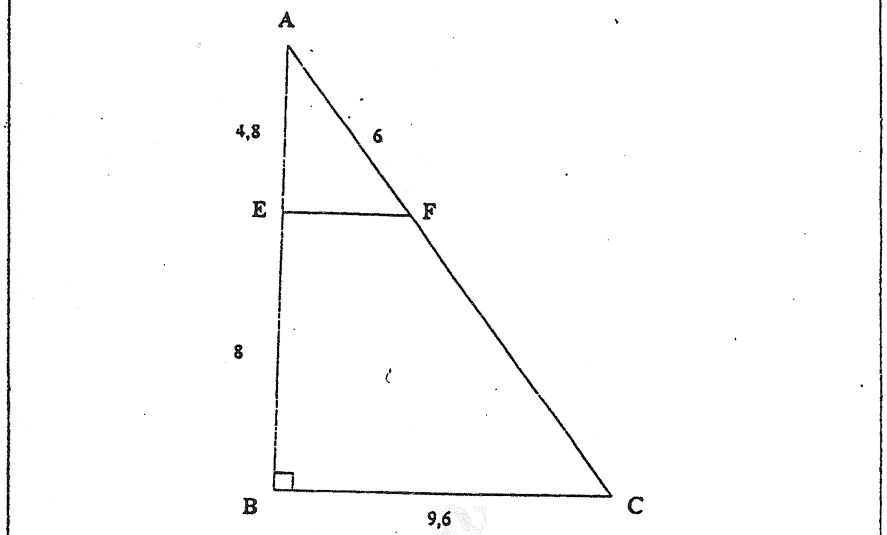
$\widehat{EAF} = 36,86°$ $\quad \widehat{EFA} = 53,13°$.

$\widehat{AEF} = 180 - [36,86 + 53,13]$

$\widehat{AEF} = 90°$

Deux droites perpendiculaires à la même droite sont parallèles (EF)//(BC)

Exercise n° 1



ABC is a right-angled triangle : ABC = 90°
AE = 4.8 cm; AF = 6 cm; EB = 8 cm; BC = 9.6 cm.
Is the straight line (EF) parallel to the straight line (BC) ?
Find the value of EF .

Write your answers on this paper. Give reasons for your answers.

Théorème de Thalès

$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{AF}{AC}$

$\frac{4,8}{12,8} = \frac{EF}{9,6}$ $\quad \frac{4,8 \times 9,6}{12,8} = 3,6$

$EF = 3,6$

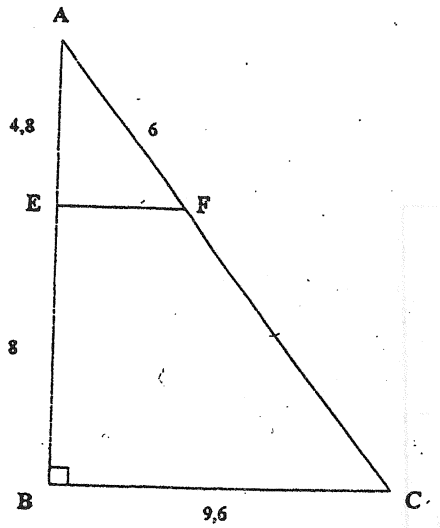
si EF est parallèle à BC alors

$\frac{AE}{AB} = \frac{EF}{BC}$ $\quad \frac{4,8}{12,8} = 0,375$

$\frac{3,6}{9,6} = 0,375$

EF et BC sont parallèle

Exercise n° 1



ABC is a right-angled triangle : ABC = 90°
AE = 4.8 cm; AF = 6 cm; EB = 8 cm; BC = 9.6 cm.
Is the straight line (EF) parallel to the straight line (BC) ?
Find the value of EF .

Write your answers on this paper. Give reasons for your answers.

$AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 = (8+4.8)^2 + 9.6^2$

$AC^2 = \sqrt{256}$

$AC = 16$

$\frac{AF}{AC} = \frac{6}{16} = 0.375$

$\frac{AE}{AD} = \frac{4.8}{12.8} = 0.375$

$\therefore$ ΔABC is similar to ΔAEF.

$\therefore$ $\angle AEF = \angle ABC = 90°$

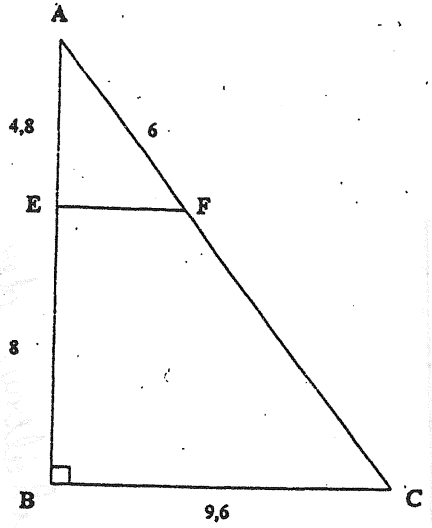
$\therefore$ since EF and BC are both perpendicular to AB so EF and BC are parallel.

$\frac{EF}{BC} = 0.375$

$EF = 9.6 \times 0.375$

$EF = 3.6$

Exercise n° 1



ABC is a right-angled triangle : ABC = 90°
AE = 4.8 cm; AF = 6 cm; EB = 8 cm; BC = 9.6 cm.
Is the straight line (EF) parallel to the straight line (BC) ?
Find the value of EF .

Write your answers on this paper. Give reasons for your answers.

$\sqrt{(8+4.8)^2 + (9.6)^2} = AC$

$AC = \sqrt{163.84 + 92.16}$

$AC = 16$

ΔAEF : ΔABC, similar triangles

4.8 : 12.8 ratio 0.375 ✓ same

6 : 16 ratio 0.375 ✓

yes EF // BC

$\sqrt{6^2 - 4.8^2} = EF$

$EF = 3.6$

Name :
Klasse : 9b

Übung n°2

Ein Flugzeug fliegt von Rennes zur Stadt X, und sofort nach Rennes zurück. Abflug von Rennes um 7 Uhr, Anflug um 10.30 Uhr. Während des Hinfluges fliegt es mit einer Geschwindigkeit von 960km/h, während des 4:3 Rückfluges fliegt es mit einer Geschwindigkeit von 720km/h. Berechne die Dauer der Hin-und Rückreise.

Schreibe deine Antwort auf.

3,5 : 7 = 0,5

4 · 0,5h = 2h

3 · 0,5h = 1,5h

Ich errechnete das Verhältnis der Zahlen (~~720 u. 960~~) addierte sie und teilte sie durch die Gesamtflugzeit.

Name :
Klasse : 9b

Übung n°2

Ein Flugzeug fliegt von Rennes zur Stadt X, und sofort nach Rennes zurück. Abflug von Rennes um 7 Uhr, Anflug um 10.30 Uhr. Während des Hinfluges fliegt es mit einer Geschwindigkeit von 960km/h, während des Rückfluges fliegt es mit einer Geschwindigkeit von 720km/h. Berechne die Dauer der Hin-und Rückreise.

Schreibe deine Antwort auf.

Gesamtflugzeit 3,5h

3,5 : 7 = 0,5

4 · 0,5 = 2h

3 · 0,5 = 1,5h

DIE HINREISE DAUERT 1,5 h

DIE RÜCKREISE DAUERT 2,0 h

Execice n° 2

Un avion a décollé de Rennes à 7 h, a volé en ligne droite jusqu'à la ville de X, a fait demi-tour immédiatement et a atterri à Rennes à 10 h 30 min.
A l'aller sa vitesse était égale à 960 km/h, au retour à 720 km/h.
Calculer la durée du trajet aller et celle du trajet retour.

Réponds sur cette feuille :

durée : 3h30 = 210 mn

$\frac{3}{3} \times 960$ km/h | $= \frac{4}{3} \times 720$ km/h

aller | retour

$210 \times \frac{3}{7} = 90$ mn | $210 \times \frac{4}{7} = 120$ mn

1h 30 | 2h

1h 30
aller 960 km/h

X

retour 2 h
720 km/h

TABLEAUX D'ANALYSE DES EXERCICES 1 ET 2

Nous rassemblons les résultats obtenus dans le tableau ci-dessous :

La lettre Z désigne les élèves anglais de niveau seconde (20 élèves)
La lettre P désigne les élèves anglais de niveau première (10 élèves)
La lettre F désigne des élèves français de niveau première (20 élèves)

	Elèves anglais	Elèves français
Exercice non abordé		F5
Pythagore pour calculer AC, utilisé explicitement	Z2 Z3 Z6 Z7 Z8 Z19 Z20	F8 F9 F11 F12 F13 F14 F15 F16 F17 F18 F19
Pythagore pour calculer AC, utilisé implicitement	P1 P2 P4 P5 Z1 Z4 Z9 Z10 Z11Z12 Z14 Z15 Z16 Z17 Z18	F1
Autre procédure pour le calcul de AC	Z13 (tangente)	
Triangles semblables, utilisés pour montrer (EF) parallèle à (BC) explicitement	P2 P5 P7 Z1Z2 Z3 Z4 Z6 Z7 Z9 Z10 Z12 Z13Z15 Z16 Z17 Z18 Z20	
Triangles semblables, utilisés pour montrer (EF) parallèle à (BC) implicitement	P1Z8 Z14	
Thalès pour montrer (EF) parallèle à (BC), utilisé explicitement		F8 F11 F9 F13 F15 F16 F17 F18 F19
Thalès pour montrer (EF) parallèle à (BC), utilisé implicitement	P4	F1 F12 F14
Raisonnement avec résultat (parallélisme) supposé	Z5	F2 F3 F4 F6 F20
Emploi du mot parallèle en conclusion de la première partie	P2 P4 Z2 Z3Z4 Z6 Z7 Z9 Z10 Z12 Z14 Z15 Z17 Z18 Z20	F1 F2 F4 F8 F12 F13 F14 F15 F16 F17 F18 F19 F20
Calcul de EF avec Pythagore non justifié	P1 P2 P3 P4 P7 P10 Z5 Z10 Z12 Z16	F12
Calcul de EF avec Pythagore justifié	Z1Z6 Z7 Z17	
Calcul de EF avec Thalès	P6 P8 P9 Z2Z4 Z8Z9 Z18 Z19 Z20	F1 F2 F6 F8 F9 F10 F13 F15 F19 F20
Valeur de EF donnée sans démonstration	P3 P6 P7 P8 P9 P10 Z19	F2 F7 F10 F20
Résultats obtenus et justifiés, conclusion écrite	Z2 Z4 Z6 Z7 Z9 Z17 Z18 Z20	F8 F9 F13 F15

France :

Classe de 4ième : 28 élèves

	METHODES CORRECTES						METHODES INCORRECTES	
	M1 : utilisation d'un graphique	**M2** : utilisation de la proportionnalité	**M3** : utilisation d'un système de 2 équations à 2 inconnues	**M4** : utilisation d'une équation à une inconnue	**M5** : vérification	**M6** : méthode non donnée mais résultats corrects	**M7** : mauvaise utilisation de la proportionnalité	**M8** : utilisation de la moyenne arithmétique des vitesses
L'élève adopte une méthode et va au bout de ses calculs.		1					1	7
L'élève adopte une méthode et ne va pas au bout de ses calculs.			(Il manque une équation ou ne parvient pas à résoudre) 1					4

L'élève n'a pas su traiter l'exercice	17

Classe de 2ième : 29 élèves

	METHODES CORRECTES						METHODES INCORRECTES	
	M1 : utilisation d'un graphique	**M2** : utilisation de la proportionnalité	**M3** : utilisation d'un système de 2 équations à 2 inconnues	**M4** : utilisation d'une équation à une inconnue	**M5** : vérification	**M6** : méthode non donnée mais résultats corrects	**M7** : mauvaise utilisation de la proportionnalité	**M8** : utilisation de la moyenne arithmétique des vitesses
L'élève adopte une méthode et va au bout de ses calculs.		1	1	1				9
L'élève adopte une méthode et ne va pas au bout de ses calculs.			(Il manque une équation ou ne parvient pas à résoudre) 1					5

L'élève n'a pas de méthode.	12

Allemagne :

Classe de 9ième : 41 élèves

	METHODES CORRECTES						METHODES INCORRECTES	
	M1 : utilisation d'un graphique	**M2** : utilisation de la proportionnalité	**M3** : utilisation d'un système de 2 équations à 2 inconnues	**M4** : utilisation d'une équation à une inconnue	**M5** : vérification	**M6** : méthode non donnée mais résultats corrects	**M7** : mauvaise utilisation de la proportionnalité	**M8** : utilisation de la moyenne arithmétique des vitesses
L'élève adopte une méthode et va au bout de ses calculs.		10						
L'élève adopte une méthode et ne va pas au bout de ses calculs.		7	(Il manque une équation ou ne parvient pas à résoudre)					

L'élève n'a pas de méthode.	24

Angleterre :

Classe de 11ième : 24 élèves

Connaissance des élèves :

	METHODES CORRECTES						METHODES INCORRECTES	
	M1 : utilisation d'un graphique	**M2** : utilisation de la proportionnalité	**M3** : utilisation d'un système de 2 équations à 2 inconnues	**M4** : utilisation d'une équation à une inconnue	**M5** : vérification	**M6** : méthode non donnée mais résultats corrects	**M7** : mauvaise utilisation de la proportionnalité	**M8** : utilisation de la moyenne arithmétique des vitesses
L'élève adopte une méthode et va au bout de ses calculs.		0						
L'élève adopte une méthode et ne va pas au bout de ses calculs.		1	(Il manque une équation ou ne parvient pas à résoudre) 3					

L'élève n'a pas de méthode.	12*

(*) dont 0 élèves qui calculent 3h30 mn / 2.

CONCLUSION

Il ne s'agit pas pour nous, à l'issue de ce rapport, de conclure à la supériorité du mode d'enseignement des mathématiques dans un pays donné. Toutes les comparaisons ne peuvent conduire qu'à observer, pour chaque pays, des avantages et des inconvénients des choix effectués. L'essentiel de notre travail a porté sur l'enseignement des mathématiques en Angleterre ; c'est pourquoi nous allons centrer cette conclusion sur les points qui nous semblent positifs ou négatifs dans cet enseignement, et plus généralement sur les principales différences entre le système anglais et le système français.

En ce qui concerne l'organisation générale du système éducatif anglais, nous avons retenu les points suivants :

- Exercer le métier d'enseignant du secondaire en Angleterre correspond à une activité totalement différente de ce que nous connaissons en France : présence active dans l'établissement 5 jours par semaine, de 8h à 16h ;
- L'organisation systématique en classes de niveaux permet de supporter plus facilement, dans des classes très peu nombreuses, des élèves de très faible niveau ; mais quel avenir est offert à ceux-ci, et à ceux qui, suite à des difficultés passagères, se retrouvent bloqués dans des classes de faible niveau ? En effet de tels élèves n'obtiendront qu'une faible note au GCSE, ce qui interdit toute poursuite d'études.
- En A-level (l'équivalent de nos classes de première et de terminale), les effectifs sont nettement plus réduits que ceux du même niveau en France (fréquemment une dizaine d'élèves), ceci étant accentué par le fait que les élèves n'étudient dans ces classes que trois matières.

En ce qui concerne l'enseignement des mathématiques, le point de vue adopté en Angleterre est résolument plus pragmatique qu'en France. On y enseigne presque exclusivement des techniques. Ainsi l'addition et le produit de matrices sont parfois enseignés à des élèves de 13-14 ans, sans lien avec le reste du programme de mathématiques , ni avec les autres matières ; en principe, ces opérations ne serviront plus avant l'enseignement supérieur. Lorsque la mise en place de certains outils nécessiterait une construction mathématique élaborée, on n'hésite pas à prendre des raccourcis vertigineux. Par exemple, dans certains manuels, la formule du binôme pour $(1+x)^n$, où n est un entier naturel est immédiatement l'objet d'une généralisation à $(1+x)^\alpha$, avec α un réel quelconque, par « analogie ». La formule est présentée à l'aide de points de suspension, sans autres commentaires, alors que la notion de convergence de suites (ou de séries) n'a jamais été abordée.

Ces choix de présentation sont associés à un point de vue sur les mathématiques faisant de celles-ci une discipline de service, fournissant des outils pour d'autres domaines, mais nullement destinée à structurer logiquement les connaissances. Il y a finalement très peu de démonstrations. Une spécificité de l'enseignement des mathématiques en Angleterre qui peut paraître plus positive est la pratique des Course Works (les TPE, désormais adoptés en France, s'en approchent). Ceux-ci permettent à l'élève de développer un esprit d'initiative et de recherche. Cependant les opinions des enseignants anglais sur les Course works sont partagées, car ceux-ci conduisent à des travaux de qualité très inégale et de plus difficiles à

évaluer (ceci semble rejoindre les premières constatations faites par les enseignants français à propos des TPE).

Ces constatations résultent des contacts que nous avons pu avoir. La décentralisation en vigueur en Angleterre fait qu'il serait certainement souhaitable de réaliser des recherches plus approfondies sur des sujets précis : enseignement des statistiques, par exemple. Par ailleurs, il serait certainement utile de réaliser une étude poussée pour d'autres pays. Certains IREM ont déjà réalisé, ou engagé, de telles études : Lorraine (centré sur probabilités et statistiques), Lyon (proportionnalité), Strasbourg (Allemagne), Besançon (Université).

La conception de l'enseignement des mathématiques en Allemagne ou en Espagne nous a paru plus proche de la conception française. Il ne nous paraîtrait pas souhaitable que l'objectif d'harmonisation de l'enseignement en Europe conduise à un enseignement s'inspirant essentiellement du modèle anglais, même si celui-ci présente des avantages en ce qui concerne le développement de l'intuition chez les élèves. En effet ceci risquerait de se traduire par un enseignement des mathématiques trop peu culturel, privilégiant trop les techniques et les activités heuristiques au détriment du raisonnement.

BIBLIOGRAPHIE

L'enseignement en Europe

B. BELHOSTE, H. GISPERT, N. HULIN (1996) : *Les sciences au lycée* Vuibert-INRP.

J.P. BARDOULAT (2000) : *Etudier en Europe. Tour d'Europe des systèmes éducatifs.* Bulletin APMEP n°426.

R.CABASSUT (2000) : *L'enseignement des mathématiques en Europe,* bulletin APMEP n°428.

R.CABASSUT (1996) : *Dimension internationale dans l'enseignement des mathématiques.* L'Ouvert, Irem de Strasbourg.

R.CABASSUT (1998) : *Mathématiques dans un lycée allemand.* L'Ouvert, Irem de Strasbourg.

P.LEGRAND (1993) : *Journée nationales de Strasbourg 1992. Systèmes européens d'enseignement.* Bulletin APMEP n°389.

P.LEGRAND (1995) : *Mathématiques dans les baccalauréats généraux de quelques pays,* Bulletin APMEP n°400.

P. LEGRAND (1995) : *Le Bac ici et ailleurs,* Hachette, pédagogies pour demain.

Voir également les numéros spéciaux du bulletin APMEP :

« Etudier en Europe », bulletins APMEP n°426 et 427.

Des rapports de stages « éducation comparée » sont disponibles à l'IUFM de Bretagne.

Les enquêtes TIMSS peuvent également fournir des renseignements, voir par exemple :

Troisième étude internationale sur l'enseignement des mathématiques et des sciences, IREM de Besançon, 1997.

Manuels et programmes

BOSTOCK, CHANDLER, SHEPERD, SMITH (1995) : Mathematics to level 10. A full GCSE course, Stanley Thornes.

GARCIA (1997) : Mathematicas I et II- 2 Bachillerato –Editex.

HMCI, Handbook for the inspection of schools .

HMSO, National curriculum, HMSO publication center, London.

HOOPER, HUNT (1997) : *Revise GCSE Mathematics : higher level,* Hodder & Stoughton.

KRATZ, SCHWEIGER : Bayerischer Schulbuch Verlag.

Lambacher Schweizer (collection couvrant tous les niveaux), Stuttgart.

MANNAL, KENWOOD, (1995) : *Pure mathematics 2,* Heinemann.

MANNAL, KENWOOD, (1996) : *Pure mathematics 4,* Heinemann.

POWELL, PATHMORE (1998) : *Mathematics GCSE,* Letts educational.

Sites internet

http: //www.eurydice.org (propose des liens vers les autres sites sur l'enseignement en Europe)

http : // easyweb.easynet.co.uk/~fireflies/national-curriculum

Imprimé et édité
Par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Troisième Trimestre 2001
N° de publication : 2001/04

I.R.E.M. de RENNES – Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu – Bâtiment 32 B
35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 26 34
Fax : 02 99 28 16 38
Site WEB : http://www.univ-rennes1.fr/irem

Commande :
Tél : 02 99 28 26 08
e.mail : sec-irem@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : COMPARAISON DE L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES DANS DEUX OU TROIS PAYS EUROPEENS

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS: BOHUON J.Y. – CHARTIER G. – GARNIER G. – HAIRAULT J.P. – HALBERT R. – LAPPART J. – MIQUEL.A - VIALLARD M.

DATE : SEPTEMBRE 2001

NIVEAU : Collège-Lycée

MOTS-CLES : Angleterre, Allemagne, Espagne ; place de mathématiques dans l'enseignement, rigueur, intuition, systèmes scolaires, formation des enseignants.

RESUME :

L'harmonisation européenne est actuellement une question centrale, qui touche aussi l'enseignement secondaire. L'étude des système éducatifs, et du contenu des programme de mathématiques montre vite d'importants écarts entre des pays d'Europe. Nous avons retenu pour ce document les cas de l'Angleterre, de l'Allemagne et de l'Espagne (en approfondissant ce qui concerne l'Angleterre). Dans chaque cas, nous donnons un aperçu du système éducatif., et des exemples de manuels et de sujets d'examens. Des observations de cours sont également rapportées ; nous avons de plus réalisé quelques analyses comparatives portant sur les contenus mais aussi sur les pratiques des élèves. La réalisation d'une harmonisation devrait idéalement permettre de conserver les avantages de chaque système…

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	232	4 € 75 F 11,43 Euros	250Ex.

ISBN 2-85728-057-2