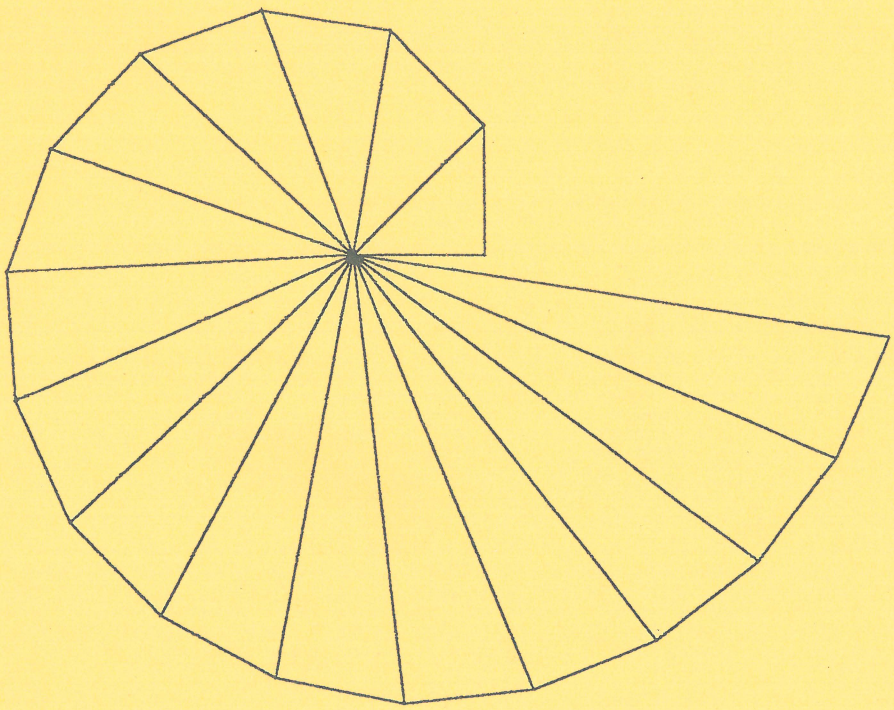
UNIVERSITE DE RENNES 1

RACINE CARREE DE 5

EXISTE-T'ELLE ?

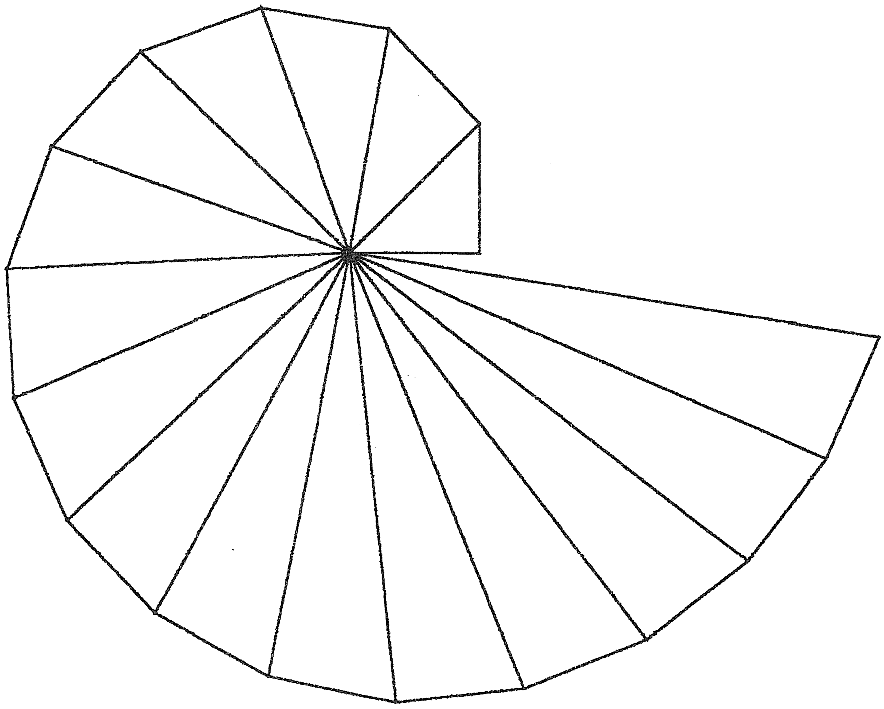


IREM DE RENNES

JUIN 2001

RACINE CARREE DE 5

EXISTE-T'ELLE ?



IREM DE RENNES **JUIN 2001**

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, une ou plusieurs pages blanches). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

ISBN 2-85-728-055-6

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Le groupe a fonctionné de septembre 1997 à juin 1999. Il était constitué de trois professeurs de collège, deux professeurs de lycée et d'un universitaire.

Comme l'indique le descriptif paru dans le PAF, pour beaucoup d'élèves de troisième et de seconde, les irrationnels et, à un degré moindre, les rationnels non décimaux semblent ne pas avoir d'existence propre en dehors de toute approximation. L'utilisation, souvent trop systématique, de la calculatrice amplifie le problème. Certains élèves pensent que donner un résultat comme $\sqrt{2}$ n'est pas satisfaisant. Ils préfèrent l'écrire et l'utiliser sous forme décimale approchée.

Le groupe a privilégié le travail sur les irrationnels et il a mis en place des activités avec un double objectif :

- donner du sens à ces nombres.

- les manipuler aussi naturellement que des entiers ou des décimaux.

Ces activités sont réparties en cinq chapitres :

- le premier est consacré à des constructions géométriques menant à des grandeurs "concrètes" dont les mesures sont irrationnelles (ces activités s'adressent aux classes de troisième mais peuvent aussi être utilisées en seconde).

- le deuxième est consacré à la nature des nombres : une démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$, un algorithme d'approximation de $\sqrt{2}$ avec utilisation d'un tableur, présenté sous deux formes.

- le troisième est consacré à de la trigonométrie.

- le quatrième est consacré à des comparaisons d'aires.

- le cinquième est consacré à des équations et des carrés magiques.

Chaque fiche d'activité est suivie de comptes rendus d'expérimentations et d'une conclusion. (Certaines ont déjà été présentées aux colloques de l'IREM de Rennes en 1998 et 1999 ou dans le bulletin de l'IREM de Rennes.)

CHAPITRE 1

Racines carrées et constructions géométriques

Les deux premières activités du chapitre ont le même objectif : manipuler géométriquement $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ …. La première est moins déconcertante pour les élèves et peut donc se prêter à une introduction du chapitre sur la racine carrée. L'activité « demi-cercle et racine carrée », plus difficile dans sa première partie, est intéressante à traiter après la leçon. Comme l'indiquent les comptes-rendus et compte tenu de la réaction des élèves ayant traité les deux activités, il nous semble préférable de ne traiter que l'une des deux.

TRIANGLE RECTANGLE ET RACINE CARREE

NIVEAU : Classe de $3^{ème}$.

PREREQUIS :

- Propriété de Pythagore.

- Identités remarquables.

- Propriété de Thalès.

OBJECTIFS :

- Dans la première partie il s'agit de manipuler géométriquement la racine carrée et de lui donner un sens.

- Dans la seconde, les élèves sont amenés à découvrir les radicaux et à bien remarquer que, par exemple, $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ est différent de $\sqrt{5}$.

Fiche : TRIANGLE RECTANGLE ET RACINE CARREE

Matériel autorisé : règle non graduée, équerre, compas, sans calculatrice.

PREMIERE PARTIE

Voici un segment de longueur 1 :

A partir de cette unité de longueur, on se propose de construire des segments de longueur $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$.

1) Construire un triangle ABC rectangle en A tel que : AB = AC= 1. Calculer BC.

2) Construire un triangle EFG rectangle en E tel que : EF = $\sqrt{2}$ et EG = 1. Calculer FG.

3) Construire un segment de longueur $\sqrt{5}$ (On pourra s'inspirer des questions précédentes).

4) Compléter le tableau suivant :

Longueur du segment :	Représentation
1	
$\sqrt{2}$	
$\sqrt{3}$	
$\sqrt{5}$	

DEUXIEME PARTIE

Pour les constructions suivantes, on utilisera les longueurs représentées dans le tableau de la première partie.

1) Construire un rectangle de longueur $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et de largeur $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ .Calculer l'aire de ce rectangle.

2) Construire un triangle ACD rectangle en A tel que AD = $\sqrt{2}$ et AC =3. Placer sur le segment [AC] le point B tel que AB = 2.

   La parallèle à (BD) passant par C coupe (AD) en E. Calculer AE, BD puis CE.

3) Construire un triangle FGH tel que FH = 2 et FG = $\sqrt{2}$. Placer sur le segment [FH] le point I tel que IF = $\sqrt{3}$.

   La parallèle à (GH) passant par I coupe (FG) en J. Calculer FJ, IJ, puis HG.

DEROULEMENT :

L'activité a été présentée en 3ème de deux manières : soit en introduction du chapitre sur la racine carrée, soit en réinvestissement de ce chapitre. Pour pouvoir mener à terme cette activité, il est conseillé de la réaliser sur une durée de 1h30.

- Lors de l'expérimentation en réinvestissement, les élèves les plus rapides abordaient la question 2) de la deuxième partie à la fin de la première heure.

- Lors de l'expérimentation en introduction, les deux parties ont été traitées séparément en deux séances successives d'une heure.

OBSERVATIONS :

A la lecture de la première question, l'unité pose problème à la plupart des élèves. Certains ne savent pas s'ils doivent utiliser l'unité ou la valeur mesurée en cm. D'ailleurs, ces mêmes élèves seront gênés par cette unité tout au long de l'activité.

Si pour certains élèves, il va de soi à la deuxième question d'utiliser la longueur $\sqrt{2}$ du 1), d'autres posent la question s'ils peuvent ou s'il faut le faire. Une fois la question 2) passée, la première partie se fait très rapidement.

Dans l'expérimentation en introduction la première partie a permis de donner la définition de la racine carrée et de bien faire remarquer qu'une racine carrée est un nombre positif ; ceci étant beaucoup plus naturel puisqu'elle est représentée par une longueur.

La deuxième partie amène à une discussion, les élèves ont eu deux comportements différents. Les uns ont pris les segments $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ du tableau de la première partie et ont construit un rectangle de dimensions $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$, les autres ont cru aller plus vite en prenant $\sqrt{5}$ et 1 du même tableau. Les deux groupes se sont alors aperçus que ces rectangles ne se ressemblaient pas. $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ est visiblement différent de $\sqrt{1}$: la différence saute aux yeux. A partir de là, ils ont aussi constaté que $\sqrt{5} \neq \sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Bien qu'un tel résultat ait été mis en évidence en cours, quelques élèves ne se satisfont pas de « $\sqrt{2}$ » : ils aimeraient donner un « autre » (si l'on reprend leur terme) résultat.

Quant à la deuxième partie, on retrouve l'erreur rencontrée précédemment, ils prennent $\sqrt{5}$ pour $\sqrt{3} + \sqrt{2}$, pratiquement aucun n'y échappe. Mais, en reprenant les longueurs tracées du tableau, ils se rendent vite compte qu'elles ne sont pas égales, et très souvent, c'est à ce moment là qu'ils se remémorent les propriétés vues en cours.

CONCLUSION :

Cette activité a été appréciée des élèves qui ont su l'exploiter tout au long de l'année. Les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{5}$ ont pris un sens. En particulier, $\sqrt{2}$ est la mesure de la diagonale d'un carré de côté 1.Les élèves le réutilisent naturellement.

Et surtout quand des élèves font l'erreur « $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ » un simple rappel de cette activité permet de la corriger. D'ailleurs, beaucoup d'élèves ont retenu les propriétés sur les racines grâce à cette activité.

DEMI-CERCLE ET RACINE CARREE

NIVEAU : Classe de $3^{ème}$.

PREREQUIS :

- Cosinus dans le triangle rectangle.
- Définition de la racine carrée.
- Egalité des fractions.

OBJECTIF :

Représenter géométriquement les nombres $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$

Fiche :DEMI-CERCLE ET RACINE CARREE

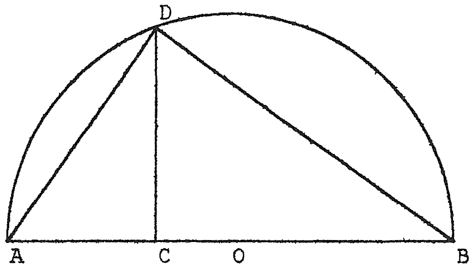
Matériel autorisé : règle non graduée, équerre, compas, sans calculatrice.

PREMIERE PARTIE

Voici un segment de longueur 1. 

A partir de cette unité de longueur, on se propose de construire des segments de longueur $\sqrt{2}$,$\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}$

1) On considère la figure suivante:



($\mathcal{C}$) est le demi-cercle de diamètre [AB] avec AB = 3.

On prend le point C tel que AC = 1.

La perpendiculaire à (AB) passant par le point C coupe ($\mathcal{C}$) en D.

Calculer AD. Indication: on pourra exprimer cos $\widehat{BAD}$ de deux manières différentes.

2) Reprendre la question avec AB = d avec d > 1.

3) En s'inspirant des questions précédentes, construire des segments de longueur $\sqrt{2}$,$\sqrt{5}$ et $\sqrt{6}$.

4) Compléter le tableau suivant :

Segment de longueur:	Représentation
1	
$\sqrt{2}$	
$\sqrt{3}$	
$\sqrt{5}$	
$\sqrt{6}$	

Fiche : DEMI-CERCLE ET RACINE CARREE

DEUXIEME PARTIE

a) On considère la figure suivante :

OAB est un triangle rectangle en O

OA = 3

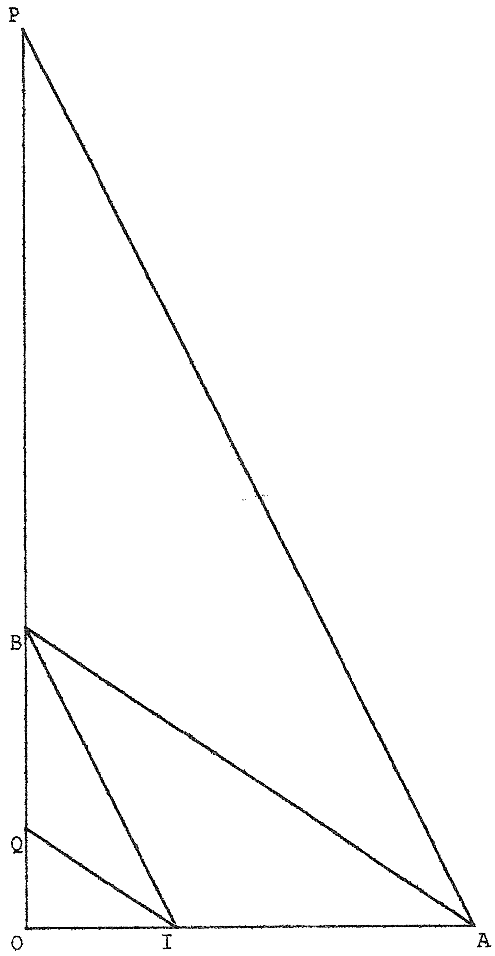
OB = 2

OI = 1

(IQ) // (AB)

(AP) // (IB)

Calculer OP puis OQ



b) Reprendre la question lorsque : OA = x , OB = y et OI = 1 avec x différent de 1.

c) En utilisant le tableau de la première partie et en s'inspirant de la question précédente construire des segments de longueur $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{6}$, $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ puis $\frac{2}{\sqrt{5}}$

d) A l'oral :

Peut-on construire $\frac{1}{\sqrt{3}}$?

DEROULEMENT :

Cette activité a été présentée dans deux classes. Dans les deux classes nous avions traité l'activité « Triangle rectangle et racine carrée » pour introduire la leçon sur la racine carrée. L'activité « demi-cercle et racine carrée » a été traitée après l'étude de cette leçon. Il faut prévoir environ 1h30 pour permettre aux élèves de chercher et de terminer l'activité.

OBSERVATIONS DANS LA $1^{ère}$ CLASSE :

Seule la première partie de l'activité a été traitée.

Le premier réflexe des élèves a été d'utiliser la calculatrice sans accorder d'importance à l'énoncé et à l'unité de mesure donnée. Le professeur a du rappeler les consignes.

La première question a été réussie par 50% des élèves. Les autres n'ont pas vu la deuxième manière d'écrire le cosinus de l'angle $\widehat{BAD}$; c'est alors que quelques élèves ont essayé de faire le lien avec l'activité « Triangle rectangle et racine carrée » et ont aussi rempli le tableau de la question 4. Le professeur est intervenu auprès de ces élèves pour les aider à répondre à la première question.

Une majorité arrive à traiter la deuxième question, mais des élèves n'ont pas fait le lien entre cette question et la suivante : ils n'ont pas pensé à donner les valeurs particulières 2, 5, 6.

Malgré certaines difficultés, les élèves ont trouvé l'activité intéressante.

OBSERVATIONS DANS LA $2^{ème}$ CLASSE :

Cette observation s'est déroulée sur une heure seulement. Dès le début de l'activité, le professeur a interdit l'usage de la calculatrice. Deux élèves ont traité l'ensemble de l'activité de manière autonome. Les autres ont bloqué dès la première question. Comme dans l'observation faite dans l'autre classe, beaucoup d'élèves bloqués se sont remémoré l'activité « Triangle rectangle et racine carrée » vue deux semaines plus tôt. Ils ont refait des triangles rectangles pour compléter le tableau de la question 4. Le professeur, ayant choisi de privilégier la deuxième partie, les a laissé faire.

Dans la deuxième partie la question a) a été traitée correctement par la plupart des élèves, par contre, la présence des lettres x et y dans la question b) a perturbé beaucoup d'élèves. Il a fallu intervenir pour donner la solution. Enfin, le lien entre les questions b) et c) n'a pas été perçu par tout le monde.

Testée sur une heure, l'activité mériterait de l'être sur 1h30. Le début rebute certains élèves (ils sont bloqués dès la première question).

PUISSANCES ET RACINES CARREES

NIVEAU : Classe de 2^{nde}.

PREREQUIS :

- Théorème de Thalès.
- Résolution d'équations.
- Puissances.

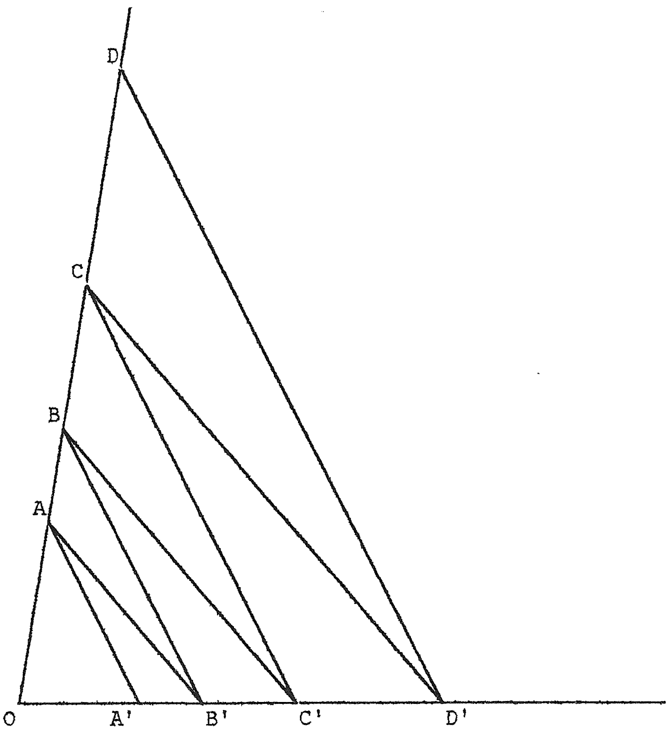
OBJECTIF :

Représentation géométrique des puissances d'un nombre.

Fiche : PUISSANCES ET RACINES CARREES

Les droites (AA') , (BB') , (CC') , (DD') sont parallèles et les droites (AB') , (BC') , (CD') sont parallèles.

On donne OA = OB' = 1 et OB = x



1) Calculer OA', OC', OC, OD' et OD.

2) Faire la figure pour OB = $\sqrt{2}$ que l'on aura construit préalablement. Préciser dans ce cas OC, OD et OA'. (Constater que A est le milieu du segment [OC] et que B est celui de [OD]).

DEROULEMENT :

L'activité a été présentée en début de seconde, dans une classe, pendant les modules (deux groupes de 17 élèves). Elle s'est déroulée en deux temps :

- recherche à l'oral de pistes de travail.
- travail de recherche et de rédaction par groupe de deux ou individuellement.

Il faut prévoir une bonne heure.

OBSERVATIONS :

Partie orale :

La mise en route a été laborieuse.

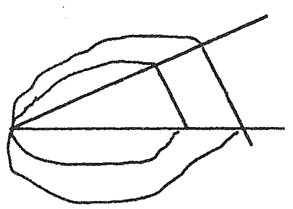
Deux pistes se sont dégagées. La majorité des élèves a pensé à la propriété de Thalès.

Quelques élèves ont proposé d'utiliser la trigonométrie, immédiatement, deux ou trois autres élèves ont réagi en répliquant « on ne sait pas si les triangles sont rectangles ».

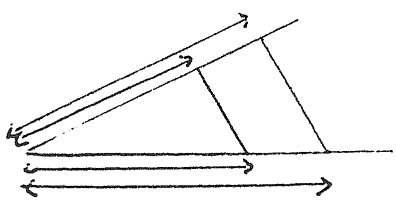
Travail individuel (ou à deux) :

Beaucoup d'élèves ont été perdus en voyant toutes les familles de droites parallèles. Pour se repérer dans la figure, un seul élève a pensé à utiliser de la couleur pour mettre en évidence les droites parallèles.

La moitié des élèves a codé le dessin en indiquant les longueurs de la façon suivante :



ou



Les élèves ont oublié de préciser les parallèles et ont eu du mal à sélectionner les rapports pertinents. Pour calculer OA', les élèves ont su écrire $\frac{1}{\text{OA'}} = \frac{x}{1}$ mais seul un quart d'entre eux a réussi à trouver OA' ; les autres se sont trompés d'inconnue.

Ensuite, un tiers seulement des élèves a réinvesti la méthode de travail avec d'autres parallèles. Les résultats enfin obtenus, une nouvelle difficulté est apparue : un élève sur deux a confondu $x.x$ et $2x$

Pour la deuxième question des élèves ont construit correctement $\sqrt{2}$ en prenant la diagonale d'un carré de côté 1, mais ils ont rencontré des difficultés pour placer les points car ils ont oublié de tracer les parallèles.

CONCLUSION

Cet exercice a pu mettre en relief les points suivants :

1) Choix d'une méthode appropriée à l'exercice.

2) Difficultés pour appliquer correctement un théorème (vérification des conditions d'application).

3) Difficultés à sélectionner ce qui permet de résoudre un problème : égalité de trois rapports alors que deux suffisent.

4) Résolution d'équation difficile : savoir isoler ce que l'on cherche et non pas systématiquement x : ils ont écrit $x = \frac{1}{OA'}$ alors qu'ils cherchaient OA' (confusion entre paramètre et inconnue).

5) Définition des puissances non assimilée : $x.x = \ldots$

6) Difficultés à réinvestir un raisonnement.

CHAPITRE 2

NATURE DES NOMBRES

IRRATIONNALITE DE $\sqrt{2}$

NIVEAU : Classes de $3^{\text{ème}}$ et 2^{nde}

OBJECTIFS

- Distinguer la valeur exacte et une valeur approchée.

- Démontrer l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Fiche : $\sqrt{2}$

***PREMIERE PARTIE** (présentée au tableau)*

Les nombres $\dfrac{665857}{470832}$ et $\sqrt{2}$ sont-ils égaux ?

Les nombres $\dfrac{886731088897}{627013566048}$ et $\sqrt{2}$ sont-ils égaux ?

***DEUXIEME PARTIE** (sans calculatrice)*

1) a) Si $\dfrac{p}{q} = \sqrt{2}$, exprimer p puis p^2 en fonction de q.

   b) Si $p^2 \neq 2q^2$, que peut-on dire de $\dfrac{p}{q}$ et de $\sqrt{2}$?

   Compléter : pour démontrer que $\dfrac{p}{q} \neq \sqrt{2}$, il suffit de démontrer que ....

2) a) Quel est le chiffre des unité de $(665857)^2$?
   b) Quel est le chiffre des unités de $2(470832)^2$?
   c) Conclure.

3) Les nombres $\dfrac{886731088897}{627013566048}$ et $\sqrt{2}$ sont-ils égaux ?

4) Soit $\dfrac{a}{b}$ une fraction irréductible avec a entier naturel et b entier naturel non nul. Compléter les tableaux :

Chiffre des unités de a	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de a^2										

Chiffre des unités de b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de b^2										
Chiffre des unités de $2b^2$										

Peut-on avoir : $\dfrac{a}{b} = \sqrt{2}$?

DEROULEMENT

L'activité peut être proposée en seconde et en troisième comme l'indiquent les commentaires des nouveaux programmes de troisième applicables à la rentrée 1999.

Elle comporte deux parties. La première est présentée oralement au tableau. Les élèves peuvent utiliser leur calculatrice non formelle. Après environ dix minutes de débat, le professeur distribue la seconde partie et, à la fin, il effectue une synthèse.

OBSERVATION DANS UNE CLASSE DE SECONDE

L'activité s'est déroulée, pendant une heure, en travaux dirigés au mois de mars 1998, dans un groupe de seize élèves de seconde.

PREMIERE PARTIE

Les élèves utilisent leur calculatrice et engagent un débat. Les avis sont partagés. Quatre réponses apparaissent. Pour beaucoup d'élèves, la calculatrice donnant des résultats identiques, les nombres proposés sont égaux. Un élève intervient et précise que la calculatrice n'affiche pas toutes les décimales et il se peut que les décimales non visibles soient différentes. Un autre calcule les différences et indique que la première, entre $\sqrt{2}$ et $\frac{665857}{470832}$, est non nulle alors que la seconde, entre $\sqrt{2}$ et $\frac{886731088897}{627013566048}$, est nulle. Il conclut donc que les deux premiers nombres sont différents et les deux autres égaux. Enfin deux élèves constatent que les carrés des trois nombres sont égaux à 2.

Le doute s'installe dans le groupe. La plupart des élèves se rendent compte que la calculatrice ne permet pas de conclure et qu'il faut trouver une autre démarche. Aucun élève n'ayant d'idée, le professeur distribue alors la seconde partie.

DEUXIEME PARTIE

Les élèves travaillent par groupes de deux. La première question ne soulève pas beaucoup de difficultés. Pour la seconde, des élèves ne savent pas ce que désigne le chiffre des unités. Le professeur doit alors intervenir et rappeler également l'objectif de cette partie. Tenant compte des remarques, les groupes traitent les questions suivantes avec parfois de l'aide et dans l'ensemble ils trouvent la conclusion finale.

CONCLUSION

Cette activité a enthousiasmé les élèves. Elle donne un exemple de limites d'utilisation de la calculatrice et montre l'importance du raisonnement mathématique. Elle permet aussi de distinguer le calcul exact et le calcul approché et enfin de faire sentir les statuts différents de certains nombres.

A la fin de cette activité, plusieurs élèves ont demandé « Est-ce pareil pour $\sqrt{3}$? » et ont entrepris sur-le-champ une démarche analogue.

RATIONNELS ET DECIMAUX

NIVEAU : Classe de $3^{ème}$.

OBJECTIFS :

- Comparer deux rationnels

- Distinguer la valeur exacte et une valeur approchée

Fiche : RATIONNELS ET DECIMAUX

PREMIERE PARTIE *(avec la calculatrice)*

Les nombres A= $\frac{6406}{85555}$, B = $\frac{104561}{1396459}$, C =0,0748758109 sont-ils égaux ?

DEUXIEME PARTIE *(sans la calculatrice)*

1) «Une méthode pour démontrer que deux fractions sont différentes »

Compléter :

a, b, c, d étant des nombres ($b \neq 0$ et $d \neq 0$)

Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ alors ad = …

Si ad $\neq$ bc alors …

Pour démontrer que $\frac{a}{b} \neq \frac{c}{d}$ il suffit de démontrer que …

2) a) Quel est le chiffre des unités du produit 6406 x 1396459 ?

b) Quel est le chiffre des unités du produit 85555 x 104561 ?

c) Les nombres A et B sont ils égaux ?

d) A-t-on A = C ? B = C ?

Autre exemple :

A = $\frac{29444684}{13168063}$ B = $\frac{1229015134}{549632277}$ C = 2,236067978

DEROULEMENT

L'activité a été traitée dans trois classes de troisième.

Dans la première partie, le professeur a écrit trois nombres au tableau et demande aux élèves si ces nombres sont égaux.

Après débat, la question restant en suspens, une feuille contenant la deuxième partie est distribuée. (Ne pas oublier de demander aux élèves de ranger leur calculatrice).

OBSERVATIONS

PREMIERE PARTIE

Dans un premier temps les élèves se précipitent sur leurs calculatrices. Elles affichent de 7 à 11 chiffres après la virgule donc leurs conclusions diffèrent. Un vrai débat s'engage. Les élèves prennent conscience que la calculatrice a des limites et ne permettra pas de trancher la question « comment savoir ? ».

Aucun élève n'ayant d'idées satisfaisantes le professeur, propose la deuxième partie.

DEUXIEME PARTIE

Beaucoup d'élèves répondent à la première question et au début de la seconde mais ne savent pas les exploiter pour répondre à 2)c) ils ne voient pas le lien entre ces questions et la conclusion obtenue au 1).

Il faut intervenir.

Une autre difficulté apparaît à la question 2)d) la donnée de C en écriture décimale bloque une partie des élèves.
Il a fallu qu'un élève propose d'écrire C en écriture fractionnaire pour obtenir la réponse.

CONCLUSION

Selon les classes, il peut être intéressant dans la seconde partie de permuter les questions 1) et 2), ce qui permet de traiter la question 1) comme une généralisation, une synthèse.

Cette activité a intéressé la plupart des élèves. Les meilleurs souhaitaient aller plus loin, ils se sont rendu compte qu'ils ne pouvaient rien affirmer lorsqu'il y avait égalité des chiffres des unités et voulaient savoir comment faire dans ce cas là.

C'est un bon travail de réinvestissement : les élèves de troisième savent qu'une fraction n'a pas nécessairement une écriture décimale exacte. Mais avant l'activité, confrontés à des fractions dont la période excède deux chiffres, les élèves se fiaient aveuglément à leur calculatrice ; alors qu'après l'activité ils savent remettre en cause l'affichage de la calculatrice.

APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$
A L'AIDE DU TABLEUR

APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ A L'AIDE DU TABLEUR

NIVEAU : Classe de $3^{\text{ème}}$.

OBJECTIFS :

Approcher $\sqrt{2}$ au moyen de trois algorithmes différents.

PREREQUIS :

Initiation au tableur.

Racine carrée.

MATERIEL :

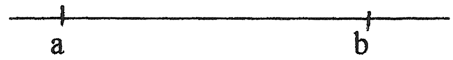
Logiciel Excel (15 décimales).

Fiche : APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ A L'AIDE DU TABLEUR (Excel)

PREMIERE PARTIE : principe de dichotomie

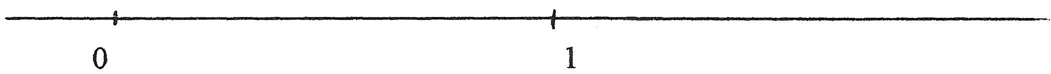
1 - A et B sont deux points d'une droite graduée d'abscisses respectives a et b avec $a < b$.

Placer le point C d'abscisse $\frac{a+b}{2}$.



Ranger les nombres a, b et $\frac{a+b}{2}$.

2 -



Construire les points A, B et K d'abscisses respectives 1 , 2 et $\sqrt{2}$.
Ranger les nombres 1 , 2 et $\sqrt{2}$.

3 - Construire le point C d'abscisse $c = \frac{1+2}{2}$.

Calculer $c^2 - 2$,puis
Comparer c et $\sqrt{2}$.
Dans lequel des deux segments [AC] ou [CB] se trouve le point K ?

4 - Construire le point D d'abscisse $d = \frac{1+b}{2}$.

Calculer $d^2 - 2$.
Comparer d et $\sqrt{2}$.
Dans lequel des deux segments [AD] ou [DC] se trouve le point K ?

5 - On poursuit la méthode, décrire l'étape suivante.

DEUXIEME PARTIE : Algorithme de Babylone

1 - Créer une feuille de tableur.

2 - Compléter la première ligne comme suit :

	A	B	C	D	E
1	a	b	$c=\frac{a+b}{2}$	Test $D=c^2-2$	n° d'étape

3 - En s'inspirant du 2 de la première partie finir de compléter la deuxième ligne du tableau avec les valeurs initiales.

	A	B	C	D	E
1	a	b	$c=\frac{a+b}{2}$	Test $D=c^2-2$	n° d'étape
2	1	2			1

4 - Sans utiliser le tableur, en s'inspirant de la première partie, quelles seraient les valeurs des cases A3, B3, C3, D3, A4, B4, C4 et D4?

5 - Compléter la troisième ligne du tableau comme suit :

	A	B	C	D	E
1	a	b	$c=\frac{a+b}{2}$	Test $D=c^2-2$	n° d'étape
2	1	2			1
3	= SI(D2>0;A2;C2)	= SI(D2>0;C2;B2)	=(A3+B3/2)		=F2+1

6 - Sélectionner la troisième ligne et utiliser « **recopier vers le bas** » pour approcher $\sqrt{2}$ à la quatorzième décimale et préciser le nombre d'étapes effectuées.

TROISIEME PARTIE: Algorithme de Newton

1 - Créer une feuille de tableur.

2 - Compléter les premières lignes comme suit :

	A	B	C
1	u	erreur	n° d'étape
2	=1	= RACINE(2) -1	1
3	= 0,5 *(A2 +2/ A2)	= RACINE(2) -A3	= C2 +1

3 - Sélectionner la troisième ligne et utiliser « recopier vers le bas » pour approcher $\sqrt{2}$ à la quatorzième décimale et préciser le nombre d'étapes effectuées.

QUATRIEME PARTIE : Algorithme de Newton accéléré

1 - Créer une feuille de tableur.

2 - Compléter les premières lignes comme suit :

	A	B	C
1	u	erreur	n° d'étape
2	=1	= RACINE(2) -1	1
3	= (A2^3+6*A2)/(3*A2^2+2)	= RACINE(2) -A3	= C2 +1

3 - Sélectionner la troisième ligne et utiliser « recopier vers le bas » pour approcher $\sqrt{2}$ à la quatorzième décimale et préciser le nombre d'étapes effectuées.

DEROULEMENT ET OBSERVATIONS

Le collège ne possédant pas Excel, l'activité a été testée avec Works 3.0 (ce qui nuit à l'intérêt de l'activité : on demande la septième décimale au lieu de la quatorzième car MSWorks ne peut pas mieux faire).

Dans un premier temps le professeur donne aux élèves la fiche « approximation de $\sqrt{2}$ » et laisse les élèves travailler 30 minutes environ en groupes de quatre, le but étant d'initier au tableau l'algorithme de Babylone (dichotomie) en le faisant fonctionner « à la main » . Les élèves ne connaissant pas la fonction (SI) du tableur, il a fallu leur donner l'écriture des cellules du tableau. Le professeur voulant privilégier l'activité tableur a donné assez vite la fiche élève.

Dans un second temps les élèves tapent le texte dans les cellules et constatent l'approximation de $\sqrt{2}$ en 25 pas. Les élèves novices en informatique appliquent scrupuleusement les consignes et n'ont pas de problèmes. D'autres élèves, initiés à la maison, commettent des fautes rédhibitoires sur Works 3.0 (pas de signe = pour entrer un nombre dans une cellule, utilisation de la virgule du clavier numérique…).

Dans un troisième temps (20 minutes) les élèves tapent l'algorithme de Newton et une version accélérée de cet algorithme (Aitken) et constatent la convergence en 5 et 4 pas.

L'objectif était de montrer aux élèves qu'il existe d'autres algorithmes plus puissants que celui de la dichotomie. L'inconvénient, et il est de taille, est l'impossiblité de les expliquer aux élèves.

OBSERVATION FINALE

Remarque d'un élève « tout ça pour obtenir $\sqrt{2}$ avec 7 chiffres après la virgule alors que la calculatrice en donne 10 ! ». D'où l'importance d'utiliser Excel. D'ailleurs trois élèves qui avaient Excel à la maison ont refait l'activité chez eux et m'en ont fait part.

APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$
(Version 2)

NIVEAU : Classe de $4^{\text{ème}}$.

OBJECTIFS :

Utiliser l'outil informatique pour approcher la valeur de $\sqrt{2}$.

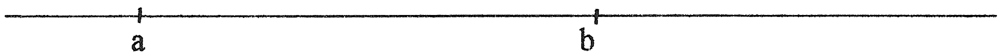
PREREQUIS :

- Les coordonnées d'un point.
- Fractions et puissances.
- Théorème de Pythagore et la racine carrée.
- Le tableur : traité en technologie.

Fiche : APPROXIMATION DE $\sqrt{2}$ (version 2)

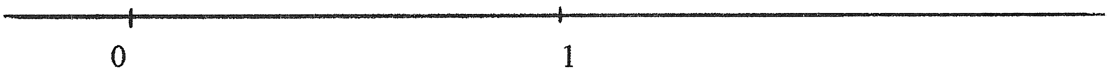
PREMIERE PARTIE

1) A et B sont deux points d'une droite graduée d'abscisses a et b avec $a < b$.



Placer le point C d'abscisse $\frac{a+b}{2}$, puis ranger les nombres a, b, $\frac{a+b}{2}$.

2)



Construire les points A, B et K d'abscisse respectives 1, 2 et $\sqrt{2}$.

Ranger les nombres 1, 2 et $\sqrt{2}$.

3) Construire le point C d'abscisse $c = \frac{1+2}{2}$.

Calculer $c^2 - 2$.Comparer c et $\sqrt{2}$.

Dans lequel des deux segments [AC] ou [CB] se trouve le point K ?

4) Construire le point D d'abscisse $d = \frac{1+c}{2}$.

Calculer $d^2 - 2$.Comparer d et $\sqrt{2}$.

Dans lequel des deux segments [AD] ou [DC] se trouve le point K ?

5) En poursuivant la méthode, donner les trois étapes suivantes.

DEUXIEME PARTIE

On donne le tableau correspondant à une feuille du tableur.

	A	B	C	D	E	F
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						
10						

1) Marquer sur la première ligne, respectivement, l'intitulé de chaque colonne :

a ; b ; c = (a + b)/2 ; $c^2 - 2$; N° d'étape.

2) Ecrire la deuxième ligne en prenant **a = 1 et b = 2.**

3) En s'inspirant de la première partie, compléter les lignes suivantes.

TROISIEME PARTIE : utilisation du tableur.

1) Afin d'automatiser tous ces calculs, reprendre la deuxième partie en utilisant le tableur.

2) Déterminer le nombre d'étapes permettant d'approcher au mieux $\sqrt{2}$.

DEROULEMENT

L'activité a été traitée sur quatre séances d'une heure, les deux dernières utilisant le logiciel Excel. Lors de la première séance tous les élèves ont traité la première partie et certains ont commencé la deuxième, sans succès.

Lors de la deuxième séance, après une explication au tableau montrant graphiquement les résultats obtenus à la première partie, tous les élèves ont traité la deuxième avec succès, en remplissant « à la main » le tableau donné.

La troisième séance s'est déroulée en deux temps :

- Le premier a consisté à traduire en langage informatique l'explication donnée dans la deuxième séance. Tout d'abord le professeur a expliqué au tableau le système d'exploitation et les différentes écritures « codage » permettant de communiquer avec la machine. Puis tous les élèves ont engagé, en collaboration avec le professeur, un débat qui leur a permis de remplir pas à pas la feuille de calcul reproduite au tableau. Cette étape est essentielle pour la réussite de l'activité car elle automatise la procédure qui permet d'approcher $\sqrt{2}$.

- Dans un deuxième temps, les élèves ont mis en application leur acquis pour traiter la troisième partie. Ils se sont mis en groupes de trois élèves par ordinateur. Chaque groupe a terminé avec succès le travail demandé.
  La dernière séance s'est déroulée deux semaines après. Lors de cette séance, l'élève refait la troisième partie en utilisant le tableur de façon autonome.

OBSERVATIONS

1. Tous les élèves ont du mal à travailler directement avec les lettres ce qui explique le temps perdu pour traiter la première question de la première partie.

2. Aucun élève n'a pensé au théorème de Pythagore pour obtenir une longueur égale à $\sqrt{2}$. En utilisant la calculatrice les élèves ont placé approximativement le point d'abscisse $\sqrt{2}$.

3. Il a fallu entre 20 et 30 minutes pour traiter la première partie. La deuxième a été distribuée une fois la sixième étape obtenue.

4. Les élèves n'ont pas vu le lien entre les deux parties ce qui explique l'échec total de la deuxième partie de l'activité.
   Pour commencer la deuxième séance, l'accent a été mis sur la représentation graphique. Cette explication a permis de constater que les deux tiers des élèves n'ont pas compris ce que signifie « approximation ». Il a fallu aussi insister auprès de chaque élève pour réussir à faire tourner à la main les différentes itérations de la deuxième partie.

Grâce à la deuxième séance, les élèves ont compris le principe de l'algorithme. Le professeur a pu alors apporter les instructions d'Excel permettant de remplir les deux premières lignes du tableur.
Les élèves ont terminé l'activité sans difficulté.

CONCLUSION

1. L'activité est très intéressante mais elle est lourde à traiter en classe entière. Elle a permis de montrer aux élèves que l'informatique est un moyen permettant de résoudre rapidement cette question d'approximation.

2. La réussite de cette activité dépend :

   - des deux premières séances qui permettent à l'élève de tracer une image graphique de l'ensemble de l'activité et de comprendre, en faisant quelques itérations à la main, le travail qui sera traité par ordinateur.

   - de la disponibilité du professeur auprès de chaque élève pour répondre à toutes les questions éventuelles. Il ne faut pas précipiter le travail sur ordinateur : l'algorithme doit être d'abord bien compris par les élèves.

CHAPITRE 3

RACINES CARREES ET

TRIGONOMETRIE

TRIGONOMETRIE (tangente 22,5°)

NIVEAU : Classes de 2^{nde} et $3^{ème}$.

PREREQUIS :

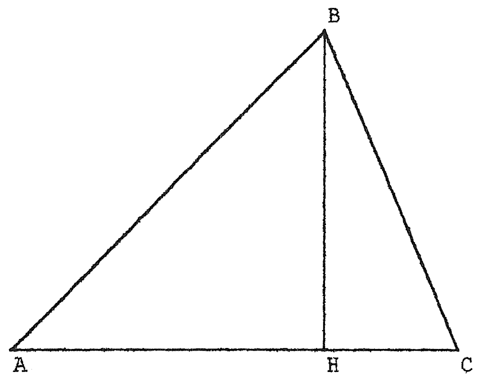
- Triangle isocèle, somme des angles dans un triangle.
- Trigonométrie dans le triangle rectangle.
- Calculs sur les fractions.

Fiche : TAN (22,5°)

EXERCICE 1

ABC est isocèle en A.
AB = 2

$\widehat{BAC} = 45°$
H est le pied de la hauteur issue de B.



1 – Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{HBC}$ est 22,5°

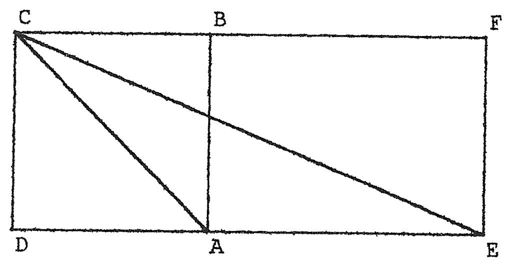
2 – Calculer AH, BH puis CH.

3 – En déduire que tan (22,5°) = $\sqrt{2} - 1$

EXERCICE 2

ABCD est un carré.
CDEF est un rectangle.

On donne DA = 1 et
DE = $1 + \sqrt{2}$



1 – Montrer que la mesure de l'angle $\widehat{ECF}$ est 22,5°

2 – En déduire la valeur exacte de tan (22,5°)

On rappelle :

	30°	45°
Sinus	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Cosinus	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$

DEROULEMENT

L'activité a été présentée en classe de seconde au début du second trimestre à deux groupes de 17 élèves. Cette fiche a été expérimentée en fin de cours pendant environ 45 minutes. L'exercice 1 et l'exercice 2 ont été distribués en même temps ainsi qu'un tableau rappelant les lignes trigonométriques.

OBSERVATIONS

Exercice 1

Les élèves alignent des calculs sans chercher à justifier leurs démarches. Lorsqu'ils trouvent un résultat, pour la majorité d'entre eux, le travail est terminé.

Après la lecture du texte, assez souvent lecture superficielle, ils se remémorent les formules de trigonométrie : $\sin\alpha = \ldots$, $\cos\alpha = \ldots$ et $\tan\alpha = \ldots$

La première question ne pose pas de problème.

Le début de la deuxième non plus. Le théorème de Pythagore est évoqué mais très vite écarté compte tenu des données. Pour calculer AH tous les élèves utilisent la trigonométrie.

Pour le calcul de BH, quatre ou cinq utilisent le théorème de Pythagore, d'autres voient et démontrent que le triangle BHA est isocèle en B et les autres écrivent : $\sin 45° = \frac{BH}{AB}$. Pour ce calcul, certains élèves écrivent bien : CH = AC – AH mais ensuite ils écrivent $CH = \sqrt{2} - 2$ au lieu de $2 - \sqrt{2}$. Pour la fin de la question, la grande majorité de la classe écrit la tangente sans préciser que le triangle CBH est rectangle en H. Ils obtiennent $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$. Un élève sur quatre est alors incapable de continuer. D'autres réussissent à aller plus loin en transformant $\frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ en $\frac{2\sqrt{2}-2}{2}$ mais ensuite, ils font toutes sortes d'erreurs de simplifications. Un élève a même élevé au carré le réel $\frac{2\sqrt{2}-2}{2}$ sous prétexte « d'arranger l'écriture ». Une moitié environ des élèves utilise la calculatrice mais seul un ou deux vérifient si elle est en « mode degré ».

Tout au long de l'exercice le quart des élèves utilise sans aucune différence la valeur exacte ou la valeur approchée.

Exercice 2

La moitié des élèves n'a pas le temps de le faire. Ceux qui le font n'ont aucune difficulté.

CONCLUSION

Cette activité a plu aux élèves. La semaine suivante, de nombreux élèves, en particulier des élèves en difficulté (mais intéressés par les mathématiques) ont demandé si on pouvait encore travailler sur la trigonométrie. Nous proposons ci-après trois autres exemples de tangentes exprimées à l'aide de racine carrée.

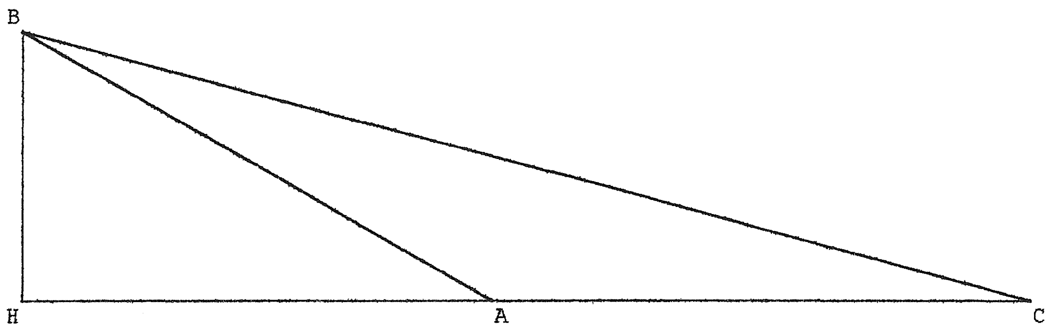
AUTRES EXEMPLES

EXERCICE 3

ABC est un triangle isocèle en A et l'angle $\widehat{BAC}$ mesure 30° .

1 – Faire une figure.
2 – Calculer la mesure de l'angle $\widehat{HBC}$.
3 – Calculer BH puis CH.
4 – En déduire que tan (15°) = $2 - \sqrt{3}$

EXERCICE 4



ABC est un triangle isocèle en A et $\widehat{BAC} = 150°$.
H est le pied de la hauteur issue de B.

1 – Calculer $\widehat{HBC}$.
2 – Calculer BH, AH puis CH.
3 – En déduire que tan (75°) = $2 + \sqrt{3}$

EXERCICE 5

Montrer, après avoir fait une figure adéquate, que tan (67,5°) = $1 + \sqrt{2}$

COSINUS 36°

NIVEAU : Classes de 2^{nde} et $3^{ème}$.

PREREQUIS :

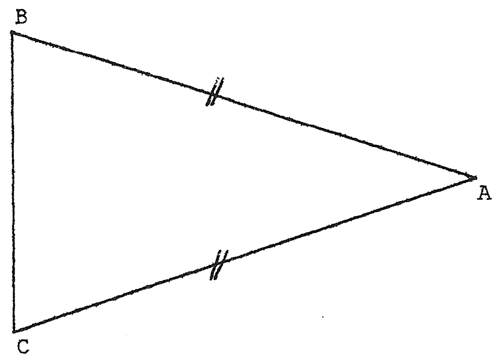
Droites remarquables dans un triangle et relations dans un triangle rectangle.

OBJECTIF :

Calculer la valeur exacte de cos 36°

Fiche : COSINUS 36°

Soit ABC un triangle isocèle en A tel que BC = 4 et $\widehat{ABC} = 72°$.



1) Construire la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ qui coupe [AC] en D et la hauteur du triangle ABD issue de D qui coupe [AB] en M.

2) Quelle est la nature du triangle ABD puis celle du triangle BCD ?

3) En déduire que BC = BD = AD = 4 et AM = BM = $\frac{AB}{2}$.

4) Démontrer que cos 36° $= \frac{AB}{8}$.

5) On se propose de calculer AB. On pose AB = x.
Soit E le pied de la hauteur issue de D dans le triangle BDC.
a) Montrer que BE = BM.
b) Montrer que BE = $\frac{x}{2}$, EC = 4 - $\frac{x}{2}$, CD = $x - 4$.
c) En utilisant le triangle BED, montrer que $DE^2 = 16 - \frac{x^2}{4}$.

En utilisant le triangle rectangle ECD, montrer que $DE^2 = \frac{3x^2}{4} - 4x$

d) En déduire que $x^2 - 4x - 16 = 0$.
e) Vérifier que : $(x-2)^2 - 20 = x^2 - 4x - 16$.
f) En utilisant les deux questions précédentes, montrer que AB = $2 + 2\sqrt{5}$.
g) Donner la valeur exacte de cos 36 °.

DEROULEMENT

Cette activité, proposée en travaux dirigés dans une classe de seconde au mois d'octobre, permet d'une part de rappeler des résultats du programme de géométrie de la classe de troisième et d'autre part de résoudre une équation du second degré après factorisation.

Il faut prévoir environ 1h20 minutes pour traiter cette activité.

OBSERVATION

Les quatre premières questions se font sans trop de problème. Il est cependant nécessaire de rappeler à certains élèves la construction de la bissectrice et les propriétés du triangle isocèle.

Les élèves ont plus de difficultés pour répondre à la question 5) a). Le résultat semble évident pour beaucoup mais ils ne voient pas comment le prouver avec les connaissances de troisième. Un élève précise : "les deux triangles rectangles BED et BDM ont deux angles égaux et l'hypoténuse égale. Ils sont donc égaux et BE = BM". Cette affirmation ne convainc pas. C'est alors qu'un autre élève lance l'idée : "on utilise la trigonométrie". Ainsi en calculant les cosinus des angles égaux EBD et DBM,

il écrit : $\cos(\widehat{EDB}) = \dfrac{BE}{BD} = \cos(\widehat{DBM}) = \dfrac{BM}{BD}$. Donc BE = BM

Les quatre questions suivantes se traitent dans l'ensemble correctement. Cependant une erreur apparaît chez quelques élèves, ils écrivent : "$DE^2 = BD^2 - BE^2 = 16 - \dfrac{x^2}{2}$".

Il est alors nécessaire de montrer la différence entre $\dfrac{x^2}{2}$ et $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2$.

Pour les deux dernières questions, beaucoup d'élèves ne savent pas quoi faire. Il faut rappeler l'objectif de l'activité et les réponses déjà obtenues. Les élèves ont des difficultés à factoriser $(x-2)^2 - 20$ car 20 n'est pas un carré parfait. Il n'est pas évident de savoir rejeter parmi les solutions de l'équation $(x-2)^2 - 20 = 0$ celle qui n'est pas solution du problème.

CONCLUSION

L'activité dans l'ensemble a été appréciée. Le fait de trouver la valeur exacte de cos 36° sans calculatrice leur a apporté une certaine satisfaction. A la fin, quelques élèves ont demandé si on pouvait calculer d'autres cosinus de la même manière.

CHAPITRE 4

RACINES CARREES

ET

COMPARAISON D'AIRES

FRACTIONS – AIRES - EQUATIONS

NIVEAU : Classes de $3^{\text{ème}}$ et 2^{nde}.

PREREQUIS :

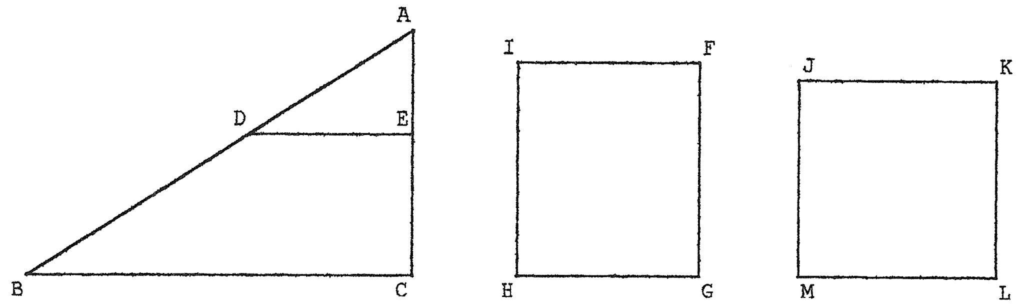
- Propriété de Thalès.
- Calculs d'aire.

OBJECTIF :

Manipulation des valeurs exactes et des valeurs approchées.

Fiche : FRACTIONS – AIRES - EQUATIONS

On considère les trois figures suivantes :



AE = 3

EC = 4

BC = 11

FG = 6,09

GH = 5,16

KL = JK = 5,61

1. Calculer DE.

2. Calculer les aires des quadrilatères DECB, FGHI, JKLM puis les ranger par ordre croissant.

DEROULEMENT :

La fiche est distribuée aux élèves avec la consigne de répondre aux questions posées. Le professeur intervient seulement à la fin pour engager le débat, à l'exception des rappels de cours.

OBSERVATION DANS UNE CLASSE DE $3^{ème}$

La première difficulté est de se rappeler la propriété de Thalès, celle-ci n'étant pas encore bien maîtrisée par les élèves. Les élèves arrivent alors sans difficulté au calcul de DE : si la plupart des élèves notent « $DE = \frac{33}{7}$ », certains ne sont pas gênés en écrivant « $DE = \frac{33}{7} = 4,71$ », d'autres ne donnent qu'une valeur approchée, enfin quelques-uns donnent toutes les décimales affichées par la calculatrice, pensant sans doute que c'est le résultat exact (cf trois extraits de copies d'élèves en annexe).

On pourrait donc penser que les élèves n'ayant donné que le résultat exact répondent correctement à la seconde question. En fait, il n'en est rien, puisque parmi ceux-ci, certains utilisent seulement une valeur approchée à 10^{-2} près en tronquant à deux décimales pour le calcul des aires, et donc obtiennent l'égalité de l'aire du trapèze et du rectangle.

Seulement deux élèves vont répondre correctement à cette question. Ce sont ces mêmes élèves qui engagent le débat en éveillant le doute chez les autres, pour finalement les convaincre de leur erreur.

Cette activité a présenté plusieurs intérêts, notamment elle a souligné la nécessité de ne pas se contenter d'une valeur approchée de DE à 10^{-2} près, d'autre part, sans que le professeur n'ait véritablement besoin d'intervenir, elle a conduit les élèves à engager par eux-mêmes un débat qui les a amenés à réfléchir sur la distinction entre valeur exacte et valeur approchée.

OBSERVATION DANS DEUX AUTRES CLASSES DE 3ème

L'activité a été testée dans deux classes différentes deux mois après la rentrée et peu après le cours sur la propriété de Thalès.

Deux tiers des élèves ont maîtrisé correctement la propriété de Thalès ainsi que les formules de calcul d'aires. Pour tous les élèves, seule la forme décimale peut représenter une mesure. Le classement des aires, par ordre croissant, s'est fait en utilisant exclusivement les écritures décimales approchées. Comme les élèves ont pris plus de deux décimales, ils ont obtenu le bon classement et il n'y a pas eu de débat.

On pourrait envisager d'interdire la calculatrice.

COMPARAISON D'AIRES

NIVEAU : Niveau $3^{ème}$ et 2^{de}

PREREQUIS :

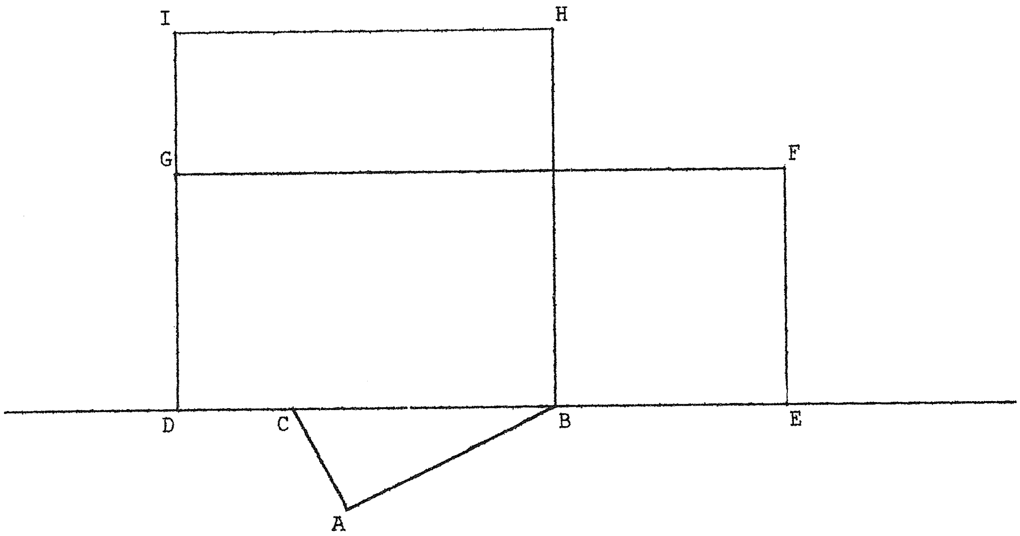
- Calculs des aires.
- Théorème de Pythagore.
- Egalités remarquables.
- Calculs fractionnaires.

OBJECTIFS :

- Manipulation de racines carrées.
- Se rendre compte de la nécessité d'utiliser les valeurs exactes.

Fiche : COMPARAISON D'AIRES

On considère la figure suivante :



ABC est un triangle rectangle en A. Les points B, C, D et E sont alignés. Le quadrilatère DEFG est un rectangle et BDIH est un carré.

$$AC = DC = \frac{1}{2} \quad \text{et } AB = BE = EF = 1$$

Question : Le rectangle DEFG et le carré BDIH ont-ils la même aire ?

DEROULEMENT :

Cette activité a été proposée comme application à la fin d'un cours sur la racine carrée. Il s'agit d'un travail individuel avec la possibilité d'utiliser la calculatrice.

OBSERVATIONS :

Les élèves ont apprécié l'activité.

A l'exception d'un élève, tous se sont mis méthodiquement au travail. Ils ont pensé :
- à appliquer le théorème de Pythagore pour calculer le côté [BC],
- à utiliser un produit remarquable dans le calcul de l'aire du carré,
- à calculer le côté [DE] pour trouver l'aire du rectangle.

La moitié des élèves ont fait des erreurs dues :
- à une mauvaise utilisation de la définition et des propriétés de la racine carrée.
  Exemples : $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{4}$; $\sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{3}{2}$; $1 + \sqrt{2} = \sqrt{3}$.
- à une méconnaissance des calculs sur les nombres en écritures fractionnaires.
  Exemple : $\frac{1}{4} + 1 = \frac{2}{4}$.
- à l'oubli des parenthèses : $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ est confondu avec $\frac{1^2}{2}$.
- à la non maîtrise des produits remarquables.

Les autres élèves, sauf un, ont répondu correctement à l'exercice en utilisant les valeurs exactes. Un élève a traité l'exercice en utilisant une valeur approchée de $\sqrt{5}$. Le résultat qu'il a obtenu a déclenché une discussion avec la classe.

En effet, on aboutit à deux conclusions différentes selon qu'on utilise valeurs approchées ou valeurs exactes.

ANNEXES

TRAVAUX D'ELEVES

Annexe 1

Mathématiques.

I) On considère les trois figures :

1) Calculer DE :

$$\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{11}{DE}$$

$DE = 4,71$

2°) Trapèze

$$A = \frac{(b+B)}{2} \times h$$

$$A = \frac{(4,71+11)}{2} \times 4$$

$A = 31,42$

L'aire du trapèze est de 31,42 cm²

$A = L \times l$

$A = 5,16 \times 6,09$

$A = 31,42$

L'aire du rectangle est de $\underline{31,42}$ cm²

$A = c^2$

$A = 5,61^2$

$A = \underline{31,47}$

L'aire du carré est de 31,47cm².

$\underline{31,47} > \underline{31,42} = 31,42$.

II)

JKLM > DECB = FGHI

Annexe 2

I)

1)

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$

$\frac{3}{7} = \frac{DE}{11}$

$\frac{33}{7} = 4,71$

→ Aire de DECB = 31,42

2) $\frac{(b+B)\times h}{2}$

$\frac{(11+4,71)\times 4}{2} = 31,42$

→ Aire de FGHI = 31,4244

$5,16 \times 6,09 = 31,4244$

→ Aire de JKLM = 31,4721

$5,61^2 = 31,4721$

DECB ; FGHI ; JKLM.

I) 1) D'après le théorème de Thalès, on a dans le triangle ABC :

$\frac{AD}{AB}\left(\frac{AE}{AC} = \frac{x}{BC}\right)$

EC = AE + EC.

EC = 3 + 4.

EC = 7.

$\frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} = \frac{3}{7} = \frac{DE}{11}$.

= 3 x 11 = 7 x x.

= 33 = 7x.

$x = \frac{33}{7}$.

2) L'Aire du trapèze DECB de formule = $\frac{(B+b) \times h}{2}$.

$\frac{\left(11 + \frac{33}{7}\right) \times 4}{2} = \frac{\left(\frac{77}{7} + \frac{33}{7}\right) \times 4}{2} = \frac{\left(\frac{110}{7}\right) \times 4}{2}$

$= \frac{\frac{440}{7}}{2} = \frac{440}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{440}{14} = \frac{220}{7}$

L'Aire du trapèze est de $\frac{220}{7}$.

- L'aire du rectangle IFGH de formule L x l.

6,09 x 5,16 = 31,4244.

L'aire du rectangle IFGH est 31,4244.

- L'aire du carré JKLM de formule c^2.

$5{,}61^2 = 31{,}4721$.

L'aire du carré JKLM est 31,4721.

- $31{,}4244 < \frac{220}{7} < 31{,}4721$.

IFGH < DECB < JKLM

CHAPITRE 5

RACINES CARREES

ET

EQUATIONS

CARRES MAGIQUES

***NIVEAU* :**

Classe de $3^{ème}$.

OBJECTIF :

Revoir les règles de calculs sur les radicaux.

Fiche : CARRES MAGIQUES

A – Carrés magiques pour l'addition

Règle : On dit qu'un carré est magique pour l'addition si la somme des termes de chaque ligne est égale à la somme des termes de chaque colonne et à la somme des termes de chacune des deux diagonales.

Compléter :

$\sqrt{32}$		$\sqrt{8}$
	$\sqrt{50}$	
		$\sqrt{72}$

$\sqrt{768}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{12}$	
$\sqrt{75}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{363}$	
$\sqrt{48}$	$\sqrt{675}$		$\sqrt{3}$

B – Carrés magiques pour la multiplication

Règle :

On dit qu'un carré est magique pour la multiplication si le produit des termes de chaque ligne est égal au produit des termes de chaque colonne et au produit des termes de chacune des deux diagonales.

Compléter :

$\sqrt{243}$		
1	9	
$27\sqrt{3}$		

$4\sqrt{2}$		
	4	
$8\sqrt{2}$		

DEROULEMENT :

L'activité a été traitée en classe de troisième à une semaine du Brevet des collèges. Il s'agissait donc de redécouvrir sous forme ludique les règles de calcul sur les radicaux vues en début d'année scolaire.

OBSERVATIONS :

1) Le premier carré est additif et la somme magique est triviale. Beaucoup d'élèves se rappellent encore (six mois après le cours) que $\sqrt{a} + \sqrt{b} \neq \sqrt{a+b}$. Mais seuls quelques-uns pensent immédiatement à écrire $\sqrt{32}$ sous la forme $4\sqrt{2}$ ... Une fois cette idée lancée tous les élèves remplissent le carré sans difficulté.

2) Le deuxième carré est toujours additif. Il a été expérimenté sous une forme un peu différente, c'est-à-dire sans $\sqrt{3}$ (case D4).

	1	2	3	4
A	$\sqrt{768}$	$\sqrt{27}$	$\sqrt{12}$	
B	$\sqrt{75}$	$\sqrt{300}$	$\sqrt{363}$	
C				
D	$\sqrt{48}$	$\sqrt{675}$		

La somme magique n'est pas calculable au début. Les élèves mettent des lettres dans les cases vides et cherchent des équations à une inconnue pour remplir une case du carré. Les élèves trouvent sans grande difficulté les contenus des cases C1, C2, A4, B4. Par contre, les contenus des cases C3, D3, C4, D4 ne peuvent être trouvés qu'en résolvant un système d'équations. Seuls trois élèves ont pu résoudre ce système sans l'aide du professeur. En affectant $\sqrt{3}$ à la case D4 on évite cette difficulté.

3) Le troisième carré est multiplicatif avec le produit magique immédiat. On ne constate aucune difficulté.

4) Le dernier carré est encore multiplicatif, mais le produit magique n'est pas calculable au départ. En s'inspirant des exemples précédents beaucoup d'élèves complètent ce carré magique en résolvant des équations à une inconnue.

CONCLUSION :

1) Le deuxième carré sans $\sqrt{3}$ impose de résoudre des systèmes d'équations : c'est une difficulté supplémentaire qu'on peut éviter en donnant le texte tel qu'il est présenté page 59 .

2) Une pratique préalable des carrés magiques est souhaitable pour pouvoir résoudre et surtout poser des équations du type :

$$\sqrt{27} + \sqrt{300} + x + \sqrt{675} = \sqrt{48} + x + \sqrt{363} + y$$
$$4\sqrt{2} \times c \times 8\sqrt{2} = c \times 4 \times d$$

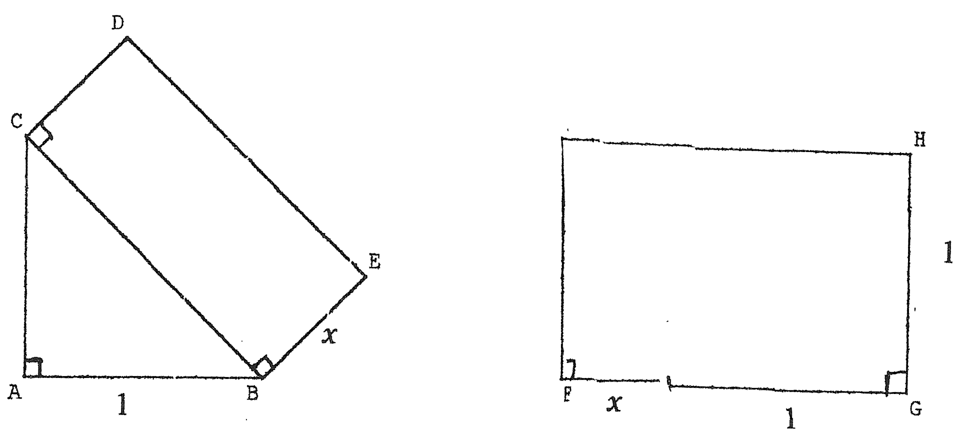
Voici deux autres activités qui n'ont pas pu être expérimentées faute de temps.

La première concerne la mise en équation d'un problème et sa résolution à l'aide d'une équation du premier degré où figure une racine carrée.

La deuxième est un exercice où les élèves rencontrent le même nombre écrit sous quatre formes différentes ; ils doivent le résoudre <u>sans calculatrice</u>.

Exercice 1 :

On considère les figures suivantes :



1) Comment choisir x pour que les aires des deux rectangles BCDE et FGHI soient égales ?

2) Construire ces deux rectangles.

Exercice 2 :

Vous écrirez tous vos calculs et toutes vos remarques sur la feuille.

On considère les expressions suivantes :

$A = x^2 - 0{,}75$
$B = (x - 1)(x + 1)$
$C = 2x - \sqrt{3}$
$D = 4x^2 + 2x - 3$

Calculer chacune des expressions pour les différentes valeurs de x données dans le tableau.

x	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{0{,}75}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$\frac{3}{2\sqrt{3}}$
$x^2 - 0{,}75$				
$(x - 1)(x + 1)$				
$2x - \sqrt{3}$				
$4x^2 + 2x - 3$				

Imprimé et édité
Par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Troisième trimestre 2001
N° de publication : 2001-01

I.R.E.M. de RENNES – Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu – Bâtiment 32 B
35042 RENNES CEDEX
☎ 02.99.28.26.34
02.99.28.16.38
Site WEB : http://www.univ-rennes1.fr

Commande :
☎ 02.99.28.26.08
e.mail : secirem@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : RACINE CARREE DE 5 EXISTE-T'ELLE ?

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS : BODIN N. – GARNIER E. – JEGOUREL C. – MASMOUDI M. – ROBERT G. – RUAMPS F. -

DATE : JUIN 2001

NIVEAU : 3$^{\text{ème}}$ – 2$^{\text{ème}}$

MOTS-CLES :
- nombre
- racine carrée
- rationnel
- irrationnel
- trigonométrie
- construction géométrique
- équation
- carré magique
- tableur

RESUME :

Pour beaucoup d'élèves de troisième et seconde, les irrationnels et, à un degré moindre, les rationnels non décimaux semblent ne pas avoir d'existence propre en dehors de toute approximation. L'utilisation, souvent trop systématique, de la calculatrice amplifie le problème.
Le groupe a privilégié le travail sur les irrationnels et il a mis en place des activités avec un double objectif :
- donner du sens à ces nombres
- les manipuler aussi naturellement que des entiers ou des décimaux.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	63	2 Euros ~~35~~ F ~~5,34~~ Euros	250 Ex.

ISBN 2-85-728-055-6