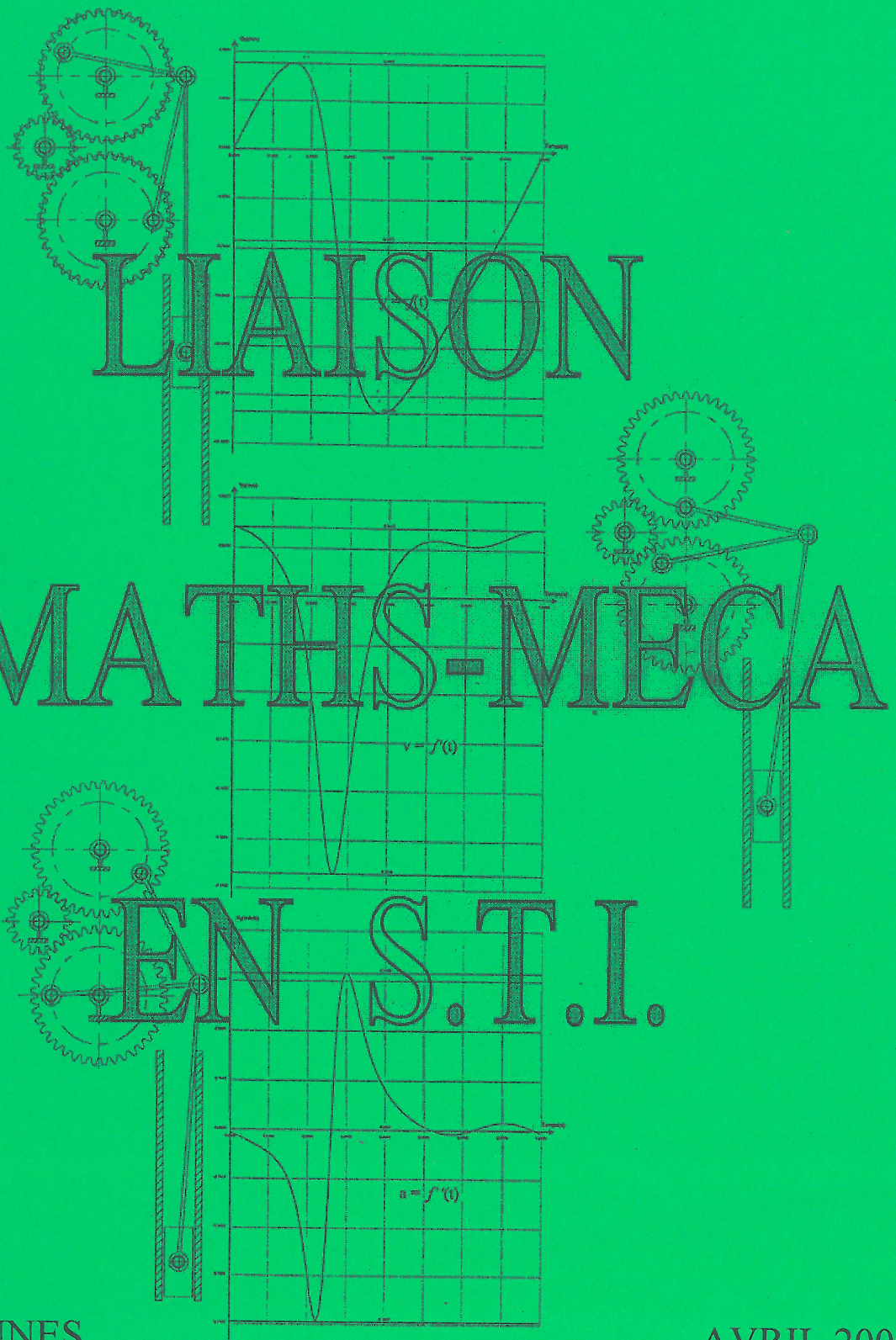
UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES



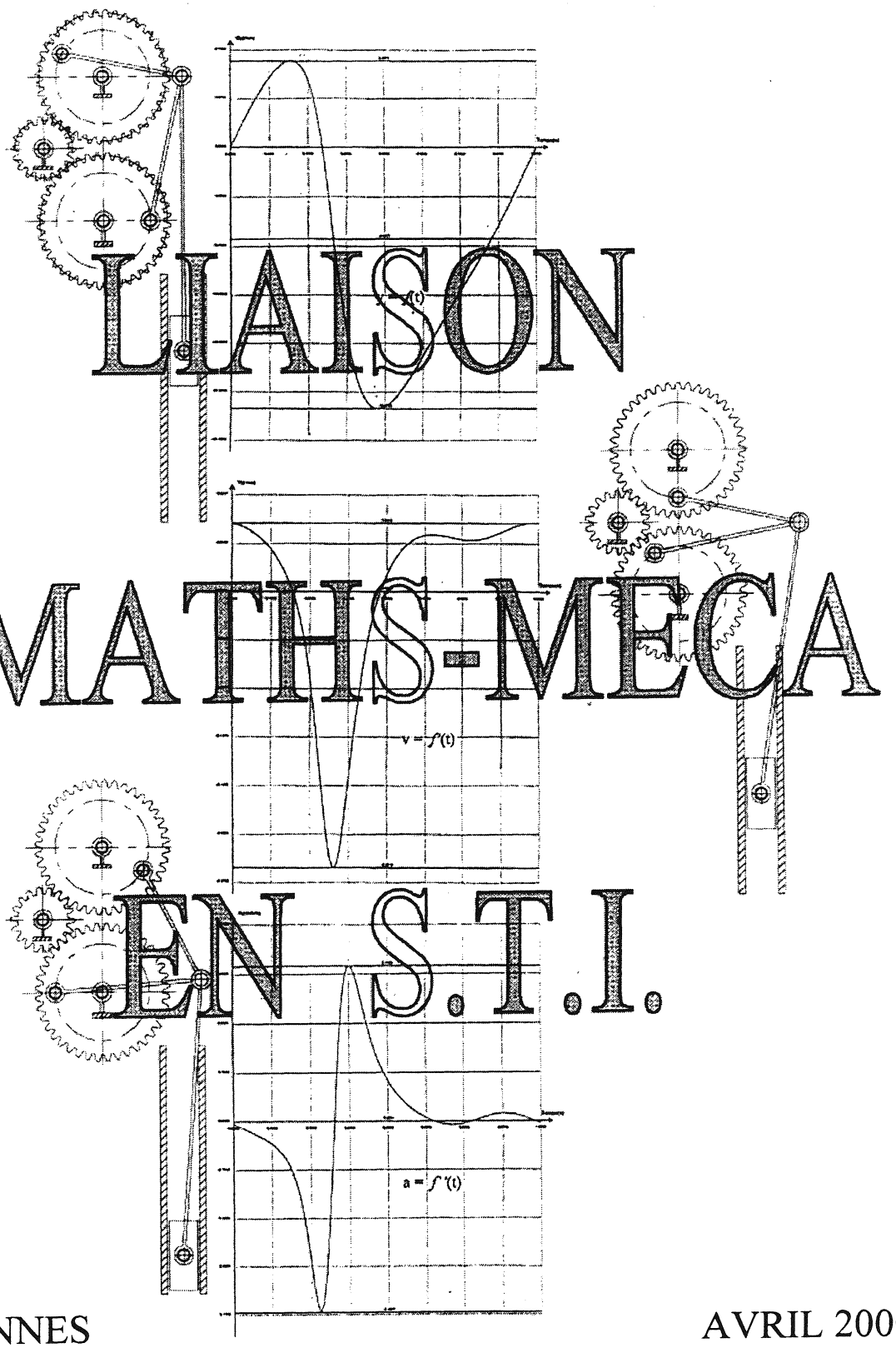
LIAISON MATHS-MECA EN S.T.I.

IREM de RENNES

AVRIL 2000

UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES



LIAISON MATHS-MECA EN S.T.I.

REM de RENNES

AVRIL 2000

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, une ou plusieurs pages blanches). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

ISBN 2-85728-051-3

Ce Document a été élaboré par les membres du groupe de recherche IREM
"LIAISON MATHS-MECA EN PREMIERE S.T.I."
Ce groupe a fonctionné sur les années 1997-1998 et 1998-1999

BOISSEAU Yvette	Lycée Joliot Curie -RENNES
HENIN Michel	Lycée Bréquigny -RENNES
LARVOR Jean Michel	Lycée Joliot Curie -RENNES
LE TREUT Lèone	Lycée Bréquigny -RENNES
RAFFIER Danielle	Lycée Joliot Curie -RENNES
RAZAFIMAHERY Fulgence	Université de RENNES 1
ROCA Philippe	Lycée Bréquigny -RENNES

La couverture a été réalisée par Jean Michel LARVOR
Les dessins techniques ont été réalisés par :
Michel HENIN, Jean Michel LARVOR, Philippe ROCA
La mise en page a été assurée par Fulgence RAZAFIMAHERY
La reprographie par Françoise LE BESCOND

Introduction générale

Cet ouvrage intéressera tous ceux qui pensent qu'on ne peut pas enseigner "sa" matière sans penser aux autres collègues qui enseignent au même niveau.
Dans le cadre d'une première STI, nous avons essentiellement tenté de mettre en évidence les sujets communs enseignés en mécanique et en mathématiques. Nous avons essayé de trouver des activités permettant aux élèves de se sentir en terrain connu lorsque les notions sont abordées à la fois en mathématiques et en mécanique. Ceci a donné lieu à un échange de point de vue très fructueux sur la manière d'aborder certains domaines.
Par contre, nous avons constaté dès le début du travail une différence importante dans le vocabulaire employé en maths et en mécanique.
Les débats ont souvent été animés, chacun cherchant à convaincre l'autre du bien fondé de telle ou telle notation. Nous sommes finalement tombés d'accord sur le fait que chaque matière devait employer un langage qui lui est propre sans ignorer l'autre.

Les exemples qui suivent mettent en évidence certaines de ces différences.

Vecteurs

En mathématiques, lorsqu'on parle d'un vecteur, le représentant est en général quelconque. Alors qu'en cinématique, le vecteur a nécessairement un point d'application (vecteur lié) et en statique, le vecteur "glisse sur une droite" (vecteur glissant).

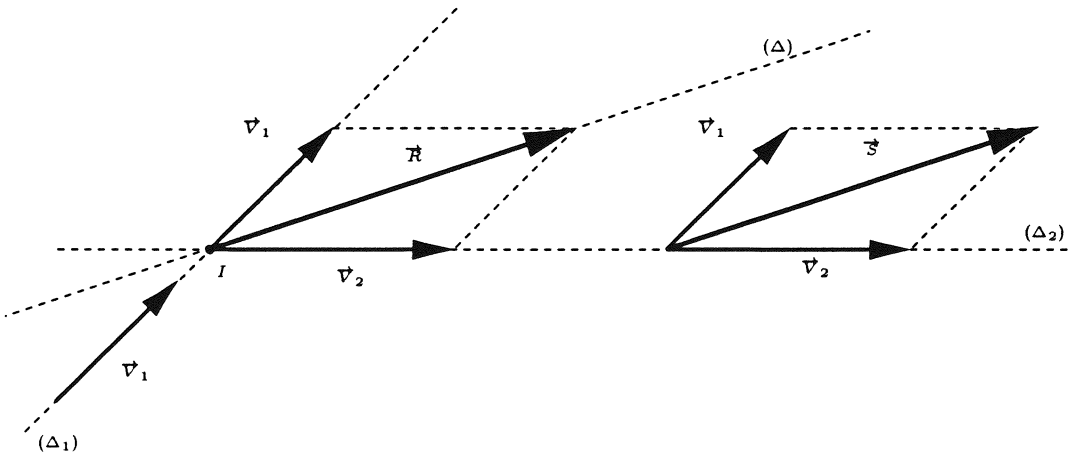
Résultante

En statique, la résultante (pour les vecteurs glissants) et la somme (pour les "vecteurs libres") de vecteurs sont différentes.

Il est donc prudent que les professeurs de mathématiques évitent d'utiliser le terme ou vocable "résultante", car celui-ci a une définition bien particulière en mécanique :

• la résultante n'est pas une somme vectorielle quelconque ; son support est une droite passant par un point particulier de l'espace.

• les expressions "résultante" et "somme de vecteurs" ne recouvrent pas la même idée, comme le montre l'exemple ci-dessous :

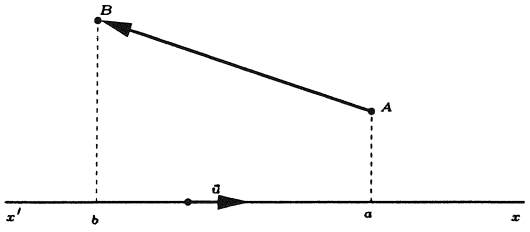


La résultante est le vecteur glissant sur (Δ), tandis que la somme peut être n'importe quel vecteur $\vec{S}$ égal à $\vec{R}$.

Projection

En mathématique, la projection d'un vecteur est toujours un vecteur. En mécanique celle-ci peut être un nombre, ou un vecteur selon qu'on projette sur un axe ou sur une droite :

la projection d'un vecteur sur un axe est un nombre comme le montre cet extrait d'un cours de mécanique :



la projection orthogonale du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sur l'axe $x'x$ est $\overline{ab}$, mesure algébrique de $\overrightarrow{ab}$ où a et b sont les projections sur $x'x$ de A et de B.
Si α est l'angle orienté de $\overrightarrow{AB}$ avec l'axe $x'x$; $\alpha = (\overrightarrow{x'x}, \overrightarrow{AB})$, alors : $\overline{ab} = ||\overrightarrow{AB}|| \cos\alpha$ et on a :

- $\overline{ab} > 0$ *si* $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$
- $\overline{ab} < 0$ *si* $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$
- $\overline{ab} > 0$ *si* $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
- $\overline{ab} = 0$ *si* $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

La projection d'un vecteur sur une droite est un vecteur, ce qui est justifié pour le professeur de mécanique, par le fait que sur une droite, on n'a ni origine ni unité.

Dérivées

La différence se situe surtout ici sur le choix des variables :

- la lettre x désigne le plus souvent une variable en mathématiques, elle devient une fonction en mécanique, où la variable est alors le temps ou l'angle de rotation ;
- la dérivée est notée de façon conventionnelle f' en mathématiques, il ne faudrait pas oublier la notation $\frac{df}{dx}$ et plus encore $\frac{dx}{dt}$ ou autre.

A titre de documentation, le tableau suivant indique les outils mathématiques nécessaires en fonction des thèmes abordés en mécanique.
Il est à signaler que le produit vectoriel et les primitives ne sont pas abordés en classe de première au niveau du cours de mathématiques.
En ce qui concerne les torseurs, couramment utilisés par les élèves en mécanique, ils ne sont pas au programme du secondaire.

THÈME	CLASSE	OUTIL
I. Statique		
a) graphique	1	• vecteur
	1	• somme vectorielle
	1	• résultante de vecteurs glissants
	1	• "décomposition" d'un vecteur somme en deux vecteurs
b) analytique	1	• repère trirectangle orthonormé
	1	• produit scalaire (projection d'un vecteur sur un axe)
	1	• somme vectorielle nulle
	1	• produit vectoriel
	T	• torseur
II. Cinématique		
a) graphique	T	• vecteur
	T	• somme vectorielle
	T	• résultante de vecteurs glissants
	T	• "décomposition" d'un vecteur somme en deux vecteurs
b) analytique	1	• repère trirectangle orthonormé
	1	• dérivée
	1	• primitive
III. Résistance des matériaux		
a) graphique	1	• vecteur
	1	• somme vectorielle
	1	• résultante de vecteurs glissants
	1	• "décomposition" d'un vecteur somme en deux vecteurs
b) analytique	T	• repère trirectangle orthonormé
	T	• dérivée
	T	• primitive
IV. Dynamique		
a) analytique	T	• repère trirectangle orthonormé
	T	• produit scalaire (projection d'un vecteur sur un axe)
	T	• somme vectorielle nulle
	T	• produit vectoriel
	T	• torseur

Chapitre 1

GEOMETRIE ET MECANIQUE

1.1 Introduction

Les élèves de Première Sciences et Techniques Industrielles ont souvent des difficultés en mécanique, celles-ci peuvent avoir diverses causes, l'une d'entre elles est une mauvaise maîtrise de l'outil vectoriel et de la trigonométrie à l'entrée en classe de première.
Un choix plus judicieux d'exercices de constructions vectorielles, et ce dès la classe de seconde, pourrait assurer une meilleure maîtrise de l'outil. Il faudrait aussi penser que les projections de vecteurs sur deux axes sécants ne sont pas toujours orthogonales et développer l'utilisation de repères non orthogonaux.
Enfin les éléments de base de trigonométrie doivent être connus pour permettre au professeur de Mathématiques d'étudier le plus rapidement possible le produit scalaire en début de Première.

1.2 Géométrie et mécanique

L'enseignement de la mécanique nécessite l'utilisation de la géométrie vectorielle

- **en statique :** équilibre d'un solide soumis à plusieurs forces ;
- **en cinématique :** position, déplacement, vitesse, accélération d'un point d'un solide ;
- **en dynamique :** quantité d'accélération et force appliquée à un solide ;
- **en résistance des matériaux :** contrainte.

La résolution des problèmes se fera :

• soit graphiquement à l'aide de constructions géométriques simples dans le plan.
• soit analytiquement, les calculs se feront à l'aide de vecteurs définis dans un repère orthonormé, généralement nommé $(O; xyz)$.
Le but de ce chapitre est d'essayer de proposer aux élèves des exercices de géométrie (coordonnées, sommes vectorielles) qui les aideront à résoudre les problèmes de mécanique.

1.2.1 Repère et notions de coordonnées, trigonométrie

En mécanique, on utilise le plus souvent des repères.
• Pour expliquer le fonctionnement d'un mécanisme à travers ses mouvements.
• Pour positionner des points caractéristiques (centre de liaison, point d'application d'action mécanique,...)
• Pour résoudre des problèmes analytiquement (utilisation du produit scalaire, utilisation du produit vectoriel. Il faut noter que cette dernière notion n'est pas exigible en mathématiques).
• Un repère tridimensionnel s'impose.
Nous avons simplement conçu des exercices qui nous semblaient pouvoir rendre service aux élèves : ceux-ci ont besoin de savoir retrouver très vite les coordonnées d'un vecteur lorsqu'on connaît sa norme et l'angle que fait celui-ci avec une direction.
Il y a un certain nombre d'avantages à utiliser ces notions dès le début de l'année en mathématiques en classe de première (ces fiches ont été données en septembre) :
• Les révisions de trigonométrie sont faites dans la foulée.
• Ce genre d'exercices peut nous permettre d'arriver progressivement à la représentation géométrique d'un nombre complexe.

ACTIVITE 1

Cette activité a été abordée en modules dès les premiers jours de la rentrée.
Elle prépare les activités qui vont suivre. Plusieurs points nous semblent intéressants dans cette fiche.
Un des vecteurs a toujours pour norme 1, ce qui permet de trouver ses coordonnées en utilisant le cercle trigonométrique.
Nous avons eu ainsi l'occasion de faire des révisions de trigonométrie sans qu'il faille reprendre entièrement le cours de trigonométrie de seconde.
Il n'a pas été trop difficile de trouver les coordonnées de $k\vec{u}$.

Cette activité n'a pas posé de problèmes particuliers mis à part pour les élèves qui n'avaient pas bien assimilé la trigonométrie du programme de seconde.

ACTIVITE 2

L'exercice 1 n'a posé aucun problème aux élèves si ce n'est l'utilisation de la notion d'angle $(\vec{i}, \vec{u})$ qui a gêné les élèves sortant de la classe de seconde. L'habitude a été assez vite prise de l'employer. En mécanique, il semble que cette notation soit systématiquement utilisée.
En ce qui concerne l'exercice 2, il a fallu vraiment insister pour obtenir la justification des coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Les élèves ont deviné les coordonnées sans penser à utiliser une translation ou l'égalité des vecteurs $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{AB}$.

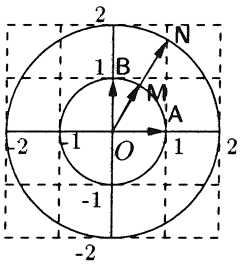
ACTIVITE 3

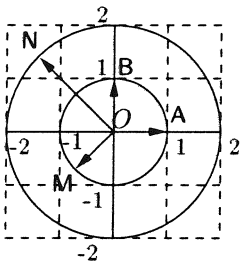
En ce qui concerne l'exercice 1 qui était en partie l'exercice inverse des exercices rencontrés dans les activités 1 et 2, peu d'élèves sont arrivés à donner la bonne réponse sans aide. Cet exercice a été donné dans le but de faciliter la résolution des exercices que l'on va rencontrer dans le paragraphe constructions vectorielles.
Quant à l'exercice suivant qui permet de réinvestir les connaissances acquises en ce qui concerne les coordonnées de vecteurs, il semble que celui ci ne pose pas de problème aux élèves.

ACTIVITE 1

Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$, avec $\vec{i}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{j}=\overrightarrow{OB}$. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ suivants : $\vec{u}=\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{ON}$.

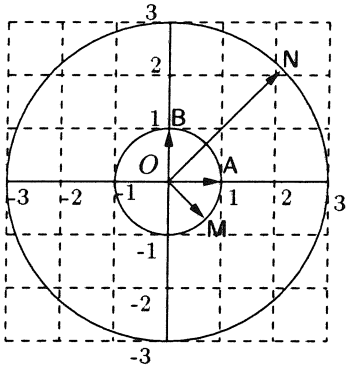
$(\vec{i},\vec{u})=\dfrac{\pi}{3}$

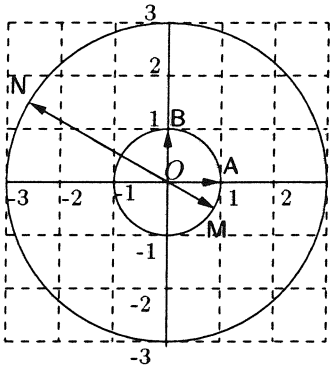




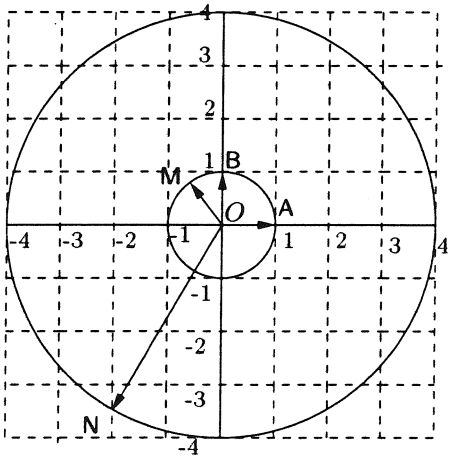
$(\vec{i},\vec{u})=-\dfrac{3\pi}{4}$

$(\vec{i},\vec{u})=-\dfrac{\pi}{4}$

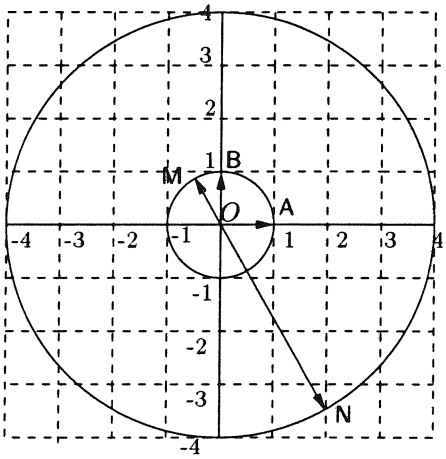




$(\vec{i},\vec{u})=-\dfrac{\pi}{6}$



$(\vec{i},\vec{u})=\dfrac{2\pi}{3}$

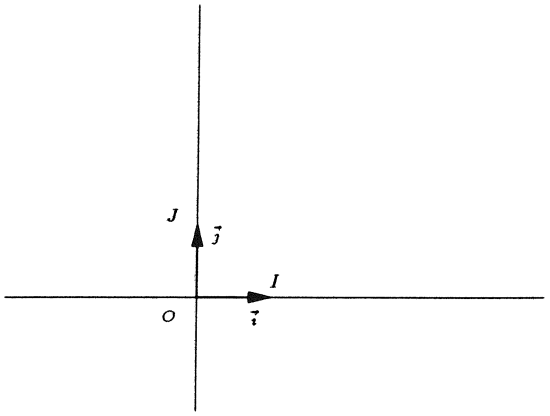


$(\vec{i},\vec{u})=\dfrac{2\pi}{3}$

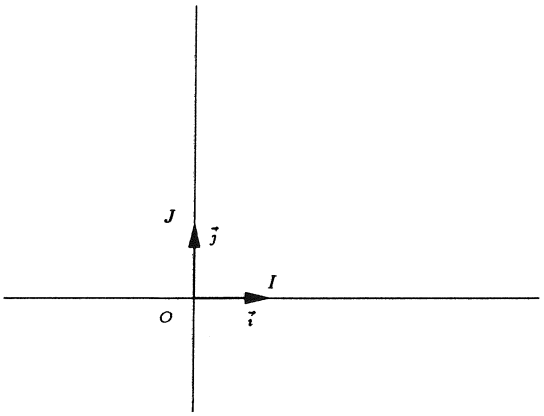
ACTIVITE 2

Exercice 1

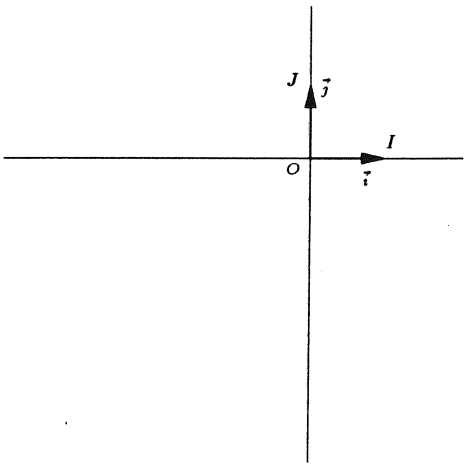
Le plan est rapporté au repère orthonormé $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.
Soit $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$ et A tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$.
Faire une figure puis déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OA}$ et les coordonnées de A, dans les cas suivants :



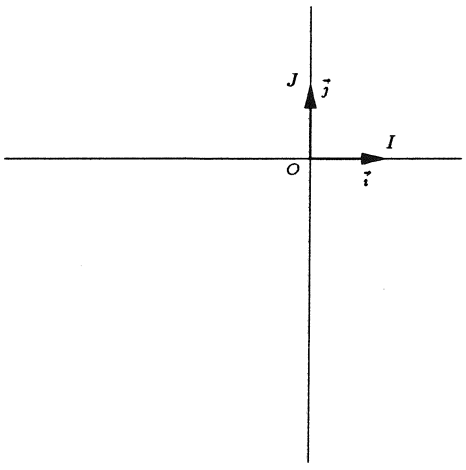
(1) $||\vec{u}|| = 2$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = \dfrac{\pi}{6}$



(2) $||\vec{u}|| = 3$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = \dfrac{2\pi}{3}$



(3) $||\vec{u}|| = 4$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = -\dfrac{3\pi}{4}$



(4) $||\vec{u}|| = 4$ et $(\vec{i}, \vec{u}) = -\dfrac{5\pi}{6}$

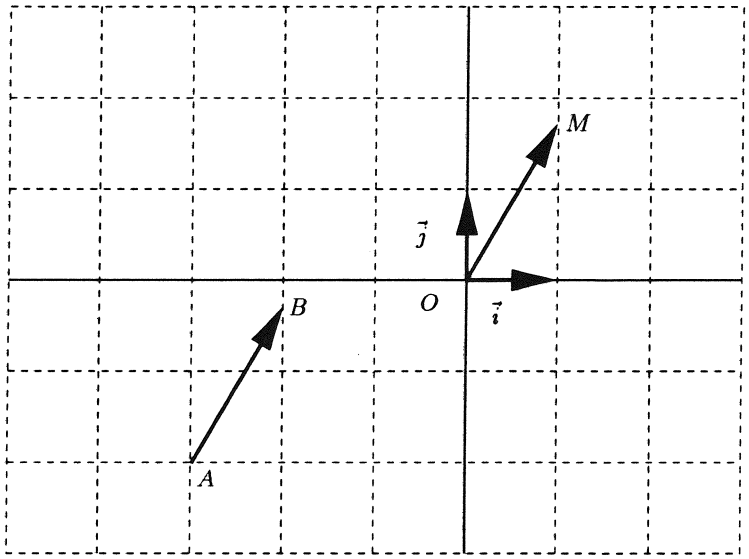
Exercice 2

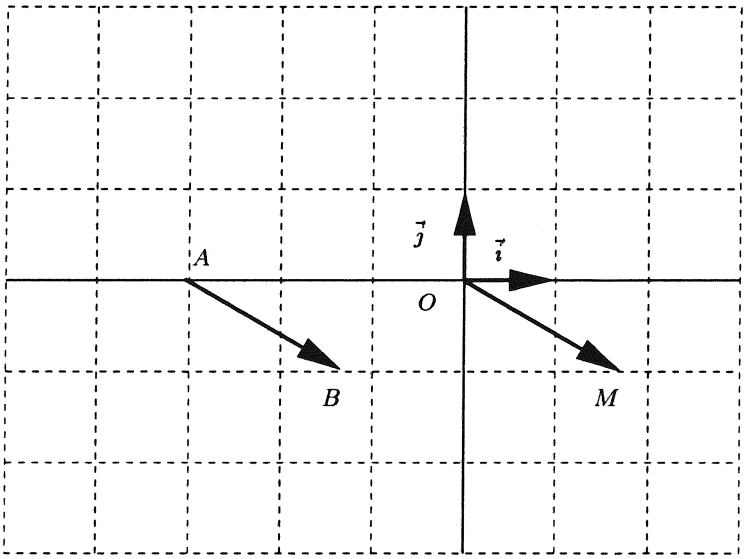
Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$.

Déterminer les coordonnées de M et de B dans chacun des cas suivants :

1. $(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $||\overrightarrow{OM}|| = 2$; $A(-3,-2)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.

2. $(\vec{i},\ \overrightarrow{OM}) = -\dfrac{\pi}{6}$ et $||\overrightarrow{OM}|| = 2$; $A(-3,0)$ $\quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM}$.





ACTIVITE 3

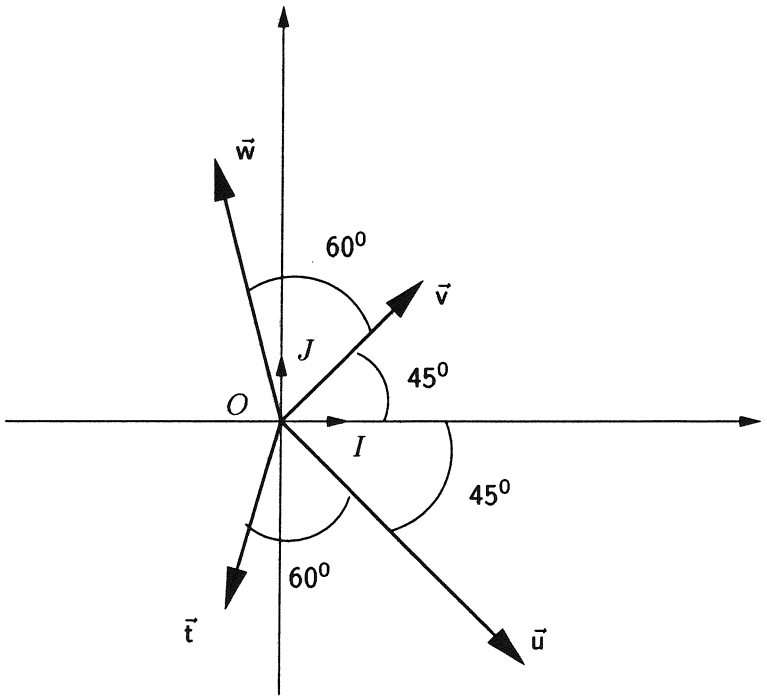
Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i},\ \vec{j})$, avec $\overrightarrow{OI} = \vec{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{j}$.
On sait que $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \sqrt{3}\ \vec{j}$ et que $\overrightarrow{OB} = -\sqrt{3}\ \vec{i} + \vec{j}$.
Faire une figure.

1. Déterminer OA, OB, puis les angles de vecteurs $(\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OA})$ et $(\overrightarrow{OJ},\ \overrightarrow{OB})$.
2. Construire le point C' tel que $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ et en déduire C tel que :
$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$.
3. Calculer OC' en déduire OC.

Exercice 2

On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{t}$, tels que : $||\vec{u}|| = 5$, $||\vec{v}|| = ||\vec{t}|| = 3$ et $||\vec{w}|| = 4$. En utilisant le schéma ci-dessous, déterminer les coordonnées de chacun de ces vecteurs, puis déterminer les coordonnées de $\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} + \vec{t}$, ainsi que $||\vec{s}||$, dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.
Faire ensuite une construction soignée de $\vec{s}$ et vérifier le résultat trouvé pour $||\vec{s}||$.



1.2.2 Constructions vectorielles

En mécanique, les vecteurs ont généralement un point d'application, il semble intéressant en mathématiques de proposer aux élèves des exercices de construction vectorielle dans lesquels la somme de deux ou plusieurs vecteurs a une origine fixée.
Lors de la résolution graphique en mécanique, nous rencontrons trois types de représentants vectoriels :

- Vecteurs
- Vecteurs glissants
- Vecteurs liés (ou pointeurs)

Les opérations sur les vecteurs glissants et les vecteurs liés s'apparentent dans la démarche à celles sur les vecteurs.
La présentation spécifique des vecteurs glissants et des vecteurs liés est vue exclusivement en mécanique. Des exemples sont donnés dans l'annexe qui suit les activités.

ACTIVITE 4

Cette activité constitue une transition entre les paragraphes "repère et coordonnées" et "constructions vectorielles". Les méthodes employées par les élèves pour placer les point B *et* C *sont variées. Certains construisent l'opposé du vecteur* $\overrightarrow{OA}$ *et projettent son extrémité sur* $[Ox)$ *ou* $[Oy)$*, ils n'ont pas alors de difficultés à retrouver les valeurs des angles et à utiliser la trigonométrie pour calculer* OB *et* OC*. D'autres tracent des parallèles à* $[Ox)$ *et* $[Oy)$ *passant par* A*. Dans la deuxième question, ceux qui construisent l'opposé de* $\overrightarrow{OA}$ *font parfois une projection orthogonale sur* $[Ot)$ *à la place de la projection parallèlement à* $[Oy)$*.*

ACTIVITE 5

Dans l'exercice 1, les élèves construisent le vecteur $\vec{v}_3$ *en utilisant la règle du parallélogramme ou en mettant les vecteurs «bout à bout» ; pour le vecteur* $\vec{v}_4$*, certains écrivent* $\vec{v}_4 = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$*, et réalisent la somme vectorielle* $\vec{v}_2 + (-\vec{v}_1)$ *; d'autres dessinent un représentant en joignant les extrémités des vecteurs et reportent ensuite celui-ci pour avoir le représentant d'origine* A*.*
Dans l'exercice 2, pour le premier cas, les élèves construisent souvent un représentant de $\vec{v}_2 + \vec{v}_1$ *puis le vecteur opposé. Dans le deuxième cas, certains utilisent la même technique que dans le premier (avec report ou non pour avoir l'origine en* A*), ces élèves auront des difficultés dans l'exercice 3.*

Dans l'exercice 3, il faut parfois aider les élèves pour qu'il réussisent à faire les constructions, l'exercice 4 ne présente ensuite aucun problème.

ACTIVITE 6

Le premier cas a posé aux élèves un problème de justification, car la somme est le vecteur nul.
Pour le deuxième cas, tous les élèves utilisent la mise «bout à bout» des vecteurs. Pour de nombreux élèves $\vec{s}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, ce qui n'est pas le cas, d'où l'intérêt de la justification.
Pour faire cet exercice :
• *Le prof de maths préfère utiliser la règle du parallélogramme pour calculer $\vec{v} + \vec{w}$, ou bien utiliser les particularités de la figure.*
• *Le prof de mécanique prend un repère, calcule les coordonnées puis la norme, ou construit la somme et mesure $||\vec{s}||$.*
Intuitivement le professeur de mécanique pense que $\vec{s} = 2\vec{v}$.

ACTIVITE 7

Cette activité n'a pas été expérimentée au cours de mathématiques. Elle doit pouvoir être réalisée sans difficultés dans le cadre du cours de mécanique, si les élèves ont assimilé les exercices des activités précédentes.

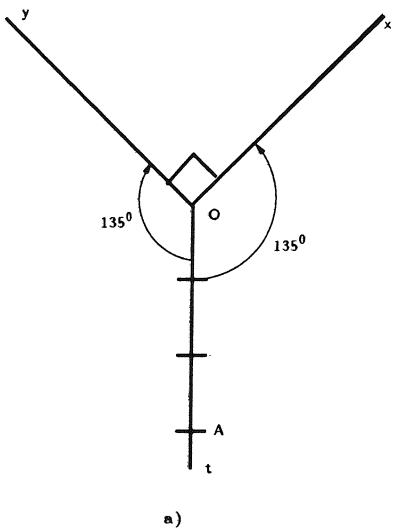
ACTIVITE 4

On donne trois demi-droites : $[Ox)$, $[Oy)$ et $[Ot)$.

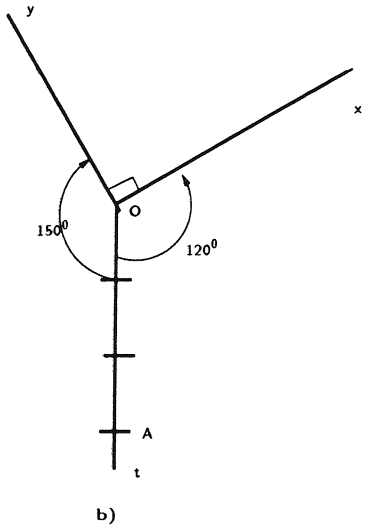
1. Soit A le point $[Ot)$ tel que $OA = 3$. Déterminer B sur $[Ox)$, C sur $[Oy)$ tels que : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$, puis calculer OB et OC dans les cas suivants :

a) $\widehat{xOt} = \widehat{tOy} = 135^0$

b) $\widehat{xOt} = 120^0$ et $\widehat{tOy} = 150^0$.

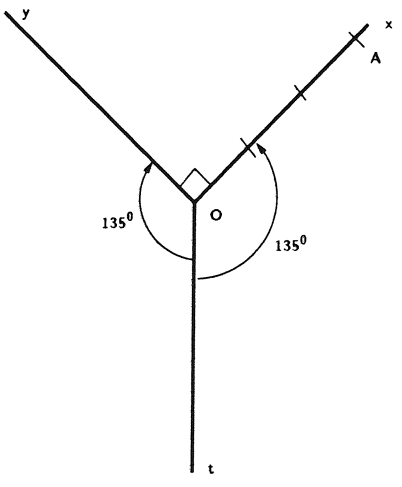


a)

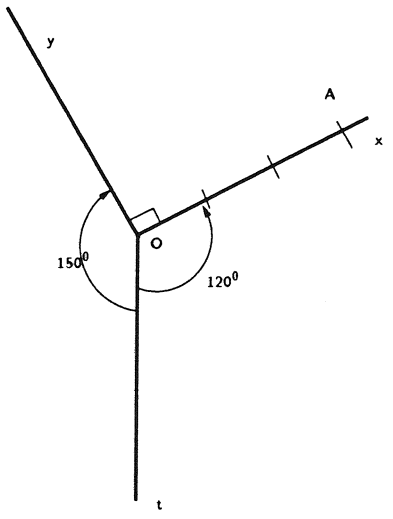


b)

2. Recommencer le travail en prenant A sur $[Ox)$, B sur $[Oy)$ et C sur $[Ot)$.



a)



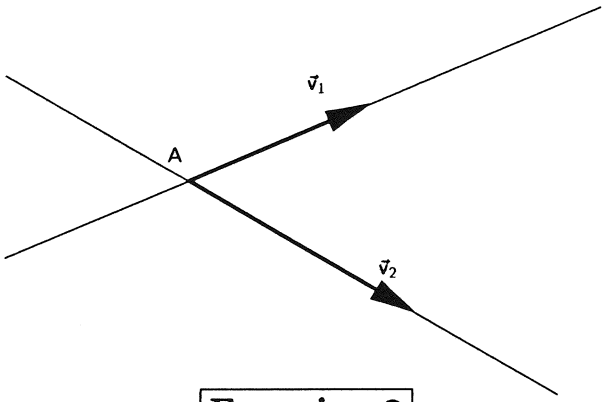
b)

ACTIVITE 5 : VECTEURS ET SOMME DE VECTEURS

Exercice 1

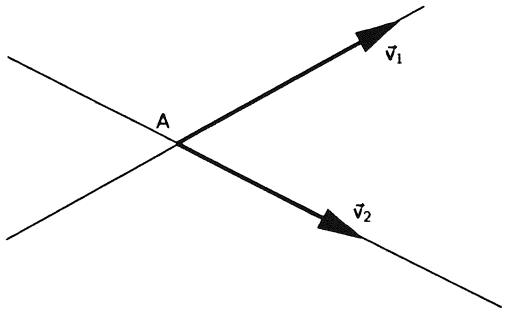
Construire les représentants d'origine A pour les vecteurs $\vec{v}_3$ et $\vec{v}_4$ tels que :

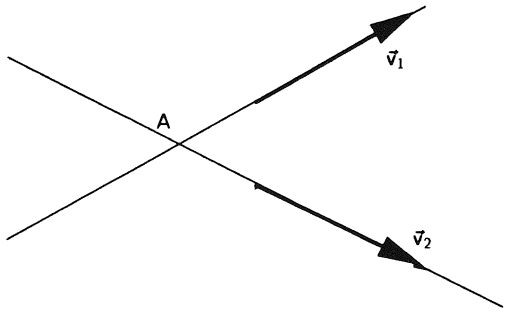
$$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3 \quad ; \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_4 = \vec{v}_2$$



Exercice 2

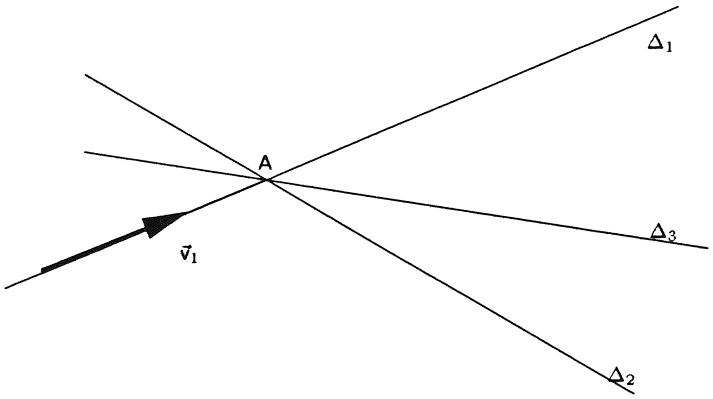
Construire le représentant d'origine A pour le vecteur $\vec{v}_3$ tel que : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$ dans chacun des cas suivants.





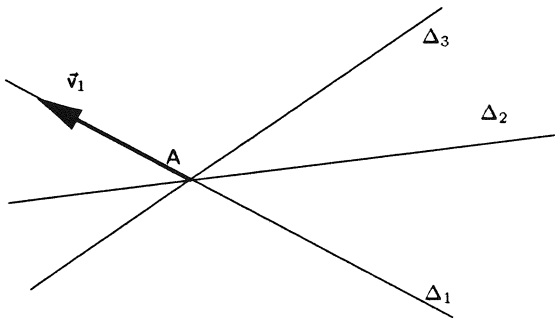
Exercice 3

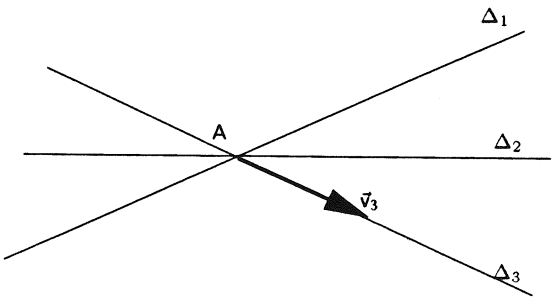
On sait que : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0}$; $\vec{v}_2$ a même direction que Δ_2, $\vec{v}_3$ a même direction que Δ_3. Construire un représentant de $\vec{v}_2$ et de $\vec{v}_3$. Construire les représentants d'origine A pour ces vecteurs.



Exercice 4

Δ_1, Δ_2 et Δ_3 représentent les directions des vecteurs $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ et $\vec{v}_3$.
Construire les représentants d'origine A des vecteurs manquants dans chacun des cas suivants, sachant que : $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = \vec{v}_3$



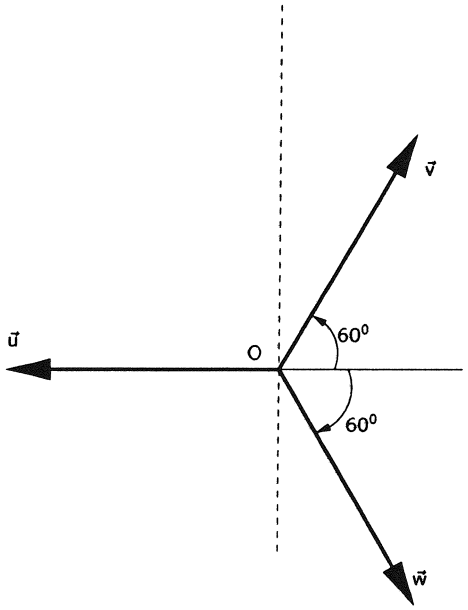


ACTIVITE 6

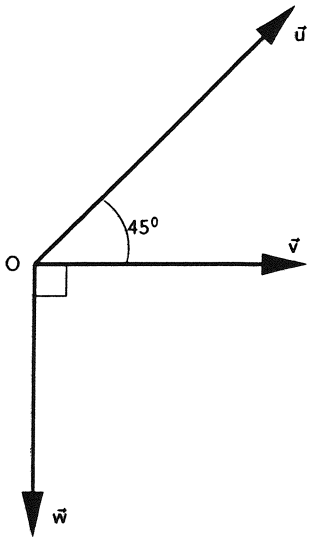
On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$. Dans chaque cas, construire

$$\vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$$

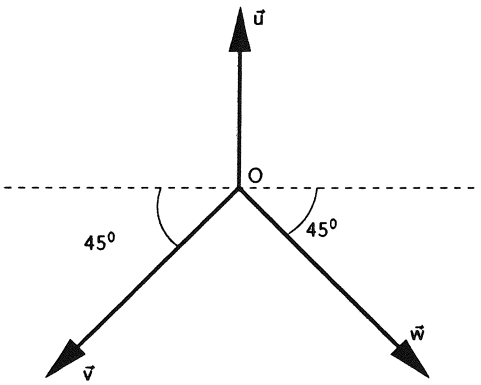
et calculer $||\vec{s}||$.



$||\vec{u}|| = ||\vec{v}|| = ||\vec{w}|| = 3$



$||\vec{u}|| = 4$; $||\vec{v}|| = ||\vec{w}|| = 3$



$||\vec{u}|| = 2$; $||\vec{v}|| = ||\vec{w}|| = 3$

ACTIVITE 7

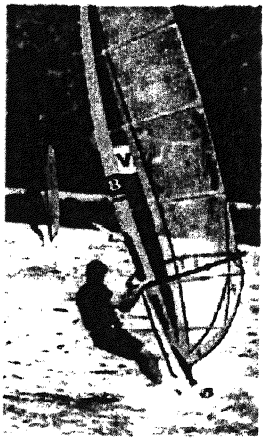
STATIQUE GRAPHIQUE
EQUILIBRE D'UN SOLIDE SOUMIS A L'ACTION DE 3 GLISSEURS.

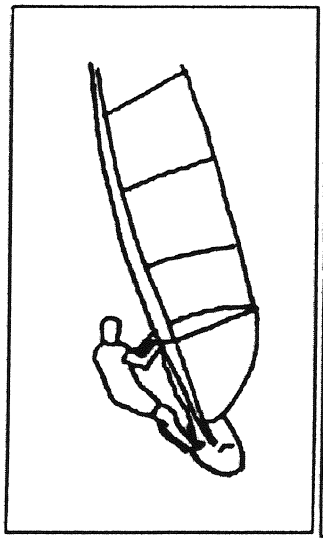
On étudie l'équilibre d'un véliplanchiste, se déplaçant à vitesse constante.
Les 3 actions exercées sur le véliplanchiste sont :

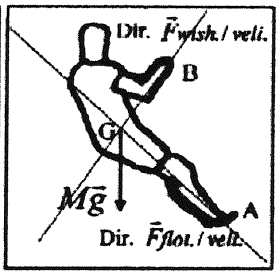
- Le poids en G.
- L'action du flotteur en A.
- L'action du wishbone en B.

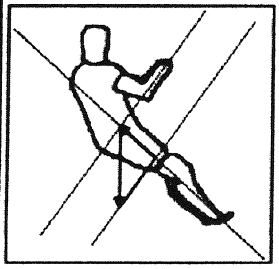
Données:

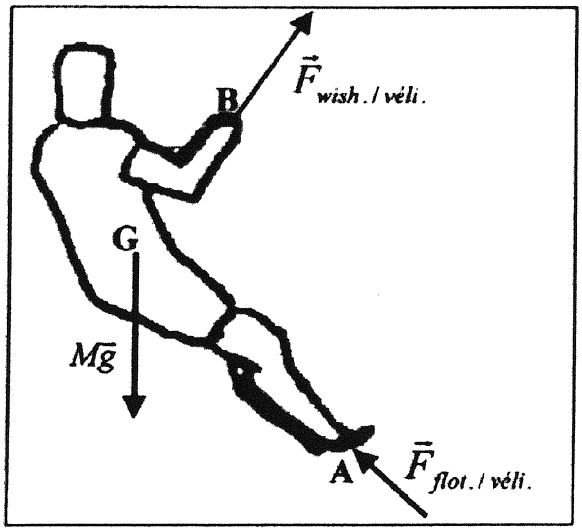
- Le poids du véliplanchiste.
- La direction de l'action du wishbone définie par l'inclinaison des avant-bras.
- La direction de l'action du flotteur sur les jambes.





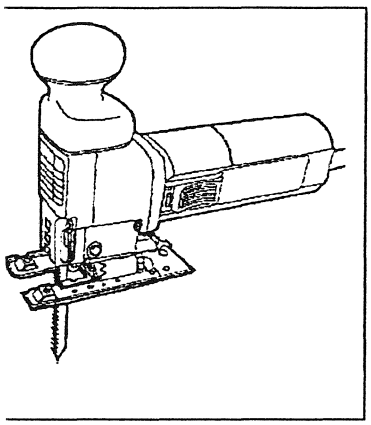


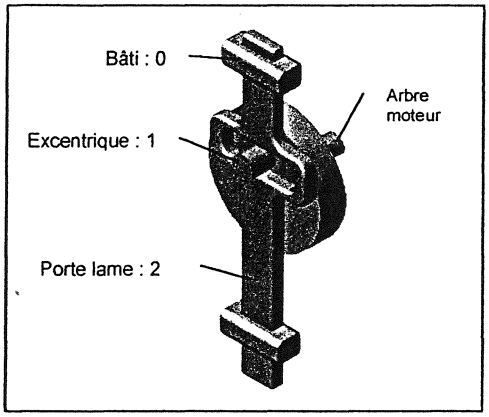


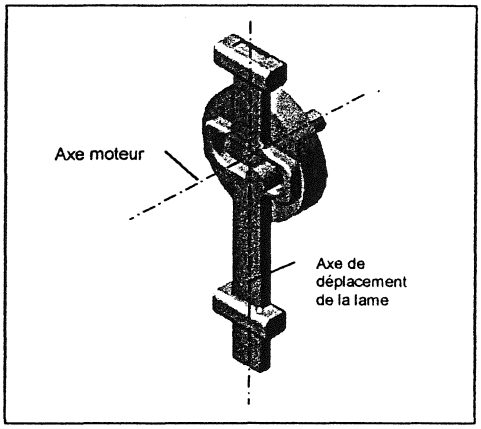


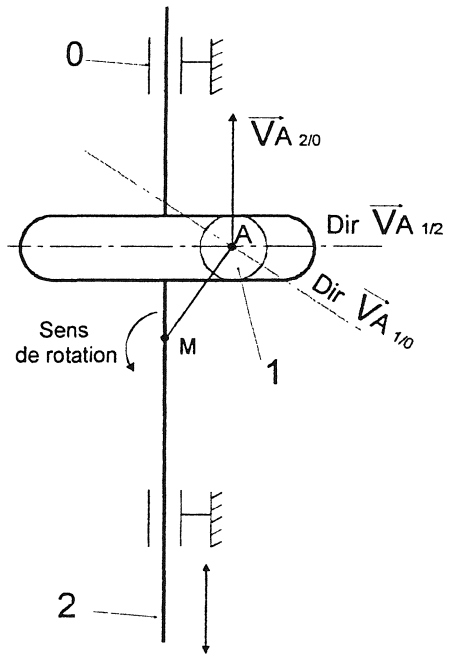
La détermination de l'action du wishbone sur le véliplanchiste et celle du flotteur sur le véliplanchiste correspond à la détermination de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ dont les directions sont connues et tels que $\vec{U}+\vec{V}+\vec{W}=\vec{0}$.

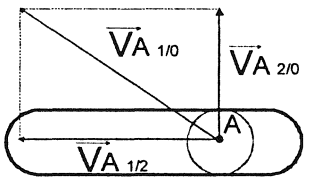
CINEMATIQUE DU SOLIDE
LOI DE COMPOSITION DE VITESSES.

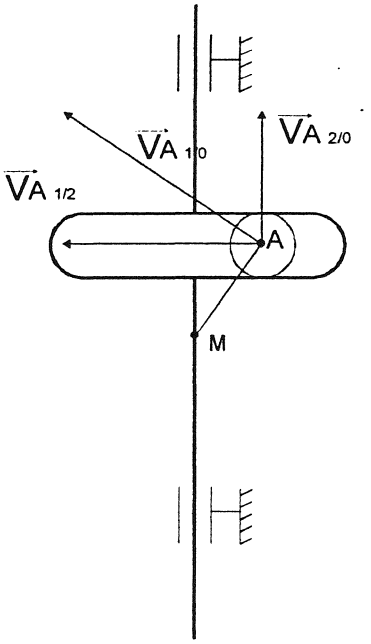












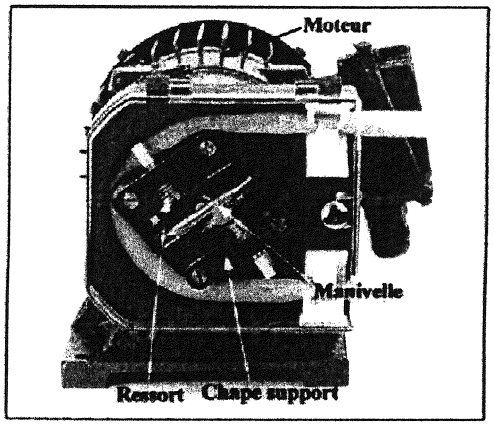
$$\vec{V}A_{1/0} = \vec{V}A_{1/2} + \vec{V}A_{2/0}$$
$$\vec{V}A_{1/0} = \overrightarrow{AM} \times \vec{\Omega}_{1/0}$$

:onctionnement : Le mécanisme ci-dessus représente le système de transformation de ıouvement entre la rotation continue du moteur et la translation alternative de la lame.
:ette transformation s'effectue par l'intermédiaire d'un excentrique 1 et du porte lame 2.

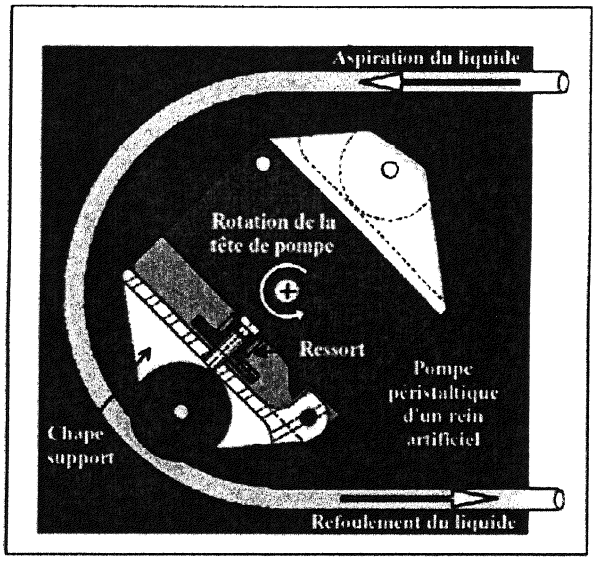
ut : déterminer la fréquence de rotation du moteur $\omega_{1/0}$ afin d'obtenir une plage de vitesse e coupe de lame imposée par la nature du matériau à couper.

xercice : La détermination graphique de $\vec{V}A_{1/0}$ pour une position donnée de 1 correspond à a recherche d'un vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ sachant que l'on connaît entièrement $\vec{U}$ et la irection de $\vec{V}$ et $\vec{W}$.

STATIQUE ANALYTIQUE. EQUILIBRE D'UN SOLIDE SOUMIS A L'ACTION DE 3 GLISSEURS.



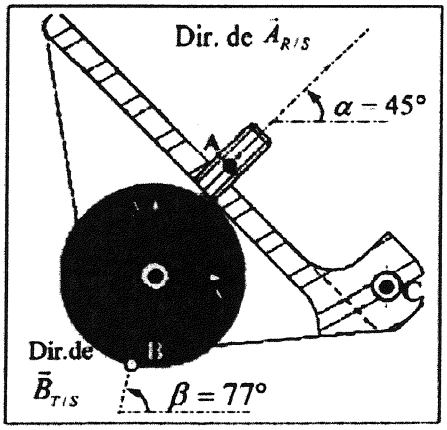
Les pompes péristaltiques sont employées dans tous les domaines ou l'on doit manipuler des liquides. Exemples : l'alimentaire (yaourt,...), la chimie (acides,...) , la médecine (reins artificiels),...



La tête de pompe tourne à une vitesse préréglée pour faire circuler le fluide par effet péristaltique. Deux galets en roulant sur le tube en plastique déformable écrasent celui-ci et permettent un refoulement du fluide. Au centre la manivelle permet une manœuvre manuelle de la pompe.

But : Dimensionner le ressort pour un effort presseur du galet sur le tube en B de 100 N.
Hypothèses : On négligera les effets dus au frottement au niveau des liaisons en C et en O.
Méthode : On isole l'ensemble (S) : le galet avec la chape support.
A vitesse constante l'ensemble (S) est soumis à trois actions mécaniques.

1. **Celle du ressort en A :** $\vec{A}_{R/S}$ de direction connue (α=45° par rapport à l'horizontale).
2. **Celle du tube en B :** $\vec{B}_{T/S}$ de direction connue(β=77° par rapport à l'horizontale).
3. **Celle de la tête de pompe en C :** $\vec{C}_{T.P/S}$



Données :

$$A\begin{vmatrix}12\\19\\0\end{vmatrix} ; B\begin{vmatrix}-4\\-15\\0\end{vmatrix} ; C\begin{vmatrix}38\\-2\\0\end{vmatrix} ; \vec{B}_{T/S}\begin{vmatrix}100\cos 77\\100\sin 77\\0\end{vmatrix} ;$$

Inconnues :

$$\vec{A}_{R/S}\begin{vmatrix}-\|\vec{A}_{R/S}\|\sqrt{2}/2\\-\|\vec{A}_{R/S}\|\sqrt{2}/2\\0\end{vmatrix} ; \vec{C}_{TP/S}\begin{vmatrix}X_{TP/S}\\Y_{TP/S}\\0\end{vmatrix}$$

Equations d'équilibre :

$$\begin{cases}\vec{A}_{R/S}+\vec{B}_{T/S}+\vec{C}_{TP/S}=\vec{0}\\ \vec{CB}\times\vec{B}_{T/S}+\vec{CA}\times\vec{A}_{R/S}=\vec{0}\end{cases}$$

Résultats :

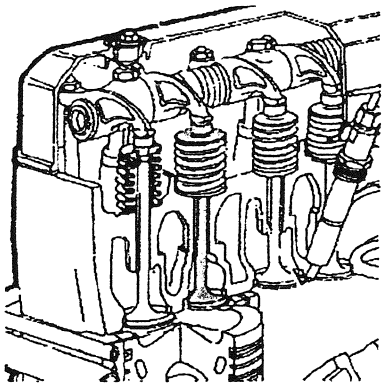
$$\vec{C}_{TP/S}\begin{vmatrix}58\\-16\\0\end{vmatrix} ; \vec{A}_{R/S}\begin{vmatrix}-81\\-81\\0\end{vmatrix}$$

$\|\vec{A}_{R/S}\| = 114N$

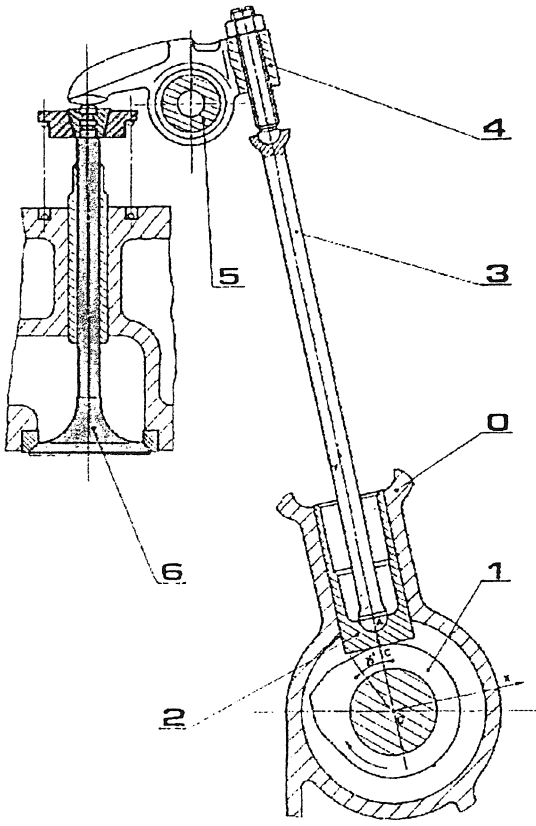
La valeur de $\|\vec{A}_{R/S}\|$ nous permet de dimensionner le ressort.

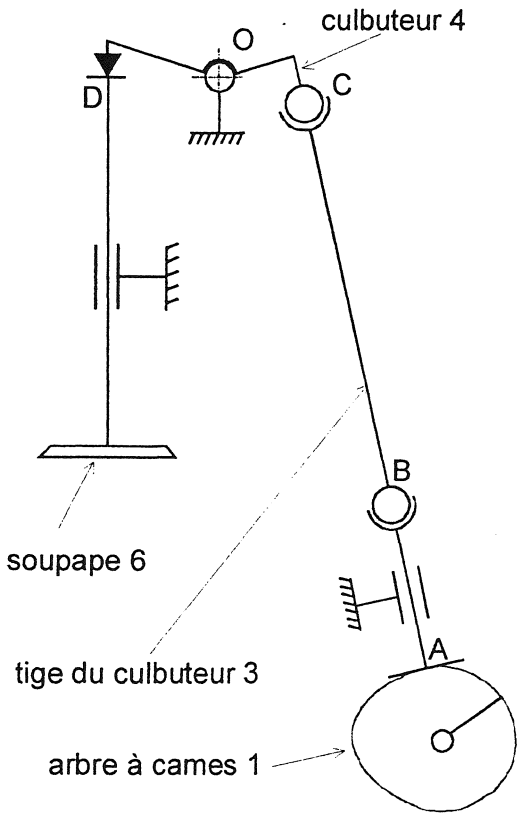
La résolution nécessite la maîtrise du calcul du produit vectoriel.

CINEMATIQUE DU SOLIDE



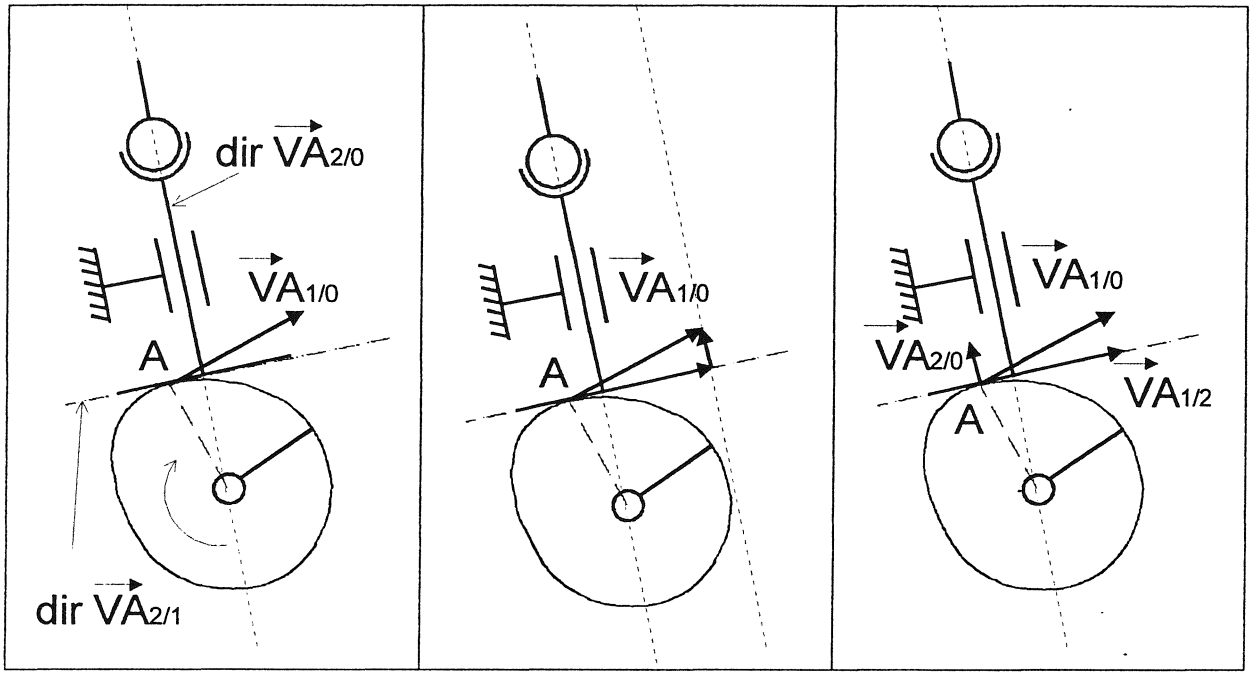
Dans un moteur l'ouverture et la fermeture des soupapes est commandée par la rotation de l'arbre à cames (ici, par l'intermédiaire des culbuteurs).La vitesse et le temps d'ouverture ou de fermeture des soupapes permet de définir le volume d'air et de carburant dans la chambre de combustion nécessaire au bon fonctionnement du moteur.



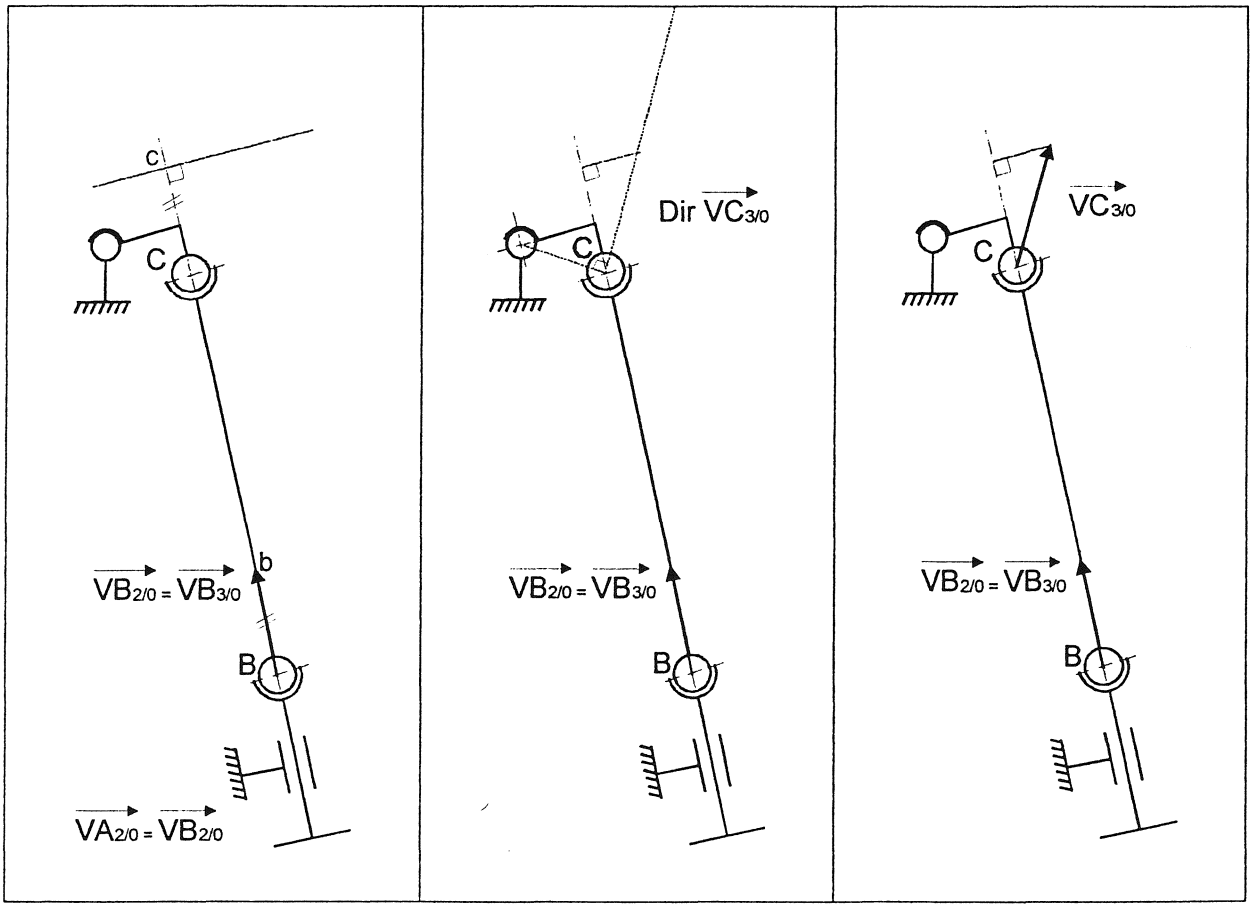


But : Afin de valider le dossier constructeur qui définit les performances du mécanisme, on se propose de vérifier la vitesse d'ouverture de la soupape connaissant la fréquence de rotation de l'arbre moteur ω_m donc celle de l'arbre à cames $\omega_{1/0} = 2\omega_m$.

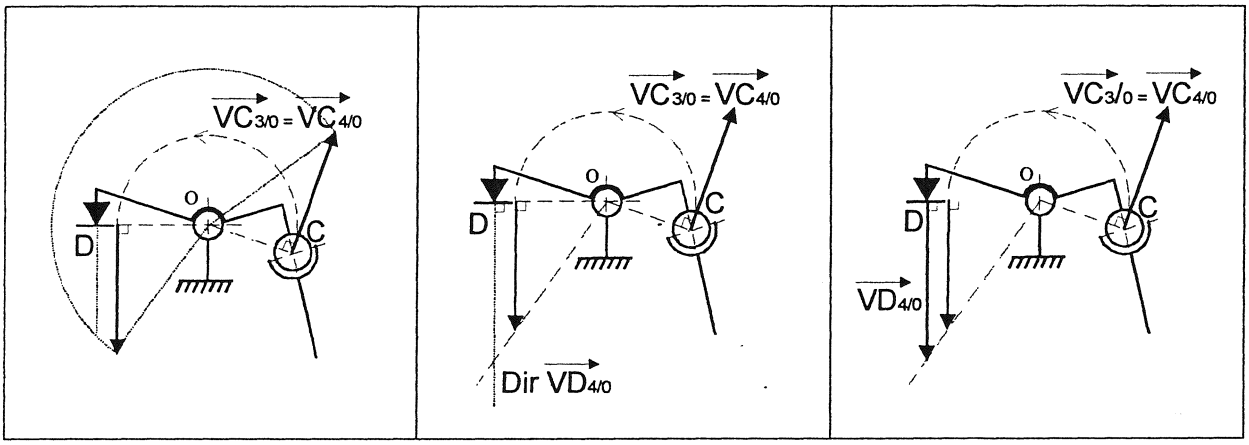
La détermination de $\vec{V}A_{2/0}$ connaissant $\omega_{1/0}$ donc $\vec{V}A_{1/0}$ correspond à la détermination d'un vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ connaissant $\vec{U}$ et les directions de $\vec{W}$ et $\vec{V}$.



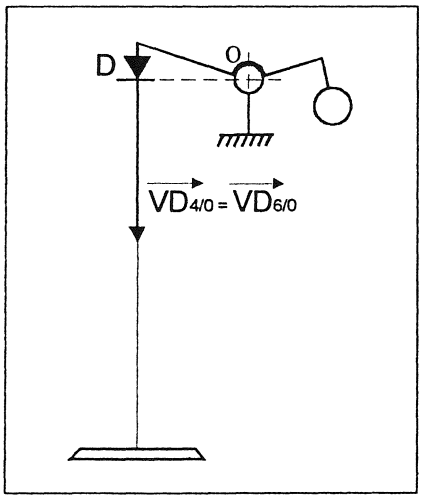
La détermination de $\vec{V}C_{3/0}$ connaissant $\vec{V}B_{3/0}$ correspond à la détermination d'un vecteur $\vec{V}$ connaissant sa direction sa projection sur un axe porté par AB.



La détermination de $\vec{V}_{D_{4/0}} = \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \times \overrightarrow{OD}$ connaissant $\vec{V}_{C_{4/0}} = \overrightarrow{\Omega_{4/0}} \times \overrightarrow{OC}$ correspond à la détermination d'un vecteur $\vec{U}$ homothétique d'un vecteur $\vec{W}$.



La détermination de $\vec{V}_{D_{6/0}}$ correspond à la détermination d'un vecteur $\vec{W}$ tel que $\vec{W} = \vec{U} + \vec{V}$ connaissant $\vec{U}$ et les directions de $\vec{W}$ et $\vec{V}$.



Dans le cas particulier de la figure $\vec{V}_{D_{4/6}} = \vec{0}$ car les directions de $\vec{V}_{D_{4/0}}$ et $\vec{V}_{D_{6/0}}$ sont confondues.

1.3 Produit scalaire. Produit vectoriel

La difficulté majeure pour l'élève est qu'il doit maîtriser ces outils dès le début de première.
Leurs utilisations nécessitent :

• De savoir déterminer graphiquement la projection orthogonale d'un vecteur sur une droite ou sur un axe.

• De savoir calculer le produit scalaire de deux vecteurs quelconques selon les deux définitions utilisées en mécanique :

1. $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = ||\vec{V}_1|| \times ||\vec{V}_2|| \cos(\vec{V}_1, \vec{V}_2)$
2. $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

• De savoir calculer le produit vectoriel, alors que celui-ci ne fait pas partie des connaissances exigibles en mathématiques.

ACTIVITE 8 et ACTIVITE 9

Les physiciens utilisent le produit scalaire pour exprimer le travail d'une force au cours d'un déplacement de son point d'application. Si une force $\vec{F}$ est constante et si son point d'application M décrit un segment $[A, B]$ de A vers B, alors le travail de cette force au cours du déplacement est par définition, le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{F}$. Si la distance est exprimée en mètres et l'intensité de la force en newtons, alors le travail est exprimé en joules.
Dans l'exercice 2, les élèves voient assez vite que les points C, $C_1, \ldots, C_5$ sont sur une même droite, mais ils ont plus de difficultés à le justifier.

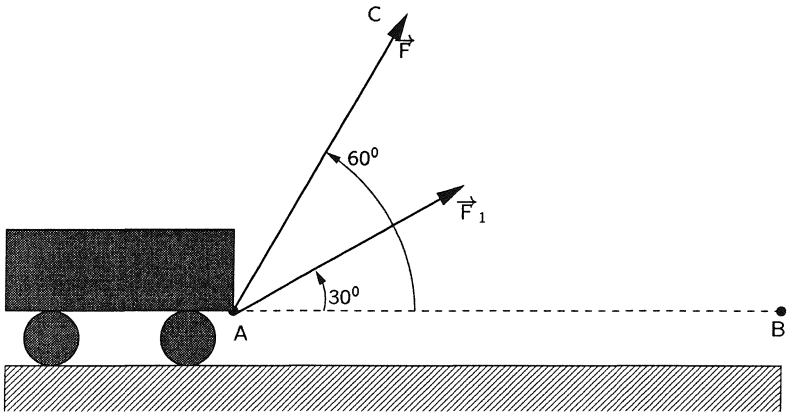
ACTIVITE 10

Cette activité où on utilise le produit scalaire pour réaliser le dessin d'un disque dans l'espace a intéressé les élèves. Ils ont réalisé la figure démandée avec beaucoup de soin.

ACTIVITE 8

Exercice 1

Un enfant tire un chariot sur un plan horizontal par l'intermédiaire d'une corde faisant un angle de 60^0 avec le plan horizontal. La force $\overrightarrow{F}$ exercée par l'enfant a une intensité de $10N$ [1].



1. Quel est le travail fourni par l'enfant au cours d'un déplacement de $3m$?

2. La longueur du déplacement est toujours égale à $3m$.

La force $\overrightarrow{F}$ est remplacée par une force $\overrightarrow{F}_1$ qui fait un angle de 30^0 avec l'horizontale et fournit le même travail que $\overrightarrow{F}$.

Quelle est l'intensité de cette force?

3. Une force $\overrightarrow{F'}$ fournit le même travail que $\overrightarrow{F}$ quand son point d'application se déplace de A à B.

Le tableau ci-dessous donne soit l'intensité de la force, soit l'angle θ ($\theta = \widehat{BAC}$).

Construisez le vecteur représentant cette force $\overrightarrow{F'}$ et déterminer, à l'aide d'une mesure ou d'un calcul, l'angle θ ou l'intensité de $\overrightarrow{F'}$.

θ en degrés	60^0	45^0		15^0	
Intensité de $\overrightarrow{F'}$ en newtons	10N		20N		8N

1. **Cet exercice a été tiré de: Bordas, collection fractale, géométrie 1991.**

Exercice 2

On pose

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \vec{F} = \overrightarrow{AC}$$

avec $||\vec{u}|| = 3$, $||\vec{F}|| = 1$, $(\vec{u}, \vec{F}) = 60^0$.

1. Faire une figure en choisissant $3cm$ pour unité.

2. Déterminer le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{F}$.

3. Déterminer $\vec{w}_1$ tel que : $\vec{u} \cdot \vec{w}_1 = \vec{u} \cdot \vec{F}$, $(\vec{u}, \vec{w}_1) = 30^0$.

Placer C_1 tel que $\vec{w}_1 = \overrightarrow{AC}_1$.

3. On sait que : $\vec{u} \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{F}$ et que $(\vec{u}, \vec{w}) = \theta$.

Remplir le tableau suivant :

θ en degrés	60^0	30^0	45^0		15^0	
$\|\|\vec{w}\|\|$	1			2		4
Points	C	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5

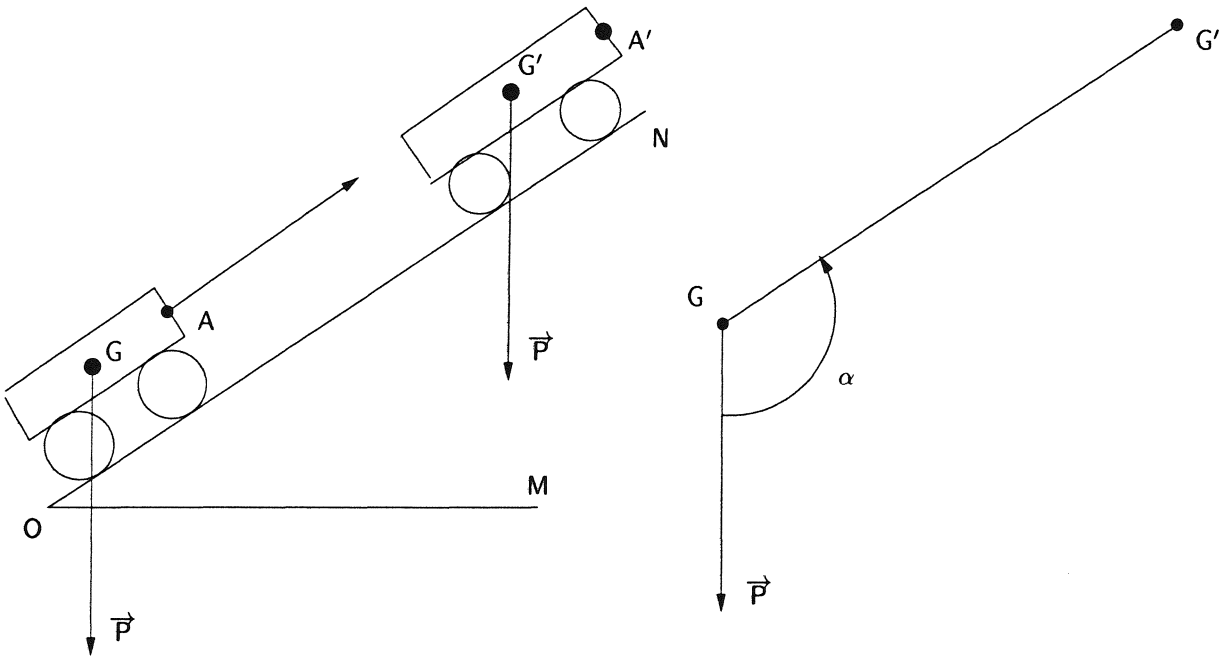
4. Les points $C, C_1, \ldots, C_5$, ont-ils une position particulière? Justifier.

ACTIVITE 9

Exercice 1

Sur un plan incliné

L'enfant fait gravir à son chariot un plan incliné, tel que $\widehat{MON} = 30^0$, sur une distance de $3m$ $(AA' = 3m)$ à l'aide d'un fil parallèle au plan incliné. La force $\vec{F}$ exercée a pour intensité $12N$.



1. Calculer le travail de la force $\vec{F}$ au cours du déplacement.

2. La masse du chariot est $0,5kg$.

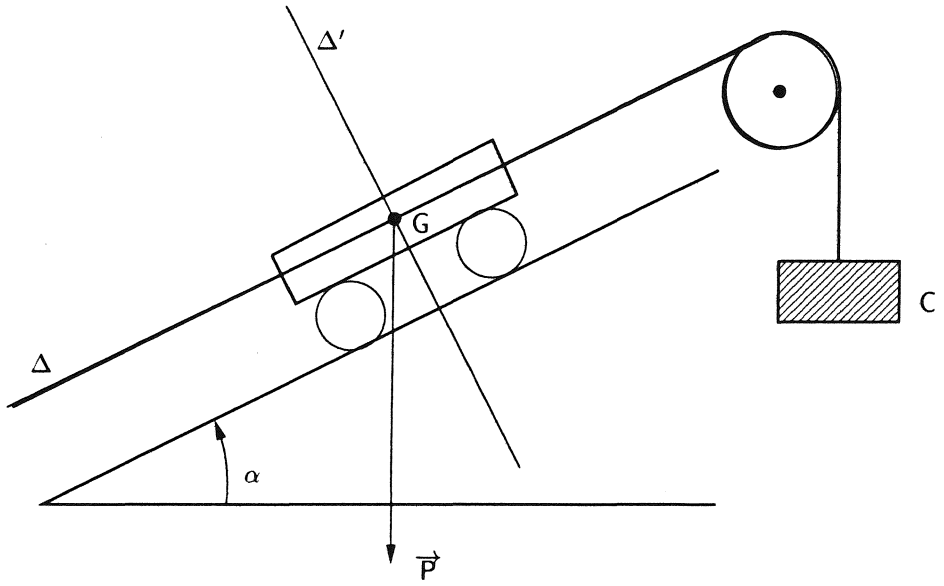
a) Quelle est la valeur de l'angle α.

b) Calculer le travail du poids du chariot au cours du déplacement ? (Prendre $g = 10m/s^2$; on rappelle que $\vec{p} = m\vec{g}$).

Exercice 2

Un chariot de poids $\overrightarrow{P}$ reposant sur un plan incliné est maintenu en équilibre par un contrepoids C.

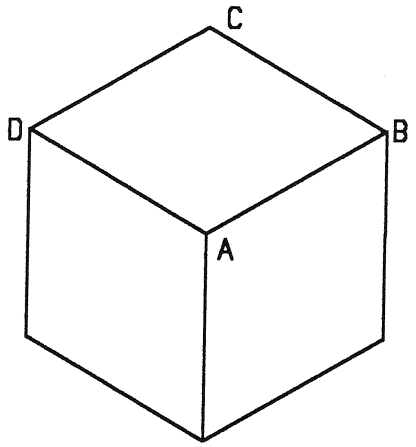
Sachant que Δ et Δ' sont les lignes d'action de la tension $\overrightarrow{T}$ du fil et de la réaction $\overrightarrow{R}$ du sol, construisez les vecteurs d'origine G représentant $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{R}$.



Quel est le travail du poids $\overrightarrow{P}$ lorsque, l'angle α mesurant 30^0 et la masse du chariot étant égale à $1,5kg$, le point G avance de $0,5m$ sur le plan incliné. (On prendra $g = 10m/s^2$).

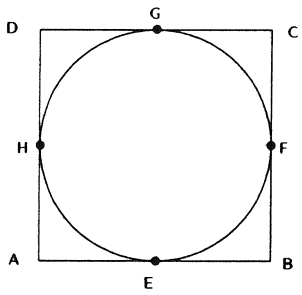
ACTIVITE 10

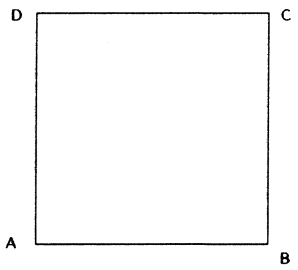
On désire faire le dessin d'un cercle inscrit dans la face supérieure d'un cube représenté en perspective isométrique.



Examinons le problème dans le plan :

But : trouver des points du cercle inscrit dans le carré $ABCD$.





Il est évident que les points E, F, G, H, milieux respectifs des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ sont des points de ce cercle.

Soit I le milieu de $[D, G]$. Montrer que le point d'intersection M des droites (HI) et (DF) est un point du cercle de diamètre $[H, F]$ (*on pourra se placer dans le plan rapporté à un repère orthonormal et utiliser le produit scalaire pour montrer l'orthogonalité des vecteurs* $\overrightarrow{HI}$ *et* $\overrightarrow{DF}$*).*

Soit J le milieu de $[D, I]$ et L le milieu de $[D, H]$.

Montrer que le point P d'intersection des droites (LF) et (HJ) est un point du cercle de diamètre $[H, F]$

Par symétrie, trouver d'autres points du cercle envisagé.

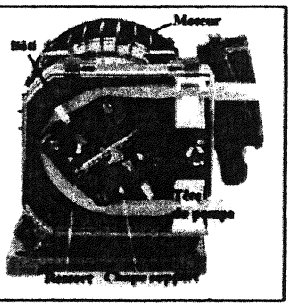
Les différents points obtenus, placés sur le carré de droite, permettent de dessiner un cercle "à main levée ".

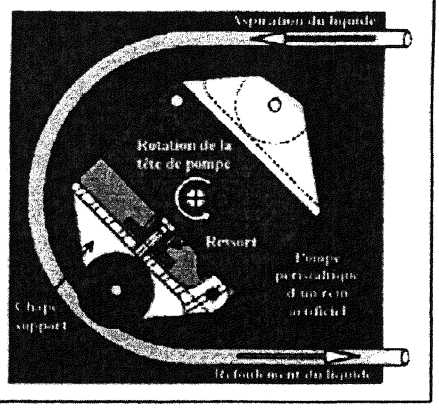
Utiliser les résultats précédents pour faire le dessin du cercle sur la face supérieure du cube.

GLISSEUR ET POINTEUR

Les pompes péristaltiques sont employées dans tous les domaines ou l'on doit manipuler des liquides. Exemples : l'alimentaire (yaourt,...), la chimie (acides, ...), la médecine (reins artificiels),...

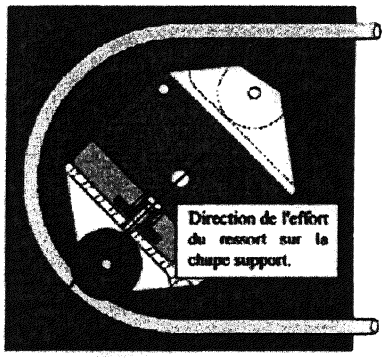
La tête de pompe tourne à une vitesse préréglée pour faire circuler le fluide par effet péristaltique. Deux galets en roulant sur le tube en plastique déformable écrasent celui-ci et permettent un refoulement du fluide. Le ressort garantit l'effort presseur nécessaire de la chape support sur le tube plastique.

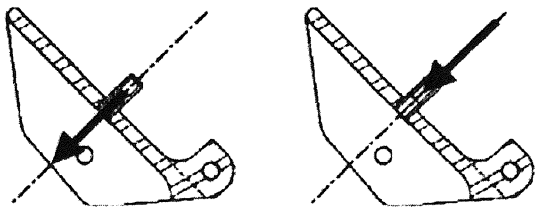




En mécanique on utilise des vecteurs particuliers : Le glisseur et le pointeur.

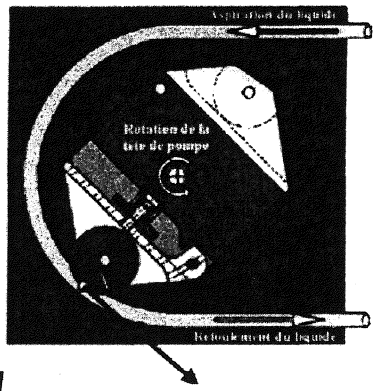
UN GLISSEUR est un vecteur dont le support est défini. **UNE FORCE** est représentée par un glisseur.





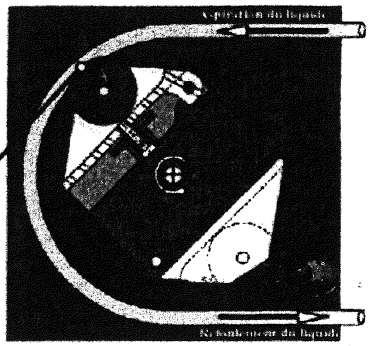
Ces deux représentations de l'effort du ressort sur la chape support sont équivalentes. (Elles produisent le même effet mécanique)

UN POINTEUR est un vecteur dont l'origine est définie. **UNE VITESSE** est représentée par un pointeur.



$\vec{V}A_{Tête/Bati}$

$\vec{V}A_{Tête/Bati}$



Chapitre 2

DERIVEE : VITESSE ET ACCELERATION

2.1 Introduction

La dérivée d'une fonction est une notion très importante du cours de première en mécanique.
Les élèves de première STI ont beaucoup de mal à en comprendre la signification.
L'utilisation d'une interprétation géométrique du nombre dérivé permet de leur faire comprendre la notion de tangente en un point, comme étant la position limite d'une droite joignant deux points voisins d'une courbe.
Il est sans doute important de présenter le nombre dérivé en x_0 comme :

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \qquad \text{ou comme} \qquad \lim_{\Delta h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta h}$$

Avec la mécanique, qui est avant tout une science du mouvement, la notion de dérivée par rapport au temps apparaît.
Cette fois-ci, l'interprétation des dérivées conduit à la définition de la vitesse et de l'accélération qui sont des notions importantes en mécanique.
Tout ceci nous a conduit à introduire des exercices où l'interprétation géométrique du nombre dérivé a une importance capitale.

2.2 Liens entre mouvement d'un système et nombre dérivé

ACTIVITE 1

L'intérêt de cette activité est de déterminer des coordonnées d'un point dont le déplacement est fonction du temps.
C'est une bonne introduction à la cinématique et de plus cette activité permet de faire à nouveau appel aux notions de trigonométrie, notion difficile à acquérir pour nos élèves.

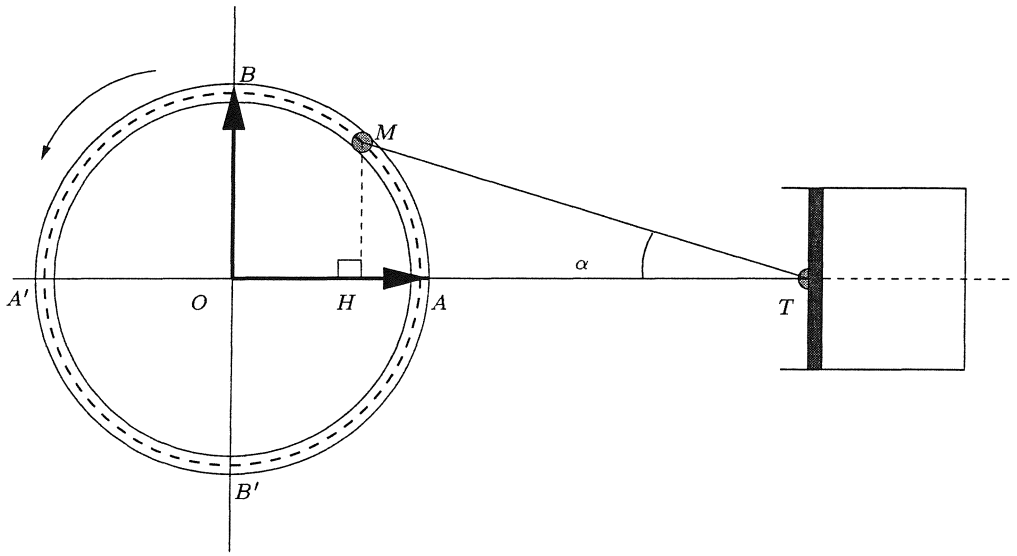
ACTIVITE 2 et ACTIVITE 3

Les deux activités qui suivent dont les résultats numériques sont identiques, présentent le côté mathématique, puis le côté mécanique d'un même problème, afin de faire le lien entre le signe de la dérivée et la variation de la fonction.
Dans l'activité 2, les résultats numériques ont déjà été trouvés, on insistera sur la notation $v(t) = \frac{dx}{dt}(t)$ *et* $a(t) = \frac{dv}{dt}(t)$.
Avant de faire cette activité, il faut s'assurer que les élèves font bien le lien entre coefficient directeur de la tangente en un point et le nombre dérivé en ce même point.
Dans l'activité 3, les élèves ont des difficultés à comprendre ce que l'on appelle amplitude du mouvement et à savoir déterminer à quel instant le mobile change de sens de déplacement.
La notion de vitesse instantanée a été introduite en classe comme étant la limite de la vitesse moyenne ; les élèves ont cependant beaucoup de mal à faire le lien avec le nombre dérivé.
L'accélération $a(t)$ *donne un exemple d'utilisation de la dérivée seconde.*
La courbe représentative de $a(t)$*, n'ayant pas été tracée, de nombreux élèves ont des difficultés à trouver le signe de* $a(t)$ *; il faut rappeler le lien entre sens de variation d'une fonction et le signe de la dérivée.*
Le produit de $a(t)$ *et de* $v(t)$ *permet de faire une interprétation mécanique ou physique des différentes phases du mouvement.*
En effet, la recherche de la variation du carré de la vitesse permet d'écrire :

$$\frac{dv^2}{dt}(t) = 2v(t)\frac{dv}{dt}(t) = 2v(t)a(t)$$

ACTIVITE 1

Un piston est relié au bord d'une roue dont le rayon est égal à un mètre, par une tige MT dont la longueur est égale à 3 mètres. La roue tourne dans le sens de la flèche. On considère le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ indiqué sur la figure ci-dessous. H est le projeté de M sur (OA). On pose $\alpha = \widehat{MTH}$[1].



A. Préciser les coordonnées de M et de T lorsque :

a) M est en A ; **b)** M est en B ; **c)** M est en A' ; **d)** M est en B'.

B. On suppose que la roue tourne dans le sens de la flèche à vitesse constante : un tour par seconde. A la date $t = 0$, M coïncide avec le point A.

1. a) Quelle est la distance parcourue par le point M en une seconde?

b) Quelle est la distance totale parcourue par le point T en une seconde?

2. Pour les instants t ci-dessous, déterminer les coordonnées de M et l'abscisse de T.

t	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{7}{8}$	1
$x_M(t)$													
$y_M(t)$													
$x_T(t)$													

3. Quelles sont les coordonnées de M, t secondes après le départ?

1. **Cet exercice a été tiré de : Nouveau transmath Seconde, édition 1995.**

ACTIVITE 2
lecture du nombre dérivé, signe de celui-ci et variation de fonction

La courbe $\mathcal{C}$ de la figure 1 est la courbe représentative d'une fonction f sur l'intervalle $[0; 10]$. Cette fonction est telle qu'en tout point de $\mathcal{C}$ il existe une seule tangente à $\mathcal{C}$; quelques tangentes sont dessinées.

1. D'après le graphique, dresser le tableau de variation de f.

x	0	0,75	5,5	10
Variation de la fonction f				

2. a) Remplir le tableau de valeurs suivant :

x	0	0,75	2	3	4	5,5	7	9	10
$f'(x)$									

b) Utiliser le tableau précédent pour faire une représentation approximative de la fonction f' sur le quadrillage de la figure 2.

3. Utiliser la représentation graphique de f' pour déterminer, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$ et compléter le tableau :

x	0	0,75	5,5	10
Signe de $f'(x)$				

4. Récapituler les résultats du **1.** et du **3.** dans le tableau ci-dessous :

x	0	0,75	5,5	10
Signe de $f'(x)$				
Variation de la fonction f				

5. Quelles conjectures peut-on faire à la lecture du tableau du **4.**?

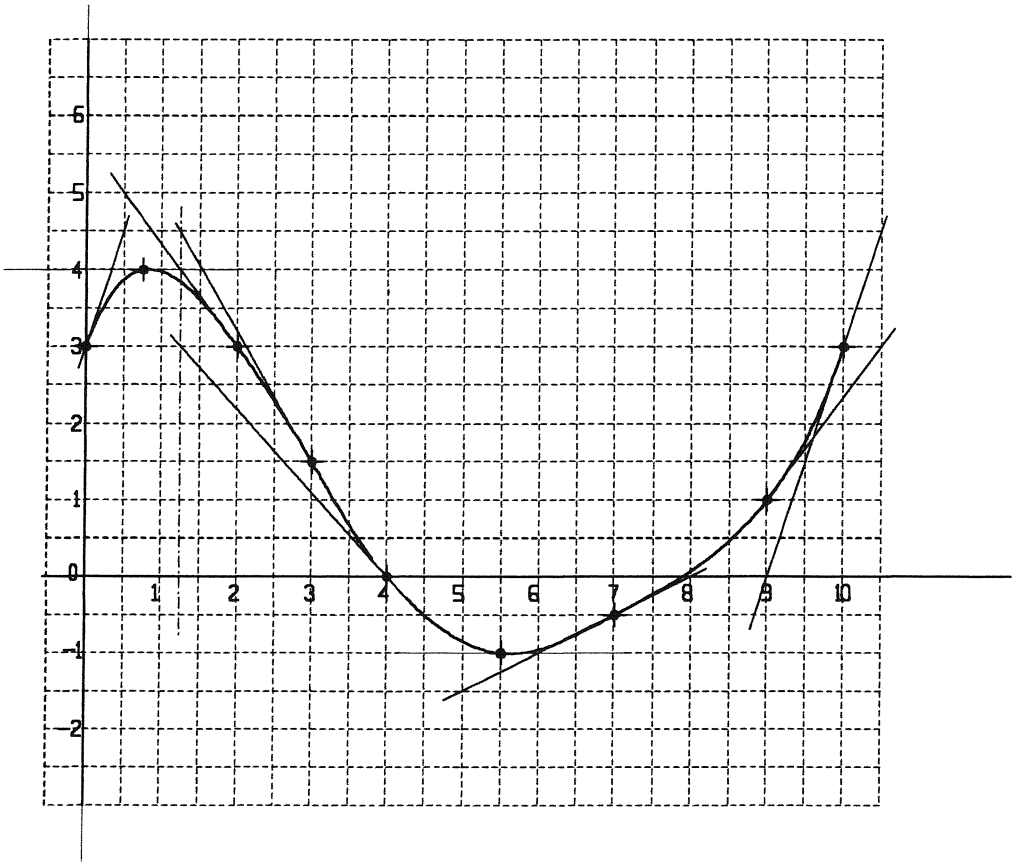


Figure 1

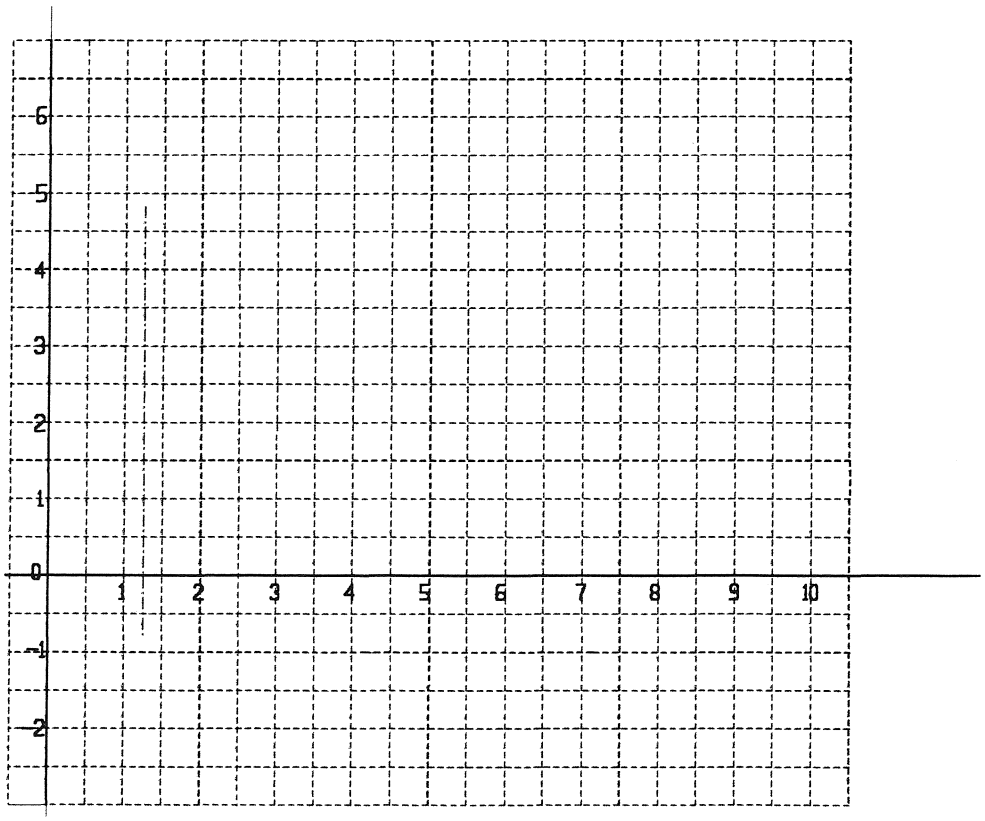


Figure 2

ACTIVITE 3
mouvement : vitesse et accélération

La courbe $\mathcal{C}$ de la figure 1 représente la loi horaire du déplacement de l'extrémité d'un coulisseau sur l'intervalle de temps $[0; 10]$ (la trajectoire de cette extrémité est une droite, le mouvement est cyclique et le temps est exprimé en secondes) et la loi horaire est une fonction x du temps t.

1. Déterminer l'amplitude du mouvement.

2. Que vaut la vitesse instantanée à un instant t donné?

Remplir le tableau de valeurs suivant.

t	0	0,75	2	3	4	5,5	7	9	10
v(t)									

Utiliser le quadrillage de la figure 2 pour faire une représentation approximative de la courbe représentant la vitesse instantanée de l'extrémité du coulisseau en fonction du temps.

3. A quels instants le mobile change-t-il de sens de déplacement?

4. Que représente l'accélération $a(t)$ par rapport à la vitesse $v(t)$?

Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels l'accélération est : positive, négative et compléter le tableau suivant :

t	0 10
Signe de $a(t)$	

5. Etudier, sur l'intervalle $[0, 10]$, le signe du produit $v(t) \cdot a(t)$.

t	0 10
Signe de $v(t)$	
Signe de $a(t)$	
Signe de $v(t) \cdot a(t)$	

En déduire les quatre phases du mouvement.

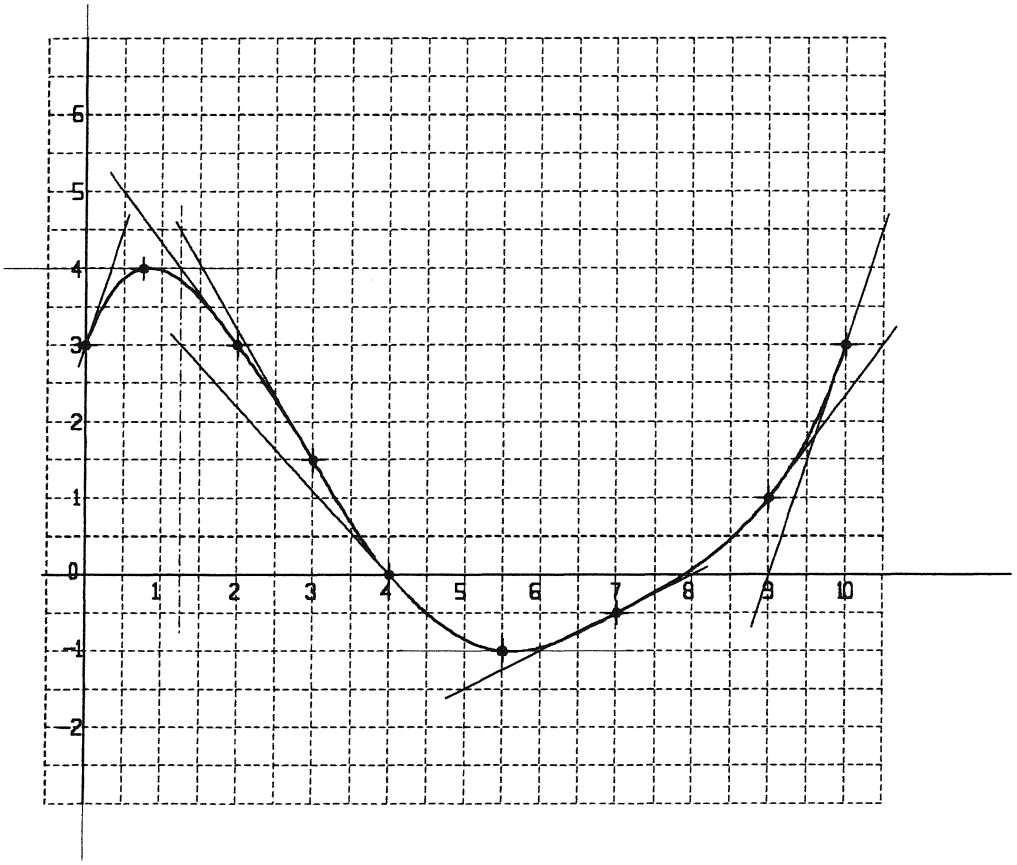


Figure 1

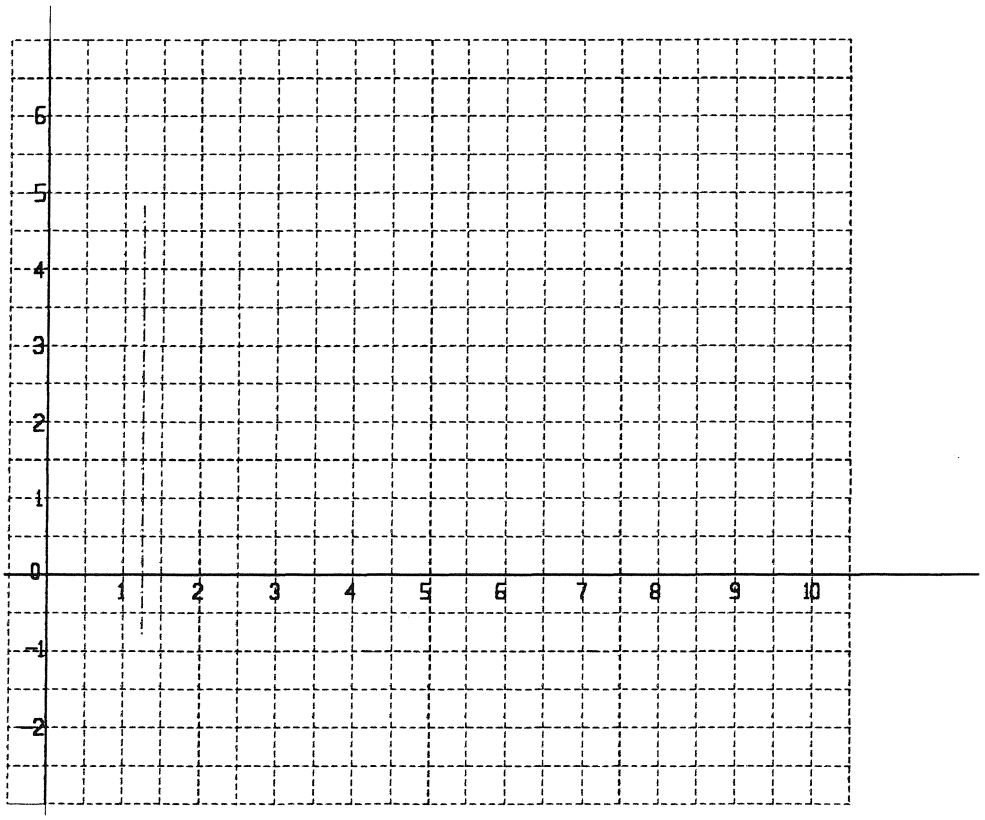


Figure 2

2.3 Applications et illustrations

Les activités suivantes permettent de voir si les élèves sont capables de réinvestir les connaissances acquises dans les activités 1 et 2.

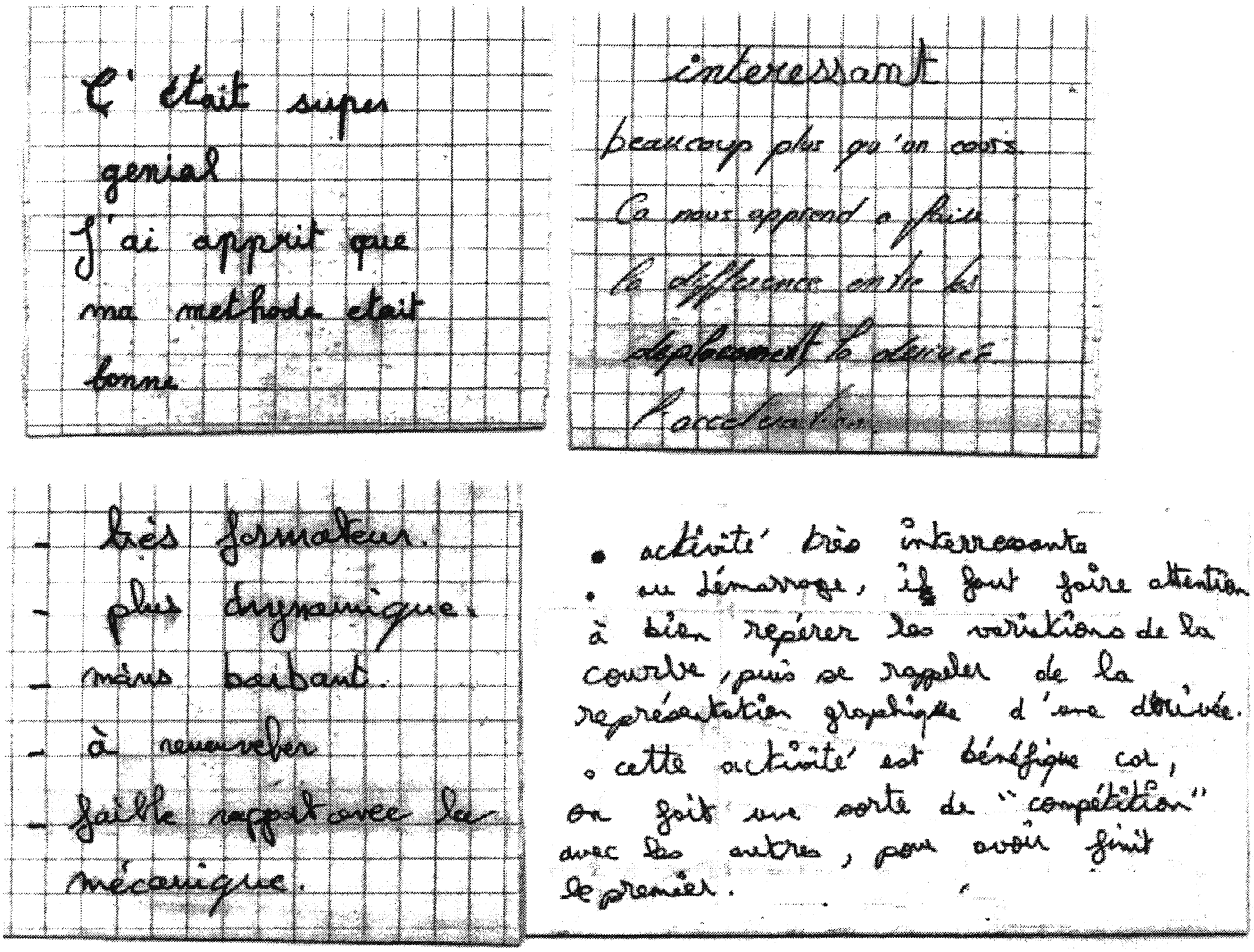
ACTIVITE 4

Cette activité purement mathématique permet de montrer aux élèves l'intérêt de choisir une démarche. En effet, en utilisant au mieux les données de l'exercice, on peut trouver les coefficients très rapidement presque sans calcul.

ACTIVITE 5

Une activité beaucoup plus ludique, qui génère un esprit de compétition auprès des élèves pour reconstituer au plus vite les familles de courbes.
Pour chaque mécanisme, l'étude se fait dans un repère absolu.
La première fiche comporte six courbes correspondant chacune au déplacement d'un point particulier d'un mécanisme. Ces courbes sont numérotées 01, 02,..., 06.
La deuxième comporte les six courbes correspondant à la vitesse instantanée du même point. Elles sont numérotées 11, 12,..., 16.
La troisième comporte les six courbes correspondant à l'accélération instantanée du même point. Elles sont numérotées 21, 22,..., 26.
L'ordre dans lequel sont numérotées ces courbes est aléatoire.
Le but est de retrouver les courbes correspondant au même mécanisme. Chaque élève doit découper les courbes et reconstituer les "jeux" des six familles (déplacement, vitesse, accélération).
Dans le paragraphe 2.4 figurent les mécanismes qui ont généré ces courbes, ainsi que "la famille de courbes" associée.

A titre d'informations, voici quelques impressions des élèves pour l'activité 5.



Remarque

Cette réaction d'élève à propos du rapport avec la mécanique, s'explique par le fait que les mécanismes engendrant les courbes n'ont pas été présentés.

ACTIVITE 4
Variation d'une fonction et signe de sa dérivé

Voici dans l'intervalle $[-3;3]$ les courbes représentatives d'une fonction f, de la fonction dérivée de f (notée f') et de la fonction dérivée de f' (notée f'' : c'est la dérivée seconde de f).

1. Compléter les tableaux suivants en utilisant les graphiques :

x	-3	$+3$
Signe de $f''(x)$		
Variation de la fonction f'		

x	-3	$+3$
Signe de $f'(x)$		
Variation de la fonction f		

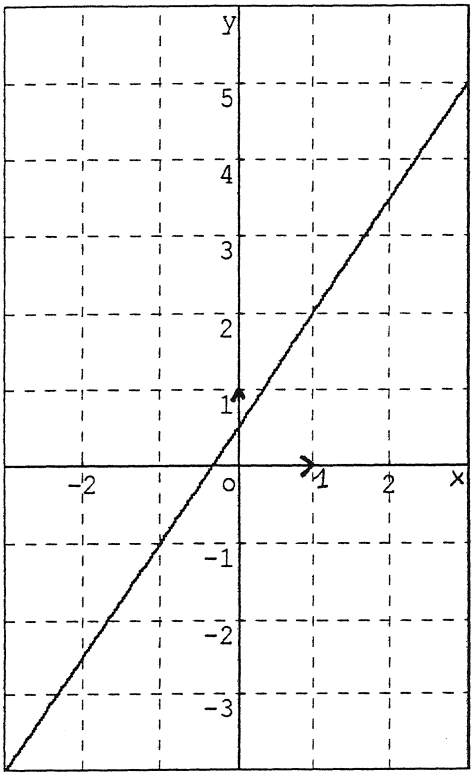
2. On sait que $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

a) Exprimer $f'(x)$ et $f''(x)$ en fonction de a, b, c et d.

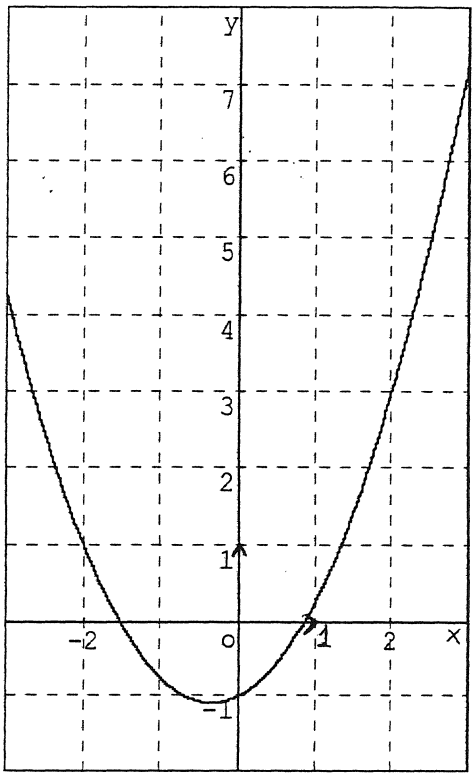
$f'(x) =$

$f''(x) =$

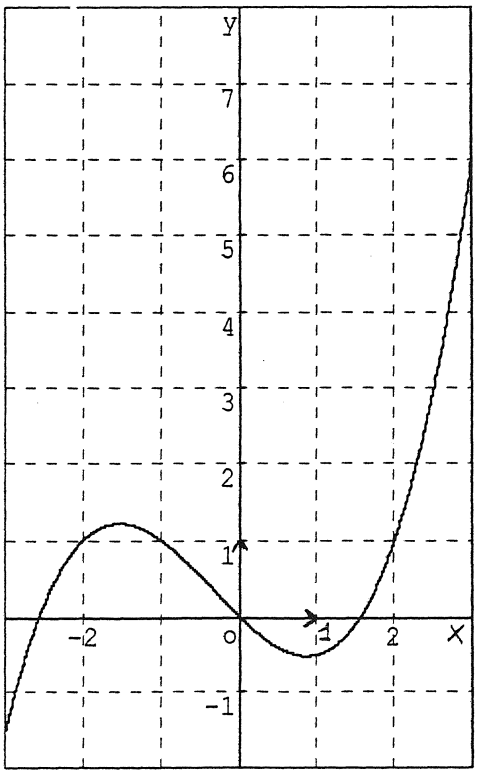
b) Utiliser au mieux les trois représentations graphiques pour déterminer les coefficients a, b, c et d.



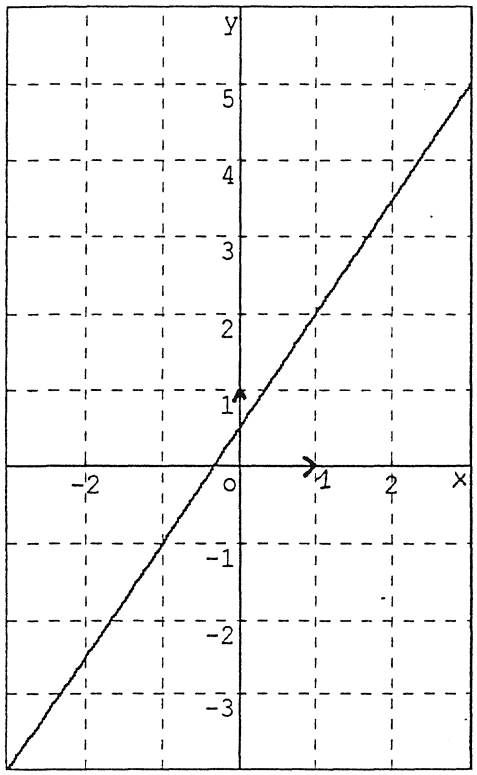
Représentation graphique de la fonction f "



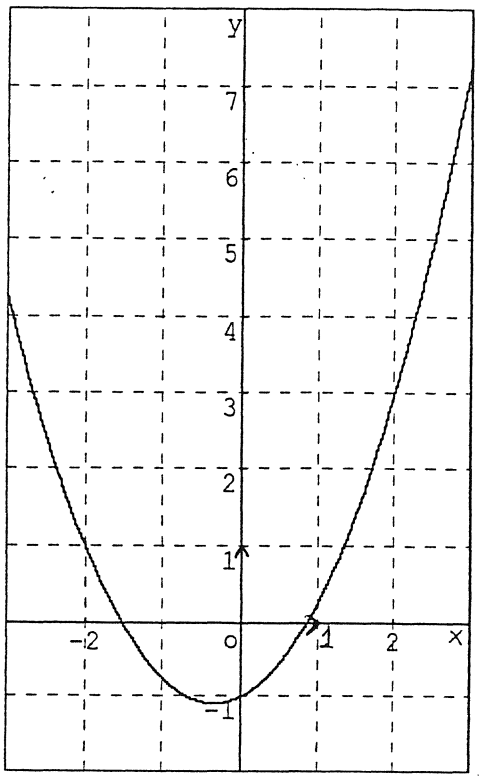
Représentation graphique de la fonction f '



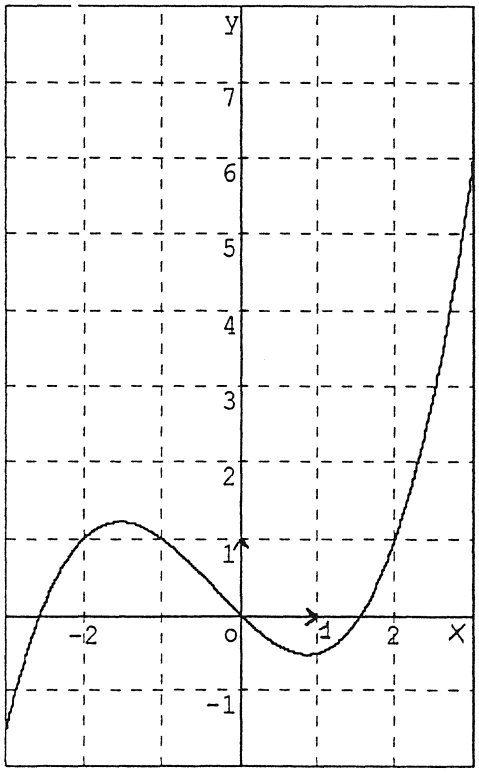
Représentation graphique de la fonction f



Représentation graphique de la fonction f "



Représentation graphique de la fonction f '



Représentation graphique de la fonction f

ACTIVITE 5

Consigne :

Voici trois feuilles représentant :

- Les courbes représentatives des fonctions

$$t \rightarrow x(t)$$

(courbes des déplacements, numérotées 01,02,...)

- Les courbes représentatives des fonctions

$$t \rightarrow x'(t)$$

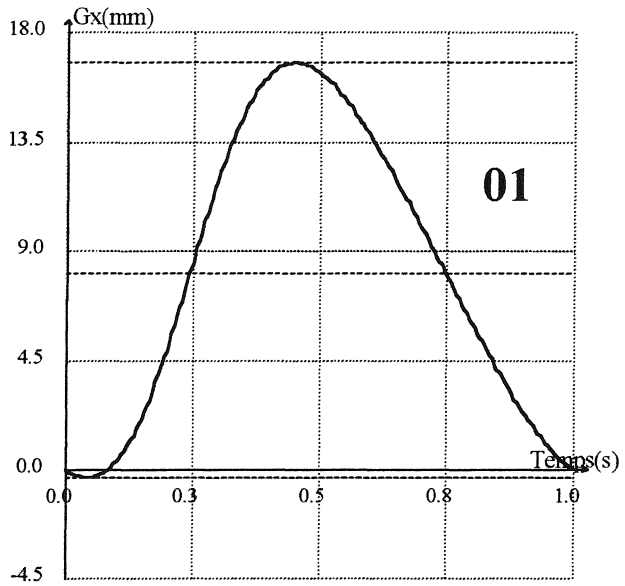
(courbes des vitesses, numérotées 11,12,...)

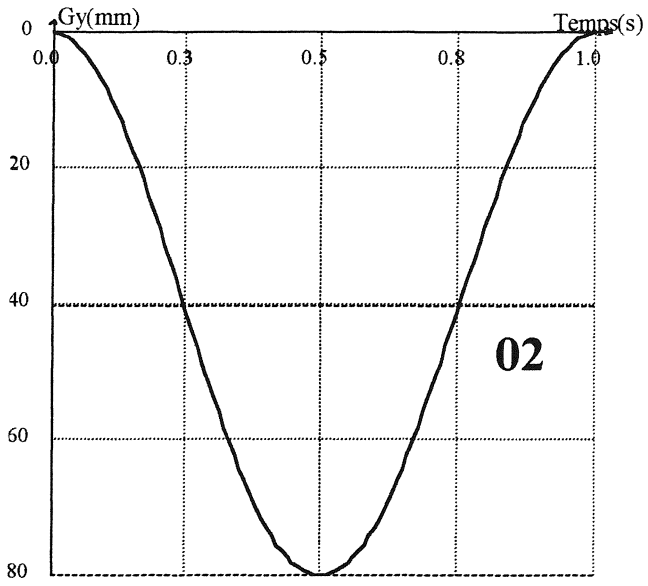
- Les courbes représentatives des fonctions

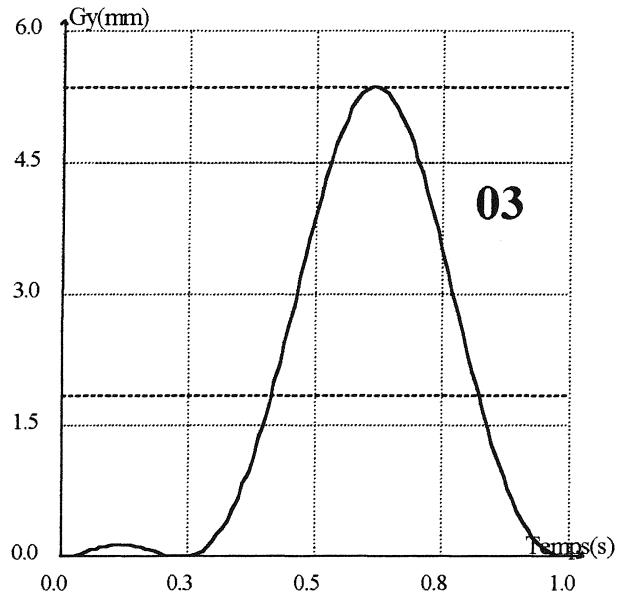
$$t \rightarrow x''(t)$$

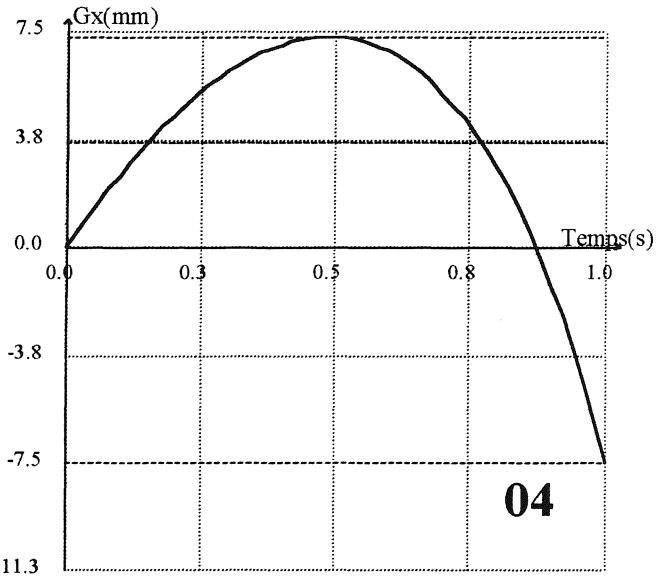
(courbes des accélérations, numérotées 21,22,...)

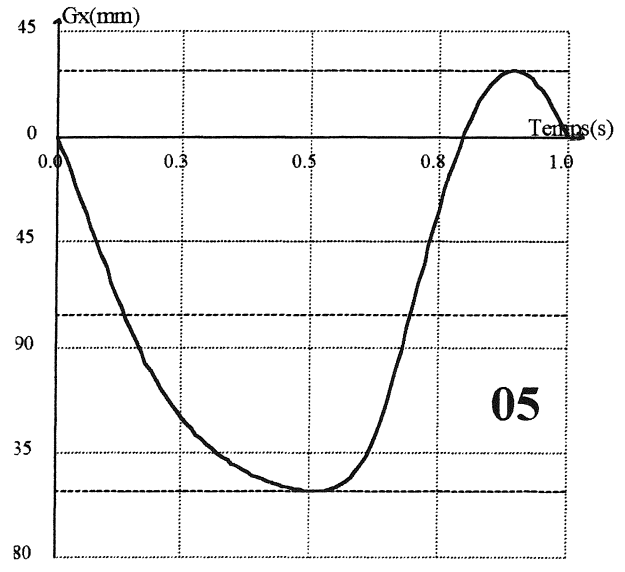
Le but de l'exercice est d'associer les courbes du déplacement aux courbes des vitesses et accélérations correspondantes.

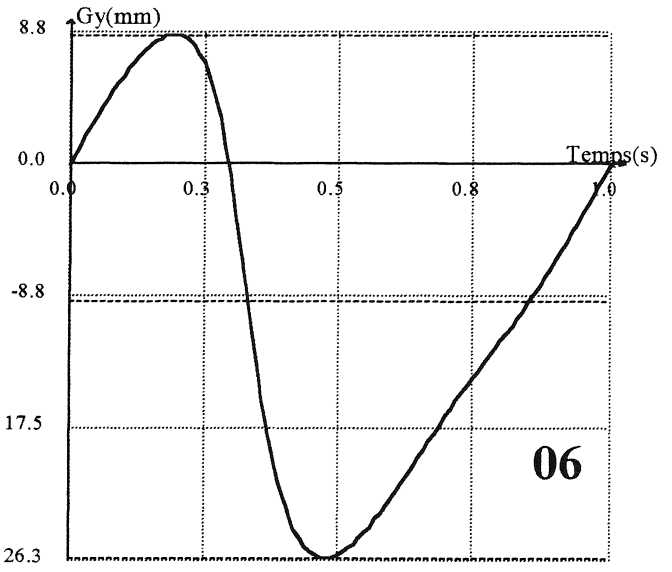




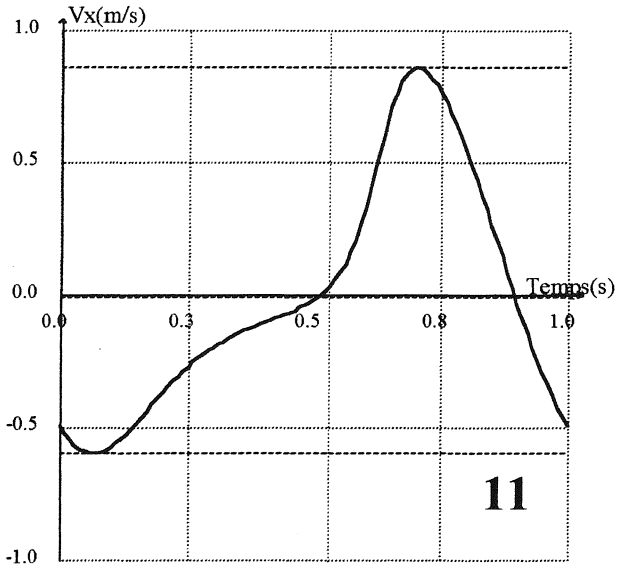


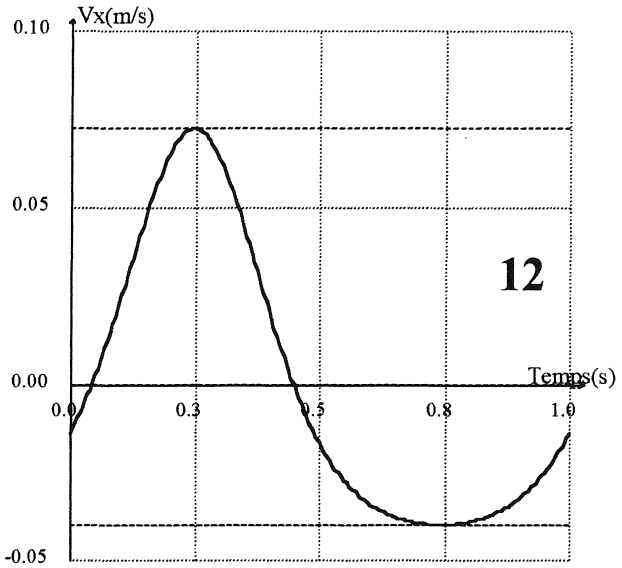


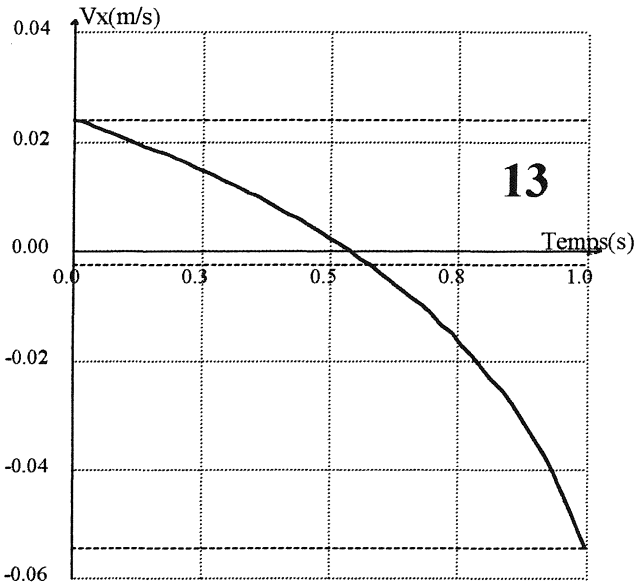


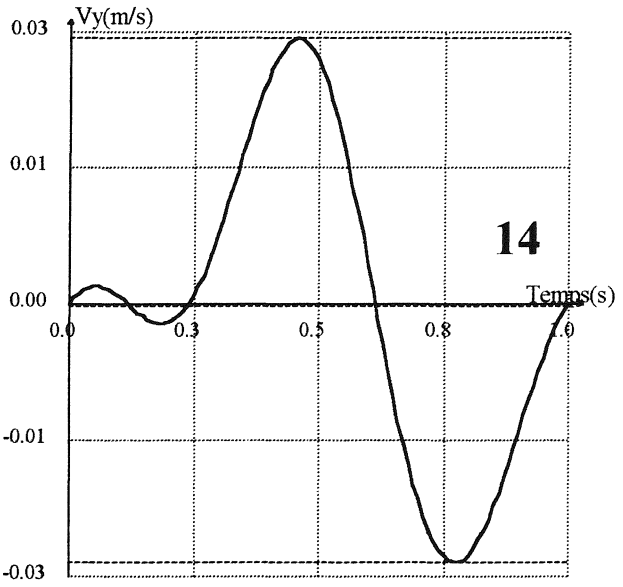


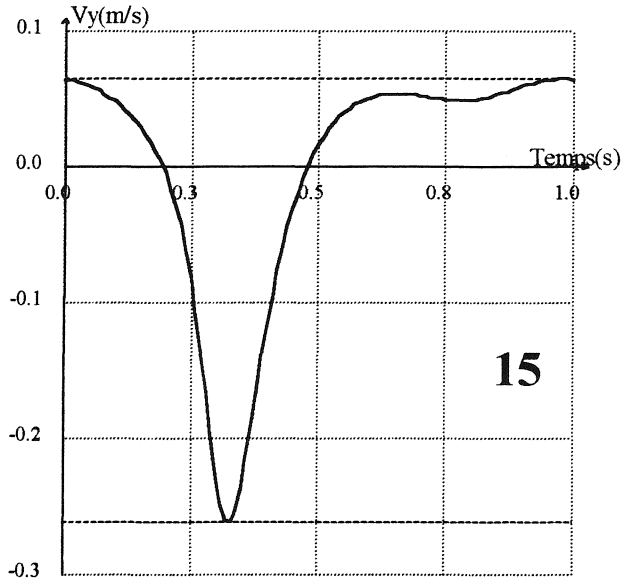
Les courbes des déplacements

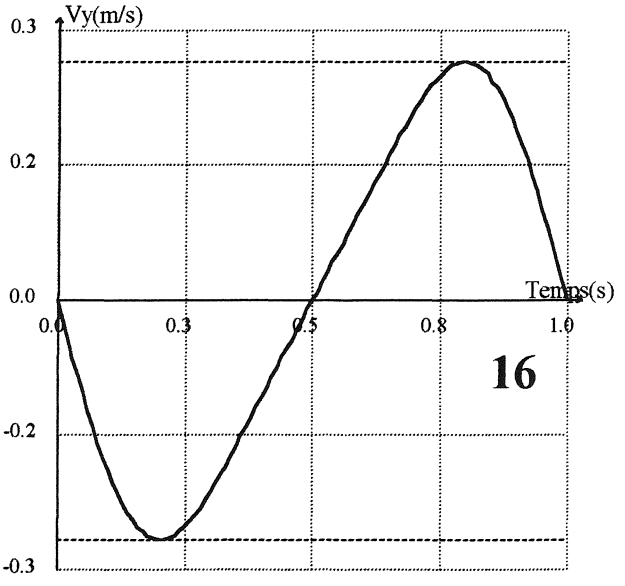




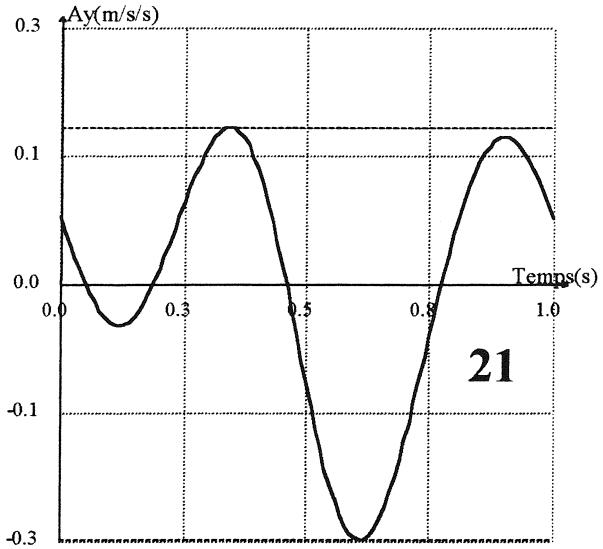


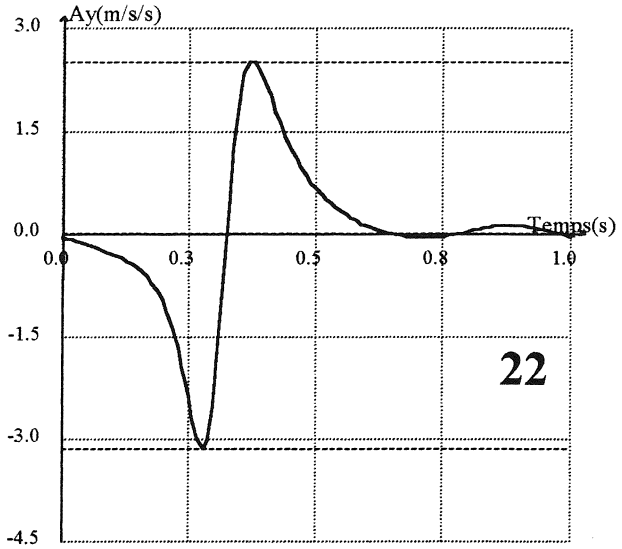


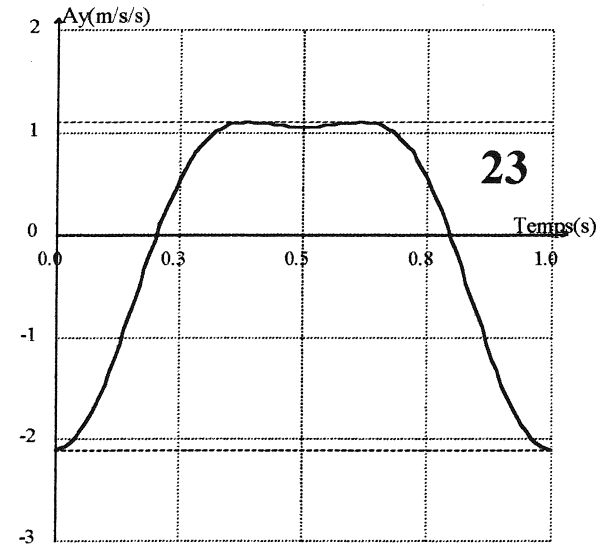


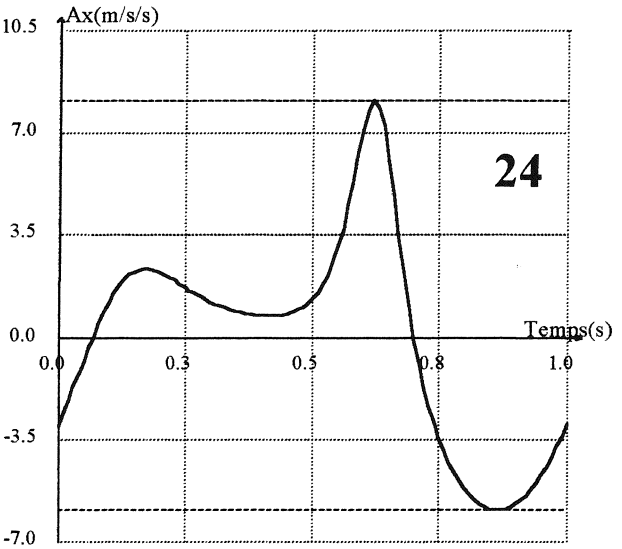


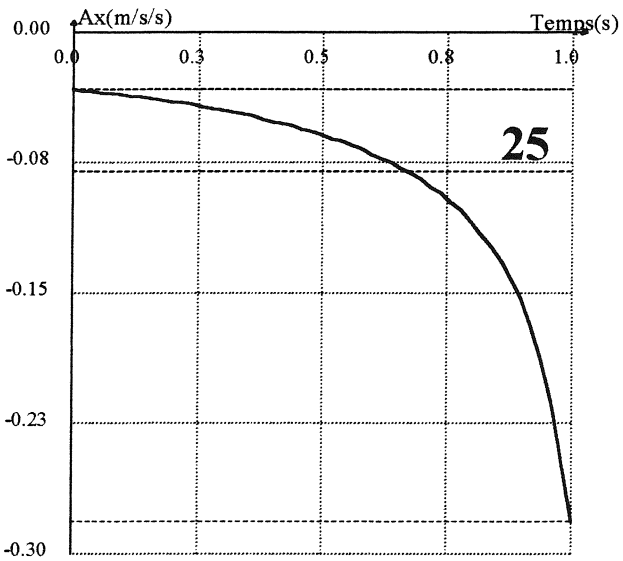
Les courbes des vitesses

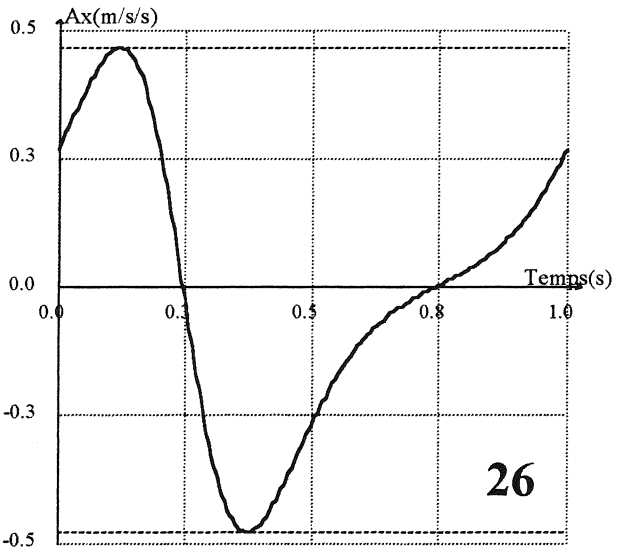






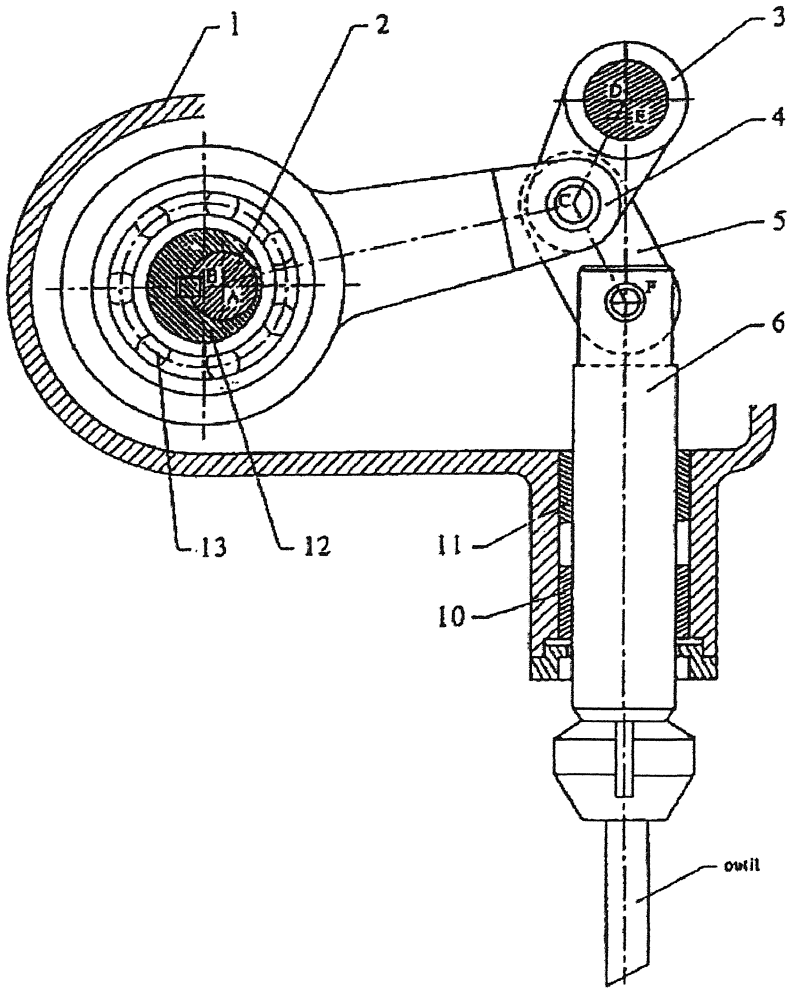


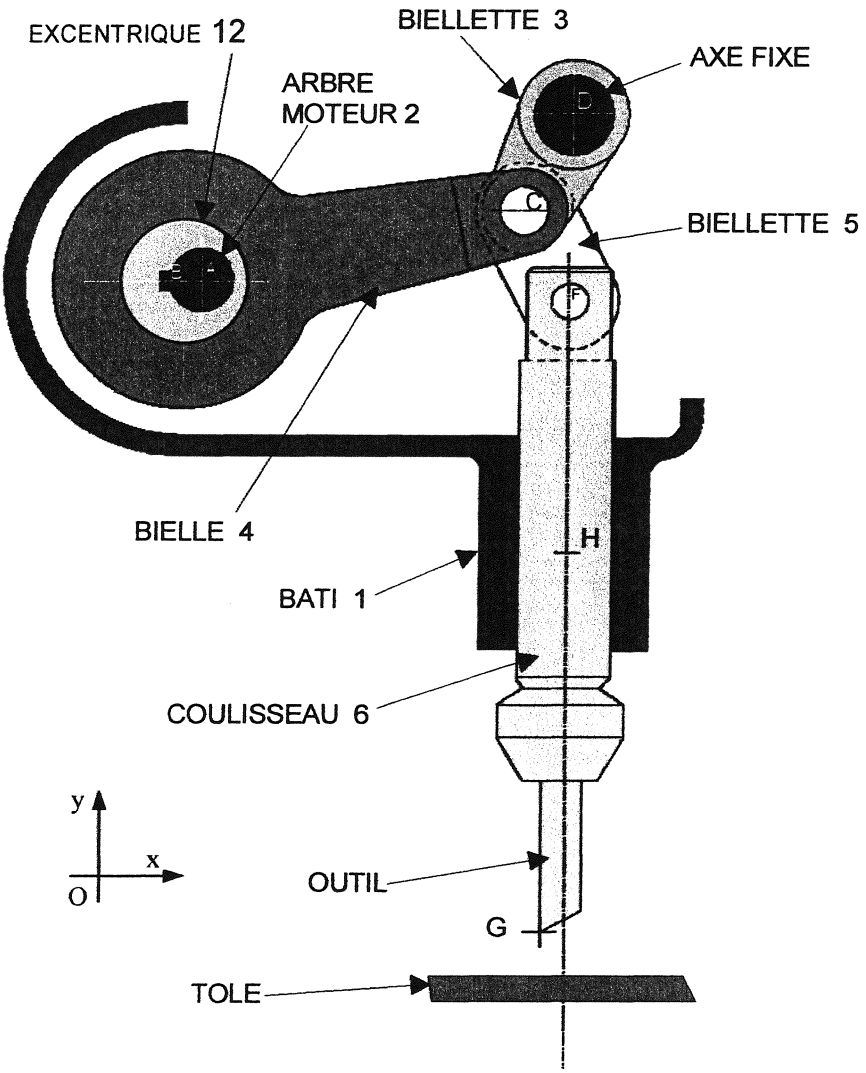




Les courbes des accélérations

TETE DE MACHINE A DECOUPER LES TOLES

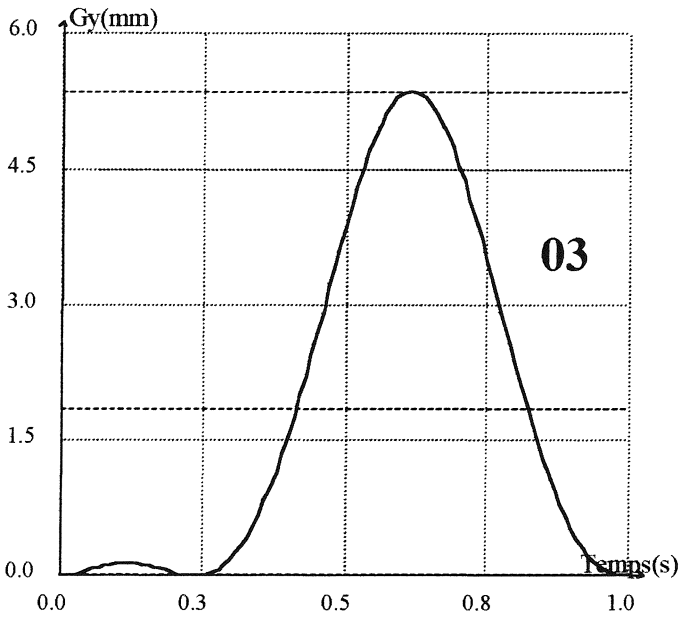


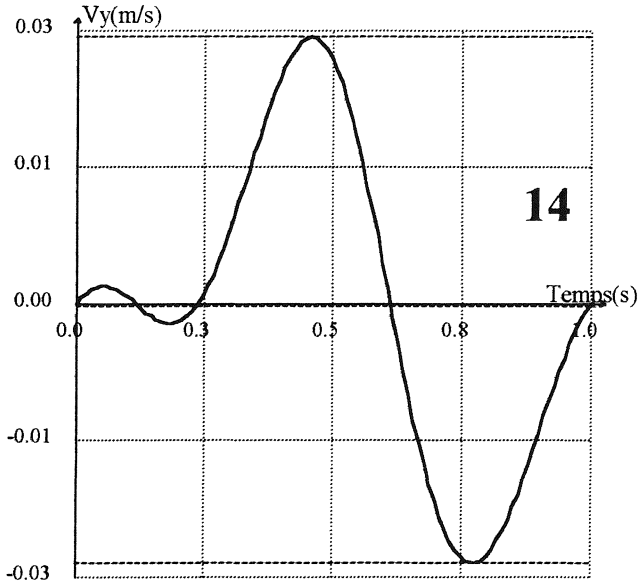


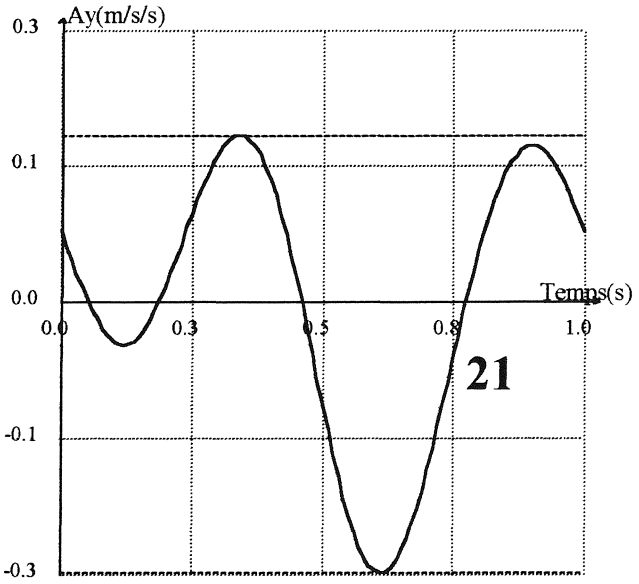
FONCTIONNEMENT :

Le dessin ci-dessus représente le mécanisme d'une machine universelle de chaudronnerie permettant une grande variété d'opérations de mise en forme de tôles minces (grignotage, découpage, poinçonnage,...).
Ce mécanisme constitué d'une bielle - manivelle et d'une genouillère(biellettes 3 et 5), situé dans la tête de la machine assure le mouvement et permet les réglages.
La rotation continue de l'arbre moteur 2 permet le mouvement de translation alternatif de l'outil.
L'étude cinématique suivante est relative à la position, la vitesse, l'accélération d'un point quelconque du coulisseau 6.

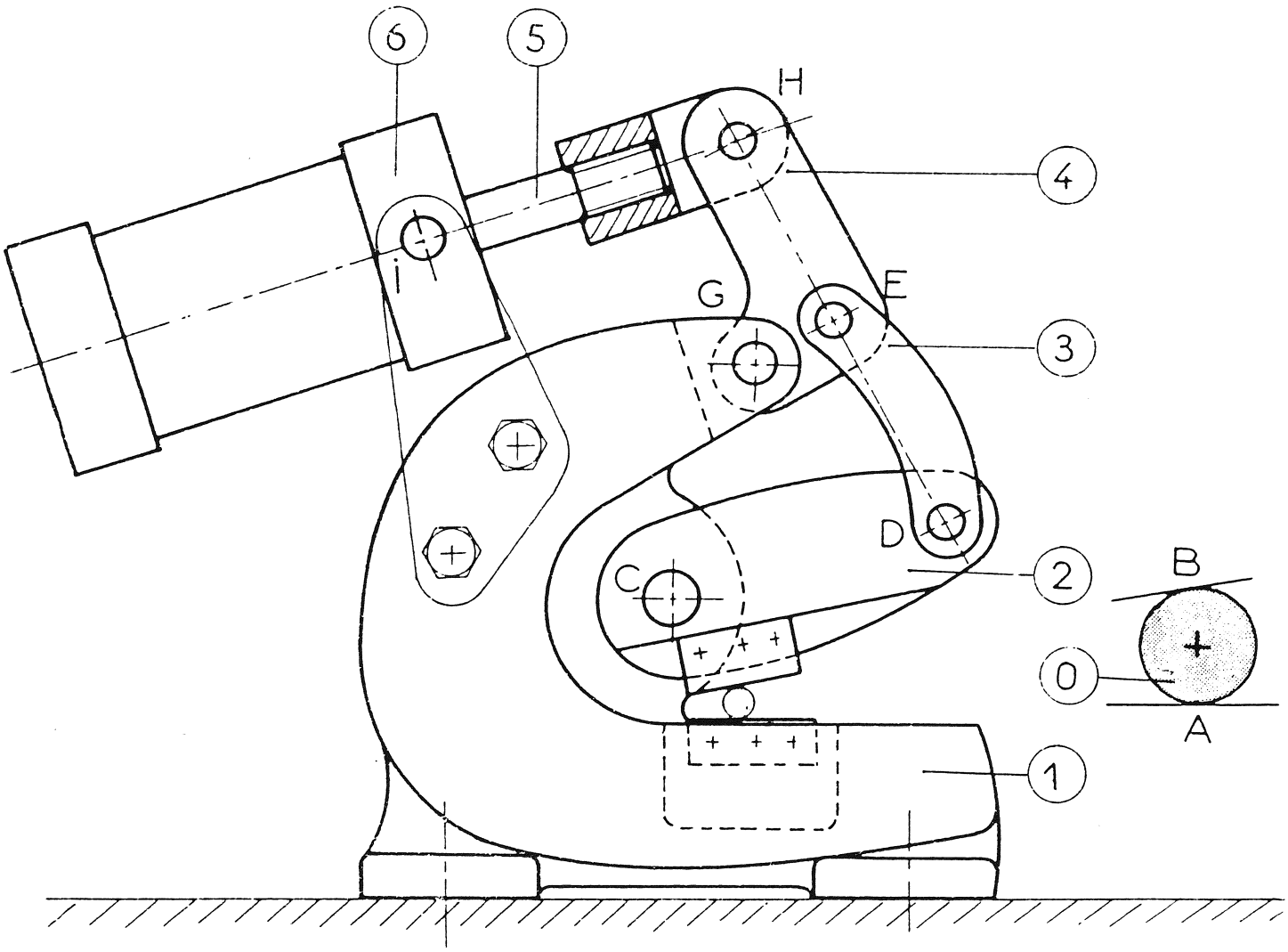
Machine à découper les tôles



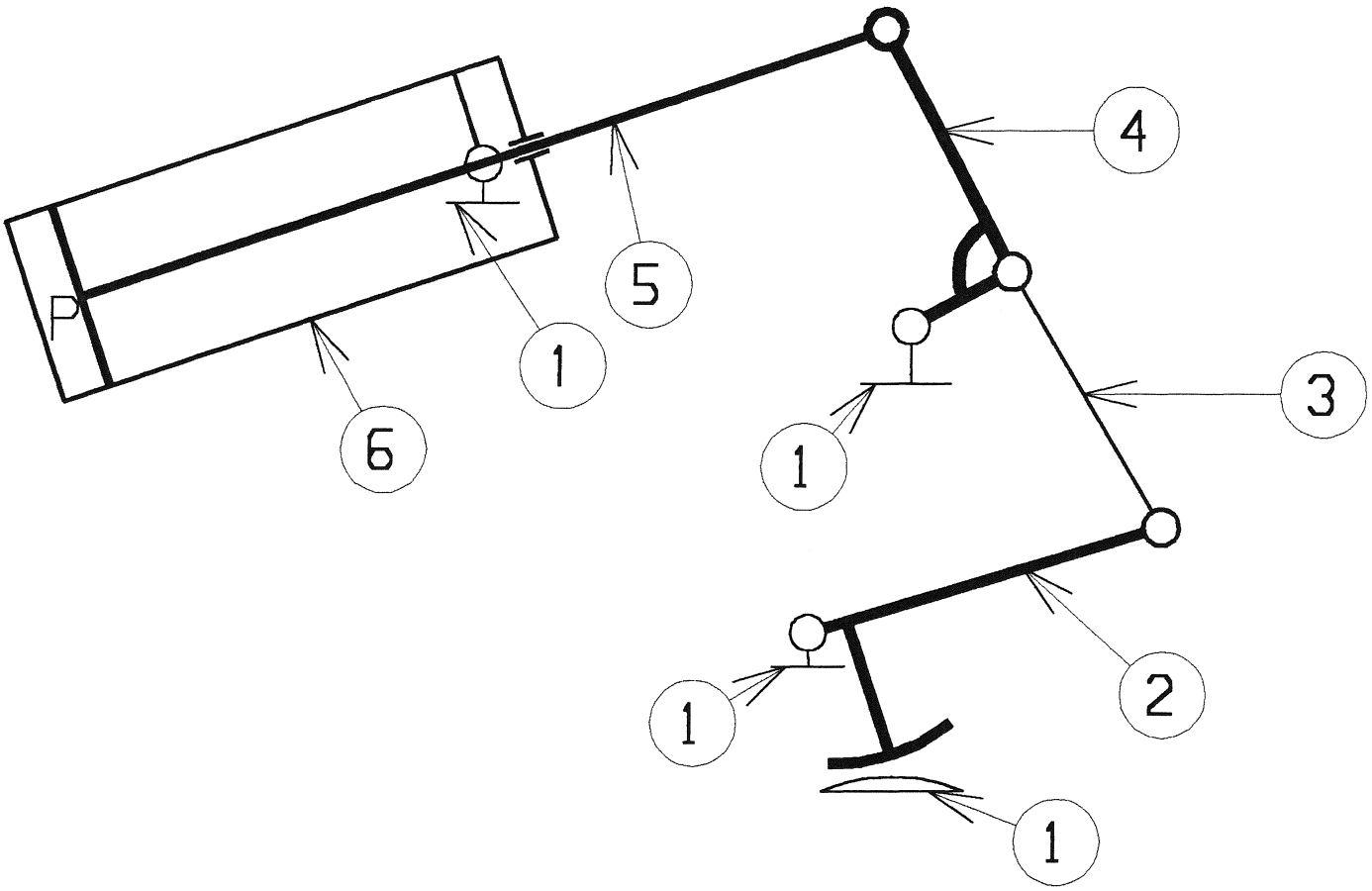




CISAILLE PNEUMATIQUE



Cisaille pneumatique



FONCTIONNEMENT :

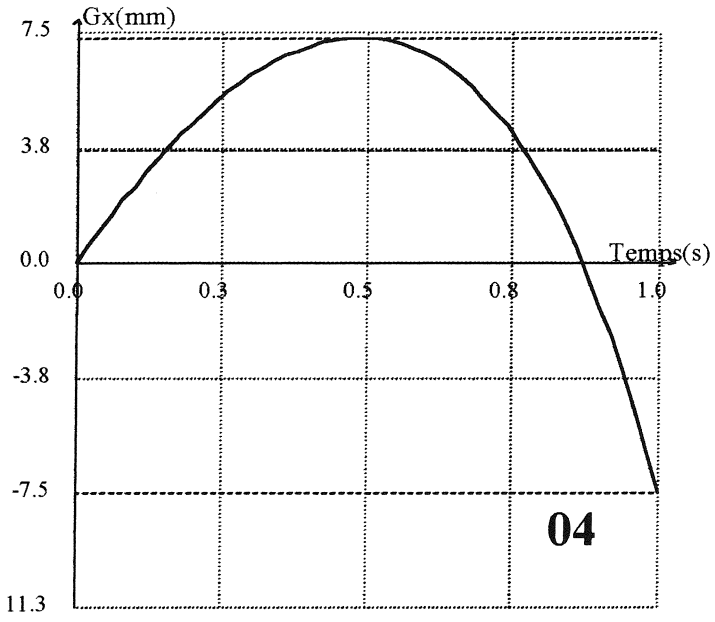
La pression P de l'air comprimé alimentant le vérin (6), articulé par rapport au bâti (1), exerce un effort sur le piston (5).

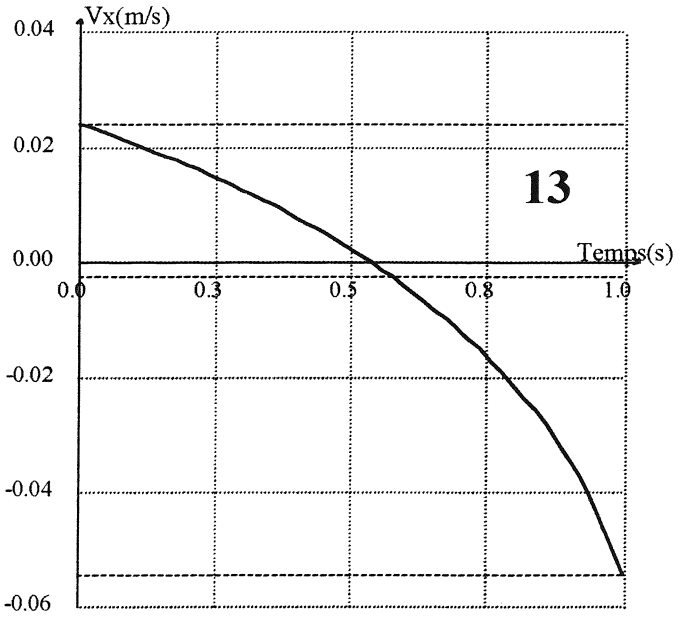
Les leviers (4) et (2), articulés par rapport au bâti (1), démultiplient cet effort.

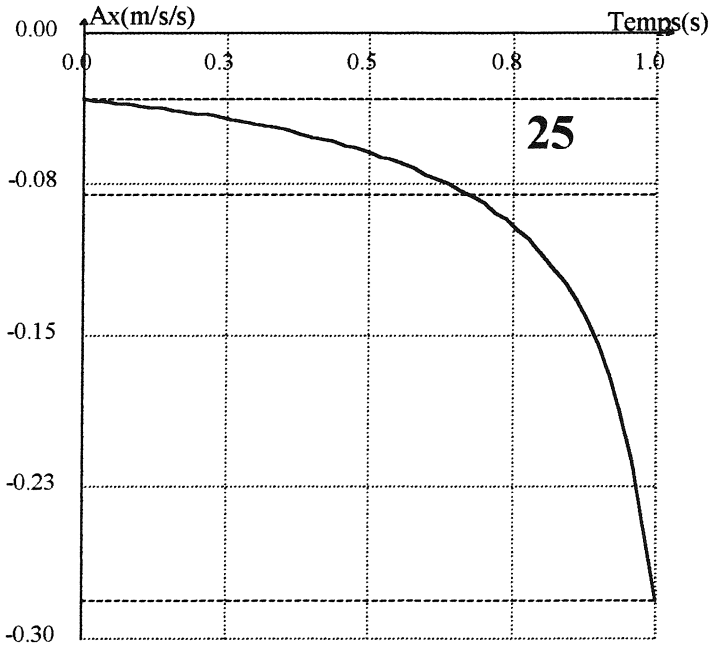
Ces deux leviers sont reliés entre eux par la biellette (3)

Les lames de la cisaille solidaires du levier (2) et du bâti (1) coupent le matériau.

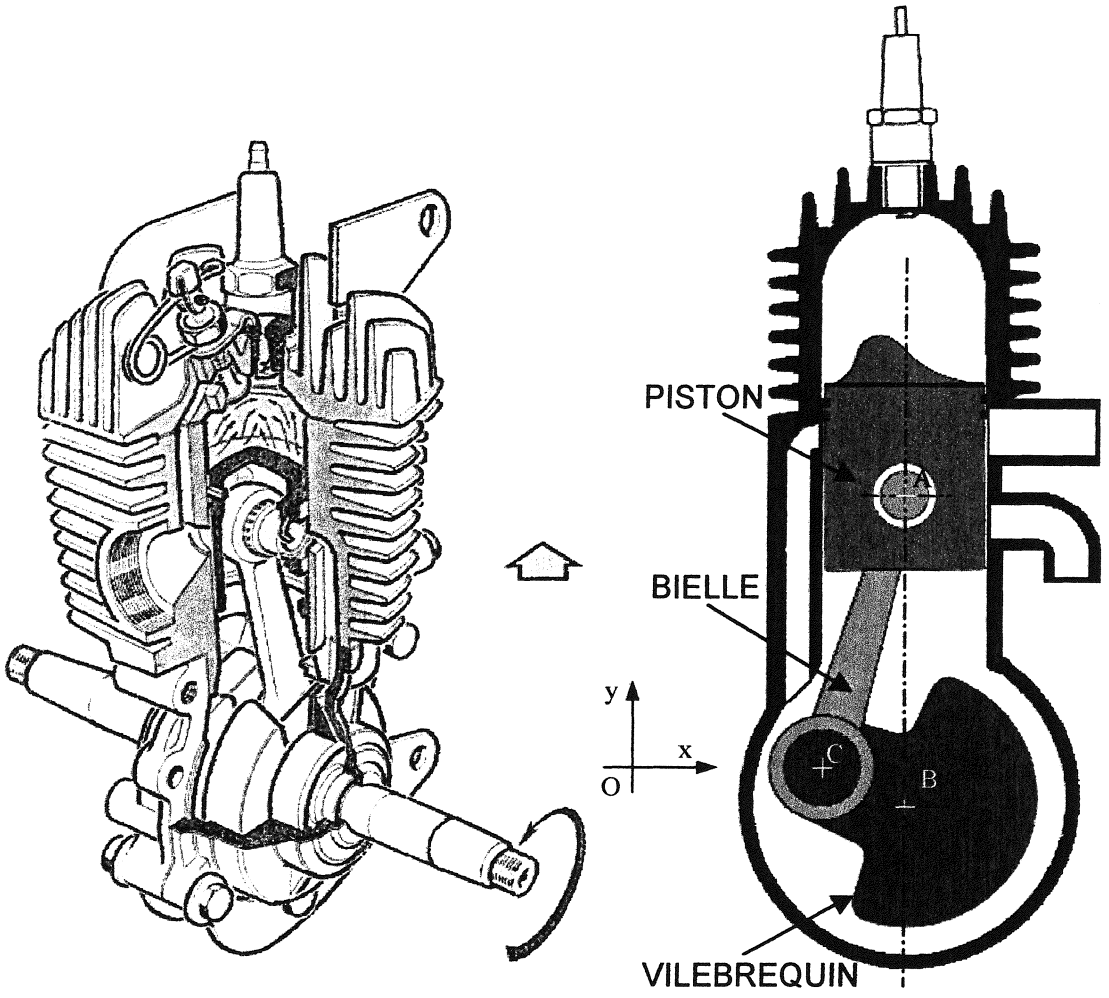
Cisaille pneumatique







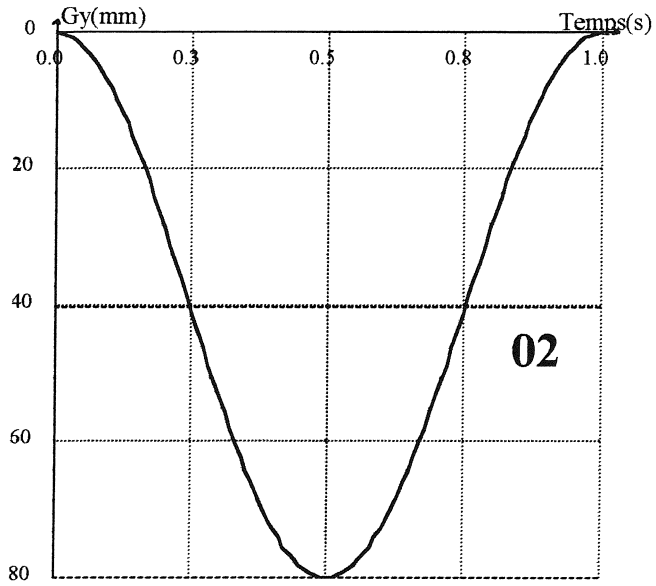
MOTEUR 2 TEMPS

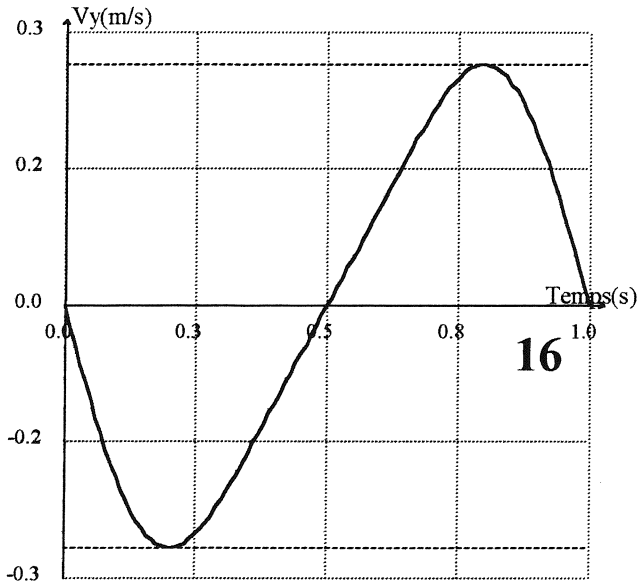


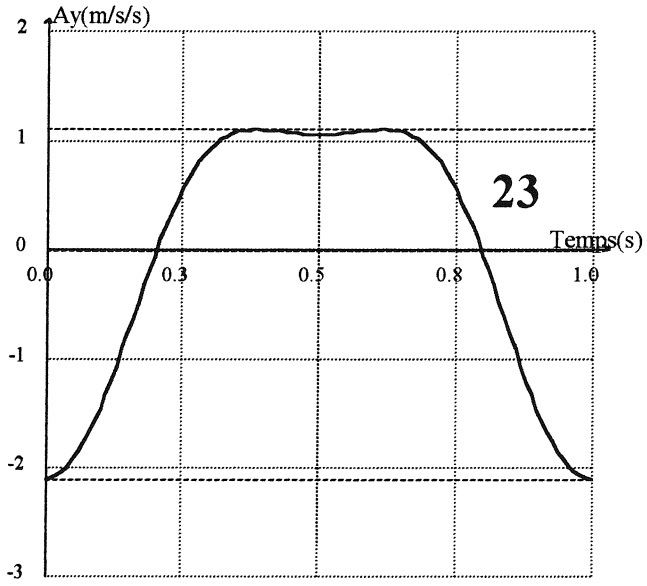
FONCTIONNEMENT :

Dans un moteur deux temps d'une "Mobylette" la translation alternative du piston entraîne la rotation continue du vilebrequin. Ce système de transformation de mouvement est défini comme le système bielle – manivelle .
L'étude cinématique suivante est relative à la position, la vitesse, l'accélération d'un point quelconque du piston.

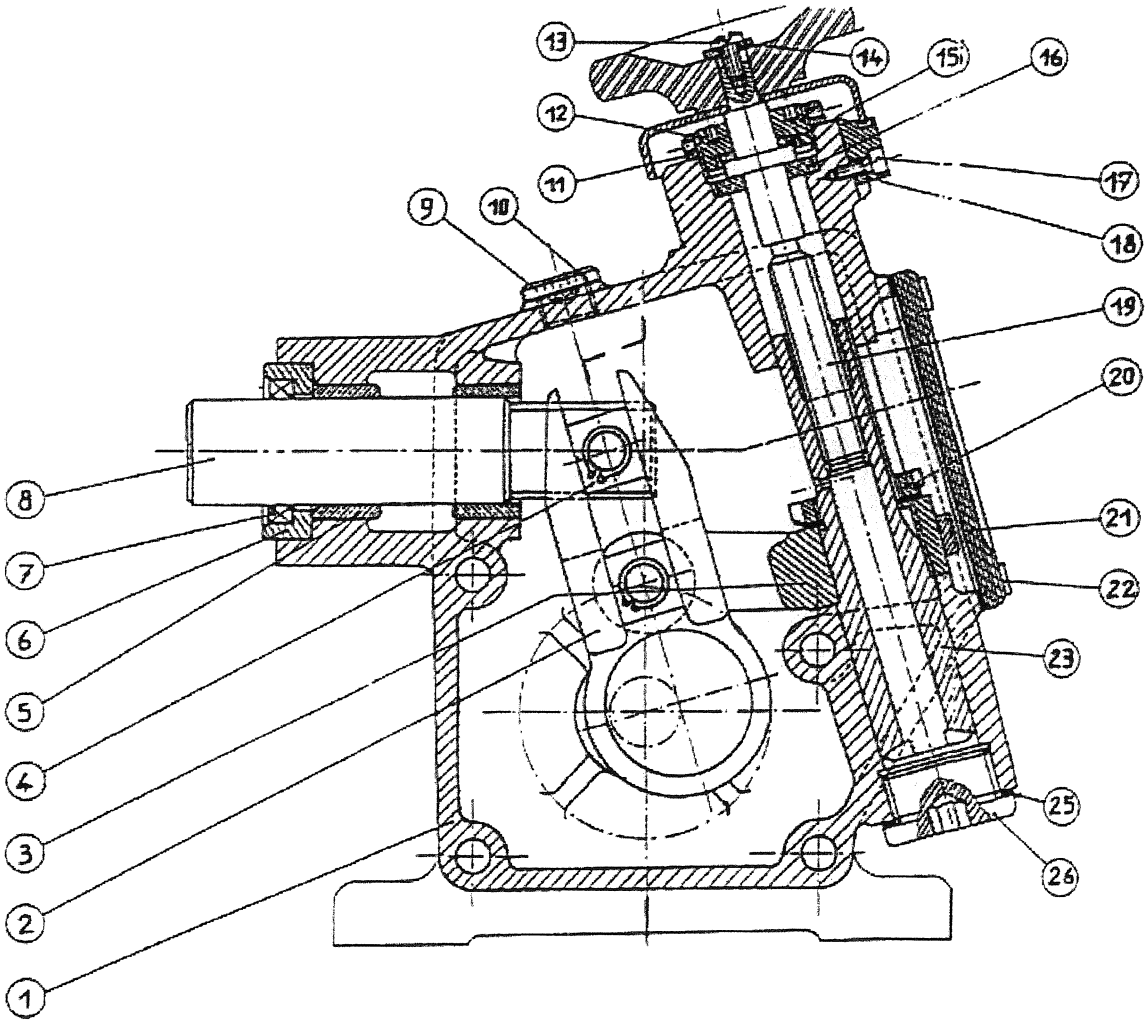
Moteur deux temps

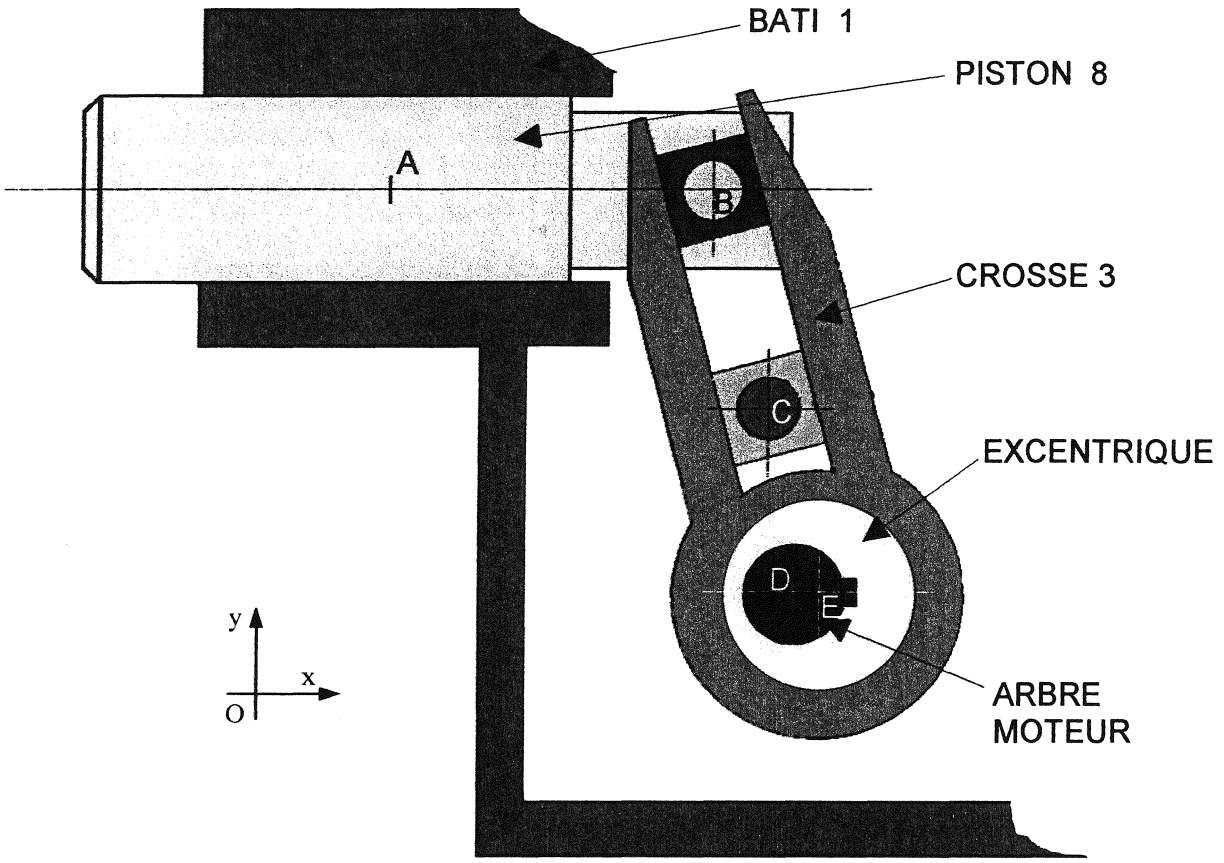






POMPE DOSEUSE

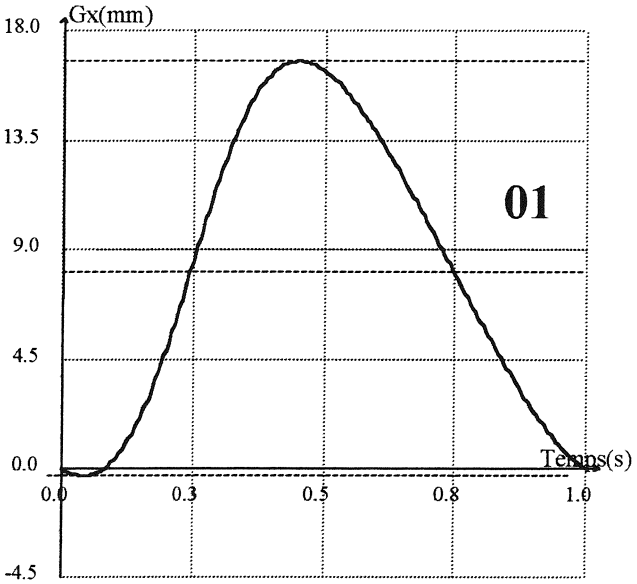


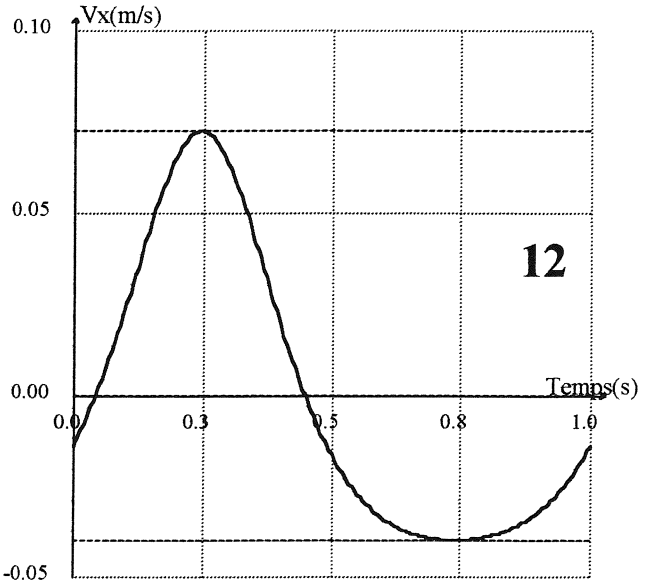


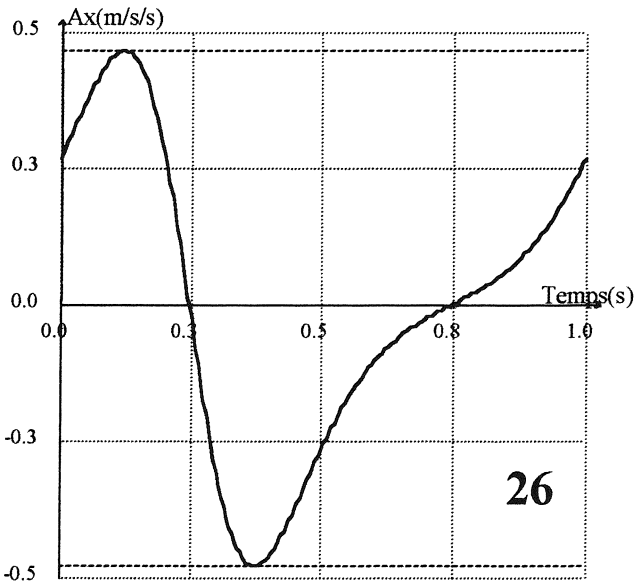
FONCTIONNEMENT :

Le dessin ci-dessus représente une partie de l'installation de traitement des eaux d'une piscine.
Il s'agit de traiter l'eau en continu en lui injectant une certaine dose de désinfectant.
La pompe représentée permet le transfert d'une quantité de désinfectant d'un réservoir vers une canalisation.
La rotation continue de l'arbre moteur provoque la translation alternative du piston 8.
Le point C, fixe pendant le fonctionnement de la pompe, est réglable en position pour permettre une variation de la course du piston 8 et donc du débit.
L'étude cinématique suivante est relative à la position, la vitesse, l'accélération d'un point quelconque du piston.

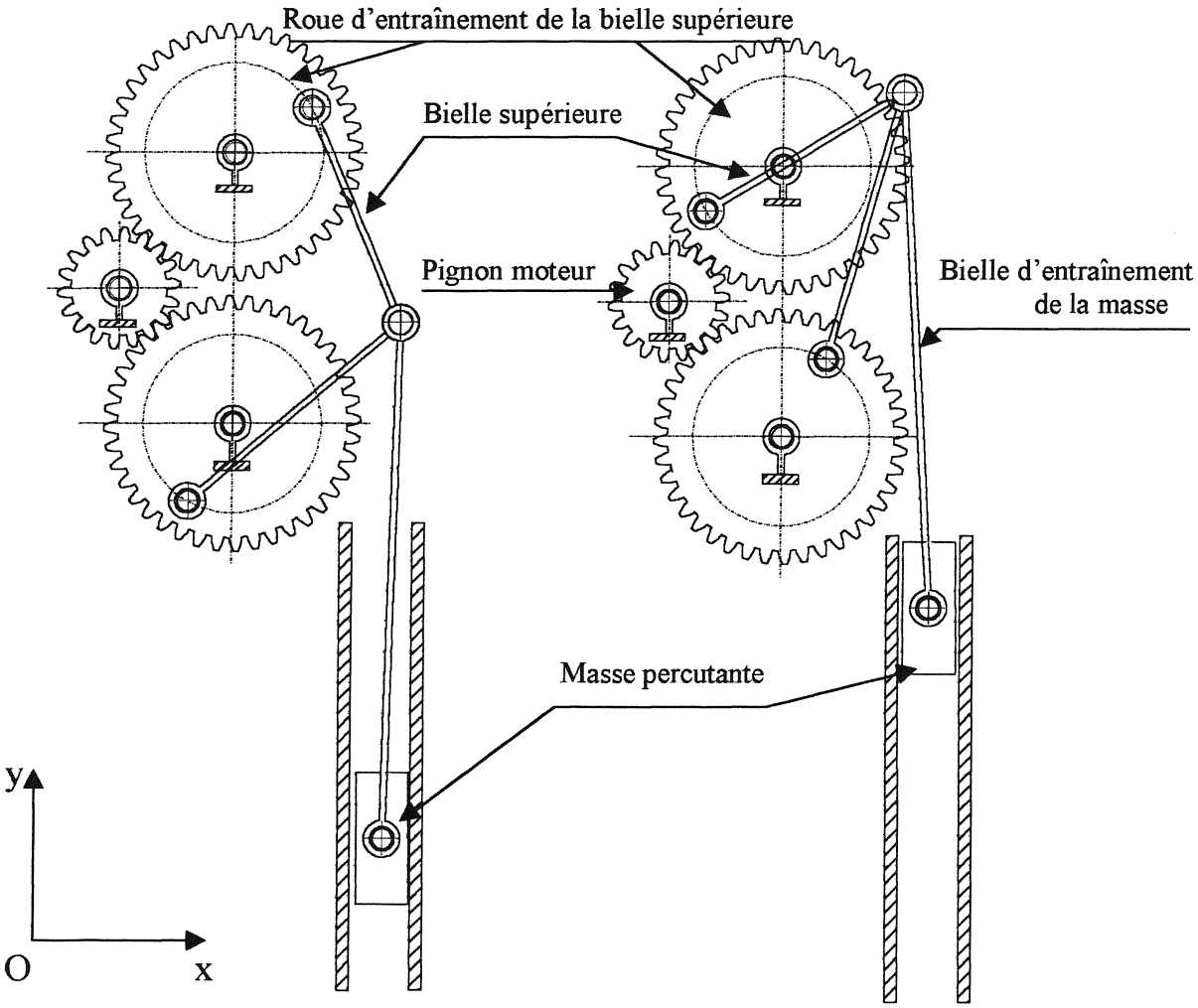
Pompe doseuse







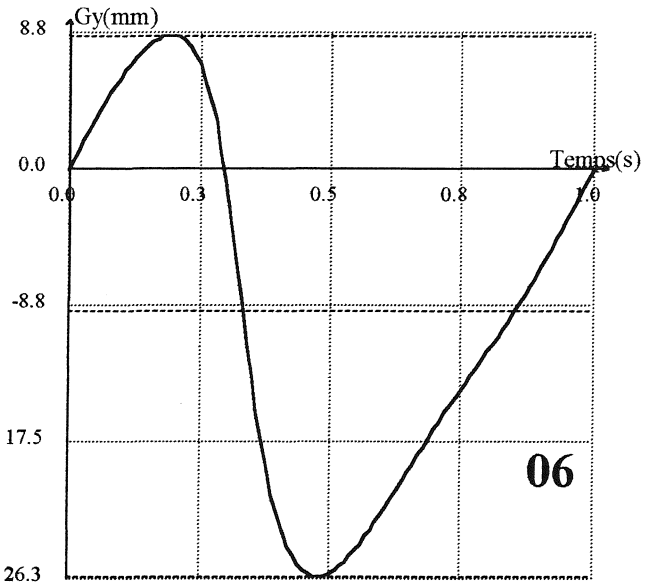
PRESSE A EMBOUTIR

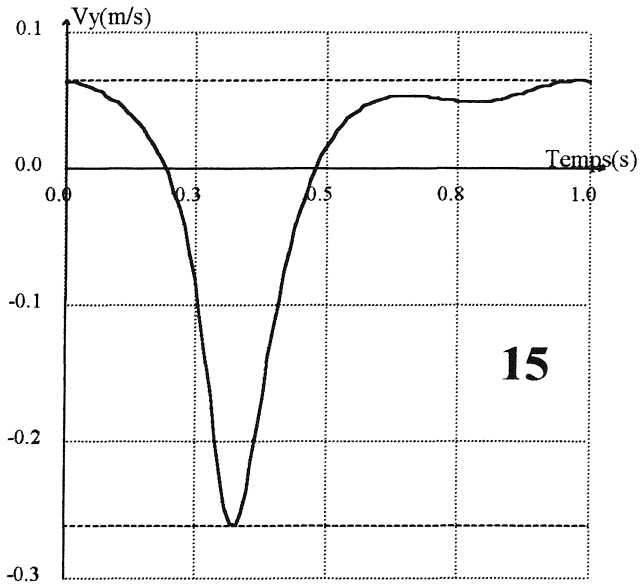


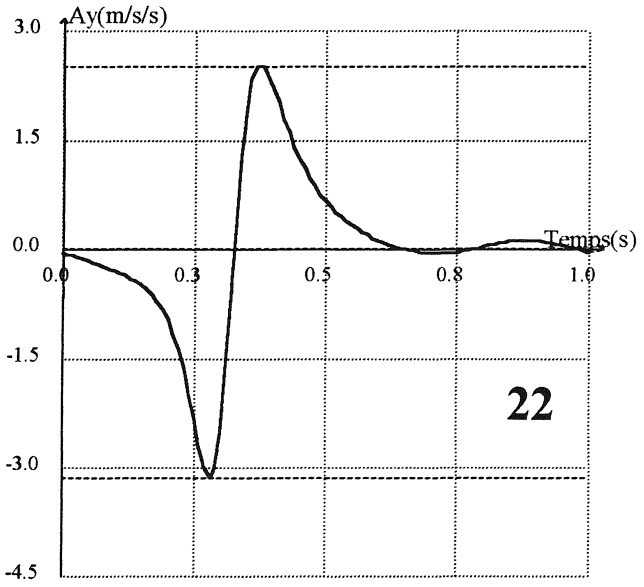
FONCTIONNEMENT :

D'après le principe fondamental de la dynamique une force est égale au produit d'une masse par l'accélération à laquelle elle est soumise.
Le but d'une presse à emboutir est de déformer une tôle à l'aide d'une masse qui vient la percuter.
Le principe de fonctionnement d'une presse à emboutir est donc de provoquer une accélération maximum à une masse au moment où celle-ci va frapper la tôle à déformer. Cette accélération est provoquée par le mécanisme ci-dessus.

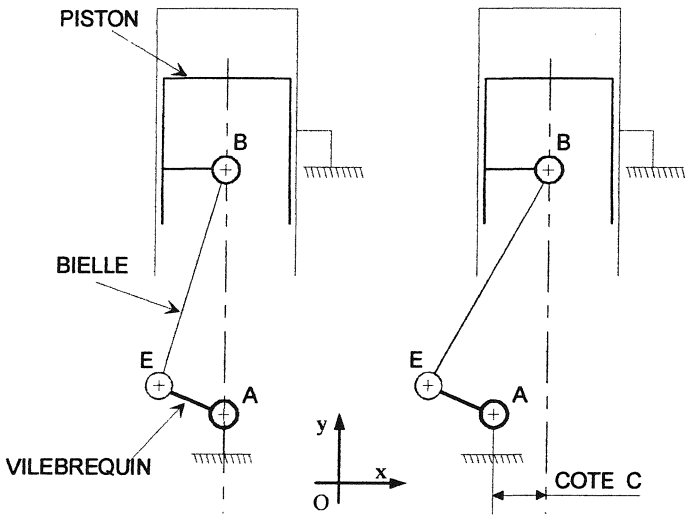
Presse à emboutir







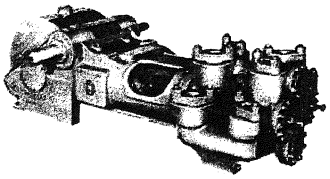
SYSTEME BIELLE-MANIVELLE

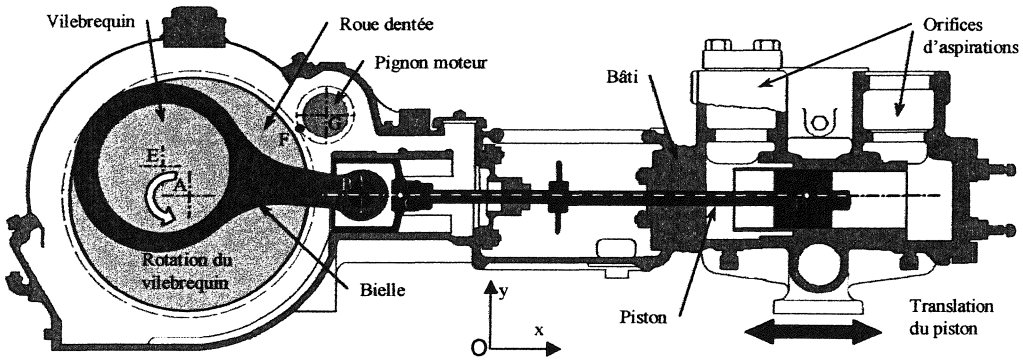


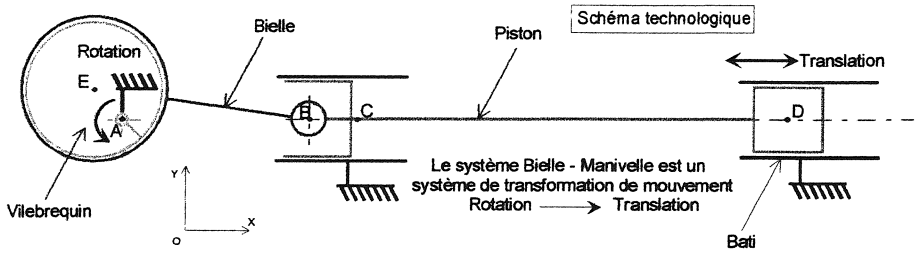
FONCTIONNEMENT :

Les dessins ci-dessus définissent le système bielle - manivelle. L'introduction de la cote C, paramètre variable, permet de modifier les caractéristiques cinématiques du système. Cette solution est utilisée généralement dans les pompes permettant de faire varier cylindrée et débit.
L'étude cinématique suivante est relative à la position, la vitesse, l'accélération d'un point quelconque du piston.

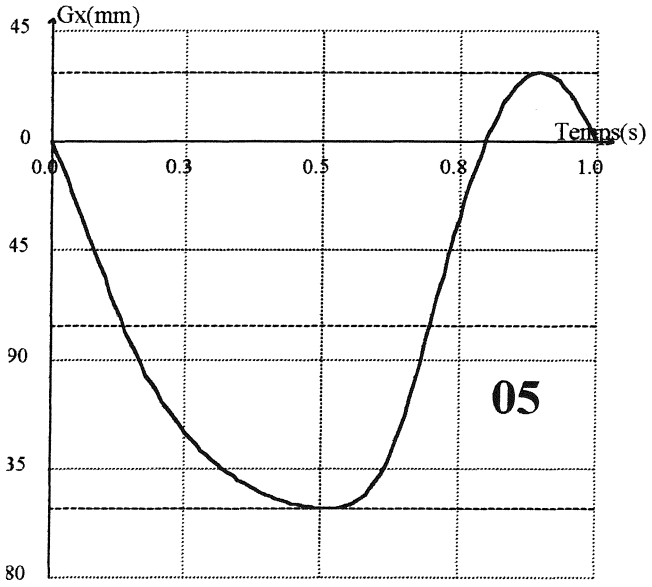
Exemple de pompe utilisant un système bielle - manivelle :
(Ici cote C = 0 mm)

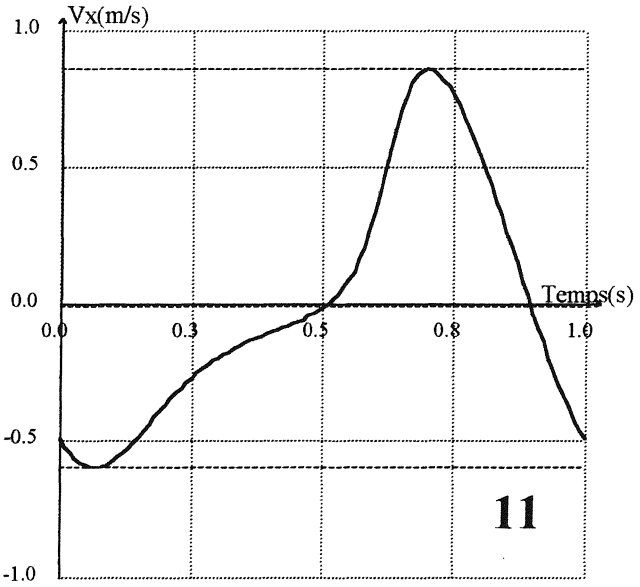


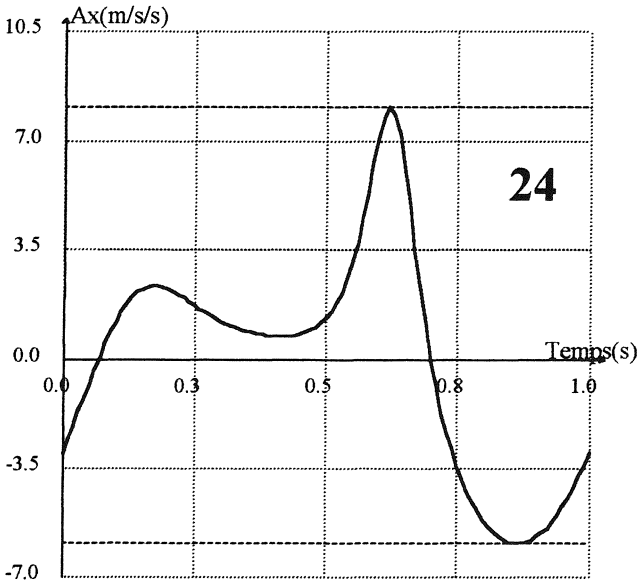




Système bielle manivelle







Chapitre 3

FLEXION D'UNE POUTRE

Une poutre soumise à une charge (ponctuelle ou uniformément répartie) se déforme. En mécanique, la déformation de la poutre s'appelle la flèche (y), cette flèche est variable en fonction de (x).
Pour la résolution d'un problème de flexion, nous procédons toujours de la même manière :

1. **Calcul de l'effort tranchant (T).**
   Ceci revient à faire la somme algébrique des forces situées à gauche d'un point quelconque M (appelé coupure d'abscisse x) de la zone considérée.
2. **Calcul du moment fléchissant (M_f^t).**
   Pour chaque zone considérée, nous faisons la somme algébrique des moments des forces situées à gauche de la coupure. Ceci revient à faire la somme des produits vectoriels $\overrightarrow{MA}_i \times \overrightarrow{F}_i$, où les A_i sont les points d'application des forces $\overrightarrow{F}_i$ (ou centre de gravité des charges uniformément réparties (voir activité 3), situées à gauche de la coupure sachant qu'une relation lie T et M_f^t :

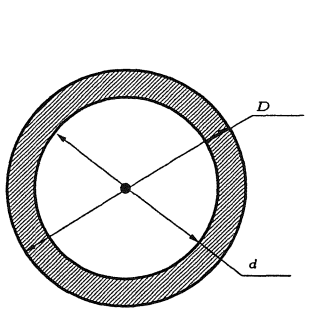
$$T = -\frac{dM_f^t}{dx}$$

   d'autre part, on sait que

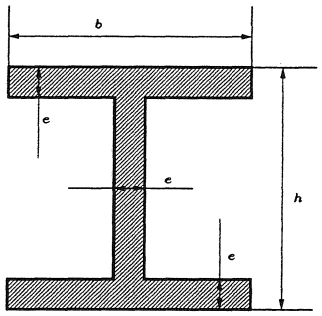
$$M_f^t = -EIy''$$

   où E est le module d'élasticité longitudinal du matériau constituant la poutre (pour l'acier, $E = 200\ 000 N/mm^2$) et I est le moment quadratique de la section de la poutre par rapport à l'axe (Gz).

Deux exemples de formules de moments quadratiques :



$$I = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64}$$



$$I = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-e)(h-2e)^3}{12}$$

Il semble intéressant, pour les élèves, de lier le cours de mécanique et le cours de mathématiques de la manière suivante :

1. **Le professeur de mécanique pose l'équation différentielle qu'il n'a pas à résoudre.**
2. **Le professeur de mathématiques termine le problème en sachant que la résolution se fait dans les conditions particulières :**
   (a) Au(x) point(s) d'appui(s) la flèche est nulle ($y = 0$).
   (b) Aux bornes de chaque zone la flèche est la même ($y_{droite} = y_{gauche}$).
   (c) Aux bornes de chaque zone les tangentes sont identiques ($y'_{droite} = y'_{gauche}$).

Le but du problème est de déterminer y dans chacune des zones, ce qui revient à déterminer des constantes.
Les trois activités qui suivents, présentent 3 cas de "déformés" allant du plus simple au plus compliqué. Les valeurs des constantes sont données dans les corrigés qui suivent ces activités.
Pour les activités suivantes, le professeur de mécanique détermine avec ses élèves l'effort tranchant et le moment fléchissant dans les différentes zones.
Les hypothèses énoncées précédemment permettent au professeur de mathématiques de résoudre les équations différentielles et de déterminer la flèche en un point quelconque de la poutre et en particulier la flèche maxi.

ACTIVITE 1

Nous sommes en présence d'une poutre encastrée à droite dans un mur et supportant à son extrémité gauche une charge concentrée.

ACTIVITE 2

Nous sommes en présence d'une poutre en équilibre sur deux apppuis A et B. Une charge concentrée est appliquée au point C.
Pour que cette poutre soit en équilibre, il faut que la somme vectorielle des forces soit égale au vecteur nul **et** *la somme vectorielle des moments des forces soit égale au vecteur nul, ce qui explique les actions en A et en B.*

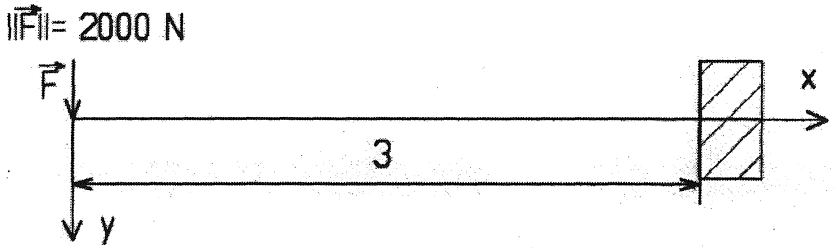
ACTIVITE 3

Nous sommes en présence d'une poutre en équilibre sur deux apppuis A et B. Une charge uniformément répartie est appliquée entre les points C et D.
Pour que cette poutre soit en équilibre, il faut que la somme vectorielle des forces soit égale au vecteur nul **et** *la somme vectorielle des moments des forces soit égale au vecteur nul, ce qui explique les actions en A et en B.*

ACTIVITE 1

FLEXION D'UNE POUTRE

Déterminer la flèche de la poutre chargée suivant la représentation ci-dessous.



Nous prendrons pour la détermination des équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la somme des forces à droite du tronçon de gauche.

On rappelle que $T = -\frac{d M_f'}{dx}$

ZONES	0 < x < 3
T	2000
$M_f' = -EIy''$	- 2000x
- Eiy'	
- EIy	

Détermination des constantes

$C_1 =$ $C_2 =$

Les équations de la déformation de la poutre sont :

- EIy'	
- EIy	

Détermination de la flèche maximum

ATTENTION AUX UNITES

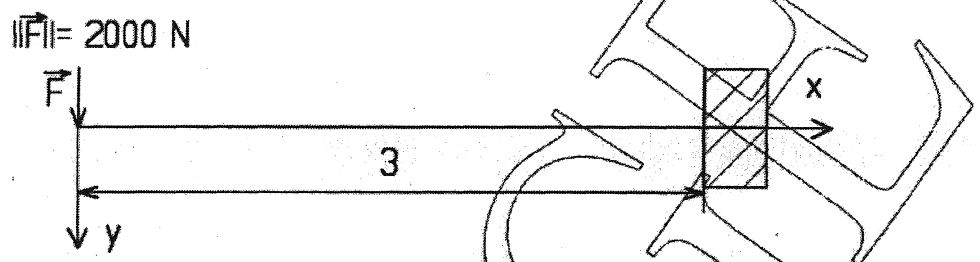
Dans le calcul qui a été fait M_f' a été calculé en Nm.

Comme E est exprimé généralement en N/mm^2 et I en mm^4, il faut penser à ramener le calcul de -EIy en unités cohérentes par rapport aux unités de E et de I donc il faut multiplier le résultat de y_{maxi} par 10^9 qui représente le passage de Nm^3 en Nmm^3.

ACTIVITE 1

FLEXION D'UNE POUTRE

Déterminer la flèche de la poutre chargée suivant la représentation ci-dessous.



Nous prendrons pour la détermination des équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la somme des forces à droite du tronçon de gauche.

On rappelle que $T = -\dfrac{dM_f}{dx}$

ZONES	$0 < x < 3$
T	2000
$M'_f = -EIy''$	$-2000x$
$-EIy'$	$-(2000x^2)/2 + C_1$
$-EIy$	$-(2000x^3)/6 + C_1x + C_2$

Détermination des constantes

En $x = 3$, $y' = 0$ donc $-(2000x^2)/2 + C_1 = 0$ pour $x = 3$ alors $C_1 = 9000$
En $x = 3$, $y = 0$ donc $-(2000x^3)/6 + C_1x + C_2 = 0$ En identifiant le résultat précédent
$(2000x^3)/6 + 9000x + C_2 = 0$ pour $x = 3$
Alors $C_2 = -18000$

$C_1 = 9000$ $\qquad$ $C_2 = -18000$

Les équations de la déformation de la poutre sont :

$-EIy'$	$-(2000x^2)/2 + 9000$
$-EIy$	$-(2000x^3)/6 + 9000x - 18000$

Détermination de la flèche maximum

La flèche maximum est située à l'extrémité gauche de la poutre.
Pour $x = 0$ dans l'équation :
$-EIy = -(2000x^3)/6 + 9000x - 18000$
$EIy = -18000$
Donc $y_{maxi} = 18000 / EI$

ATTENTION AUX UNITES

Dans le calcul qui a été fait M'_f a été calculé en Nm.

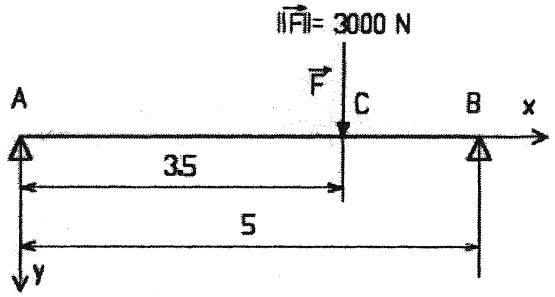
Comme E est exprimé généralement en N/mm^2 et I en mm^4, il faut penser à ramener le calcul de -EIy en unités cohérentes par rapport aux unités de E et de I donc il faut multiplier le résultat de y_{maxi} par 10^9 qui représente le passage de Nm^3 en Nmm^3.

ACTIVITE 2

FLEXION D'UNE POUTRE

Déterminer la flèche de la poutre chargée suivant la représentation ci-dessous.

Du fait de la charge proposée les actions aux appuis sont : $\|\vec{A}\| = 900$ N et $\|\vec{B}\| = 2100$ N



Nous prendrons pour la détermination des équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la somme des forces à droite du tronçon de gauche.

On rappelle que $T = -\dfrac{d M_f^t}{dx}$

ZONES	AC	CB
T	- 900	- 900 + 2000
$M_f^t = -EIy''$	900x	900x - 2000(x-3,5)
- Eiy'		
- EIy		

Calcul des constantes

Récapitulatif à propos des constantes :

$C_1 =$ $C_2 =$ $C_3 =$ $C_4 =$

Les équations de la déformation de la poutre sont :

- EIy'		
- EIy		

Détermination de la flèche maximum

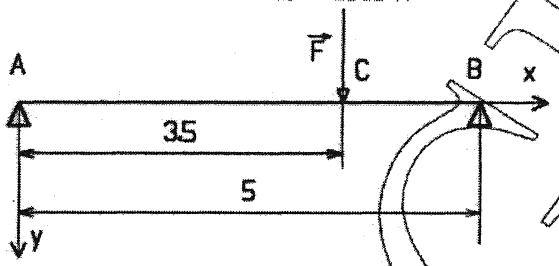
ACTIVITE 2

FLEXION D'UNE POUTRE

Déterminer la flèche de la poutre chargée suivant la représentation ci-dessous.

Du fait de la charge proposée les actions aux appuis sont : $\|\vec{A}\| = 900$ N et $\|\vec{B}\| = 2100$ N

$\|\vec{F}\| = 3000$ N



Nous prendrons pour la détermination des équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la somme des forces à droite du tronçon de gauche.

On rappelle que $T = -\dfrac{d M_f^t}{dx}$

ZONES	AC	CB
T	- 900	- 900 + 2000
$M_f^t = - EIy''$	900x	900x - 2000(x-3,5)
- Eiy'	$(900x^2)/2 + C_1$	$(900x^2)/2 - [2000(x-3,5)^2]/2 + C_2$
- EIy	$(900x^3)/6 + C_1x + C_3$	$(900x^3)/6 - [2000(x-3,5)^3]/6 + C_2x + C_4$

Calcul des constantes

En x = 0 , y = 0 donc $(900x^3)/6 + C_1x + C_3 = 0$, *pour x = 0 alors* $C_3 = 0$

En x = 3,5 , y' à gauche = y' à droite donc : $(900x^2)/2 + C_1 = (900x^2)/2 - [2000(x-3,5)^2]/2 + C_2$

pour x = 3,5 alors $C_1 = C_2$

En x = 3,5 , y à gauche = y à droite donc : $(900x^3)/6 + C_1x + C_3 = (900x^3)/6 - [2000(x-3,5)^3]/6 + C_2x + C_4$

pour x = 3,5 alors $C_3 = C_4$ *, comme* $C_3 = 0$ *alors* $C_4 = 0$.

En x = 5 , y = 0 donc : $(900x^3)/6 - [2000(x-3,5)^3]/6 + C_2x = 0$

pour x = 5 alors $C_2 = \{[- (900x5^3)/6] + [2000(5-3,5)^3]/6\}/5$ *alors* $C_2 = -3525$

Récapitulatif à propos des constantes :

$C_1 = C_2 = -3525$	$C_3 = C_4 = 0$

Les équations de la déformation de la poutre sont :

- EIy'	$(900x^2)/2 - 3525$	$(900x^3)/2 - [2000(x-3,5)^2]/2 - 3525$
- EIy	$(900x^3)/6 - 3525x$	$(900x^3)/6 - [2000(x-3,5)^3]/6 - 3525x$

Détermination de la flèche maximum

La flèche maximum est située là où l'équation de - Eiy' = 0 dans l'intervalle de définition de la zone considérée.

Dans la zone AC $0 < x < 3,5$ *recherchons la valeur de x pour laquelle* $(900x^2)/2 - 3525 = 0$.

On trouve x =2,7988

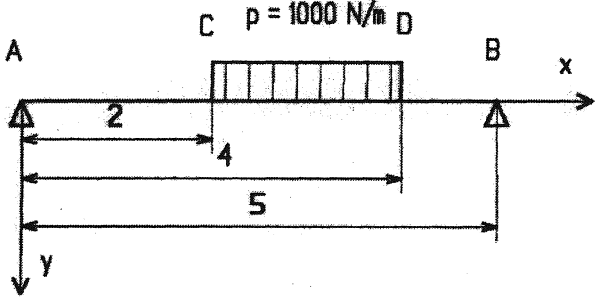
Pour la valeur de x trouvée nous allons trouver la valeur de la flèche maximum en remplaçant x par sa valeur dans l'équation : $- EIy = (900x^3)/6 - 3525x$ *alors* $y_{maxi} = (6577,20)/EI$

ACTIVITE 3

FLEXION D'UNE POUTRE

Déterminer la flèche de la poutre chargée suivant la représentation ci-dessous.

Du fait de la charge proposée les actions aux appuis sont : $\|\vec{A}\| = 800$ N et $\|\vec{B}\| = 1200$ N



Nous prendrons pour la détermination des équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la somme des forces et moments à gauche du tronçon de droite.

On rappelle que $T = -\dfrac{d M_f'}{dx}$

ZONES	AC	CD	DB
T	- 800	- 800 + 1000(x-2)	- 800 + 2000
$M_f' = -EIy''$	800x	$800x - [1000(x-2)^2]/2$	800x - 2000(x-3)
- Eiy'			
- EIy			

Détermination des constantes

Récapitulation des constantes

$C_1 = C_2 =$ $C_3 =$ $C_4 = C_5 =$ $C_6 =$

Les équations de la déformation de la poutre sont :

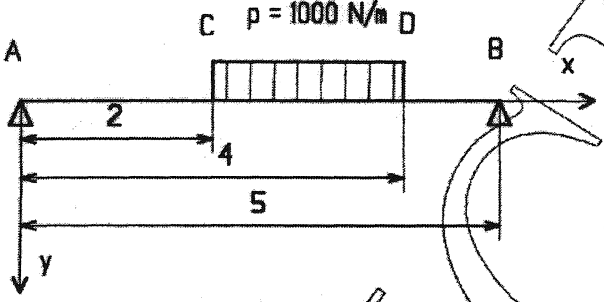
- Eiy'			
- EIy			

Détermination de la flèche maximum

ACTIVITE 3

FLEXION D'UNE POUTRE

Déterminer la flèche de la poutre chargée suivant la représentation ci-dessous.
Du fait de la charge proposée les actions aux appuis sont : $\|\vec{A}\| = 800$ N et $\|\vec{B}\| = 1200$ N



Nous prendrons pour la détermination des équations de l'effort tranchant et du moment fléchissant, la somme des forces et moments à gauche du tronçon de droite.

On rappelle que $T = -\dfrac{dM_f^t}{dx}$

ZONES	AC	CD	DB
T	- 800	- 800 + 1000(x-2)	- 800 + 2000
$M_f^t = -EIy''$	800x	800x - [1000(x-2)²]/2	800x - 2000(x-3)
- Eiy'	$(800x^2)/2 + C_1$	$(800x^2)/2 - [1000(x-2)^3]/6 + C_3$	$(800x^2)/2 - [2000(x-3)^2]/2 + C_3$
- EIy	$(800x^3)/6 + C_1x + C_4$	$(800x^3)/6 - [1000(x-2)^4]/24 + C_3x + C_5$	$(800x^3)/6 - [2000(x-3)^3]/6 + C_3x + C_6$

Détermination des constantes

En x = 0 , y = 0 donc : $(800x^3)/6 + C_1x + C_4 = 0$; pour x = 0 alors $C_4 = 0$
En x = 2 , y' à gauche = y' à droite donc : $(800x^2)/2 + C_1 = (800x^2)/2 - [1000(x-2)^3]/6 + C_2$
pour x = 2 alors $C_1 = C_2$
En x = 2 , y à gauche = y à droite donc : $(800x^3)/6 + C_1x + C_4 = (800x^3)/6 - [1000(x-2)^4]/24 + C_2x + C_5$
pour x = 2 alors $C_4 = C_5$, comme $C_4 = 0$ alors $C_5 = 0$.
En x = 4 , y' à gauche = y' à droite donc : $(800x^2)/2 - [1000(x-2)^3]/6 + C_2 = (800x^2)/2 - [2000(x-3)^2]/2 + C_3$
pour x = 4 alors $-8000/6 + C_2 = -1000 + C_3$ donc $C_2 = 1000/3 + C_3$.
En x = 4 , y à gauche = y à droite donc :
$(800x^3)/6 - [1000(x-2)^4]/24 + C_2x + C_5 = (800x^3)/6 - [2000(x-3)^3]/6 + C_3x + C_6$
pour x = 4 alors : $-2000/3 + 4C_2 + C_5 = -1000/3 + 4C_3 + C_6$ donc $C_6 = 1000$
En x = 5 , y = 0 donc : $(800x^3)/6 - [2000(x-3)^3]/6 + C_3x + C_6 = 0$; pour x = 0 alors $C_3 = -3000$

Récapitulation des constantes

$C_1 = C_2 = -8000/3$ $\quad C_3 = -3000$ $\quad C_4 = C_5 = 0$ $\quad C_6 = 1000$

Les équations de la déformation de la poutre sont :

- Ely'	$(800x^2)/2 - 8000/3$	$(800x^2)/2 - [1000(x-2)^3]/6 - 8000/3$	$(800x^2)/2 - [2000(x-3)^2]/2 - 3000$
- Ely	$(800x^3)/6 - 8000x/3$	$(800x^3)/6 - [1000(x-2)^4]/24 - 8000x/3$	$(800x^3)/6 - [2000(x-3)^3]/6 - 3000x + 1000$

Détermination de la flèche maximum

Par dichotomie dans l'équation $(800x^2)/2 - [1000(x-2)^3]/6 - 8000/3 = -EIy'$ nous allons rechercher la valeur de x tel que $2<x<4$ pour laquelle $y' = 0$. Nous trouvons $x = 2.5992982$
La flèche maxi est $y_{maxi} = \{(800x^3)/6 - [1000(x-2)^4]/24 - 8000x/3\}/-EI$; $y_{maxi} = -4595{,}267 / -EI$

Bibliographie

1. **D. Spenlé et R. Gourhant** - *Guide du calcul en mécanique.* Hachette Technique, 1992.

2. **J.-L. Fanchon** - *Mécanique, 1ère et Terminale STI.* Nathan Technique, 1996.

3. **Sous la direction de André Antibi et Raymond Barra, avec Denux Christian, Destainville Bernard, Marques Roseline** - *MATHS Seconde* - Nouveau Transmath Edition 1995.

4. **Sous la direction de Guy Bontemps avec Pierre Compagnon, Monique Nonet, Bernard Candé, René Serou** - *MATHS 1ère S et 1ère E* - Collection Fractale géométrie 1991.

Table des matières

1 GEOMETRIE ET MECANIQUE **5**

1.1 Introduction 5

1.2 Géométrie et mécanique 5

1.2.1 Repère et notions de coordonnées, trigonométrie 6

1.2.2 Constructions vectorielles 12

1.3 Produit scalaire 24

2 DERIVEE : VITESSE ET ACCELERATION **31**

2.1 Introduction 31

2.2 Liens entre mouvement d'un système et nombre dérivé 32

2.3 Applications et illustrations 38

3 FLEXION D'UNE POUTRE **61**

Imprimé et édité
Par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Deuxième trimestre 2000
N° de publication : 00/03

I.R.E.M. de RENNES – Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu – Bâtiment 32 B
35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 26 34
Fax : 02 99 28 16 38
Site WEB : http://www.univ-rennes1.fr/irem

Commande :
Tél : 02 99 28 26 08
e.mail : Daniele.Quentin@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : « LIAISON MATHS MECA EN S.T.I. »

I.R.E.M. : RENNES

AUTEURS: BOISSEAU Yvette - HENIN Michel - LARVOR Jean-Michel - LE TREUT Léone - RAFFIER Danielle - RAZAFIMAHERY Fulgence - ROCA Philippe

DATE : AVRIL 2000

NIVEAU : Seconde (toutes séries), Premières et Terminales S.T.I.

PUBLIC CONCERNE : Professeur de Lycée

MOT CLES :

- Vecteurs.
- Sommes vectorielles.
- Coordonnées.
- Trigonométrie
- Dérivée (vitesse accélération)
- Equations différentielles
- Géométrie dans l'espace

RESUME :

L'enseignement des mathématiques en série S.T.I. amène à s'intéresser à d'autres disciplines, en particulier à la mécanique.
Cette dernière discipline utilise de nombreux outils mathématiques que nous nous sommes attachés à présenter « au bon moment » aux élèves.
Il s'agit en particulier :

- de l'outil vectoriel
- de la trigonométrie
- de la liaison dérivée vitesse

Ce sont ces thèmes que nous avons développés dans le document.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	71	2 €	220 Ex.

ISBN 2-85728-051-3