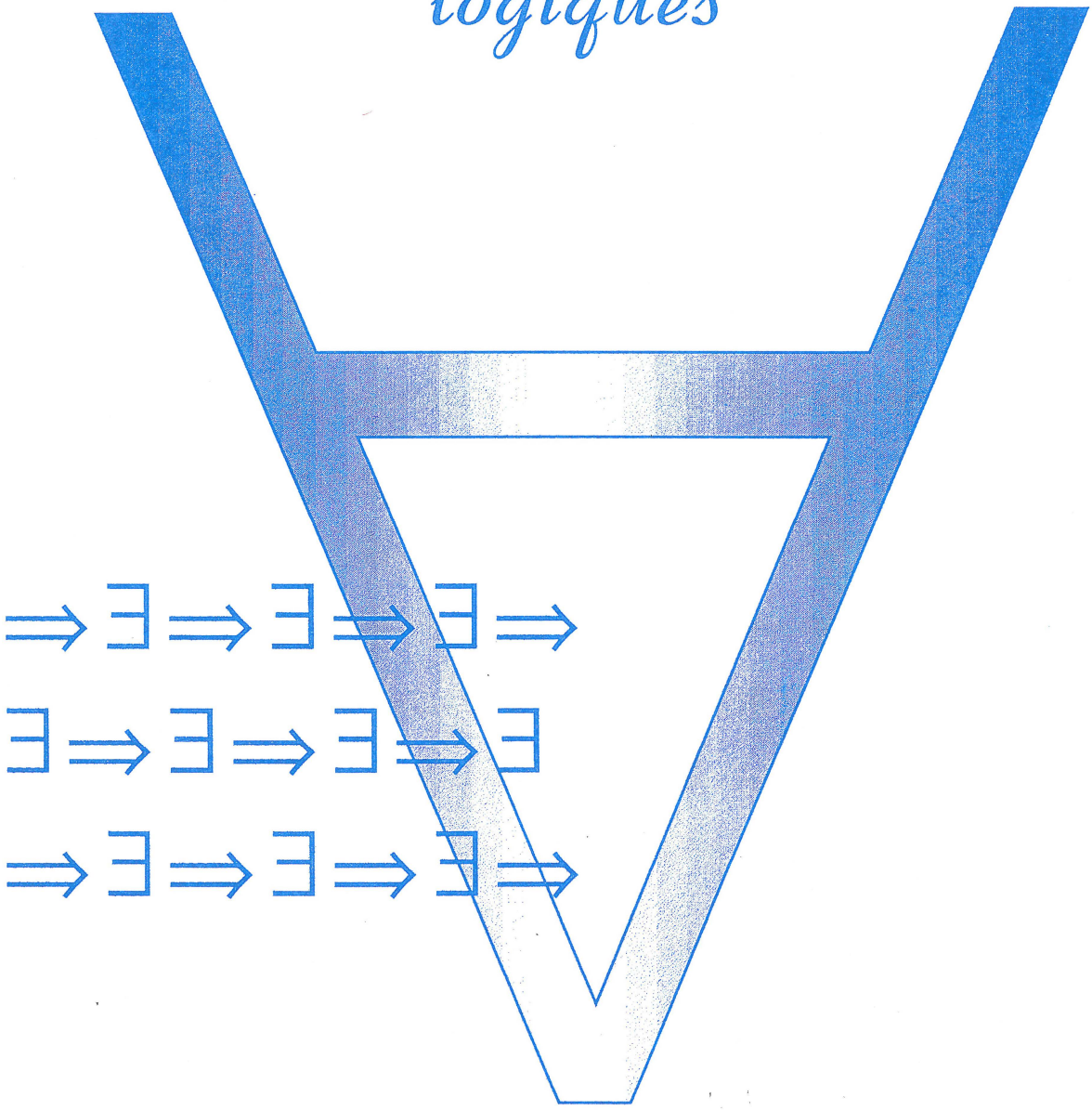
UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

Apprentissage des structures logiques



juin 2000

Apprentissage des structures logiques

IREM DE RENNES

Mai 2000

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, etc...). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

2-85728-052-1

Le groupe
« Apprentissage des structures logiques »
était composé de :

ANTIER Gérard	*Lycée Bellevue-Coëtquidan - GUER*
CHEVALLIER Guy	*Lycée Jacques Cartier - ST MALO*
DAGMAN Morched	*Lycée Henri Avril - LAMBALLE*
ESCOFIER Jean-Pierre	*I.R.E.M. - Université de RENNES I*
GORIN Eric	*Lycée Bréquigny - RENNES*
LAZAR Yvette	*Lycée Jean Macé – RENNES*

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION page 1

Chapitre I
Vrai-Faux page 3

Chapitre II
Pour tout - Il existe - Négation page 27

Chapitre III
Implication - Equivalence page 35

Chapitre IV
Condition nécessaire - Condition suffisante page 53

ANNEXES pages 73 à 77

BIBLIOGRAPHIE page 79

Cette recherche a été menée avec des moyens de l'IREM et de la DAFI.

La mise en page a été assurée par Danièle QUENTIN
La reprographie par Françoise LE BESCOND

La couverture a été réalisée par Cédric ANTIER

Introduction

La logique des raisonnements mathématiques ne fait pas (heureusement sans doute, c'est beaucoup trop abstrait) l'objet d'un chapitre spécial des cours de mathématiques du secondaire. Elle s'apprend peu à peu par imprégnation, au fil des années, à travers les raisonnements exposés dans les cours, les raisonnements mis en forme dans les exercices et les rédactions de devoirs. Il n'y a donc pas de réelle construction de ce savoir. Si certains élèves la font d'eux-mêmes, beaucoup d'autres éprouvent de nombreuses difficultés à raisonner correctement, et encore plus à se critiquer eux-mêmes, ne voyant pas que leurs habitudes et leurs savoirs sont parfois à remettre en cause. Il nous a paru intéressant de chercher à mettre en forme des activités spécifiques pour les aider, toujours sur des exemples. Les classes de première semblent être le meilleur moment pour proposer cet apprentissage de la logique.

A ce niveau, l'idée même de rigueur n'est pas claire pour bon nombre d'élèves ; elle est liée au professeur, à l'évaluation. La rigueur est beaucoup plus difficile à l'écrit qu'à l'oral où les élèves font preuve de capacités de correction que leur production écrite ne laisse pas toujours pressentir. Les convaincre de l'universalité des notions de vrai et de faux en mathématiques demande de les bousculer quelque peu. La stratégie d'organiser un débat dans la classe sur ce sujet, après avoir proposé un test un peu déstabilisateur, nous a donné, toutes les fois que nous l'avons organisé, de bons résultats. C'est l'objet du chapitre 1.

Les chapitres suivants sont centrés sur les différents problèmes de logique qu'on rencontre à ce niveau : problèmes des quantificateurs, de la négation, de l'implication, de l'équivalence et des conditions nécessaires et suffisantes. Les activités que nous proposons pour travailler ces différents problèmes ne sont, bien sûr, pas les seules possibles ; elles cherchent à créer des échanges et des débats, ce qui nous semble un préalable nécessaire à tout apprentissage des élèves dans le domaine de la logique.

Même après avoir mis en place les notions de VRAI et de FAUX, même après avoir travaillé sur les quantificateurs et l'implication, les élèves ont beaucoup de mal, voire sont incapables, de critiquer leurs textes démonstratifs. C'est à la discussion avec d'autres élèves, qu'il faut avoir recours pour les aider à se déprendre de leurs automatismes erronés. Le temps, qui apporte un certain oubli de ce qui a été pensé et écrit, permet également ces remises en cause.

Nous devons enfin exprimer des regrets sur ce que nous n'avons pu faire et qui n'était pas dans les possibilités d'un groupe de recherche de cinq enseignants travaillant deux ans sur un sujet. D'abord, un travail didactique, analyse fine des réactions des élèves, variations dans les textes des activités ... Nous avons dû renoncer aussi à écrire un chapitre sur le ET et le OU, avec étude du signe d'un produit, distinction de l'inégalité stricte et de l'inégalité large dans les inégalités et les inéquations, problèmes ensemblistes ... faute de temps suffisant pour mettre au point des activités qui nous satisfassent d'une part et sentiment de la moindre importance de ce sujet, d'autre part. Enfin, le temps nous a manqué pour expérimenter des raisonnements logiques avec des horizontales délimitant les différentes affirmations, chacune correspondant à l'application d'une règle logique ; cela aurait été une expérience très différente, presque en opposition avec l'idée de texte démonstratif.

Telles quelles, nous espérons que les activités et les réflexions que nous vous livrons seront suffisantes pour vous aider à mettre en place, avec plus de plaisir et d'efficacité, l'apprentissage nécessaire des structures logiques.

Suggestion de progression

Septembre	Test VRAI-FAUX. Sensibilisation à l'approche logique des textes mathématiques.
Octobre	Résolution d'équations, d'inéquations, de systèmes d'équations du point de vue de la logique. Distinction entre si ... alors ..., si et seulement si.
Novembre Décembre	Implication et équivalence.
Mars Avril	Condition nécessaire, condition suffisante. Condition nécessaire et suffisante.

Chapitre I
Vrai-Faux

Un passeport pour la logique

I – INTRODUCTION

II – PRESENTATION DU TEST : FICHE TECHNIQUE

III – TEXTE DU TEST

IV – RESULTATS BRUTS ET ANALYSE

V – DEBATS

Débat 1 : une vidéo
Débat 2 : tables de vérité
Débat 3 : ensembles de solutions
Votre débat

VI – EN CONCLUSION

Par l'intermédiaire d'un test et du débat qui s'ensuit, nous voulons construire chez les élèves les notions du VRAI et du FAUX en mathématiques et notamment les dégager de tout contexte d'apprentissage, la construction d'un savoir étant lié à l'environnement dans lequel on l'apprend.

I – INTRODUCTION

Nous pensions d'abord étudier chez les élèves leur compréhension du « si ... alors ... », la façon dont ils le structuraient.

Pour pouvoir faire une rapide évaluation de leur conception, nous avons choisi d'élaborer un premier test.

Nous sommes partis du fait que les notions de VRAI et de FAUX s'appliquent à des énoncés mathématiques ou propositions ; une proposition est :

- soit vraie : il faut alors la démontrer,
- soit fausse : un contre-exemple doit alors être trouvé.

Nous avons choisi une série de questions plutôt qu'un exercice unique pour avoir plus d'éléments d'analyse des comportements des élèves.

Ces questions se présentaient sous la forme de propositions « si ... alors ... » et les élèves devaient choisir entre les trois réponses :

VRAI, FAUX ou *AUTRE.*

Ce choix ouvert a permis d'engager une discussion avec les élèves dans la classe.

A la suite des premiers passages de ce test, il s'est avéré qu'il y avait beaucoup de réponses *AUTRE.* S'est donc posée la question : Quel rôle les élèves font-ils jouer à la réponse *AUTRE* ?

Ayant laissé la liberté dans certaines classes de cocher plusieurs cases, quelques doubles réponses du type *VRAI-AUTRE* ou *VRAI-FAUX* ont ainsi surgi.

Nous nous sommes demandés si :

1) les phrases proposées avaient valeurs d'exercices de mathématiques chez les élèves ?
2) le manque de quantificateurs avait influencé les réponses ?

Pour avoir une idée plus précise des rôles attribués par les élèves à ces trois mots : *VRAI – FAUX – AUTRE*, nous avons donc affiné notre test et l'avons proposé aux élèves de la manière suivante, tout en remettant à une analyse ultérieure le problème du « si ... alors » (chapitre 4).

II – PRENSENTATION DU TEST

1 – Fiche technique

Niveau : 2^{nde}, $1^{ère}$ S ou TS.

Thème : le VRAI et le FAUX des énoncés en mathématiques.

Durée : 20 minutes pour le test.
1 heure minimum pour le débat qui s'ensuit.

Déroulement :

Nous avons suivi le déroulement suivant :

1) une *première phase* d'environ 20 minutes utilisées pour le passage du test (phase pouvant être faite à la fin d'un cours).
2) une *deuxième phase* d'environ une heure, pour le débat sur le test (pouvant être faite à la séance suivante).

Pour le test, deux consignes différentes ont été envisagées :

3) soit demander aux élèves de ne cocher qu'une seule case par item,
4) soit leur laisser entière liberté.

Le travail est individuel, le professeur n'est qu'un observateur.

Le professeur ramasse les feuilles à la fin du test, comptabilise les réponses et fait une première analyse, ce qui pourra faciliter l'organisation du débat. Les tests sont rendus à la séquence suivante et n'auront pas de correction apparente.

La deuxième phase est une phase de débat entre les élèves. Nous nous sommes limités au rôle d'animateur sans proposer de *correction* du test. Nous avons préféré dresser un *bilan* avec les élèves item par item, et susciter l'exposition de leurs conceptions du VRAI, du FAUX et surtout du AUTRE. Ceci en vue d'établir un contrat avec les élèves sur les notions du VRAI et du FAUX en mathématiques, ce contrat impliquant l'annulation de la réponse AUTRE.

2 – Connaissances nécessaires

Pour les premières S : rien de particulier.
Pour les secondes : il faut avoir traité la fonction $x \rightarrow x^2$.

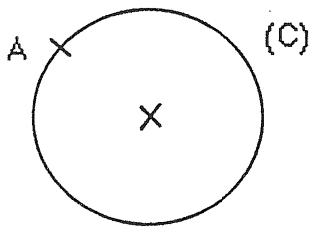
3 – Objectifs pédagogiques

1) Faire percevoir l'aspect logique et rigoureux des énoncés mathématiques.
2) Distinguer les énoncés VRAIS des énoncés FAUX en mathématiques.
3) Faire comprendre que les notions de VRAI et de FAUX en mathématiques sont universelles et donc indépendantes du professeur, de l'évaluation des copies, des classes, etc.

III – TEST (20 minutes)

Nom : Prénom : Classe : Date :

Pour chaque ligne cochez la ou les cases qui vous conviennent.

		VRAI	FAUX	AUTRE
1)	Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$	❒	❒	❒
2)	Si $x = 1$ alors $(x - 1)(x - 2) = 0$	❒	❒	❒
3)	Si la droite (D) a pour équation $y = 2x - 7$ alors (D) passe par le point A(5 ; 3)	❒	❒	❒
4)	Puisque la droite (D) passe par le point A(5 ; 3) alors (D) a pour équation $y = 2x - 7$	❒	❒	❒
5)	La condition $x^2 = 4$ entraîne $x = 2$	❒	❒	❒
6)	Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$	❒	❒	❒
7)	Si $x < 2$ alors $x^2 < 4$	❒	❒	❒
8)	La condition $x^2 < 4$ entraîne la condition $x < 2$	❒	❒	❒
9)	MA = MB entraîne que M est le milieu de [AB]	❒	❒	❒
10)	Si A, B et C sont alignés alors AC + CB = AB	❒	❒	❒
	On considère la figure suivante où A est un point du cercle C de rayon r. 			
11)	Si AM = 2r alors M appartient au cercle (C)	❒	❒	❒
12)	Si AM = 2r alors M n'appartient pas au cercle (C)	❒	❒	❒

Un autre contrat possible : ne faire cocher qu'une seule case par item.

IV – RESULTATS BRUTS ET ANALYSE DU TEST

L'analyse qui suit, est faite item par item. On y a joint le bilan d'une expérimentation sur six classes de 1ère S, les phrases choisies étant sans quantificateur.

Item n° 1

Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$.

Pour les six classes, on a obtenu les résultats suivants :

Item n°1	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	13	55	119	187
Pourcentage	7,0%	29,4%	63,6%	100,0%

On peut souligner le fort pourcentage de la case AUTRE. Quelques élèves corrigent en mettant $x = 2$ comme réponse possible. Sans doute ont-ils jugé la réponse $x = 1$ incomplète.

Item n° 2

Si $x = 1$ alors $(x - 1)(x - 2) = 0$.

Item n° 2	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	151	24	6	181
Pourcentage	83,4%	13,3%	3,3%	100,0%

Cet item ne pose pas trop de problème ; il a été choisi pour ne pas trop déstabiliser les élèves d'une part, pour observer le problème de la réciproque d'autre part. Il est à souligner que 3,3% des élèves choisissent AUTRE, cela vient-il d'une confusion dans le sens du *si ... alors ...*, ou cela vient-il de ce que l'élève ne pense qu'en termes d'équivalences (dans ce cas, on peut supposer que l'élève considère la réponse comme incomplète) ?

Item n° 3

Si (D) a pour équation $y = 2x - 7$ alors (D) contient le point A (5 ; 3).

Item n°3	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	169	7	5	181
Pourcentage	93,4%	3,9%	2,8%	100,00%

Le but de cet item était d'évoquer chez les élèves le cadre graphique associé à la formule $y = 2x - 7$. Cette association était déjà possible pour les deux premiers items mais beaucoup moins naturelle. La méthode de vérification – *un point appartient à une droite si ...* - est semble-t-il bien acquise chez les élèves de 1ère S.

Item n° 4

Puisque la droite (D) passe par le point A(5 ; 3) alors (D) a pour équation $y = 2x - 7$.

Item n°4	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	18	116	47	181
Pourcentage	9,9%	64,1%	26,0%	100,0%

Pour cet item, on trouve la réciproque de l'item précédent.
L'outil « un point appartient à une droite si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite » est très prégnant chez les élèves. Cet item souligne donc, d'une part, le sens d'utilisation de cet outil et, d'autre part, l'intérêt du changement de cadres : le passage au cadre graphique permettant de résoudre plus facilement cette question. Pourtant, comme dans l'item n°1, on retrouve en conclusion un cas particulier de solution ; la différence étant que, dans cet item, il y a une infinité de droites possibles alors que, dans l'item n°1, il n'y a que deux réels possibles, ce qui peut expliquer le plus fort pourcentage de réponses AUTRE dans l'item n°1.

Item n° 5

La condition $x^2 = 4$ entraîne $x = 2$.

Item n°5	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	27	41	120	188
Pourcentage	14,4%	21,8%	63,8%	100,0%

Cet item est de même nature que l'item n°1 mais posé d'une autre façon ; la difficulté supplémentaire était de penser à la solution négative, ce qui explique une partie des réponses vraies ; mais en général, cela ne pose pas trop de problème en 1ère S. On retrouve donc des résultats comparables à ceux de l'item n°1 notamment pour la case AUTRE ou pour les réponses VRAI-AUTRE qui sont apparues 7 fois sur 24 dans une classe : la raison principale avancée étant celle de réponse incomplète. Les élèves pouvaient aussi utiliser le cadre graphique en pensant à la fonction carré $x \rightarrow x^2$.

Item n° 6

Si $x = 2$ alors $x^2 = 4$.

Item n°6	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	174	3	3	180
Pourcentage	96,7%	1,7%	1,7%	100,0%

Cet item est à comparer à l'item n°2, comme le précédent à l'item n°1. On trouve des résultats assez proches.

Item n° 7

Si $x < 2$ alors $x^2 < 4$.

Item n°7	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	73	87	22	182
Pourcentage	40,1%	47,8%	12,1%	100,0%

On retrouve, mais de façon plus importante que dans l'item n°5, la non-considération des nombres négatifs, le passage au cadre graphique de la fonction carré semble nécessaire pour construire ce type de relations entre les inégalités. Il devient alors intéressant de demander aux élèves pourquoi ils ont coché la case AUTRE.

Item n° 8

La condition $x^2 < 4$ entraîne la condition $x < 2$.

Item n°8	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	105	47	30	182
Pourcentage	57,7%	25,8%	16,5%	100,0%

A nouveau, les inégalités posent plus de problèmes que les égalités. Il est aussi plus difficile d'établir la vérité d'une proposition que sa fausseté : il est plus aisé pour des élèves de choisir des x qui vérifient la condition $x < 2$ (par exemple –3) que des x vérifiant la condition $x^2 < 4$, ce qui les amène à faire fonctionner l'implication dans le sens inverse.

Item n° 9

MA = MB entraîne que M est le milieu de [AB].

Item n°9	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	29	104	52	185
Pourcentage	15,7%	56,2%	28,1%	100,0%

On retrouve un rôle important pour la case AUTRE, le milieu étant un point particulier parmi les points vérifiant la condition MA = MB. Le réflexe des élèves est plutôt de penser à compléter l'hypothèse en ajoutant l'alignement que de mettre en doute la conclusion qui serait M appartient à la médiatrice de [AB]. Cela différencie cet item de l'item n°1 dans lequel la conclusion est sentie incomplète. De plus, dans cet item, il y a une infinité de points M convenant alors que, dans le n°1, il n'y a que deux valeurs.

Item n° 10

Si A, B et C sont alignés alors AC + CB = AB.

Item n°10	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	87	60	33	180
Pourcentage	48,3%	33,3%	18,3%	100,0%

Comme dans l'item n°9, le cadre graphique est très prégnant. La situation de l'item n°9 correspondant à un concept connu alors que l'item n°10 est une propriété moins bien maîtrisée. Dans l'écriture de ces deux items les lettres A, B et C jouent le même rôle de points fixes alors que M dans l'item n°9 a un statut de variable. Ce qui explique les différences entre les réponses des élèves à ces deux items où pourtant les réciproques sont vraies.
Cet item avait été proposé d'abord avec la condition écrite sous la forme AB + BC = AC. Les résultats étaient moins bons : la confusion avec la réciproque était trop grande.
Les deux items suivants sont résolument liés à un cadre graphique : les élèves y expérimentent plus facilement que dans les deux items précédents.

Item n° 11

Si AM = 2r alors M appartient au cercle (C).

Item n°11	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	28	76	81	185
Pourcentage	15,5%	41,1%	43,8%	100,0%

A nouveau, il y a un fort pourcentage de réponses AUTRE : comme dans l'item n°1 c'est lié au fait que la conclusion proposée est une solution particulière parmi d'autres. Se pose aussi la question de savoir si M est senti comme un point particulier ou si le sous-entendu « pour tout point M du plan » est compris.
Les élèves verraient-ils une différence entre les formulations :

Soit M un point du plan ... ; Pour tout point M du plan ... ?

Item n° 12

Si AM = 2r alors M n'appartient pas au cercle (C).

Item n°12	VRAI	FAUX	AUTRE	
Effectif	11	101	74	186
Pourcentage	5,9%	54,3%	39,8%	100,0%

Par rapport à l'item précédent, l'ordre des pourcentages FAUX et AUTRE s'inverse : il y a nettement plus de points M n'appartenant pas au cercle que de points M qui lui appartiennent. Le cadre géométrique pose apparemment plus de difficultés que le cadre formulaire, peut-être parce qu'il met en jeu des ensembles infinis de solutions plus difficiles à identifier que des intervalles (car non ordonnés).

Pour compléter cette analyse, nous avions fait passer ce même test dans une classe de TS et dans une classe de seconde (assez bonne). Nous n'avons pas observé de différences significatives dans les réponses suivant les niveaux de classe.

Une deuxième version du test a été proposée avec les quantificateurs. Dans les classes où ce seul test a été proposé, l'emploi des quantificateurs n'est pas décisif : il y a toujours autant de réponses AUTRE, mais une diminution de réponses FAUX.

Par exemple, pour l'item n°1, la phrase devenait : pour tout réel x, si $(x - 1)(x - 2)$ alors $x = 1$.

On a obtenu les résultats suivants :

Item n°1	VRAI	FAUX	AUTRE	
Sans quantificateur	7,0%	29,4%	63,6%	100,0%
Avec quantificateur	17,9%	14,9%	67,2	100,0%

En conclusion de cette analyse, même si les problèmes du *si ... alors ...* et *du pour tout ...*, restent posés, **il est prioritaire** de centrer le débat avec les élèves sur le rôle qu'ils attribuent à la case AUTRE.

La première partie de ce débat, est de définir ce rôle, la deuxième partie étant de leur faire accepter la vérité du principe suivant, qui leur apparaît souvent comme une sorte de contrat :

> Les énoncés ou phrases mathématiques sont, soit VRAIS, soit FAUX, rien d'autre.

V – DEBATS

Après avoir analysé les réponses au test, nous les avons rendues aux élèves. Il n'était pas question de donner une correction item par item, ce qui conduit les élèves à émietter leur attention. La meilleure façon de construire les notions de VRAI et de FAUX en mathématiques nous a paru être l'organisation d'un débat. La distinction du VRAI et du FAUX est essentielle pour les élèves, pas forcément par souci de vérité scientifique, mais plutôt parce qu'ils sont notés sur l'exactitude de ce qu'ils écrivent. Ils sont donc prêts à discuter longuement de ce sujet et les exercices du test fournissent une série d'exemples pour rendre concrets les échanges.

Cette partie vous propose donc trois débats vécus en classe ou en demi-classe.

Nous retranscrivons longuement le premier, peut-être trop longuement. Mais comment faire sentir tout ce qu'on voit et entend dans l'enregistrement vidéo que nous avons conservé, comment ne pas trahir ce qui s'est passé pour la classe et pour chacun des élèves, ces prises de paroles d'élèves habituellement silencieux, dont l'attitude vis-à-vis des mathématiques, de la nécessité de rigueur, était déstabilisée et vivante.

Pour les deux autres débats, très vivants eux aussi, nous en donnons simplement une synthèse.

Débat 1 « Que signifie la case AUTRE ?

Le texte qui suit est donc la transcription d'une grande partie d'un enregistrement vidéo effectué avec une classe de 1ère S lors du débat qui a suivi la passation du test VRAI/FAUX/AUTRE. Le but poursuivi était de faire s'exprimer les élèves sur la signification pour eux de la case AUTRE. En ce sens les réponses obtenues sont peut-être exemplaires de ce à quoi vous pouvez vous attendre dans vos classes. Volontairement, pour les besoins de l'expérimentation du groupe de recherche, ce débat a duré toute l'heure de cours sans que l'on aborde la « correction » elle-même ; sans doute peut-on raccourcir un peu ce débat, cependant, les problématiques rencontrées (qu'est ce que la vérité ? Le VRAI, le FAUX, qui ou quoi en décide ? Interférence avec l'évaluation et la sélection ...) sont telles que les laisser s'exprimer n'est pas du temps perdu en vain.

Le professeur rend les feuilles de test à chacun des élèves. Aucune correction n'a été portée sur la feuille ; les réponses des élèves ont été collectées dans un tableau récapitulatif qui sera donné plus loin.

Le professeur est un peu tendu, ne sachant comment le débat va prendre tournure, va-t-il seulement prendre ?

Deux idées de départ pour mener le débat :

1) le VRAI est reconnu comme VRAI par les élèves.
2) qu'entendent les élèves par « AUTRE » ?

Voici les **quinze premières minutes du débat** :

Début de la séance : le professeur recopie sur le tableau de la classe :

Item n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
VRAI	0	32	35	1	2	35	14	20	3	14	0	0
FAUX	3	2	0	7	0	0	12	7	14	2	7	12
AUTRE	32	1	0	27	33	0	9	7	18	18	28	23

Plusieurs élèves ont, pour un même item, coché deux cases : VRAI et AUTRE ou bien FAUX et AUTRE. Ces réponses ont été comptabilisées ci-dessus dans la rubrique AUTRE.

Le Professeur P :

Il y a deux questions qui ont l'air de faire l'unanimité des réponses : la 3 et la 6 ; du 100% pour le VRAI. Alors qu'est-ce qu'elles racontaient ces questions ? La question 3 : « si D a pour équation $y = 2x - 7$ alors D contient le point A(7 ; 3) ». Cela vous a paru comme VRAI. C'est ce que l'on vous a enseigné dans les classes antérieures. Avec quelle idée ? ... C'est VRAI ! ? Cela ne souffre pas la moindre contestation ? ! (P cherche du regard quelques élèves qui voudraient s'exprimer – en vain). On passe alors. La 6, c'etait « si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ ». Bon, bien je suis d'accord pour ces deux-là vous avez tous marqué VRAI et c'est tout à fait juste. On va s'attarder sur les autres qui ne font pas l'unanimité du VRAI ou du FAUX ou du AUTRE. Commençons par le premier, enfin le premier et le deuxième, parce que le premier et le deuxième, ils manipulent les deux mêmes choses : ils manipulent « $(x - 1)(x - 2) = 0$ » et, en face, à chaque fois, soit en conclusion, soit en hypothèse « $x = 1$ ». Alors comment ça se passe ? Qu'avez-vous cogité à ce propos. ? Oui, Céline.

Céline : *Si un produit est égal à 0 alors un des membres est égal à 0.*

P : Quand on vous pose des questions à ce sujet-là, on vous les pose plutôt sous cette forme-là : (au tableau : « Résoudre dans R : $(x - 1)(x - 2) = 0$ ») et vous savez faire cela ; cela fait...

Daniel : (et en même temps au tableau) *$x - 1$ ou $x - 2 = 0$*

P : C'est ce problème mathématique qui est derrière la question 1. Que penser de cette question 1 ? Vous, vous avez pensé ... Personne n'a dit que c'était VRAI. Personne n'a changé d'idée entre temps ? Non ? Non. Trois ont pensé que c'était FAUX et trente-deux ont pensé que c'était AUTRE ... (Brouhaha...).

Plusieurs élèves : *C'est incomplet !*

P : Pour vous donc AUTRE, ça signifie ...

Des élèves : ... *incomplet !!*

P : Vous auriez eu envie de dire ... Quelle serait une phrase vraie commençant de la même façon ?

Daniel : (et en même temps le professeur au tableau) *Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ ou $x = 2$.*

P : Tout à fait, c'est quelque chose qui est vrai ; vous l'auriez reconnu, comme la question 3 et la question 6, à 100% d'entre vous VRAI. Alors, que dire de cette phrase-là[1] ? Elle n'est pas vraie : oui ; zéro VRAI[2]. Alors le problème, c'est ...

Daniel : (coupant le propos du professeur) *Les deux sont bons*[3].

P : Les deux sont bons ?

Daniel : *En devoir surveillé, si on ne met que $x = 1$, vous allez compter zéro donc c'est FAUX ; mais c'est aussi incomplet.*

Une autre voix d'élève enchaîne : ... *donc AUTRE.*

P : Donc AUTRE !

Daniel : *Et les deux sont bons.*

P : D'accord ... Enfin je dis d'accord...

Daniel : *Vous êtes d'accord avec moi qu'en devoir surveillé, si je ne mets que $x = 1$, vous allez me rayer, vous allez me mettre FAUX... ou incomplet ; je ne vais pas avoir les points.*

P : Je vais marquer ... oui, je pense que je mettrais incomplet...

Daniel : ... *oui, mais je ne vais pas avoir les points.*

P : Tu auras ... bon alors ça dépend...

Daniel : ... *un cinquième des points quoi peut-être.*

P : Oui, ça dépend du niveau auquel vous êtes : en $4^{ème}$, on mettrait la moitié des points ; en première, je crois que je mettrais pratiquement zéro ; en terminale certainement.

Daniel : *Donc c'est faux !*

(Rires d'élèves)

P : Ah ! C'est marrant cela ! Suivant l'âge du public auquel on s'adresse, ça serait de moitié VRAI moitié FAUX pour les 4èmes à vraiment complètement FAUX...

Daniel : *C'est pas complètement faux, mais au niveau de la notation des devoirs surveillés, ça sera faux puisqu'on aura zéro point.*

---

[1] La phrase n°1.

[2] Faisant référence au tableau des résultats de la classe.

[3] Daniel veut dire FAUX et AUTRE.

P : Ah, mais je suis d'accord. Donc VRAI/FAUX, pour vous, c'est par rapport au correcteur, par rapport aussi aux exigences de ce correcteur-là. C'est un peu cela ?

Daniel : *C'est incomplet aussi.*

P : D'accord, oui.

Des élèves : *C'est pour cela qu'on a mis FAUX et AUTRE.*

P : C'est pour cela que vous avez mis FAUX et AUTRE. On laisse cette question en suspens. J'en prends une autre. Enfin, je prends celle qui va avec, celle qui était appariée … … Si on prend la phrase 2 « si $x = 1$ alors $(x - 1)(x - 2) = 0$ », qu'est ce que vous en avez dit vous ? VRAI : 32, deux FAUX, un AUTRE.

Quelques élèves : *C'est vrai !*

P : C'est faux ?

Des élèves (plus nombreux) : *C'est vrai !*

P : Oui, c'est vrai, car quelle opération vous faîtes ?

Des élèves : *On remplace x par 1.*

P : On remplace x par 1 et puis l'un des facteurs est nul et zéro fois quelque chose ça fait zéro … … C'est vrai.
(……). Je reviendrai à la question 1. J'en prends d'autres : la 7 et la 8 … Le mot « La condition … entraîne … la condition » : qu'est-ce qu'on pourrait dire à la place ?

Un élève : *Si … alors …*

P : Oui, « si $x^2 < 4$ alors $x < 2$ ». La 7 : « si $x < 2$ alors $x^2 < 4$ ». Avis partagés : 12 FAUX, 14 VRAI, 9 AUTRE … Et pour la 8 c'est-à-dire dans l'autre sens « la condition $x^2 < 4$ alors $x < 2$ », là aussi avis partagés. Que dîtes-vous sur la 7 et la 8 ? Oui, Louis-Marie ?

Louis-Marie : *La 7, c'est AUTRE parce que si on prend un nombre négatif … qui est plus grand que la valeur absolue de 2, le carré sera plus grand que 4.*

P : Oui, par exemple quel nombre ? …

Louis-Marie : *-3.*

P : Oui, -3 est bien plus petit que 2 et le carré de –3, c'est 9 … Alors tu dis que c'est AUTRE parce que …

Louise-Marie : *C'est VRAI pour les nombres positifs et FAUX pour …* (brouhaha).

P : Oui, si on veut dire une phrase vraie à propos de la 8, on dirait

Et le professeur écrit au tableau ce que dit Daniel :

Daniel : *Si $-2 < x < 2$ alors $x^2 < 4$.*

P : Voilà une phrase qui est vraie et tu dis « celle-ci n'est pas vraie parce que …

Louis-Marie : *En dessous de –2.*

P : … en dessous de –2 un carré va être plus grand que 4. « Donc ce qui amène à te dire, phrase 7 … : alors est-ce que ça peut être vrai ?

Des voix diverses : *Non … Oui …*

Louis-Marie : … *à moitié supérieur au début …*

Flottement et brouhaha dans la classe …

P : Alors je réitère ma question, mais je ne dis pas : « ça peut », je dis « est-ce que c'est vrai ? »

Plusieurs voix (fermes et convaincues) : *Non !*

P : (Commentant) Ça peut être vrai : ça dépend … C'est vrai : vous dîtes non.

Gaël : *C'est faux.*

P : C'est faux en fait (! ?)

Brouhaha

P : Vous êtes d'accord : ça n'est pas vrai.

Des voix : *C'est pas vrai, mais c'est pas entièrement faux !*

P : (reprenant ce qui vient d'être dit) « Mais c'est pas entièrement faux ? » Alors ça serait quoi quelque chose d'entièrement faux ?

Patrick : *Vu comment c'est tourné c'est une affirmation …*

P : (montrant qu'il écoute) : Oui …

Patrick : … *donc à mon avis c'est faux. Ça ne peut pas être vrai : c'est une affirmation totale.*

P : (content de trouver un appui dans le public) : C'est ça. On admet l'hypothèse qui est donnée : x inférieur à 2 ; maintenant, est-ce que son carré est plus petit que 4 ? Louis-Marie vient de nous montrer que non. Donc tu dirais toi (s'adressant à Patrick).

Patrick : *C'est faux !*

(……) fin des quinze premières minutes de la séance.

Voici quelques échanges remarquables dans la suite de la séance :

P : Peut-être qu'il n'y a pas qu'une seule case de bonne à cocher ?

Daniel : *Il faut cocher les 3 !*

P : Il n'y a qu'une case ?

Louis-Marie : *C'est ni vrai, ni faux donc c'est AUTRE !*

P : Est-ce qu'on peut cocher plusieurs cases ?

(Réponses qui se chevauchent, diverses et sans conviction).

P : Le « AUTRE » veut dire qu'il y a une part de faux dans l'affaire …

Des élèves (tous ensemble) : … *et une part de vrai !*

P : (reprenant leur répartie) … et une part de vrai.

(……)

P : Qu'est-ce que ça veut dire VRAI ? (……) Ça voudrait dire, si je reprends ce que disait Daniel « J'ai bon, le prof va me mettre la totalité des points ».

Daniel : *Ah ! bien oui.*

P : Par contre le FAUX …

Daniel : *Il y a totalement faux et il y a partiellement faux !*

P : Cécile, tu voulais dire …

Cécile : *Je crois que pour répondre à toutes les questions, on peut dès le départ se demander si on veut l'exactitude ou alors simplement une réponse minimum ; parce que si on cherche simplement au moins une réponse, il y a des réponses qui vont nous paraître vraies, alors que si on veut l'exactitude, elles vont être fausses ou autres. Tout dépend de la notion de la correction, si on veut quelque chose d'exact ou de …*

P : Correction : tu dis correction de la phrase ou correction du correcteur ?

Cécile : *(……) Il faut savoir si oui ou non, il veut être tout à fait exact, pointu avoir toutes les réponses, ou si on veut simplement au moins une réponse. Si on veut au moins une réponse, on va avoir plus de réponses « VRAI » que si on corrige en voulant l'exactitude ; on va être moins pointu.*

P : Je ne saisis pas tout à fait ce que tu veux dire (……). Je ne sais pas si tu veux dire par « exactitude », « correction » (…) : « avoir bon » ou si c'est dans un autre registre ?

Cécile : *C'est plutôt dans l'exactitude, le vrai et des réponses sûres, c'est-à-dire pour la question 1 par exemple, si on se dit qu'on veut absolument toutes les réponses et qu'à partir du moment où l'on a les deux réponses c'est bon et autrement, ça va être FAUX. Seulement, si on se dit que là effectivement x = 1 on peut avoir zéro*[4] *on va mettre AUTRE (……). On peut mettre que c'est incomplet et mettre, par exemple, la moitié des points parce qu'effectivement il y a une réponse. Ça dépend dans quel état d'esprit on va résoudre …*

(Demande de précisions du professeur)

Cécile : *On a des problèmes où il y a plusieurs réponses par exemple. Supposons qu'il y ait trois réponses possibles. Pour que ce soit VRAI pour certains, il faut les trois réponses ; pour d'autres ça va être plus ou moins bon s'il y a une réponse, deux réponses ou trois réponses.*

[4] Cécile veut dire que pour x = 1 le produit (x – 1) (x - 2) vaut zéro.

P : Il y aurait toujours un degré dans la vérité.

Cécile : *Voilà !*

P : Il y aurait du très vrai, c'est par exemple la 3 et la 6, et puis…

Cécile : *… du presque tout à fait faux et du complètement faux.*

P : Ça serait quoi du complètement faux ? Par exemple…

Daniel : *A ce moment-là vous mettez –1 et –2.*

P : Si je mettais ici « si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = -1$ ou $x = -2$ » vous diriez…

Une élève *: Entièrement faux !*

P : Entièrement faux !

Daniel : *Faux à 100% !*

Cécile : *Il faut vraiment avoir la notion de compromis, j'ai l'impression. C'est tellement relatif ! Ça dépend (…) des gens. Vraiment, si on veut uniquement les bonnes réponses et toutes les bonnes réponses ou si une bonne réponse peut être négociable en fait.*

(……)

Sarah : *… ou c'est entièrement faux, ou entièrement vrai ; c'est au professeur de dire s'il veut …* (interrompue par Daniel juste derrière, propos inaudible).

P : Ça ne vous choque pas cela ?

Julie : *Si !*

P : Oui, je sentais Julie qui … Qu'est-ce qui te choque ?

Julie : *Ce sont des mathématiques, donc ce sont des vérités admises. On n'a pas … Ce n'est pas …*

P : Tu veux dire que ça ne dépend pas du prof ?

Julie : *Bien non !*

(……)

Daniel : *Suivant le prof, la notation varie (……). Normalement, elle ne devrait pas varier.*

Séverine : *Normalement, tout le monde devrait être noté de la même façon.*

Daniel : *… Devrait ! … devrait ! …*

P : Est-ce que c'est une histoire de notation du prof ou est-ce que c'est une histoire de vérité universelle ?

Louise : *C'est le professeur qui pose des questions, donc il attend une réponse précise. Mais si ce n'est pas sa réponse, forcément…*

P : Est-ce que c'est sa réponse à lui ou est-ce que c'est une réponse qui est admise par la communauté ... (...). Qu'est-ce que c'est le VRAI, qu'est-ce que c'est le FAUX ? Ça dépend des gens ou ça ne dépend pas des gens ?

Daniel : *Ça dépend des gens ... Ça devrait pas en dépendre, mais ça en dépend.*

(.....)

Cécile : *Je ne remets pas en question que les mathématiques sont une science exacte, c'est dit ... Mais elles deviennent plus relatives à partir du moment où l'homme rentre en compte. (...) Lors d'une correction par exemple, (...) si c'était corrigé par un ordinateur, il a un programme et on lui a donné les informations ; il va traiter tout le monde de la même façon ; parce qu'il ne réfléchit pas par lui-même, il ne va pas se remettre lui-même en question... Alors qu'un homme, c'est complètement différent : il va penser, il va réfléchir justement au VRAI et au FAUX et les mathématiques sont une science exacte mais si l'homme réfléchit, ça devient complètement relatif*[5].

(.....)

Cécile : *... si ... alors ... : c'est quelque chose qui est exact ... Si ... quelque chose ... alors ... donc c'est acquis.*

P : Qu'est-ce qui est acquis ?

Cécile : *C'est acquis : si x est inférieure à 2 alors x^2 est inférieure à 4 (.....). Ça peut paraître définitif ; or ce n'est pas définitif, parce qu'il nous manque une condition : que x soit aussi supérieur à –2. Il manque cette condition-là. Donc est-ce que par exemple, en contrôle, si vous voyez un si et un alors, est-ce que vous en déduisez que c'est définitif ?*

P : Définitif, c'est-à-dire : l'hypothèse est complète, je n'ai pas le droit d'en rajouter ?

Cécile : *Est-ce qu'il manque quelque chose ? Est-ce que tout est dit ?*

P : Tout est dit.

(.....)

Ce débat a été suivi à la séance suivante de la mise au point d'un contrat avec les élèves : à chaque phrase mathématique, on associe une seule valeur de vérité : ou bien VRAI ou bien FAUX. Il reste alors à établir des critères du VRAI et du FAUX : dans cette classe, on a procédé par une démarche ensembliste et aussi par le contre-exemple comme critère du FAUX.

[5] Il semble que, pour Cécile, le critère de vérité d'une phrase mathématique n'est pas inhérent aux mathématiques elles-mêmes mais, du fait que les mathématiques sont une production humaine, ce critère réside dans la raison humaine seule, non soutenue par des règles de raisonnement.

V - COMMENTAIRE

Le premier point important qui semble se dégager de ce débat est la liaison entre la conception du VRAI, du FAUX et l'évaluation :

Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ ou $x = 2$ mérite 1 point.

Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = 1$ mérite 0,5 point, la réponse étant incomplète.

Si $(x - 1)(x - 2) = 0$ alors $x = -1$ ou $x = -2$ mérite 0 point.

Dans ce cas, comment évaluer :

Si $(x - 1)(x - 2)(x - 3)(x - 4) = 0$ alors $x = 1$?

Si $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \ldots (x - n) = 0$ alors $x = 1$?

Doit-il y avoir proportionnalité entre le nombre de solutions trouvées par les élèves et leur évaluation ?

Et que dire dans le cas de l'item n°11 où il y a une infinité de solutions ?

La case AUTRE a donc permis de faire émerger cette liaison entre la vérité d'une phrase mathématique et l'évaluation.

Celle-ci étant liée au professeur, la vérité dépendrait-elle de la personne qui énonce cette phrase ?

Le statut du VRAI chez l'élève peut-il être indépendant du professeur ?

Les mathématiques sont avant tout une matière scolaire donc soumise à une évaluation (donc liée à une sélection) et non à une activité intellectuelle. Ce constat étant établi, il reste à faire comprendre aux élèves que le contrat AUTRE n'a pas de sens, et qu'à travers ces exemples, une phrase mathématique n'a qu'une seule valeur de vérité : VRAI ou bien FAUX.

Débat n°2

A la suite du débat n°1, si les élèves commencent à sentir la vacuité de sens du AUTRE, il est nécessaire d'amener de nouveaux matériaux afin de les convaincre.

Par exemple, on peut proposer d'expérimenter avec des valeurs, notamment pour l'item n°1, en construisant le tableau :

Item n°1	$(x - 1)(x - 2) = 0$	$x = 1$
Pour $x = 1$	VRAI	VRAI
Pour $x = 2$	VRAI	FAUX
Pour $x = 3$	FAUX	FAUX

L'exemple $x = 2$ permet de conclure que la phrase est fausse.

Nous avons expérimenté cette procédure sur d'autres items ; pour le n°8 :

Item n°8	$x^2 < 4$	$x < 2$
Pour x = 1	VRAI	VRAI
Pour x = 2	FAUX	FAUX
Pour x = -3	FAUX	VRAI

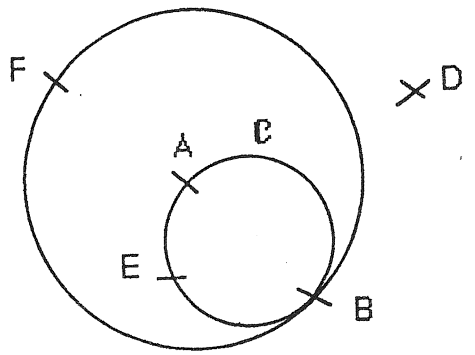
En essayant d'autres valeurs pour x, nous avons constaté que le cas VRAI puis FAUX n'apparaissait jamais. Mais des exemples même nombreux ne suffisent pas pour démontrer la véracité d'une proposition.

Nous avons donc choisi un item ne posant pas de problème, pour expérimenter à nouveau : le n°2 où tout le monde semblait d'accord, après un cours débat, qu'il fallait cocher VRAI :

Item n°2	x = 1	(x – 1)(x – 2) = 0
Pour x = 1	VRAI	VRAI
Pour x = 2	FAUX	VRAI
Pour x = -3	FAUX	FAUX

Comme dans l'item n°8, le cas VRAI puis FAUX n'apparaissait jamais.

Nous sommes donc passés aux items n°11 et n°12 où nous avons dessiné le cercle de centre A de rayon 2r et nommé des points particuliers sur la figure :



Comme pour les autres items nous avons rempli un tableau :

Item n°12	AM = 2r	M n'est pas sur le cercle (C)
M = B	VRAI	FAUX
M = D	FAUX	VRAI
M = E	FAUX	FAUX
M = F	VRAI	VRAI

Le cas où M = B nous permet de décider la fausseté de cette proposition. On peut donc procéder à un premier classement des phrases du test à l'aide de cette méthode : une phrase du test est fausse à chaque fois qu'on y trouve la situation « si VRAI alors FAUX ».

L'acceptation de cette procédure est d'autant plus simple qu'elle peut être à nouveau validée sur des phrases qui leur paraissent plus évidentes : n°4, n°6, n°7.

Mais que penser des phrases où l'on trouve la situation « si FAUX alors VRAI » ?

Pour la phrase « si $x < 2$ alors $x < 3$ », on obtient FAUX puis VRAI pour $x = 2,5$. A priori, les élèves ne s'intéressent pas à cette valeur car ils se placent naturellement dans le cas où la première condition « $x < 2$ » est réalisée.

Par contre, en formulant la phrase ainsi « pour tout x, si $x < 2$ alors $x < 3$ » on peut envisager le cas $x = 2,5$. Cette situation apparaît de façon plus évidente dans les items n°11 et n°12, voir le cas où M = D dans le tableau précédent.

Cette procédure pour tester les phrases dans ces deux derniers items géométriques met en évidence le rôle du cadre graphique : l'infinité des solutions y est mieux perçue.

Pour l'item n°11, elle permet, de plus, de généraliser les choix, ici du point M.

Item n°11	AM = 2r	M est sur le cercle (C)
Si M est sur le cercle de centre A de rayon 2r	VRAI	FAUX
Si M est sur le cercle (C) sauf en B	FAUX	VRAI
Si M est diamétralement opposé à A sur (C), en B	VRAI	VRAI

On construit donc un raisonnement en faisant appel à la disjonction des cas, raisonnement que l'on peut réinvestir dans les items où apparaît une formule.

Cette démarche, d'expérimentation-généralisation-démonstration, permet d'éliminer la case AUTRE puisque l'on peut décider du VRAI et du FAUX pour chaque proposition.

Elle entraîne aussi une construction du « si ... alors ... » et une prise de conscience du rôle du « pour tout ».

On décide donc avec les élèves qu'une propriété est vraie si elle est vraie dans tous les cas et qu'une propriété est fausse si l'on trouve un contre-exemple.

Cette démarche est d'autant plus intéressante qu'elle a permis aux élèves de proposer d'autres phrases pour remplacer celles qui sont fausses, puis de les tester ; par exemple pour le n°7 : si $0 < x < 2$ alors $x^2 < 4$ ou si $-2 < x < 2$ alors $x^2 < 4$.

On a enfin soulevé le problème de la situation « si FAUX alors VRAI » ; on ne peut éviter de se placer dans cette situation. On a donné les exemples du raisonnement par récurrence où l'on ne sait pas si P(n) est vraie dans $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ et du raisonnement par l'absurde où l'on est ramené à faire des hypothèses fausses.

Débat n° 3

Dans un autre groupe d'élèves, après divulgation des résultats des items, l'item n°1 posant problème, le débat s'est centré sur les solutions des équations ou des inéquations.

Après des échanges, le classement suivant s'est organisé avec l'aide du professeur :

- dans les items n°2 et 6, il y a une solution vérifiant l'hypothèse : $x = 1$ pour l'item n°2 et $x = 2$ pour l'item n°6 ; deux vérifiant la conclusion, $x = 1$ ou $x = 2$ pour l'item n°2 et $x = 2$ ou $x = -2$ pour l'item n°6.

- dans les items n°1 et 5, il y a deux solutions vérifiant l'hypothèse, une seule est écrite dans la conclusion.

- dans les items n°3, 4 et 9, il y a une infinité de solutions vérifiant l'hypothèse, une seule est écrite dans la conclusion.

- dans les items n°7 et 10, il y a une infinité de solutions vérifiant l'hypothèse, une infinité sont écrites dans la conclusion et une infinité manquent.

- dans l'item n°8, il y a une infinité de solutions vérifiant l'hypothèse, une infinité dans la conclusion et une infinité qui ne conviennent pas ou qui sont en trop.

- dans les items n°11 et 12, il y a une infinité de solutions vérifiant l'hypothèse, une infinité dans la conclusion, une infinité qui ne conviennent pas, de plus il en manque une infinité.

Ce classement a permis une prise de conscience de la logique des réponses proposées, mais il est difficile à comprendre par les élèves, notamment pour les deux derniers items. S'il permet de choisir entre VRAI et FAUX, élimine-t-il totalement la case AUTRE ?

On a alors repris le classement avec une démarche plus ensembliste.

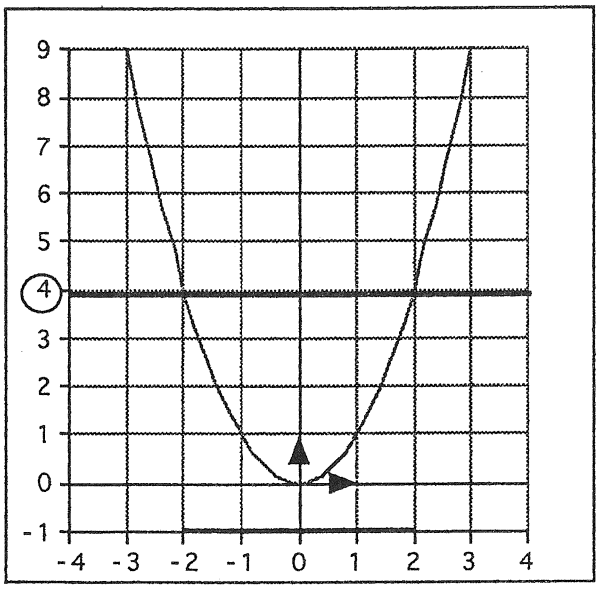
Pour l'item n°1 :

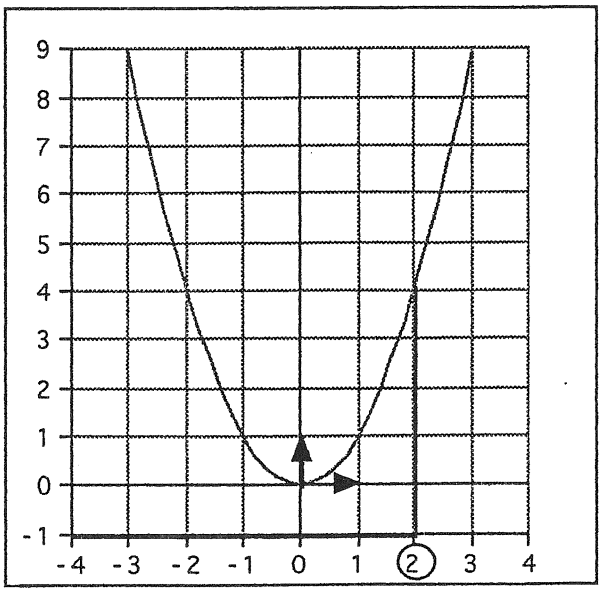
L'ensemble des nombres réels vérifiant $(x - 1)(x - 2) = 0$ est-il inclus dans l'ensemble $\{1\}$?
Ou : l'ensemble $\{1 ; 2\}$ est-il inclus dans l'ensemble $\{1\}$?

Pour l'item n°8 :

L'ensemble des réels x tels que $x^2 < 4$ est-il inclus dans l'ensemble des réels x tels que $x < 2$.
Ou : $]-2 ; 2[$ est-il inclus dans $]-\infty ; 2[$?

L'utilisation de la représentation graphique de la fonction $x \rightarrow x^2$ permet de visualiser ces ensembles.





Pour l'item n°9 :

L'ensemble des points M tels que MA = MB est-il inclus dans l'ensemble {I} , I étant le milieu de [AB] ? ...
Ou : la médiatrice est-elle incluse dans {I} ?

Pour l'item n°11 :

L'ensemble des points M tels que AM = 2r est-il inclus dans le cercle (C) ? ...
Ou : le cercle de centre A et de rayon 2r est-il inclus dans le cercle (C) ?

Cette démarche ensembliste permet donc de décider du VRAI et du FAUX dans chacun des items.

Votre débat

Voici dans l'ordre, quelques éléments pour guider le débat puis la construction des concepts de VRAI et de FAUX en mathématiques dans votre classe :

1) La case AUTRE

Le choix de la case AUTRE par l'élève renvoie très souvent au sentiment que la phrase proposée semble incomplète par rapport aux situations mathématiques où les éléments de cette phrase ont déjà été rencontrés.

Le VRAI et le FAUX sont liés à l'évaluation, à la notation par le professeur. Il y aurait même une graduation du VRAI à 100% au complètement FAUX (voir la retranscription du débat mené en 1ère S).

Bien avant l'ouverture de ce débat, les élèves ont déjà une conception du VRAI et du FAUX. Ils utilisent, entendent ces mots dans beaucoup de situations de la vie courante et sont confrontés aux affirmations, questions, dénégations de leur entourage, des médias etc... Ils savent que le VRAI et le FAUX sont étroitement mélangés dans les discours ; tout au mieux ceux-ci ne sont que des approximations, que des tentatives pour cerner le réel. Dans la vie courante, le VRAI et le FAUX font donc essentiellement appel au jugement humain (opinions politiques, jugements moraux, affaires judiciaires, ...). Pour l'élève, l'apprentissage des savoirs et des méthodes intellectuelles dans le cadre de l'enseignement au lycée se fait sous l'égide d'une quête où le VRAI a sa part mais la critique, le doute raisonné sont aussi des aptitudes que les enseignants de toutes matières essayent de développer. C'est à partir de ce vécu que les élèves se font leur propre conception du VRAI et du FAUX en mathématiques.

En résumé, l'élève transfère sa conception du VRAI construite expérimentalement dans la vie courante, où il s'agit d'un jugement humain, vers les mathématiques.

2) Vers le VRAI et le FAUX

Les idées amenées par les élèves dans les débats 2 et 3 alimentent cette partie. La propriété testée ayant une valeur universelle (le « pour tout » étant sous-entendu),

- l'usage des contre-exemples,
- les changements de cadres, des formules aux représentations graphiques,...
- les tests sur des exemples,

permettent de construire chez eux le VRAI et le FAUX ; cependant, il est nécessaire d'achever cette construction ; la démarche ensembliste semble une bonne approche pour cela.

3) Construction ensembliste du VRAI et du FAUX : voir la fin du débat n°3.

VI – CONCLUSION

On pourra dès lors avec une classe qui a été « initiée » aux arcanes de la logique, parler tout au long de l'année en termes de VRAI et de FAUX pour qualifier une phrase mathématique, en ayant quelque espoir que cette façon de parler soit différenciée par les élèves d'une quelconque évaluation à laquelle elle pourrait servir. De plus, les élèves disposent désormais d'un moyen de juger par eux-mêmes de la validité de leur raisonnement. On les incitera dès lors à en prendre l'initiative.

Le questionnement logique devient une ossature dynamique de tout le programme.

Chapitre II

Pour tout - Il existe - Négation

Les x ne sont pas tous seuls

I – INTRODUCTION

II – PRESENTATION DU TEST

III – TEST

IV – ANALYSE DU TEST ET DU DEBAT

V – CONCLUSION

I – INTRODUCTION

A longueur de cours de Mathématiques, nos élèves rencontrent beaucoup de phrases utilisant plus ou moins explicitement les expressions « Pour tout » et « Il existe ». Il nous arrive même de les abréger naturellement en $\forall$ et $\exists$. Par exemple :

- définition d'une fonction paire ;
- définition de la colinéarité de deux vecteurs ;
- définition d'une fonction bornée ;
- fonction croissante.

Ces « quantificateurs » prennent toute leur signification lorsqu'il s'agit de prouver qu'une propriété mathématique en contenant n'est pas vérifiée. Les élèves sont amenés à savoir traduire la négation de certaines phrases, par exemple :

- les négations de (a,b) = (0,0) ou de $ab \neq 0$, qui posent des problèmes analogues ;
- la négation de $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires...

Afin de cerner les problèmes et de tenter d'y remédier, nous avons élaboré une série de questions consistant, pour chacune d'elle, à faire découvrir la négation d'une phrase donnée au départ. Pour focaliser l'attention des élèves sur la négation, il nous a fallu partir de problèmes simples où il y a des propriétés vérifiées ou non vérifiées. De ce fait, nous avons écarté le cadre géométrique (négation du parallélisme dans l'espace, par exemple), le risque étant de travailler sur la notion et non sur la logique. Après différentes moutures, cette série de questions a pris la forme d'un test.

II – PRESENTATION DU TEST

1 – Fiche technique

Niveau : 2^{nde} – $1^{ère}$ – Terminale.

Thème : La négation d'une phrase mathématique. Influence sur « Pour tout » et « Il existe ».

Durée : 30 minutes pour le test.
1 heure pour le débat.

Déroulement :

La première phase d'une demi-heure peut être faite à la fin d'une séance de module. Après présentation du test, les élèves répondent individuellement à chacun des 19 items correspondant aux 4 premières questions. Le professeur ramasse puis comptabilise toutes les réponses sans apporter la moindre annotation sur les feuilles.

La deuxième phase d'une heure (en classe entière ou en module) s'effectue sous forme de débat entre le professeur et ses élèves. Il s'agit de mettre en commun toutes les réponses. Pour les quatre premières, la seule propriété qui sera vraie pour toutes les fonctions g ou toutes les courbes sera celle que l'on cherche, c'est-à-dire la négation de la phrase initiale. Tous les cas particuliers seront alors mis dans la case « on ne peut rien dire ».

La troisième phase est une phase de réinvestissement : on distribue la question n°5 et on attend une amélioration des performances ! !

2 – Connaissances nécessaires

Pour pouvoir utiliser avec efficacité ce test, surtout en seconde, il est indispensable que les élèves maîtrisent un minimum les études de fonctions et en particulier :

- propriétés des inégalités et sens de variation d'une fonction numérique,
- parité d'une fonction numérique,
- représentation graphique d'une fonction numérique.

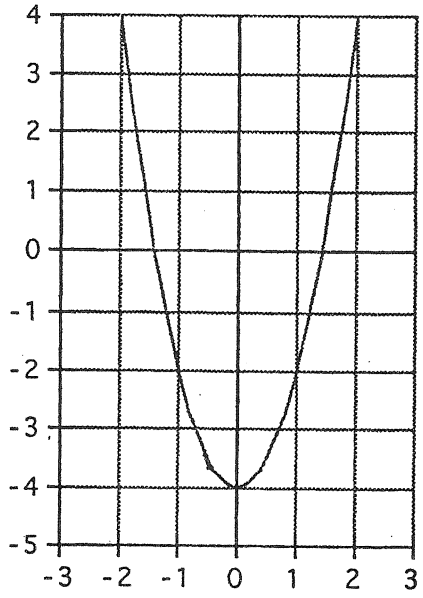
3 – Objectifs pédagogiques

- Meilleure compréhension des expressions « Pour tout » et « Il existe ».
- Différencier cas général et cas particulier.
- Familiariser les élèves à la négation de phrases mathématiques contenant des quantificateurs afin de les rendre plus performants dans certaines démonstrations.
- Constructions de contre-exemples.

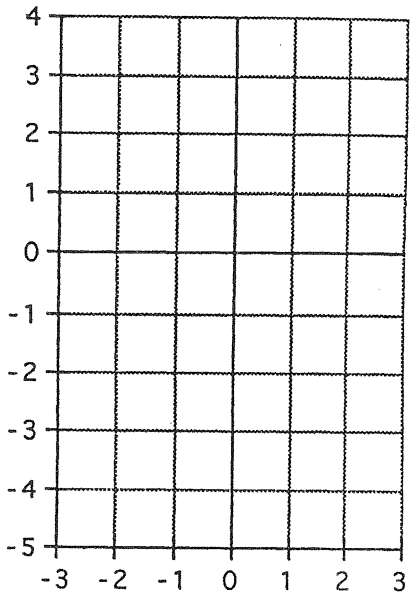
III – TEST

Question n°1

La courbe de gauche est la représentation graphique d'une fonction f telle que pour tout réel x, $f(x) \geq -4$.



1) Dans le repère ci-contre, tracer la courbe d'une fonction g ne possédant pas la propriété de f.



Puis répondre aux questions suivantes concernant la fonction g que vous avez représentée.

		VRAI	FAUX	AUTRE	Non Réponse
2	Il existe un réel x tel que $g(x) < -4$				
3	Pour tout réel x, $g(x) < -4$				
4	Pour tout réel x, $g(x) > -4$				
5	Il existe un réel x tel que $g(x) = -4$				

6) Laquelle des 4 phrases précédentes doit être vérifiée par toute fonction g ne possédant pas la propriété de f ?

Question n° 2

Soit f la fonction définie sur R par $f(x) = x^2 - 2x - 1$.
Cette fonction f vérifie : pour tout réel x, $f(x) \geq -2$.

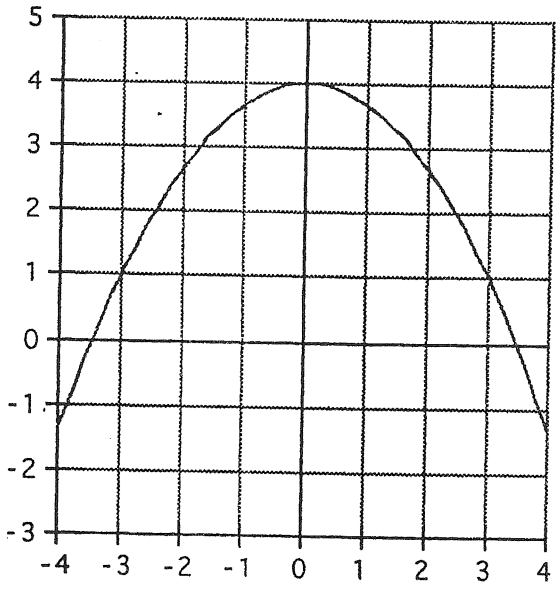
7) Trouver l'expression d'une fonction g ne vérifiant pas la propriété de f : g(x) = ...
Puis répondre aux questions concernant la fonction g dont vous venez de donner l'expression :

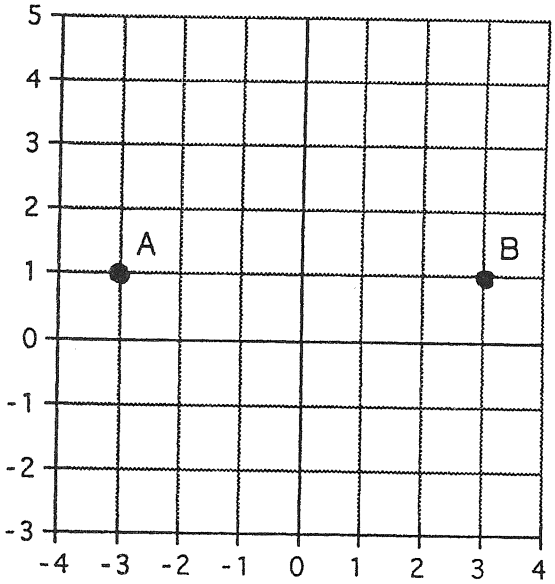
		VRAI	FAUX	AUTRE	Non Réponse
8	Pour tout réel x, $g(x) < -2$				
9	Il existe un réel x tel que $g(x) = -2$				
10	Pour tout réel x, $g(x) > -2$				
11	Il existe un réel x tel que $g(x) < -2$				

12) Laquelle des 4 phrases précédentes doit être vérifiée par toute fonction g ne possédant pas la propriété de f ?

Question n° 3

Soit f la fonction sur [-4 ; 4] représentée ci-dessous à gauche.
Cette fonction f est paire, c'est-à-dire que : pour tout réel x de [-4 ; 4] , f(-x) = f(x).





13) Dessiner la représentation graphique d'une fonction g définie sur [-4 ; 4], non paire et qui passe par les points A et B dans le repère ci-dessus (à droite).

Répondre aux questions concernant la fonction g que vous avez représentée :

		V	F	A	NR
14	Pour tout nombre réel x de [-4 ; 4], distinct de 3 et de –3, $g(x) \neq g(-x)$				
15	Il existe au moins un réel x de [-4 ; 4] tel que $g(x) \neq g(-x)$				
16	Pour tout réel x de [-4 ; 4], $g(-x) = -g(x)$				
17	Il existe un réel x de [-4 ; 4] tel que $g(-x) = -g(x)$				

18) Laquelle des 4 phrases précédentes doit être vérifiée par toute fonction g ne possédant pas la propriété de f ?

Question n° 4

Soit f une fonction impaire sur R, c'est-à-dire telle que :
pour tout réel x, f(-x) = -f(x).
Soit g une fonction définie sur R ne possédant pas la propriété de f.

19) Comment exprimer que g n'est pas impaire ?

Question n° 5

Soit f la fonction définie sur R par : $f(x) = x^2 + 4$.
Cette fonction est strictement croissante sur R_+, c'est-à-dire que :
pour tous réels a et b positifs, si $0 \leq a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

20) Trouver l'expression d'une fonction g ne possédant pas la propriété de f : g(x) = ...

Répondre aux questions concernant la fonction g dont vous venez de donner l'expression :

		V	F	A	NR
21	Pour tous réels a et b, si $0 \leq a < b$ alors $g(a) > g(b)$				
22	Il existe un réel a tel que $g(a) < 0$				
23	Il existe deux réels a et b tels que $0 \leq a < b$ et $g(a) \geq g(b)$				
24	Il existe deux réels a et b tels que $g(a) = g(b)$				

25) Laquelle des quatre phrases précédentes doit être vérifiée par toute fonction g ne possédant pas la propriété de f ?

IV – ANALYSE DU TEST ET DU DEBAT

Le test a été effectué dans plusieurs classes de 2nde et de 1ère.
Voici les résultats obtenus question par question.

Question n° 1 : cadre graphique

On a choisi une fonction f possédant une propriété illustrée par un graphique et l'on se propose de trouver une fonction g n'ayant pas cette propriété.

Dans 90% des cas, la courbe tracée correspond bien à la question posée. Les élèves ayant de mauvais tracés interprètent la négation de $f(x) \geq 4$ par $f(x) > 4$ en répondant FAUX à l'item n°2 et VRAI à l'item n°4, ce qu'ils confirment par ailleurs (à part quelques incohérences) en proposant la phrase de l'item n°4 comme négation de la propriété de f. La diversité des bonnes courbes tracées permet d'obtenir des réponses variées aux items n°2, 3 et 5 avec heureusement en grande majorité (80%) une réponse VRAIE à l'item n°2 et FAUX à l'item n°4, ce qui permettra lors de la correction et du débat en classe de dégager un consensus concernant la négation de la propriété demandée.

Question n° 2 : cadre algébrique

On a choisi une fonction f définie algébriquement possédant une propriété identique à celle de la question n°1 et l'on se propose de trouver une fonction g n'ayant pas cette propriété.

La non-maîtrise des expressions littérales, du catalogue des fonctions usuelles et de la construction des fonctions associées pose d'avantage de problèmes pour déterminer une fonction g, surtout pour les élèves de seconde. Il est donc plus difficile dans cette question de déceler l'erreur de logique. De plus, certains élèves ont du mal à s'imprégner

de la question posée et répondent un peu au hasard. Tout de même, une majorité d'élèves fournit une bonne expression. Les fonctions utilisées sont dans la plupart des cas des polynômes du premier ou de second degré.

Etant beaucoup moins à l'aise pour étudier les propriétés d'une fonction, certains élèves utilisent leur calculatrice graphique pour répondre aux questions suivantes, en s'appuyant sur le cadre graphique et en se mettant dans les conditions de la question précédente.

A l'item n°8, 25% répondent FAUX et 75% VRAI.

A l'item n°9, 75% répondent FAUX et 25% VRAI.

Pour ces deux items, 90% des élèves sont en cohérence avec l'expression choisie.

A l'item n°10, on trouve beaucoup d'incohérences entre la fonction g proposée et la réponse donnée : 50% répondent VRAI et 50% répondent FAUX.

En fonction des classes, les réponses à l'item n°11 sont différentes :

- en 2nde, 80% répondent FAUX,
- en 1ère S, 65 % répondent VRAI, ce qui est plus rassurant pour le niveau.

A l'item n°12, on retrouve les mêmes différences :

- pour la majorité des élèves de 2nde, la négation de $f(x) \geq -2$ est $f(x) > -2$ (item n°10) ;
- pour les élèves de 1ère S, les réponses sont plus partagées mais en majorité l'item n°11 est choisi.

Question n° 3 : parité, cadre graphique

Dans cette question, on donne la représentation graphique d'une fonction paire f et l'on se propose de représenter graphiquement une fonction g n'ayant pas cette propriété mais passant par deux points donnés A et B symétriques par rapport à (Oy) ce qui impose une condition sur la fonction g.

Les élèves, retrouvant le cadre graphique, sont plus à l'aise pour répondre à cette question.

Les graphiques sont dans leur quasi-totalité bien tracés.

La diversité des bonnes courbes tracées permet d'obtenir des réponses variées aux items n°14 et 17 (50% VRAI, 50% FAUX en cohérence avec la courbe tracée).

A part quelques incohérences, l'item n°15 est considéré VRAI à 90%.

L'item n°16 propose la définition d'une fonction impaire ; elle est donnée fausse à 75%, probablement grâce à la condition imposée sur les points A et B.

Les réponses à l'item n°18 sont plus diversifiées que dans les questions précédentes :

- 25% choisissent l'item n°14 comme négation d'une fonction paire ;
- 50% choisissent l'item n°15 comme négation d'une fonction paire ;
- 25% choisissent l'item n°16 comme négation d'une fonction paire.

La diversité de ces réponses nous amène à poser la question n°4 pour voir comment les élèves interprètent la négation d'une fonction impaire.

Question n°4 : parité, cadre algébrique

Au vu des résultats de l'item n°18, il n'est pas surprenant de constater la plus grande confusion quant à la négation d'une fonction impaire. Il y a presque autant de réponses que d'élèves et elles sont souvent incomplètes.

En voici les principales :

- Si $g(x) = g(-x)$.
- Il faut montrer que $g(x) = g(-x)$.
- Si $g(-x) \neq -g(x)$.
- Si $g(-x) \neq -g(x)$ alors g n'est pas impaire.
- Pour tout réel x, $g(-x) \neq -g(x)$.
- Pour tout réel x, $g(-x) = g(x)$.
- O n'est pas le centre de symétrie.
- Il faut que $g(-x) = g(x)$ pour qu'elle soit paire.
- Il existe un réel x tel que $g(-x) \neq -g(x)$.
- Il existe au moins un réel x tel que $g(-x) \neq -g(x)$.
- $g(-x) \neq -g(x)$ pour au moins une valeur de x.

Les quatre questions du test et en particulier la dernière nous conduisent à instaurer un débat dans la classe sur la signification des quantificateurs, leur importance dans une phrase mathématique et leur utilisation dans un raisonnement.

Au cours du débat, la liste précédente est écrite au tableau et critiquée jusqu'à l'obtention d'une phrase mathématique exacte contenant le bon quantificateur faisant l'unanimité dans la classe.

Afin de tester la prise de conscience chez les élèves du rôle fondamental des quantificateurs dans un raisonnement de démonstration, nous proposons la question n°5 comme exercice de réinvestissement.

V – CONCLUSION

Il est clair que le niveau des élèves (2^{nde} , $1^{ère}$ S ...) influence en partie leurs réponses. Cependant le cadre graphique permet à la plupart d'entre eux de « s'exprimer » alors qu'ils sont souvent désemparés ou perplexes devant la négation d'une phrase mathématique. Des connaissances sur le tracé des courbes (paraboles en début de $1^{ère}$ S par exemple) favorisent certains élèves pour la compréhension de la question posée. En définitive, le cadre graphique est le plus abordable pour étudier le concept du « Pour tout – il existe ».

Jusqu'ici, les élèves n'ont rencontré des quantificateurs que de manière implicite dans la résolution des équations et inéquations algébriques, par exemple :

« Trouver tous les réels x tels que $P(x) = 0$.
Trouver tous les réels x tels que $P(x) > 0$ ».

et dans bon nombre de problèmes de géométrie où les « Pour tout » sont implicites.

En seconde, les propriétés des fonctions, telles que la parité ou l'imparité, nécessitent un usage précis des quantificateurs, ce qui n'a aucune évidence a priori pour les élèves (le langage usuel n'y prépare pas spécialement).

En 1ère, les élèves ont encore très souvent une vision étroite de l'usage des lettres : ils s'en servent pour développer, factoriser, résoudre une équation, une inéquation. Elle doit être élargie pour aborder l'apprentissage des structures logiques élémentaires où intervient un quantificateur.

Chapitre III

Implication - Equivalence

Où trouve-t-on la logique ?

I – INTRODUCTION

II – PRESENTATION DE L'ACTIVITE N°1 :
La logique dans l'énoncé et la recherche

III – COMPORTEMENT DES ELEVES

IV – DEBAT

V – PRESENTATION DE L'ACTIVITE N°2 :
La logique dans la rédaction

VI – ANALYSE DE L'ACTIVITE N°2

VII – EN CONCLUSION

En annexe : des copies d'élèves

Distinguer l'implication de l'équivalence dans un raisonnement n'est pas chose aisée pour l'élève. Par l'intermédiaire de deux activités, nous avons voulu mettre en évidence cette différence dans les phases de recherche, de résolution et de rédaction d'un problème.

I – INTRODUCTION

Le « si … alors … » est une structure connue des élèves :

- dans le cadre des démonstrations, ou des énoncés de théorème (par exemple le théorème de Pythagore, le théorème de Thalès).

- dans le cadre de la construction par induction de concepts, d'outils, c'est-à-dire par l'observation de cas particuliers amenant à une *règle* plus générale (par exemple, si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu alors ce quadrilatère est un parallélogramme).

Ces « si … alors …» sont plutôt compris comme étant des « comme … alors… ». Les élèves n'en perçoivent pas toute la rigueur et ont du mal à les distinguer des équivalences, d'autant plus que, si l'outil est construit par induction (à l'aide de cas particuliers), c'est à l'aide de l'outil que l'on fait des déductions (il devient alors un cas général).

Se pose donc le problème de l'utilisation de cette démarche : si on observe beaucoup de cas particuliers alors on en induit un énoncé général, lequel permet de démontrer à son tour d'autres cas particuliers.

Y-a-t-il donc équivalence entre « beaucoup de cas particuliers » et « cas général » ? Pourquoi se poser le problème de la démonstration de ces cas généraux ? L'élève en sent-il le besoin ? Nous pensons qu'il est important de lui poser le problème de la différence entre équivalence et implication.

Pour affiner cette compréhension, nous avons préparé des activités centrées :

- d'une part, sur la partie recherche d'une démonstration, d'une solution,
- d'autre part, sur la partie rédaction de cette démonstration.

Pour travailler sur la partie recherche, nous avons choisi la résolution d'une inéquation irrationnelle. Le but premier n'est pas l'apprentissage d'une méthode algorithmique de résolution, celle-ci ne faisant pas partie des exigences de 1ère S, mais plutôt un comportement de démarche scientifique en analysant les rôles de l'équivalence et de l'implication dans cette démarche.

Pour travailler sur la partie rédaction, nous avons proposé des rédactions mettant en jeu l'équivalence et l'implication, rédactions à critiquer puis à reconstruire.

II – ACTIVITE N°1

1 – Fiche technique

Niveau : 1ère et plus (abordable en fin de bonne 2nde).

Thème : Structure logique dans l'énoncé et la recherche d'un problème.

Durée : 1 heure pour la recherche et la rédaction de cette recherche.
30 minutes minimum de débat et de correction.

Déroulement :

Les élèves sont répartis par groupes de 3 ou 4.
En début de séance, le professeur inscrit au tableau le texte suivant :

Trouver tous les réels x tes que $\sqrt{1 - x} \leq 1 + x$

Puis il précise les consignes :

- Chaque groupe devra produire un compte rendu de recherche où apparaîtront toutes les étapes rencontrées pour résoudre le problème même celles qui se révéleront fausses ou sans issue ; chacune de ces étapes sera illustrée par un commentaire répondant à la question : « qu'est-ce qui vous a fait penser à cela ? ».

- Pour préciser la compréhension de cette dernière consigne, le professeur pourra présenter un exemple : pour démontrer que trois points sont alignés, je pense à des vecteurs colinéaires car des vecteurs sont introduits dans l'énoncé proposé.

- Au cours du travail, le professeur passe voir chaque groupe et intervient, si besoin est, en proposant aux élèves de vérifier leur réponse à l'aide de valeurs particulières, ce qui permet de relancer leur recherche (le professeur laissera une trace écrite de son intervention sur la feuille de compte rendu du groupe).

- Cette première partie durant environ une heure, la séquence suivante sera consacrée à l'analyse des rédactions des groupes. Elles sont présentées soit par l'intermédiaire d'un rapporteur par groupe soit par une photocopie sur transparent de ces rédactions. Certaines de ces rédactions sont proposées en annexe.

La première partie du débat qui s'ensuit consiste à déterminer l'ensemble des solutions cherché.

La deuxième partie du débat a pour but de faire apparaître le problème de l'équivalence dans la recherche d'un ensemble de solutions.

2 – Connaissances nécessaires

- Généralités sur les fonctions en $1^{ère}$ S : fonctions de référence, variations, inégalités, courbes.

- Utilisation d'une calculatrice graphique : formule, tableau de valeurs, graphe.

- Signe de ax + b et d'un produit ou signe du trinôme du second degré.

3 – Objectifs pédagogiques

- Apprentissage d'une démarche logique dans l'analyse d'un énoncé et dans la recherche de la résolution d'un problème dont la structure logique est une équivalence.

- Utilisation précise d'un outil s'exprimant sous forme d'équivalence : pour tous réels positifs a et b, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$.

- Soulignons de nouveau qu'il ne s'agit pas ici de l'apprentissage d'une méthode de résolution d'inéquations irrationnelles.

III – COMPORTEMENT DES ELEVES

Nous avons analysé deux aspects.

1 – La logique dans l'énoncé

Celle-ci est liée à la lecture de cet énoncé et aux comportements engendrés par celui-ci. Elle n'est donc pas indépendante des acquis des élèves et de l'ordre d'importance de ces acquis.

La racine carrée engendre :

- l'utilisation de l'élévation au carré pour simplifier l'inégalité,
- une disjonction des cas : $1 + x \geq 0$ ou $1 + x \leq 0$, une racine étant toujours positive.

L'inégalité $a \leq b$ engendre la comparaison par rapport à 0 : $a - b \leq 0$.

Les deux membres de l'inégalité font penser à des fonctions de références (fonction racine carrée, fonction affine) ; cela permet d'élargir le cadre du problème donné :

- soit en comparant des fonctions par une étude du signe de leur différence,
- soit en pensant l'inégalité en termes de représentations graphiques de deux fonctions ce qui conduit à utiliser la calculatrice graphique.

Par contre, le problème de l'ensemble de définition de l'inéquation est rarement analysé dès le départ. Fait-il donc partie des comportements exigibles des élèves, le domaine de définition d'une fonction ne faisant plus partie des compétences ?

Parmi les exemples cités précédemment, nous voyons que les élèves pensent majoritairement à des équivalences, notamment de méthodes et quelquefois de cadres, sans se poser le problème de l'ensemble dans lequel il y a équivalence. Pour une fonction y a-t-il équivalence entre cadre formulaire, cadre graphique et cadre graphique de la calculatrice ?

2 – La logique de résolution

Son point de départ dépend de l'analyse de l'énoncé. La piste algébrique est généralement choisie : les élèves transforment l'écriture pour aboutir à une comparaison par rapport à 0 ce qui engendre un tableau de signes.

Même si la partie calculatoire de la résolution est fausse pour certains élèves, ils pensent, le plus souvent, raisonner par équivalence.

Voici quelques types d'erreurs rencontrées :

1) $\sqrt{1 - x} - 1 - x \leq 0$ puis $1 - x - (1 - x)^2 \leq 0$.
On élève au carré car pour supprimer une racine, c'est la méthode (avec de plus une faute de signe). Le problème de l'équivalence n'est pas considéré, et va de soi pour nombre d'élèves.

2) Pour étudier le signe de $(\sqrt{1 - x}) - (1 + x) \leq 0$ on étudie le signe $\sqrt{1 - x}$ et celui de $(1 + x)$ et on conclut dans un tableau de signes. Ces élèves n'ont pas saisi que cette méthode n'est valable que pour des produits ou des quotients. Ici, le cadre opératoire dans lequel s'applique l'outil n'est pas maîtrisé.

Un résultat étant trouvé sous forme d'intervalle ou de réunion d'intervalles, celui-ci est supposé correspondre à l'ensemble cherché. Un certain nombre d'élèves se posent le problème d'une vérification à l'aide de valeurs, ce qui supposerait qu'ils ont raisonné par implications mais ce n'est pas très clair pour eux : on vérifie parce qu'il doit falloir vérifier.

C'est à ce moment que l'on peut faire soit une mise en commun des résultats des différents groupes, soit une intervention écrite sur les rédactions de recherche du type :

Ce nombre réel ... de votre ensemble trouvé est-il solution ?

Les réactions des élèves qui s'ensuivent sont très diverses :

- certains pensent avoir raisonné par équivalence ; ils vérifient si ce nombre appartient à l'ensemble trouvé,
- d'autres vérifient à partir de l'équation du second degré ; ils mettent en doute leur résolution de l'inéquation du second degré.

Une fois le problème reposé, ils vérifient à partir de la question du départ. Viennent alors différents comportements :

- la vérification de leur ensemble trouvé avec d'autres valeurs jusqu'à ce qu'ils soient convaincus par leur nouvel ensemble : ensemble qui résiste aux épreuves des contre-exemples ; l'ensemble trouvé étant trop gros, il faut le réduire ...

- le changement de cadre : utilisation d'une calculatrice graphique et comparaison des représentations graphiques des fonctions.

- des tests pour chaque intervalle de l'ensemble solution, en raisonnant avec des lettres : après avoir trouvé $]-\infty ; -3]$ ou $[0 ; +\infty[$, un groupe rédige :

  « Prenons $x \leq -3$, $1 - x \geq 4$ $\sqrt{1 - x} \geq 2$, $1 + x \leq -2$ donc $\sqrt{1-x} \leq 1 + x$ n'est pas vérifié sur $]-\infty ; -3]$.

  Prenons $x \geq 0$, $-x \leq 0$, $1 - x \leq 1$, et pour la racine de $1 - x$ se pose le problème de $1 - x \geq 0$ ... »

Une fois les élèves convaincus que l'ensemble des solutions est $[0 ; 1]$, nous pouvons commencer le débat car il apparaît que le but premier d'un élève dans un exercice est de trouver un résultat, le contrat de l'exercice lui semble alors respecté (mais il ne pense pas à celui des mathématiques !).

IV – DEBAT

Nous proposons donc à la réflexion des élèves les deux questions suivantes :

1) Résumer en une phrase ce que vous avez démontré dans votre travail en employant les deux phrases « $x \in R$ et $\sqrt{1 - x} \leq 1 + x$ » et « $x \in [0 ; 1]$ »
2) Quel endroit dans votre raisonnement vous a empêché de trouver directement le bon ensemble ? Justifier.

La règle du jeu étant de répondre en utilisant « si ... alors ... » ou « ... si et seulement si ... ». Les élèves prennent alors peu à peu conscience dans le débat qui s'instaure, des exigences du problème en matière de structure logique et des lacunes de ce qu'ils ont produit dans leur copie.

Ils différencient d'abord les types de raisonnements proposés :

- celui par disjonction des cas,
- celui par implication et réciproque,
- celui par équivalence.

Ce dernier raisonnement étant jugé le plus difficile car « il ne faut rien oublier dès le départ » (des exemples de rédaction sont joints en annexe).

Il se rendent alors plus ou moins compte de leur erreur dans l'utilisation de : pour tous réels positifs a et b, $a < b$ équivaut à $a^2 < b^2$: ils ont oublié la condition a et b positifs.

En revenant au problème, on voit alors qu'on ne peut écrire :

$\sqrt{1 - x} \leq 1 + x$ équivaut à $1 - x \leq (1 + x)^2$

qu'en y ajoutant les conditions $0 \leq \sqrt{1 - x}$ et $0 \leq 1 + x$, conditions que l'on retrouve lorsqu'on utilise la calculatrice graphique. La première condition pose le problème de l'existence de la racine, problème plus ou moins bien formulé par les élèves :

$1 - x$ doit être positif car $\sqrt{1 - x}$ doit être positif,

$1 - x$ doit être positif car $\sqrt{1 - x}$ est impossible.

Cette prise de conscience des conditions d'utilisation de l 'équivalence et plus généralement d'un outil en mathématiques est réinvesti dans les deux énoncés suivants :

N°1 : Trouver l'ensemble des réels tels que $1 + x \leq \sqrt{1 - x}$

N°2 : Trouver l'ensemble des réels tels que $\sqrt{4 - x} \leq - x - 2$

Ce travail d'analyse et d'étude des différents raisonnements ou productions écrites des groupes est à nouveau utilisé dans l'activité suivante.

V – ACTIVITE N° 2

1 – Fiche technique

Niveau : 2^{nde} et $1^{ère}$ S.

Thème : Analyse de l'implication dans la rédaction d'une démonstration.

Durée : 1 heure pour la recherche et la rédaction de celle-ci.

Déroulement :

En première phase, nous proposons trois questions tirées d'un module de logique du livre de Belin de $1^{ère}$ S. Les élèves ont 10 minutes pour y répondre de manière individuelle.

En seconde phase, nous proposons trois rédactions répondant à chacune des trois questions en demandant aux élèves de les critiquer.

2 – Connaissances nécessaires

- Les identités remarquables $(a - b)(a + b)$, $(a - b)^2$ et $(a + b)^2$.
- La propriété : pour $B \neq 0$, $\frac{A}{B} = C$ équivaut à $A = BC$.
- Méthodes pour démontrer une égalité, une inégalité.

3 – Objectifs pédagogiques

- Le sens du « si … alors … » dans la rédaction.
- Souligner la confusion entre l'implication et l'équivalence.

4 – Texte de l'activité

Question n°1 : Démontrer que $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$

Question n°2 : Démontrer que, pour tout réel x, $9x^2 + 4 \geq 12x$.

Question n°3 : Démontrer que, pour tous réels a et b, $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$.

Voici des solutions proposées à chacune des questions précédentes :

- Que pensez-vous de ces solutions ?
- Critiquez-les si besoin et proposez-en une qui conviennent.

Solution n°1

Si $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$ alors $1 = (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$ d'où $1 = 2 - 1$.

Conclusion $\frac{1}{\sqrt{2} - 1} = \sqrt{2} + 1$

Solution n°2

Si $9x^2 + 4 \geq 12x$ alors $9x^2 + 4 - 12x \geq 0$
Démontrons que $9x^2 + 4 - 12x \geq 0$
On vérifie que $(3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$,
Or pour tout réel x, $(3x - 2)^2 \geq 0$, donc $9x^2 + 4 \geq 12x$

Solution n°3

On vérifie successivement :

$(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$
$a^2 + b^2 - 2ab - (a^2 + b^2 + 2ab) = -4ab$
$a^2 + b^2 - 2ab - a^2 - b^2 - 2ab = -4ab$
$-4ab = -4ab$
On a donc, pour tous réels a et b : $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$.

VI – ANALYSE DE L'ACTIVITE

Les résultats semblent disparates, reflétant ainsi un passé et des acquis très divers selon les élèves.

1 – Analyse de la solution n° 1

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2} + 1$$

Les critiques des élèves ont été diverses.
Ils critiquent la méthode : celle-ci ne correspond pas à celle qu'ils utilisent habituellement pour démontrer une égalité ; ils critiquent aussi l'utilisation du produit en croix dans le calcul.

Ils remarquent un manque d'indication de l'identité remarquable (a – b)(a + b) ; pour eux, il aurait fallu rédiger alors le développement du produit. Ces réactions sont liées aux exigences du professeur.

Viennent ensuite des critiques concernant la logique.

Il remplacent les « si ... alors ... », « d'où » par des « équivalences ». Le sens des connecteurs utilisés les gène et ils proposent de remplacer « d'où » par « car ».

Ils remarquent aussi que le résultat que l'on veut démontrer est placé au début. Les rédactions correctes proposées pour démontrer l'égalité A = B sont du type :

- on part de A pour arriver à B, ou bien,
- on calcule la différence A – B pour aboutir à 0.

Quelques élèves utilisent des symboles « équivalence » mais ceux-ci sont pensés comme des « si ... alors ... ».

En résumé, si les élèves sont capables de rédiger une démonstration correcte de l'égalité, le sens du « si ... alors ...» utilisé dans la rédaction proposée, est rarement corrigé.

2 – Analyse de la solution n°2

$9x^2 + 4 \geq 12x$

Pour plus de la moitié des élèves, la démonstration semble correcte. Cependant nous retrouvons des critiques de l'énoncé n°1. Les premières réactions concernent à nouveau les calculs en soulignant les outils utilisés :

- « $9x^2 + 4 \geq 12x$ est le développement de $(3x - 2)^2$ ... »
- « un carré est toujours positif ... »
- certains préfèrent la méthode du discriminant surtout si le chapitre a été fait très peu de temps auparavant.

On peut se demander si certains élèves ne pensent pas cette inégalité comme une inéquation, peut-être à cause de la présence de la lettre x, par exemple, quand ils utilisent le mot solution dans leur critique.

D'autre part, la qualité d'une démonstration permettant de convaincre le lecteur semblent liée pour certains élèves à la qualité des outils utilisés, ici le discriminant. Des élèves portent leur attention sur les mots utilisés : « il précise bien que $(3x - 2)^2 \geq 0$ » est correcte « pour tout réel x ». Certains sont gênés par « on vérifie que », « démontrons que », ce qui dénote une gêne, un doute vis-à-vis de la logique de la démarche proposée par la solution n°2.

Ceci est renforcé par les observations suivantes :

- « La première ligne est inutile. La suite est suffisante pour la démonstration... » ;
- « Il est inutile de réécrire ce que l'on veut démontrer » ;
- « Dans la solution, il était démontré que $9x^2 + 4 - 12x \geq 0$ mais pas $9x^2 + 4 \geq 12x$ », comme s'il manquait la conclusion du raisonnement ;
- « La première ligne ne doit pas être écrite car il ne faut pas partir de ce qu'il faut démontrer », remarque qui fait penser à une règle de démonstration apprise au collège : est-elle liée à l'évaluation donc au contrat professeur-élève ou bien est-elle ressentie comme une vraie qualité d'une rédaction ?

D'autres remplacent $(3x - 2)^2 = 9x^2 + 4 - 12x$ par $9x^2 + 4 - 12x = (3x - 2)^2$, cette correction suit la logique de recherche et non la logique de rédaction.

L'analyse s'affine dans quelques copies :

- « La solution est incorrecte. Le raisonnement est par implications ... la réciproque n'est pas obligatoirement vraie ... » ;
- « ... il ne faudrait pas poser de condition, c'est une conséquence ... » ;
- « ... la première ligne est inutile. La suite est suffisante pour la démonstration » ;

Les rédactions proposées reprennent les remarques ci-dessus ; très rares sont celles qui remplacent le « si ... alors ... » par une équivalence. L'ensemble des élèves reste donc dans une logique de recherche.

3 – Analyse de la solution n°3

$(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$

Dans cet énoncé, se pose de façon plus évidente pour les élèves, la démonstration d'une égalité. Les lettres a et b utilisée ne les entraînent pas dans la résolution d'une équation même si certains utilisent le mot « équation » à la place d' « égalité ». La première critique est donc celle de la méthode utilisée pour démontrer une égalité : partir du résultat à démontrer leur semble incorrect, la seconde concerne la performance du calcul : factoriser est plus rapide que développer.

Très peu d'élèves s'aventurent à critiquer la logique utilisée dans ce raisonnement :

- « Mais on ne peut pas débuter la démonstration en annonçant que l'égalité $(a - b)^2 - (a + b)^2 = -4ab$ est vraie » ;
- « Mais la réciproque est-elle vraie ? »

Aucun ne se pose le problème du raisonnement par équivalences successives entre les différentes égalités.

VII – EN CONCLUSION

On s'aperçoit donc à la lecture de ces critiques que l'observation d'un raisonnement rédigé est difficile pour les élèves ; ils ne peuvent faire abstraction des calculs pour se concentrer sur le « sens logique » de la question posée.

Se pose donc le rôle que font jouer les élèves à la rédaction :

- Doit-elle correspondre à la phase de recherche de la solution ?
- Sert-elle seulement à convaincre que le résultat trouvé est juste ?
- Est-elle seulement le reflet des exigences du professeur ?
- Est-elle une communication entre individus ?
- Ou bien a-t-elle une vérité indépendante des individus ?

Quels niveaux d'exigences ou de rigueur de logique doit-on donc avoir pour une rédaction ?

Nous avons aussi fait passer cette activité avant la première proposée dans ce chapitre. L'ordre que nous avons finalement suivi permet de diminuer cette confusion entre les phases de recherche et de rédaction.

Il permet de faire prendre conscience à ceux qui attribuent au « si ... alors ... » la valeur de l'équivalence, implicitement et même quelquefois explicitement, de les distinguer.

Il est aussi important de proposer une situation faisant « obstacle » et donc de passer du temps à franchir cet obstacle tout en sachant que le franchissement de cet obstacle ne sera pas évident à retranscrire dans une rédaction. Pour cette dernière étape, cela ne peut être qu'un travail à long terme.

ANNEXE N°1

Première copie sur l'activité n°1

Le groupe dont le compte-rendu est reproduit ci-dessous, a procédé par implication puis réciproque (sans doute mis sur cette voie par le test pour x = -3), cette réciproque faisant appel à une disjonction des cas. Des maladresses (justification de l'ensemble de définition de $\sqrt{1 - x}$, un ensemble S qui se modifie au fil de la résolution), des lacunes (les liens logiques) mais cependant une démarche de recherche et un souci de vérification.

$(\sqrt{1 - x})^2 \leq (1 + x)^2$

$1 - x \leq 1 + 2x + x^2$

$x^2 + 3x \geq 0$

$\Delta = 9$

$x_1 = -3$

$x_2 = 0$

$S =]-\infty ; -3] \cup [0 ; +\infty[$ mais $\sqrt{1 - x} \geq 0$

Donc

$S =]-\infty ; -3] \cup [0 ; 1[$

Prenons $x = -3$

$\sqrt{1 + 3} = 2 \geq 1 - 3$ faux

prenons $x \leq -3$

$1 - x \geq 4$

$\sqrt{1 - x} \geq 2$

donc $\sqrt{1 - x} \leq 1 + x$ n'est pas vérifié sur $]-\infty ; -3]$

prenons $0 \leq x \leq 1$

$1 \leq 1 + x \leq 2$

$0 \geq -x \geq -1$

$1 \geq 1 - x \geq 0$

$1 \geq \sqrt{1 - x} \geq 0$

donc $\sqrt{1 - x} \leq 1 + x$ est vrai sur $[0 ; 1]$

donc $S = [0 ; 1]$

ANNEXE N°2

Seconde copie sur l'activité n°1

Dans le compte-rendu suivant la démarche semble plus structurée : existence de la racine carrée, positivité de 1 – x, élévation au carré.

La racine d'un nombre négatif est impossible

$1 - x \geq 0$

$-x \geq -1$

$x \leq 1$

$1 - x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 1$

$\sqrt{1 - x} \leq 1 + x$ alors $1 + x \geq 0$

$x \geq -1$

donc x est compris entre –1 et 1 $S_1 = [-1 ; 1]$

$-\frac{1}{2}$ est-il solution ?

$$\sqrt{1 + \frac{1}{2}} \leq 1 - \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{\frac{3}{2}} \geq \frac{1}{2}$$

ce qui prouve que $-\frac{1}{2}$ n'est pas solution de cette inéquation.

$0 \leq \sqrt{1 - x} \leq 1 + x$

$(\sqrt{1 - x})^2 \leq (1 + x)^2$

$1 - x \leq 1 + 2x + x^2$

$-x^2 - 3x \leq 0$

$x(-x - 3) \leq 0$

$S_2 =]-\infty ; -3] \cup [0 ; +\infty[$

$S = S_1 \cap S_2$

$S = [0 ; 1]$

ANNEXE N°3

Troisième copie sur l'activité n°1

Quelques groupes privilégient dans un premier temps une approche graphique. Celle-ci est parfois suivie d'un essai de résolution algébrique.

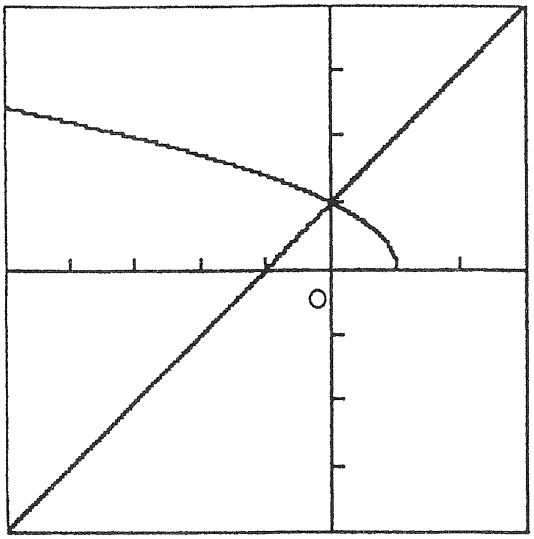
La présence de la racine carrée nous amène à rechercher l'ensemble de résolution de l'inéquation.

Il faut que $1 - x \geq 0$ donc $x \in]-\infty ; 1]$

Soit $f(x) = \sqrt{1 - x}$

$g(x) = 1 + x$

On peut résoudre graphiquement



graphiquement, les solutions $S = [0 ; 1]$ car $g(x) \geq f(x)$ dans $[0 ; +\infty[$ et l'ensemble de définition étant $]-\infty ; 1]$

ANNEXE N°4

Quatrième copie sur l'activité n°1

(Sous forme de rédaction de recherche)

Déterminer l'ensemble des réels x tels que $\sqrt{1-x} \leqslant 1+x$

– en résolvant le problème rédiger pourquoi vous faites "telles actions"

–
$$(\sqrt{1-x})^2 \leqslant (1+x)^2$$
$$1-x \leqslant 1+2x+x^2$$
$$0 \leqslant x^2+3x$$

$\Delta = (3)^2 = 9$ donc 2 solutions

$x_1 = \frac{-3-3}{2}$ $\quad x_2 = \frac{-3+3}{2}$

$x_1 = \frac{-6}{2} = -3$ $\quad x_2 = \frac{0}{2} = 0$

x	-3		0	
x^2+3x	$+$	0	$-$	0 $+$

$x^2+3x \geqslant 0$ quand $x \in]-\infty,-3] \cup [0,+\infty[$

– Pour que $\sqrt{1-x} \geqslant 0$, il faut que $x \leqslant 1$

On sait aussi que $x \in]-\infty;-3] \cup [0;+\infty[$ donc pour que $\sqrt{1-x} \leqslant 1+x$ il faut que $x \in]-\infty;-3] \cup [0;1]$ parce que lorsque $x > 1$, $1-x < 0$ et la racine d'un nombre négatif n'existe pas

On prend une calculatrice, on vérifie si nos résultats sont corrects en traçant les 2 courbes d'équation $y_1 = \sqrt{1-x}$ et $y_2 = 1+x$

On remarque que nos résultats ne sont pas tout à fait exact car d'après le graphique illustrant les deux courbes, on remarque que $\sqrt{1-x} \leqslant 1+x$ quand $x \in [0;1]$

* c'est + simple lorsqu'on n'a pas de racines

– on transpose car on peut mieux voir par rapport à 0

– on calcule Δ de x^2+3x pour trouver les solutions car c'est du second degré

– on résout l'inéquation pour savoir pour quelles valeurs $x^2+3x \geqslant 0$ en faisant un tableau de signes

* on sait que $1-x$ est positif car la racine d'un nombre est toujours positive. Etant donné que $\sqrt{1-x} \geqslant 0$ et que $\sqrt{1-x} \leqslant 1+x$ donc $1+x \geqslant 0$ donc quand on élève ces nombres au carré l'inéquation ne change pas Cela sert à justifier le sens de l'inégalité sinon tout notre raisonnement aurait été faux

ANNEXE N°5

Première copie sur l'activité n°2

exercice 1

ⓐ incorrect car on considère comme vérifié que $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}$ - il ne faut pas partir de l'équation, mais d'un des termes (à de gauche par exemple) pour arriver à démontrer que celui est égal au second

ⓑ on a $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \times \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}-1)}$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{2-1}$

$= \frac{\sqrt{2}+1}{1}$

$= \sqrt{2}+1$

donc $\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$

exercice 2

ⓐ les termes utilisés ne conviennent pas (dans la démonstration on vérifie)

ⓑ on a $9x^2+4 \geq 12x$

$9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

on note $A = 9x^2 - 12x + 4$

or un carré est supérieur ou égal à zéro

donc

or $A = 9x^2 - 12x + 4$

$A = (3x-2)^2$ car $9x^2 - 12x + 4 = (3x-2)^2$

on a A est un carré

or pour tout réel x, $(3x-2)^2$ est supérieur ou égal à 0

donc

$(3x-2)^2 \geq 0$

$9x^2 - 12x + 4 \geq 0$

donc pour tout x $9x^2 + 4 \geq 12x$

exercice 3

a) on part de l'égalité des termes de l'équation alors que si l'on veut démontrer une égalité il est préférable de partir d'un terme pour arriver à l'autre, puis on démontre l'égalité pas que pour tout réel a et b l'équation est vérifiée

b)

on a $(a-b)^2 - (a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 - (a^2 + 2ab + b^2)$

$= -4ab$

or il n'existe aucune valeur réelle de a et b qui puisse contredire l'équation

ANNEXE N°6
Seconde copie sur l'activité n°2

exercice 1.

Je pense que la rédaction proposée est d'une part incomplète, il n'y a aucune description de méthode, ainsi pour vérifier une égalité, on peut utiliser soit la différence des deux membres ou on part d'un membre pour trouver l'autre.

J'applique la méthode suivante:

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \sqrt{2}+1 = 0$

nous allons mettre au même dénominateur

$\frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}-1} = 0$

or $0 = 0$; donc les deux égalités est vérifiée.

exercice 3.

Je pense que dans ce cas, il y a une mauvaise rédaction car on nous demande de prouver une égalité donc la méthode la plus simple serait ici de simplifier $(a-b)^2 - (a+b)^2$

$(a-b)^2 - (a+b)^2$ est un produit remarquable
$(a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$.

donc, on obtient

$(a-b)^2 - (a+b)^2$
$= [(a-b)-(a+b) \quad (a-b)+(a+b)]$
$= (2a)(-2b)$
$= -4ab$

donc $(a-b)^2 - (a+b)^2 = -4ab$.

exercice 2.

La solution proposée est incomplète, elle ne présente que les résultats:

on doit prouver $9x^2+4 \geqslant 12x$
donc $9x^2-12x+4 \geqslant 0$
nous avons une identité remarquable $a^2-2ab+b^2=0$
$(3x-2)^2 \geqslant 0$
or un carré est toujours positif
donc $9x^2+4 \geqslant 12x$.

Chapitre IV

Condition nécessaire
Condition suffisante

I – INTRODUCTION

II – PREMIERE APPROCHE DES DEUX CONCEPTS

III – CONSTRUCTION DES DEUX CONCEPTS

IV – TEST DE CONTROLE

V – PROBLEME DE RECHERCHCE

VI – EN GUISE CONCLUSION

Dans le chapitre précédent, nous avons analysé la logique des élèves face à des problèmes dans les deux phases de recherche et de rédaction. Dans celui-ci, nous cherchons des activités ayant pour but de mettre mieux en place les notions de condition nécessaire et condition suffisante, ce qui permettra également de mieux distinguer la différence entre implication et équivalence.

I – INTRODUCTION

L'analyse en termes de *condition nécessaire* ou *condition suffisante* est une approche qui peut se révéler décisive dans la compréhension d'un énoncé ou d'un problème mathématique, ou encore dans la phase de recherche de certains problèmes de lieu en géométrie, alors que le « si ... alors ... » intervient plus dans la démonstration comme pas de déduction.

Nous avons choisi d'abord de parler de l'utilisation *condition nécessaire* et de *condition suffisante* dans la vie courante et notamment dans la langue de tous les jours.

Citons André Baudin et Waziri Amadou (IREM de Madagascar) : « Contrairement à l'idée courante selon laquelle le français, langue plus riche en notions abstraites que les langues africaines, permettrait de mieux enseigner les concepts logico-mathématiques aux jeunes élèves, on démontre que c'est l'introduction dès le début de la scolarité de langues étrangères ainsi que d'un contenu éducatif tout aussi étranger qui est susceptible de créer un handicap du point de vue cognitif ».

Il vaut donc mieux partir du vécu des élèves.

II – PREMIERE APPROCHE DES DEUX CONCEPTS

Cette première approche se scinde en deux parties indiquées dans le déroulement.

1 – Fiche technique

Niveau : Classe de Seconde à Terminale.

Thème : Les concepts de *nécessaire* et *suffisant*.

Durée : 1 heure.

Déroulement :

Un premier exercice est d'abord donné ; il se situe volontairement dans un cadre usuel ; les élèves ont environ 5 minutes pour y répondre. Puis s'instaure un débat qui doit donner une première idée de l'utilisation des mots *nécessaire* et *suffisant*, ce débat pouvant durer un quart d'heure à vingt minutes.

Les exercices 2 et 3 sont alors distribués ; le cadre choisi est plus scientifique. On donne 10 minutes pour y répondre. On analyse ensemble les réponses puis la synthèse est faite pour donner une « correction ».

2 – Compétences requises

- Participer oralement.
- Dialoguer.
- Argumenter.

3 – Objectifs pédagogiques

- Préciser l'utilisation en sciences des concepts de *nécessaire* et de *suffisant*.
- Faire prendre conscience de la relativité des situations dans lesquelles on les utilise.
- Apprendre à définir un cadre précis où une situation dans lesquels on utilisera ces deux concepts.

4 – Texte de l'activité

Exercice n° 1 Liste de phrases du domaine usuel

	VRAI	FAUX	Pas de réponse
Travailler est une *condition nécessaire* pour réussir			
Travailler est une *condition suffisante* pour réussir			
Venir à cheval est une *condition nécessaire* pour venir au lycée			
Venir à cheval est une *condition suffisante* pour venir au lycée			
Avoir un verre est une *condition nécessaire* pour boire			
Avoir un nécessaire de toilette est *suffisant* pour se laver			
Savoir danser est une condition *nécessaire* pour inviter une fille à une boum.			
Etre né en France est *suffisant* pour être français			
Ne pas perdre de temps est une *condition nécessaire* pour en gagner			

Exercice n° 2 Apparition de la vie

Beaucoup de biologistes pensent que « la présence d'eau est *nécessaire* à l'apparition de la vie ». Une sonde spatiale atterrit sur une nouvelle planète.

Que pouvez-vous éventuellement conclure, en vous appuyant sur la conviction des biologistes :

1) Si la sonde décèle une présence de vie ?
2) Si la sonde décèle la présence d'eau sur la planète ?
3) Si on fait la preuve qu'il n'y a jamais eu de vie sur cette planète ?
4) Si on fait la preuve qu'il n'y a jamais eu d'eau sur cette planète ?
5) La présence d'eau est-elle *suffisante* pour que la vie apparaisse ?

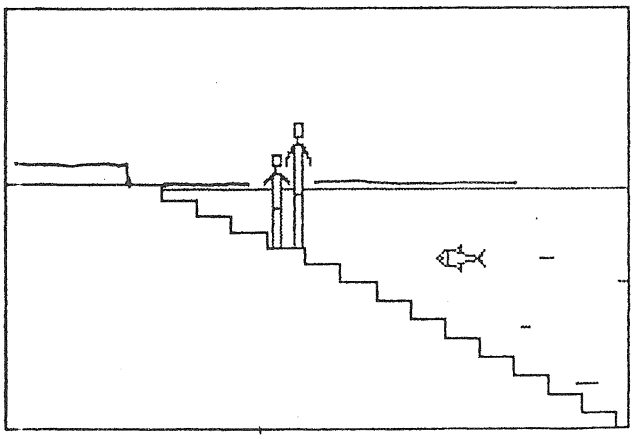
Exercice n° 3 Avoir pied ou ne pas avoir pied

Un père (1m75) est son fils (1m30) se tiennent tous les deux debout sur la même marche de la piscine, chaque marche ayant une hauteur de 20 cm.

Déterminer une condition nécessaire pour que le père ait pied.
Déterminer une condition suffisante pour que le fils ait pied.

On considère les quatre éventualités suivantes :

Le père a pied.
Le père n'a pas pied.
Le fils a pied.
Le fils n'a pas pied.



A l'aide de ces éventualités et d'elles seulement, écrire deux phrases vraies en faisant intervenir les périphrases : « il faut que », « il suffit que ».

5 - Commentaires

Exercice n° 1 Voici quelques réactions d'élèves de première S :

- « *Travailler est une condition nécessaire pour réussir* » fait la presque unanimité des élèves. Se pose la question sur ce que veut dire « réussir ». Ils estiment en majorité que ce n'est pas une condition suffisante. Dans d'autres séries que la première S aurait-on les mêmes réponses, connaissant le rôle des mathématiques dans cette série ?

- « *Venir à cheval est une condition nécessaire* » la grande majorité répond FAUX.

- « ... *est une condition suffisante* » la grande majorité répond VRAI. Cela est aussi l'occasion de quelques plaisanteries : où attache-t-on les chevaux ?...
« *Avoir un verre est une condition nécessaire pour boire* » la majorité met FAUX car on peut boire à la bouteille.

Question en aparté : à quoi sert de fabriquer des verres ?
Réponses données : - pour lutter contre le chômage ;
- pour la moutarde ;
- pour l'hygiène, le « savoir vivre ».

- « *Avoir un nécessaire de toilette est suffisant...* » : les avis sont partagés dans un premier temps ; le FAUX l'emporte après avoir souligner qu'il faut aussi de l'eau (une condition n'est pas *suffisante* quand d'autres conditions sont *nécessaires*). C'est aussi la première fois que l'on relie les mots *nécessaire* et *suffisant* à l'expression « il faut ». La question a été reposée en remplaçant *suffisant* par *nécessaire* ; la discussion a porté sur des choix pour l'hygiène.

- « *Savoir danser est une condition nécessaire...* » trois filles répondent VRAI, le reste FAUX.

- « *Etre né en France est suffisant pour être français* » est un sujet d'actualité, il pose les problèmes de la loi, de l'esprit de la Constitution, de ce qui est débattu en ce moment à l'Assemblée ; une majorité des élèves ont mis VRAI. Et dans d'autres pays, qu'en est-il ?

« *Ne pas perdre de temps est une condition nécessaire pour en gagner* » une majorité met VRAI, puis s'interroge pendant le débat sur la signification de gagner du temps, d'en perdre et sur la notion de temps.

Lorsque l'on fait un premier bilan de ce débat, plus le cadre utilisé est concret ou précis, plus les réponses sont claires. Cependant, il peut être difficile de juger la compréhension des concepts de *nécessaire* et *suffisant* quand le cadre choisi est complexe : problèmes de la nationalité pour une société, notion de travail par rapport à son éducation, savoir danser par rapport à ses choix personnels.

Nous avons donc choisi, pour affiner cette compréhension, un cadre plus scientifique avec deux exercices.

L'exercice n°2, dont la situation de départ est précise : c'est la position des biologistes concernant l'apparition de la vie, elle est exprimée sous la forme d'une condition *nécessaire*, les questions posées soulignent le problème de la compréhension et de l'utilisation de celle-ci.

L'exercice n°3 où on introduit une certaine relativité dans la situation proposée : le problème « d'avoir pied » : ici, les élèves doivent construire des *conditions nécessaires* ou *suffisantes*.

Exercice n° 2

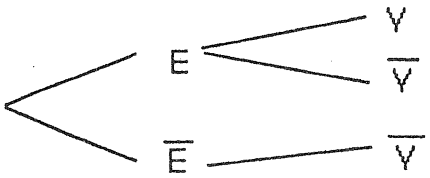
La première question ne pose pas de problème : les élèves répondent qu'il y a de l'eau. A la question n°2, les trois quarts répondent qu'il y a peut-être de la vie, le reste pense qu'il y a présence de vie ou qu'il y aura apparition de la vie. Pour la question n°3, un quart en conclut qu'il y a peut-être de l'eau, un autre quart, qu'il n'y a peut-être pas d'eau et la moitié qu'il n'y a jamais eu d'eau. Pour la question n°4, l'ensemble répond qu'il n'y a jamais eu de vie.

Enfin, à la question n°5, la majorité répond non. Le cadre étant plus défini que dans les questions du premier exercice car plus scientifique, les réponses sont donc plus nettes.

La question posant le plus de problème est la troisième, elle utilise la négation de l'apparition de la vie ; c'est l'occasion de formaliser à l'aide d'un arbre les situations possibles.

Avec E pour la présence d'eau, $\overline{E}$ pour l'absence d'eau.
V pour l'apparition de la vie, $\overline{V}$ pour la non-apparition de la vie.

La pensée des biologistes peut se résumer alors par l'arbre suivant :



Cet arbre permet de revenir sur les différentes questions, notamment la troisième, et conduit les élèves à trouver les réponses correctes.

Exercice n° 3

Première question
La réponse la plus donnée est que le père se trouve à moins de neuf marches, en supposant que 1m60 suffit pour qu'il respire. Quelques-uns proposent que le fils ait pied.

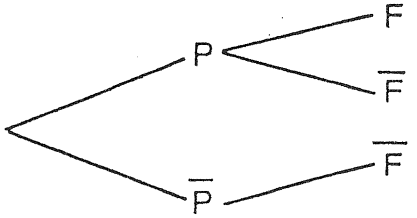
Deuxième question
La réponse majoritaire est qu'il suffit que le fils reste sur la deuxième marche.

Troisième question
La phrase la plus proposée est qu'il faut que le père ait pied pour que le fils ait pied.

Dans cet exercice, les élèves se sont demandés la signification d'avoir pied ; une fois le contrat défini, il y a moins d'hésitation.

Des élèves ont proposé de faire un nouvel arbre pour vérifier les réponses, le premier arbre les ayant aidés.

P : le père a pied, $\overline{P}$: le père n'a pas pied,
F : le fils a pied, $\overline{F}$: le fils n'a pas pied.



Conclusion

Lorsque le cadre est bien défini, comme dans la situation des biologistes, les réponses sont correctes. Cependant la question n°3 « Si on fait la preuve qu'il n'y a jamais eu de vie sur cette planète ? » a posé problème : pour le biologiste, l'eau précède la vie alors que pour le mathématicien, le sens de l'implication est « vie implique eau ». La relation de précession des biologistes ne va pas dans le même sens que la relation d'implication des mathématiciens. Même dans un cadre plus précis où les données sont chiffrées, la description en langage courant de la situation peut entraîner des dysfonctionnements comme dans la situation « avoir pied ou ne pas avoir pied ».

La construction d'un arbre permettant de définir les éventualités éclaircit les notions de *nécessaire* et *suffisant*. Cependant, il reste à les construire dans un cadre mathématique.

III – CONSTRUCTION DES DEUX CONCEPTS

Pour cette partie, nous nous sommes situés dans un cadre mathématique : c'est le cadre dans lequel ces deux concepts vont servir aux élèves. Mais, bien sûr, leur maîtrise est nécessaire dans bien d'autres situations.

1 – Fiche technique

Niveau : Première S et Terminales.

Thème : Les concepts de *condition nécessaire*, de *condition suffisante* et de *condition nécessaire et suffisante* en mathématiques.

Durée : De l'activité : 20 à 30 minutes. De la correction : 1 heure.

2 – Compétences et connaissances requises

- Participer oralement, dialoguer, argumenter.
- Définition du cercle, du disque.
- Comparaison de distances et leur traduction.
- Notions d'ensemble, de réunion et d'intersection d'ensembles.

3 – Objectifs pédagogiques

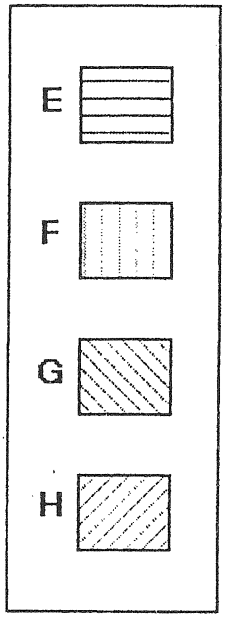
- Définir les concepts de *condition nécessaire* et *condition suffisante* chez les élèves et les comparer à celui de *condition nécessaire et suffisante*.
- Donner d'autres formulations de ces mêmes concepts.

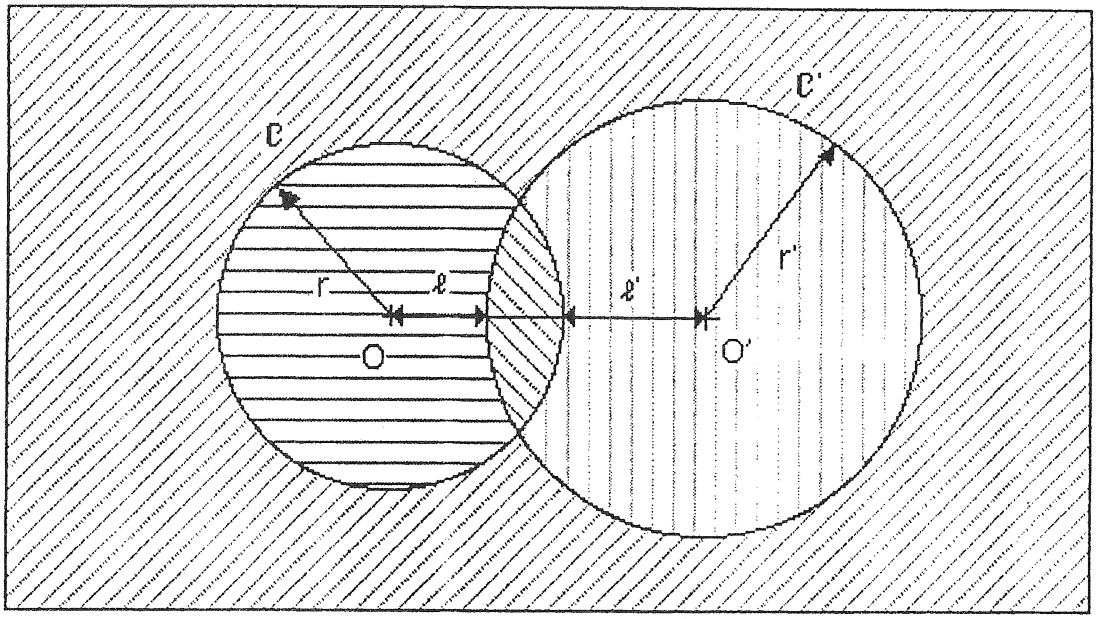
4 - Activité

Nous donnons deux versions légèrement différentes de l'activité. La version n°1 s'est révélé être un peu plus difficile que la version n°2 pour les élèves. On peut également faire travailler les élèves avec une autre figure où le cercle (C) est intérieur au cercle (C') ce qui donne trois régions et des questions moins difficiles.

Les dessins peuvent être refaits au tableau et coloriés, ce qui les rend plus explicites.

5 – Activité – Version n°1





C est un cercle de centre O et de rayon r et C' un cercle de centre O' et de rayon r' avec r' > r. Ces deux cercles sont sécants et partagent ainsi le plan en quatre zones notées E, F, G et H qui contiennent leur frontière.

On pose $\ell = OO' - r'$ et $\ell' = OO' - r$.

Soit M un point du plan, on pose $d = OM$ et $d' = O'M$.

En utilisant des comparaisons de distances utilisant d, r, r', ℓ, ℓ' ou OO', compléter le tableau suivant (on pourra utiliser plusieurs inégalités par case) :

	X = E	X = G	X = F ∪ G ∪ E	X = H
Une condition suffisante pour que M appartienne à X est	1			
Une condition nécessaire pour que M appartienne à X est	2			
Une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à X est	3			

Répondre aux questions suivantes :

(4) Donner une autre condition suffisante pour que M appartienne à E.

(5) Donner une condition nécessaire distincte de la condition précédente pour que M appartienne à E.

(6) Pouvez-vous reformuler, sans utiliser les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante », vos trois phrases des cases 1, 2 et 3 du tableau précédent ?

6 - Commentaires

Cette activité a été expérimentée, parfois après l'activité décrite au paragraphe 2, parfois seule. Elle a été moins bien réussie dans ce second cas.

Pour l'ensemble E :

(5) la *condition suffisante* est bien réussie, la comparaison la plus fréquente est celle des distances d et ℓ.

- la *condition nécessaire* est moins bien réussie ; elle apparaît aux élèves plus dure que la *condition suffisante*. La plus donnée est OM < r.

- la *condition nécessaire et suffisante* est quant à elle rarement réussie. L'erreur la plus fréquente est de considérer la *condition nécessaire et suffisante* comme la conjonction de la *condition nécessaire* et de la *condition suffisante* trouvées précédemment : $d < r$ et $d < \ell$ par exemple. Certains élèves, après l'avoir écrit, remarquent que c'est FAUX et tentent de se corriger.

Pour l'ensemble G :

La réussite s'inverse : la *condition nécessaire* est mieux réussie que *la condition suffisante*. En effet, une inégalité suffit pour donner une *condition nécessaire* alors qu'il en faut deux pour la *condition suffisante*, celles trouvées étant souvent celles qui correspondent à la *condition nécessaire et suffisante*. Comme pour E, certains élèves prennent la conjonction de leur *condition nécessaire* et de leur *condition suffisante* pour obtenir une *condition nécessaire et suffisante* : si cela ne pose pas de problème quand ils choisissent $d < r$ et $d' < r'$ puis $d \leq r$ et la conjonction des deux, cela le devient pour $d' = d$ et $d < r$ puis $d > \ell$.

Pour l'ensemble $F \cup G \cup E$ (hommage à J.S. Bach) :

On retrouve les mêmes remarques : ici une *condition suffisante* est plus facile à trouver qu'une *condition nécessaire*. Des essais faux mais intéressants dénotent que le sens de la *condition nécessaire* est compris, par exemple : $d < r + r'$; $OM < 2r'$... Les élèves éprouvent de la difficulté comme pour G, pour trouver une *condition nécessaire et suffisante*.

Pour l'ensemble H :

Une *condition suffisante* est plus difficile à trouver qu'une *condition nécessaire*. La réussite est cependant meilleure que pour les ensembles G et $F \cup G \cup E$. Il en est de même pour la *condition nécessaire et suffisante*.

Quelques remarques plus générales :

D'abord, il est frappant que les élèves utilisent plus facilement la conjonction de deux inégalités que la disjonction, ce qui s'explique peut-être par l'absence du *ou* et la fréquence du *et* dans les énoncés de théorèmes. Le « *et* » de *condition nécessaire et suffisante* induit parfois ce comportement.

Dans cette activité, l'une des difficultés des élèves est d'obtenir une *condition nécessaire et suffisante*. On peut leur proposer comme étape intermédiaire la dernière ligne du tableau sous forme de QCM.

Par exemple : une *condition nécessaire et suffisante* pour que M appartienne à E est :

❑ $d \leq r$ et $d \leq \ell'$ ❑ $d \leq r$ et $d' \geq r'$ ❑ $d \leq r$ ou $d' \geq r'$ ❑ $d' \geq r'$ et $d \leq \ell$

De cette façon, les élèves doivent comprendre ce qu'est une *condition nécessaire et suffisante* mais n'ont pas à chercher un énoncé d'une telle condition.

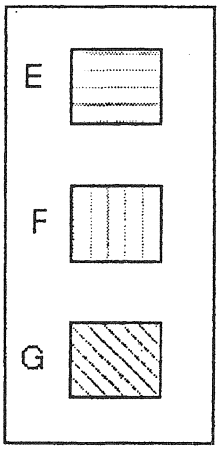
Les réponses aux questions qui suivent le tableau montrent bien que dans l'ensemble les élèves ont compris ce qu'est une *condition nécessaire* et ce qu'est une *condition suffisante*.

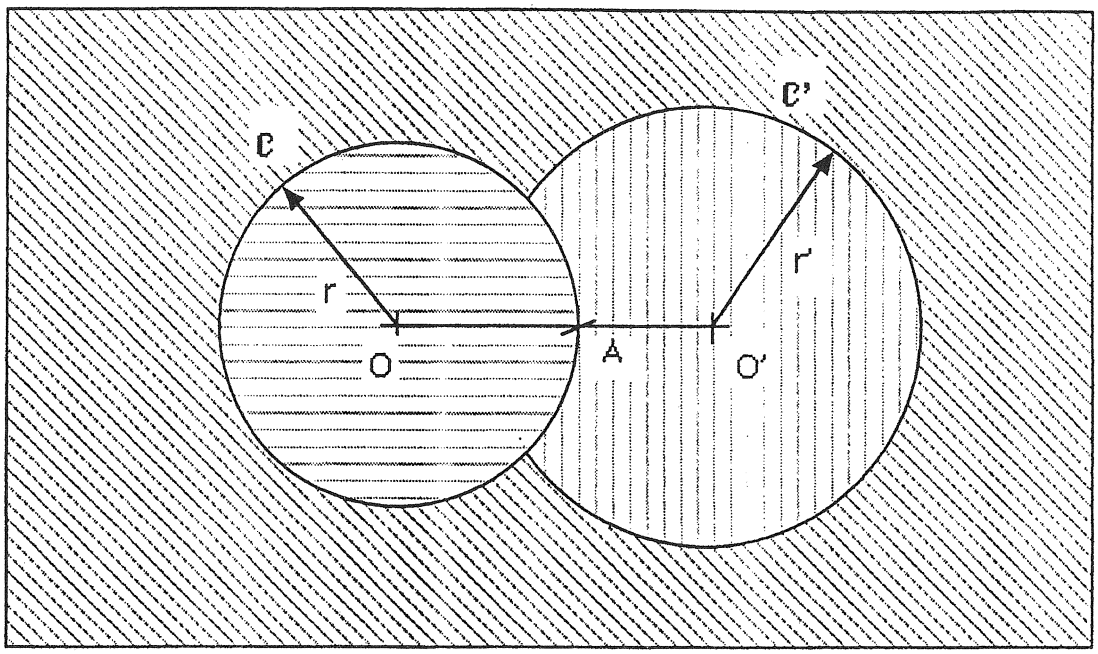
Reste donc posé le problème de savoir construire une *condition nécessaire et suffisante*.

Faut-il ajouter une *condition suffisante* à une *condition nécessaire* pour en construire une ? Cela est dangereux, voir pour ceci l'exemple de l'ensemble E.

Avant d'aborder ce problème avec les élèves, par l'intermédiaire de la recherche d'un ensemble de points, nous avons voulu d'abord vérifier la compréhension de *condition nécessaire* et de *condition suffisante*.

6 – Activité – Version n°2





C est un cercle de centre O et de rayon r et C' un cercle de centre O' et de rayon r' avec r' > r. Ces deux cercles sont sécants et partagent ainsi le plan en trois zones notées E, F et G qui contiennent leurs frontières.

A est le point d'intersection de C avec [OO'], on pose $\ell = O'A = OO' - r$.

Soit M un point du plan, on pose $d = OM$ et $d' = O'M$.

En utilisant des comparaisons de distances utilisant d, r, r', ℓ, ou OO', compléter le tableau suivant (on pourra utiliser plusieurs inégalités par case) :

	X = E	X = F	X = E ∪ F	X = H
Une condition suffisante pour que M appartienne à X est que	1			
Une condition nécessaire pour que M appartienne à X est que	2			
Une condition nécessaire et suffisante pour que M appartienne à X est que	3			

Répondre aux questions suivantes :

1) Donner une autre condition suffisante pour que M appartienne à E.

2) Donner une condition nécessaire distincte de la condition précédente pour que M appartienne à E.

3) Pouvez-vous reformuler, sans utiliser les expressions « condition nécessaire » et « condition suffisante », vos trois phrases des cases 1, 2 et 3 du tableau précédent ?

IV – TEST DE CONTROLE

Une fois la synthèse faite, nous évaluons la compréhension à l'aide du test suivant.

1 - Test de contrôle

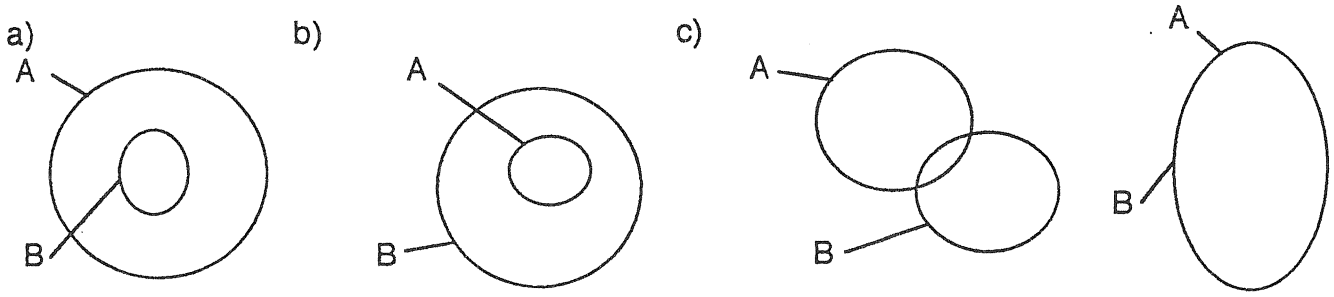
1) Traduire la proposition : « d < ℓ donc M ∈ E » en complétant les phrases suivantes :

Pour que ..... il suffit que .....
Une *condition suffisante* pour que ..... est que .....

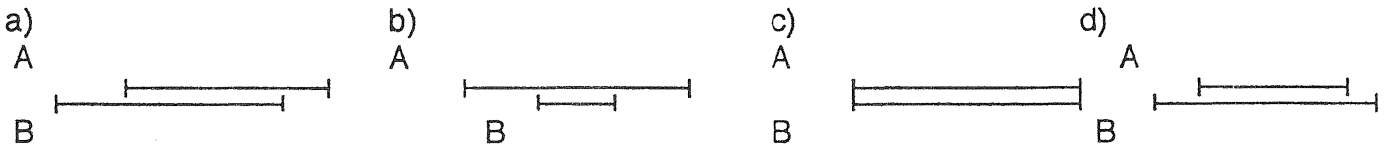
2) Traduire la proposition : « Si M ∈ E alors d < r » en complétant les phrases suivantes :

Pour que ..... il faut que .....
Une *condition nécessaire* pour que ..... est que .....

3) Quel(s) dessin(s) illustre(nt) la proposition suivante :
« M ∈ A est une *condition nécessaire* pour que M ∈ B » ?



4) A et B sont deux segments d'une même droite. Quel(s) dessin(s) illustre(nt) la proposition suivante : « M ∈ A est une *condition suffisante* pour que M ∈ B » ?



5) Soit la proposition suivante : « Si M n'appartient pas à E alors d n'est pas inférieur à r ». Ecrire une phrase ayant le même sens, sans utiliser de négation.

6) Déterminer une *condition nécessaire* mais pas suffisante pour qu'un point soit le milieu d'un segment.

7) Déterminer une *condition suffisante* mais pas nécessaire pour que trois points A, B et C soient alignés.

2 - Commentaires

La première question ne pose pas de problème dans l'ensemble. La *condition nécessaire* de la deuxième en pose plus quoiqu'il y ait cohérence entre les réponses aux deux phrases. La compréhension des schémas de l'ensemble A et de l'ensemble B n'est pas immédiate ; une fois expliquée, la troisième question est bien réussie. Le cadre graphique n'augmente donc pas la difficulté. On retrouve cette même remarque pour la quatrième question concernant la *condition suffisante.*

Les dernières questions de cette activité demandent aux élèves de créer leur phrase, situation plus difficile mais enrichissante, les propositions étant variées. Elles permettent à nouveau de préciser les notions de *condition nécessaire et condition suffisante*. On peut donc leur proposer le résumé suivant :

Une propriété P sera une *condition nécessaire* pour la propriété Q si et seulement si quand Q est vraie, P est vraie.

Une propriété P sera une *condition suffisante* pour la propriété Q si et seulement si quand P est vraie, Q est vraie.

V – PROBLEME DE RECHERCHE

Dans cette activité de recherche (suivi d'une rédaction) d'un problème de construction géométrique, les élèves sont en mesure de constater la pertinence puis l'efficience des structures de raisonnement en termes de CN, CS, CNS.

1 – Fiche technique

Niveau : Première S et Terminale S.

Thème : Problème de construction se résolvant (recherche et démonstration) par *condition nécessaire* puis *suffisante.*

Durée : Une heure pour la recherche.
Une heure à une heure et demie pour la rédaction.

Déroulement :

Une première phase de recherche individuelle, puis par petits groupes, avec mise en commun dans le dernier quart d'heure. Une deuxième phase de structuration du questionnement puis des réponses en une démonstration.

2 – Connaissances requises

Condition nécessaire, condition suffisante, condition nécessaire et suffisante : voir activités précédentes. Propriétés des points remarquables du triangle : centre de gravité, centre du cercle circonscrit.

3 – Objectifs pédagogiques

- Apprentissage d'une démarche de recherche dans un problème de construction.
- Passer de la constatation de l'impossibilité de la construction dans certains cas à la recherche de *conditions nécessaires*.
- Validation de la *condition nécessaire* en *condition suffisante* par la construction effective dans ce cas : synthèse.

4 – Texte de l'activité

Au tableau :

« Soient A, G et O trois points distincts donnés dans le plan, construire B et C tel que le triangle ABC ait pour centre de gravité G et pour centre de son cercle circonscrit le point O ».
« Comment faites-vous ? »
« Est-ce toujours possible ? »

Aucune figure n'est donnée aux élèves.

5 – Activité de recherche des élèves

Les élèves sont tout de suite actifs : des figures sont construites comme la figure 1.

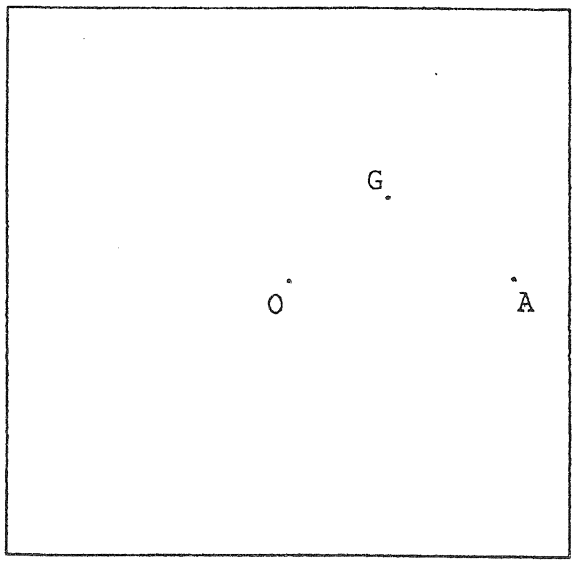


fig 1

Y apparaissent très vite : cercle Γ de centre O et de rayon [OA], puis bientôt le point A' qui est « nécessairement » le milieu de [BC] (voir fig. 2), enfin un peu plus difficilement la perpendiculaire à (OA') en A' (voir fig. 3). Cette droite étant tracée, les élèves n'ont aucun mal à terminer la figure (voir fig. 4).

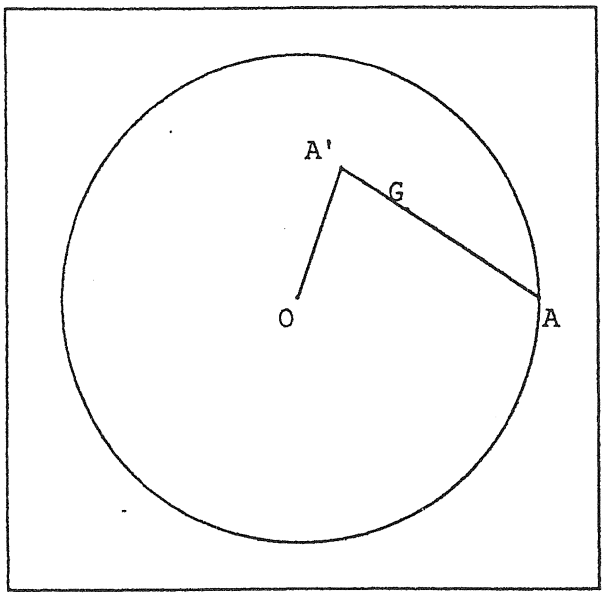


fig 2

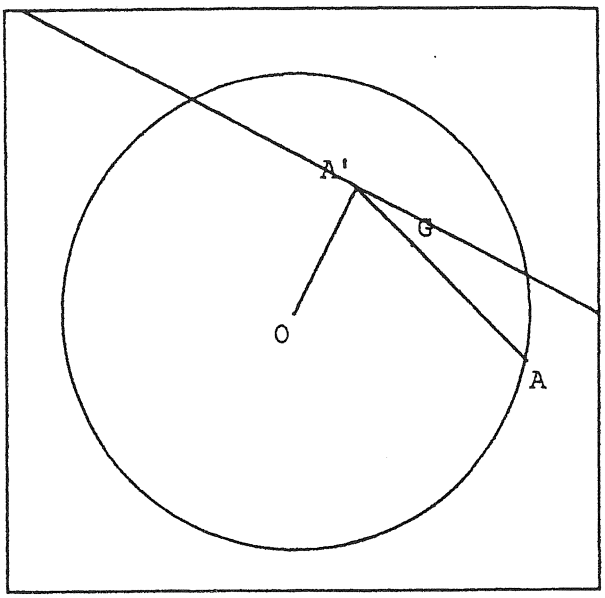


fig 3

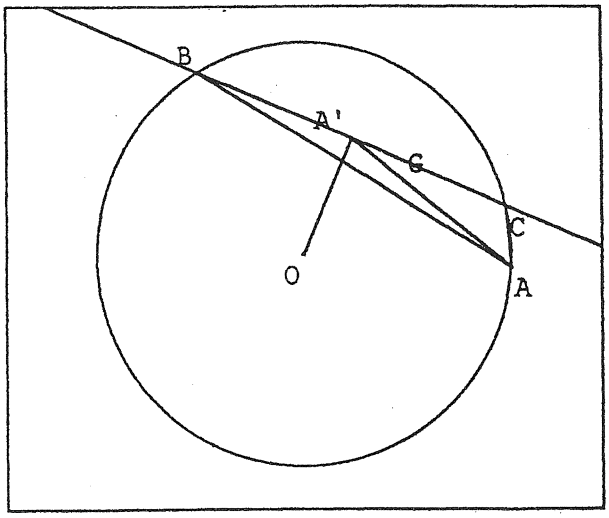


fig 4

Cependant, des élèves n'ont malheureusement pas choisi des positions « favorables » des points A, G et O (voir fig. 5) : leur première recherche tourne court et le professeur est parfois amené à conseiller à quelques élèves de changer la disposition de leurs points afin qu'elle devienne « favorable » à la construction visée ; ces «échecs » (ils ne sont guère analysés que sous cet angle par certains élèves à ce moment de la recherche) pourront être mis à profit ultérieurement lors de la phase de recherche des conditions nécessaires.

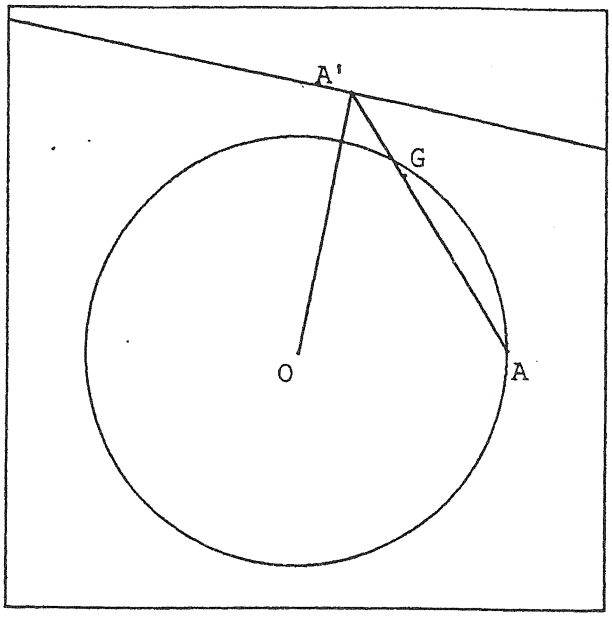


fig 5

La première question posée : « Comment faites-vous ? » semble avoir trouvé une réponse pour les élèves.

La question « Est-ce toujours possible ? » :

Cette recherche comporte plusieurs difficultés :

- l'idée que la condition ne peut et ne doit porter que sur les points donnés : A, G et O ou des objets géométriques qui se construisent à partir d'eux.
- comment étudier cette condition ? A partir de quelle figure ?
- enfin son expression dans un langage simple et efficace.

Les premières études ont cependant permis, pour certains groupes de recherche, de disposer de figures où la construction n'aboutissait pas : celles pour lesquelles le cercle Γ ne coupe pas la perpendiculaire à (OA') en A', d'où l'idée de comparer des distances. Reste enfin à exprimer dans un langage adéquat le résultat trouvé. On a proposé celui-ci : « appelons d la médiatrice de [AA'] ; une condition nécessaire à la construction de B et C est : O est élément du demi-plan ouvert P de bord d et contentant G » (voir fig. 6).

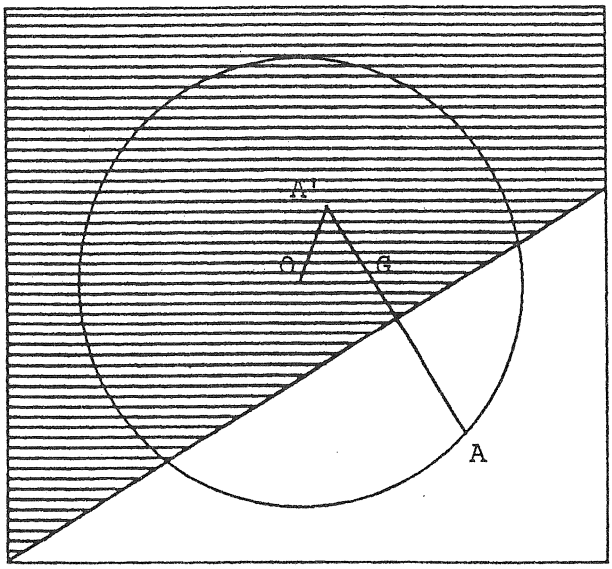


fig 6

La fin de la première séance a été consacrée à la reformulation des deux questions :

- « Est-ce toujours possible ? » se traduit en « Trouvez une condition nécessaire à l'existence des points B et C ».
- « Comment faites-vous ? » est traduit en « Montrer que cette condition est suffisante », ce qui demande une explication plus approfondie pour beaucoup d'élèves par exemple sous la forme : « Montrer que lorsque la condition nécessaire trouvée précédemment est satisfaite alors on peut construire les points B et C ».

6 – Rédaction d'une démonstration

Cette démonstration consiste à trouver une *condition nécessaire* à la construction, puis à montrer que cette condition est suffisante.

Traduction en terme de « si ... alors ... » de la condition nécessaire :

« Si le triangle ABC a pour centre de gravité G et pour centre de son cercle circonscrit O, alors O est élément de P ».

Démonstration ce cette propriété.
Traduction en terme de « si ... alors .. ; » de la condition suffisante :

« Si O est élément de P alors il existe deux points B et C tels que O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et G le centre de gravité de ce triangle ABC ».

La (tentative de) démonstration de cette propriété réserve aux élèves quelques surprises : en effet si (OA') est perpendiculaire à (AA') alors le triangle est aplati, cas que l'on exclu (fig. 7). La *condition nécessaire* trouvée (O élément de P) n'est pas *suffisante.* « A-t-on fait une erreur dans la démonstration de la condition nécessaire précédemment ? » est une question que se posent des élèves. C'est une bonne circonstance pour montrer qu'il faut parfois compléter, c'est-à-dire restreindre la généralité d'une *condition nécessaire* pour qu'elle devienne *suffisante* tout en restant *nécessaire*. Un cas particulier devra aussi être envisagé : le cas où O est en A'.

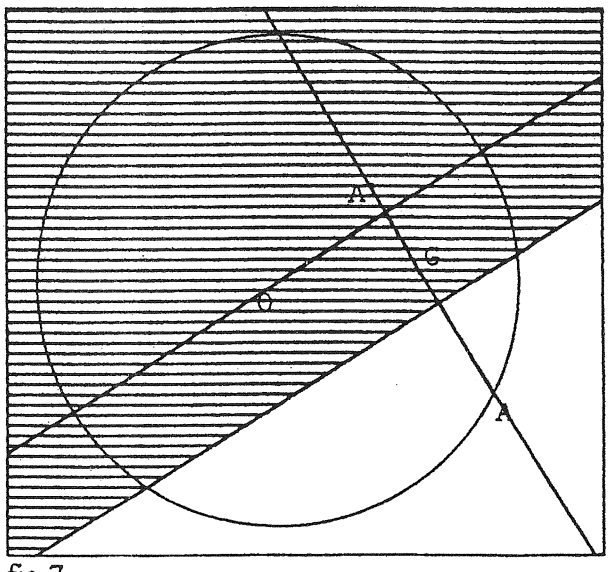


fig 7

7 – Activités et recherches des élèves avec la TI-92 rétroprojetable

La première question a pour but la compréhension de la construction.

- La première étape est de construire le cercle de centre O passant par A et le point I milieu de [BC] (fig. 8).

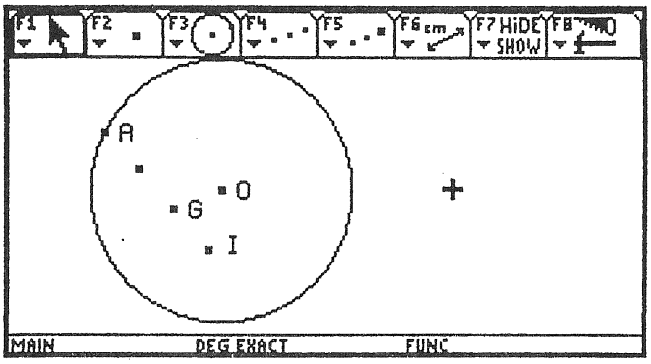


Fig. 8

- La deuxième étape est plus difficile pour certains élèves ; elle consiste à construire [BC]. Les contraintes sont plus nombreuses, B et C devant être sur le cercle, I étant le milieu de [BC]. Un raisonnement est nécessaire. O et I étant à égale distance de B et de C, (OI) est la médiatrice de [BC]. On construit donc la perpendiculaire à (OI) passant par I, elle coupera le cercle en B et C. La deuxième partie de l'activité est alors abordée. Les élèves commence par étudier quelques cas particuliers O = A ; O = I ; O = G.

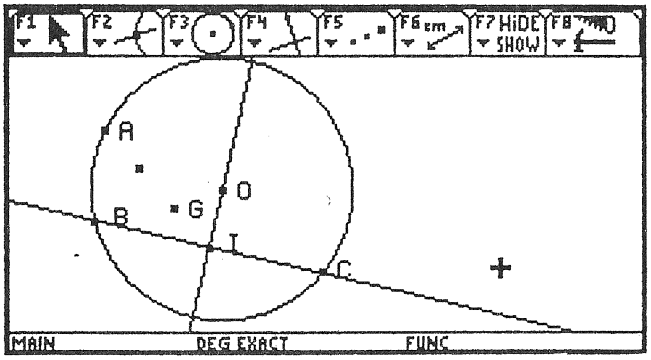


Fig. 9

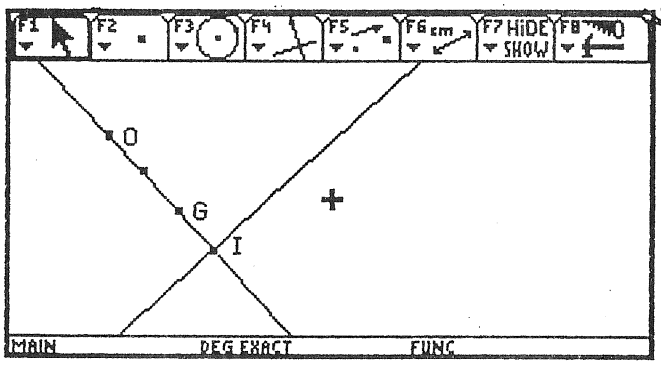


Fig. 10

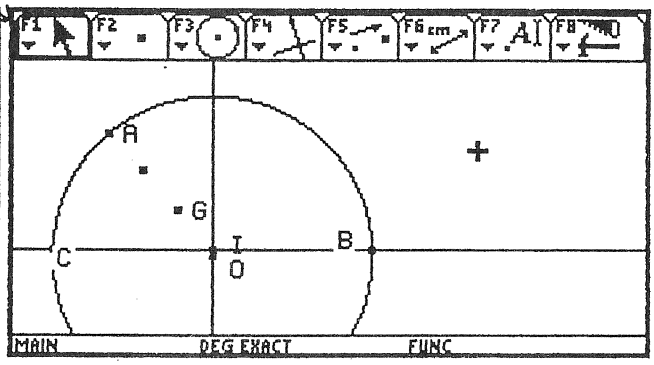


Fig. 11

Les élèves donnent ces deux derniers exemples comme des conditions suffisantes. Ils remarquent que O = A est impossible, que, pour O = I, le triangle est rectangle et se posent la question dans ce cas de l'existence de la droite (OI). En observant l'écran, ils voient que si O est distinct de I, la droite existe et cela leur permet de trouver la justification dans le cas où O est effectivement confondu avec I.

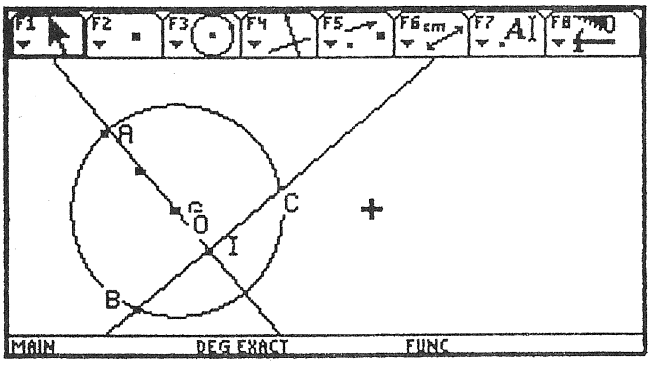


Fig. 12

Dans le cas où O = G, ils observent puis démontrent oralement que le triangle est équilatéral.
La calculatrice permet donc d'expérimenter plus facilement : on essaie plusieurs positions pour le point O (figures 13,14, 5).

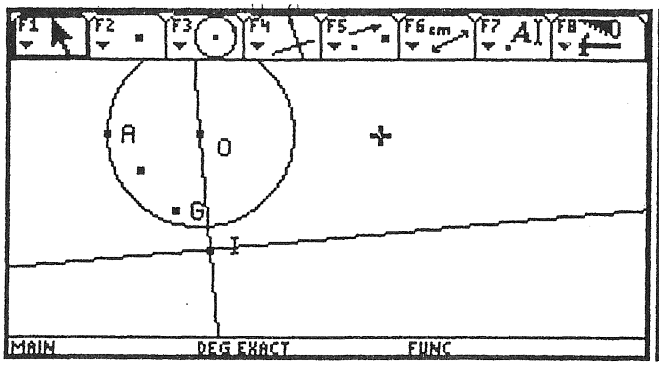


Fig. 13

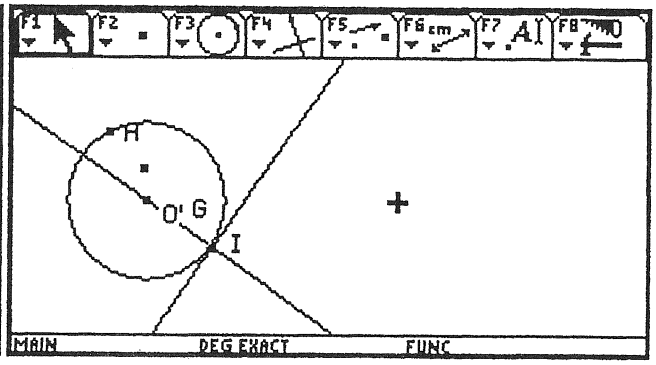
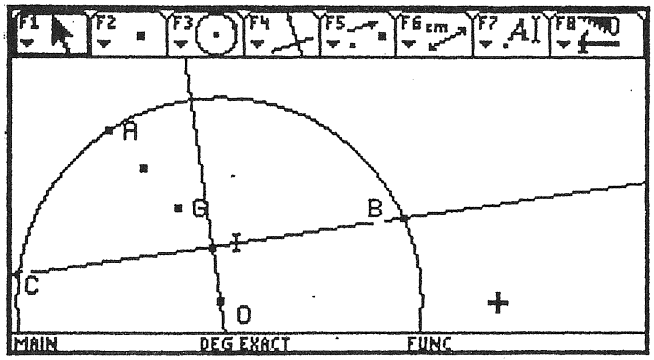


Fig. 14

L'étude de ces cas particuliers leur permet de conjecturer OI < OA. Cette condition est nécessaire pour l'existence de B et C, ils la justifient en remarquant qu'il est nécessaire que le cercle coupe la perpendiculaire en I à (OI). Mais d'une part, comment traduire pour O cette condition OI < OA ? Et, d'autre part, cette condition est-elle suffisante ?

La première question est assez rapidement résolue. Quant à la deuxième, l'expérimentation à l'aide de la calculatrice est à nouveau proposée. Arrive donc le cas où (OI) est perpendiculaire à (AI) (fig. 16).

Fig. 15



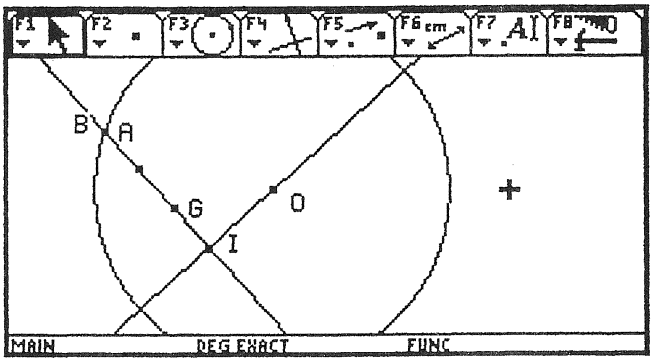


Fig. 16

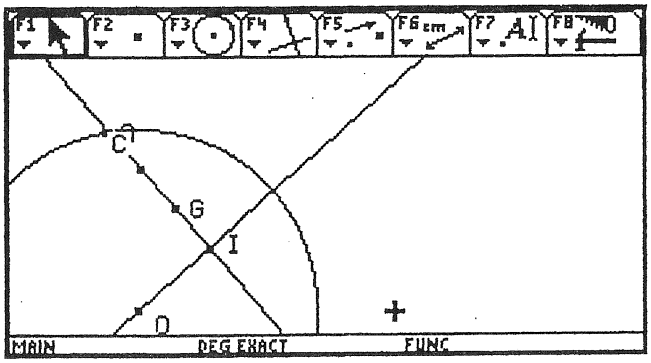


Fig. 17

La séquence se terminant, nous remarquons que dans ce cas B est confondu avec A, ce qui est possible aussi pour C (fig. 17). Il restera donc à faire la synthèse des cas, à les justifier, à rédiger les démonstrations des différents cas.

On observe donc que, pour construire une condition nécessaire et suffisante, les élèves ont d'abord considéré des cas particuliers pour trouver une condition nécessaire suffisamment performante puisqu'ils se sont posés le problème de savoir si cette condition est suffisante.

VI – EN GUISE DE CONCLUSION

Nous sommes convaincus qu'un apprentissage des structures logiques est nécessaire et que c'est un travail de longue haleine.

Au collège, les concepts sont introduits ou construits à l'aide d'exemples. Ils sont ensuite conjecturés. Il est nécessaire d'en faire une démonstration pour pouvoir construire le sens du « si ... alors... ».

Au lycée, nous pensons aussi qu'il est important de créer un « obstacle » pour commencer l'apprentissage des structures logiques :

- c'est le rôle de la case AUTRE dans le premier chapitre.
- c'est le rôle de l'inégalité dans le chapitre implication équivalence.
- c'est le rôle du lieu des points O dans le chapitre condition nécessaire et suffisante.
- ce sera le rôle de $\leq$ pour le ou (voir annexe).

C'est dans le franchissement de cet obstacle qu'il y aura un véritable apprentissage de la structure logique associée.

ANNEXE N°1

Etude de *Et/Ou*

I – PRESENTATION

1 – Fiche technique

Niveau : Seconde – Première.

Durée : Une heure.

2 – Connaissances nécessaires

Aucune.

3 – Objectifs pédagogiques

Distinguer le « *et* » du « *ou* ».
Le bon usage du « *et* » du « *ou* ».
Préciser le sens du « *et* » du « *ou* ».
Traiter certaines erreurs.

II – OU TROUVE-T-ON LE « *OU* » ET LE « *ET* » ?

Le « *et/ou* » ne se rencontre pas aussi souvent que le « *si/alors* » ou du moins n'est pas aussi visible dans un énoncé mathématique. Cependant son rôle et sa bonne compréhension sont indispensables dans de nombreux domaines :

Equations.
Inéquations.
Réunion, intersection.
Probabilités.

Le travail sur des problèmes d'intersection permet un apprentissage du « *et* » et est assez bien compris d'emblée par les élèves.

Par contre le « *ou* » pose davantage de problèmes.

Dans la vie courante, le « *ou* » est une alternative entre deux choix s'excluant mutuellement.

En mathématiques, « A ou B » est une alternative où A et B ne s'excluent pas nécessairement ($A \cap B$ n'est pas forcément vide).

Le « *ou* » est utilisé souvent lors d'étude de signes de produits et lors de résolution d'inéquations.

Nous avons élaboré un test pour faire prendre conscience aux élèves de l'erreur fondamentale couramment répandue : $a \cdot b > 0 \Leftrightarrow (a > 0 \ \textit{ou} \ b > 0)$

On trouve encore des problèmes avec le « *ou* » dans les deux situations suivantes :

Supérieur ou égal :

Beaucoup d'élèves ont des difficultés à comprendre le sens du « *ou* » dans ≥.

Solutions d'une équation :

$(x - 1)(x - 2) = 0$ si et seulement si $x = 1$ *ou* $x = 2$

Les solutions de l'équation $(x - 1)(x - 2) = 0$ sont $x = 1$ *et* $x = 2$

III - TEST

1 – Du bon usage du « et » et du « ou »

On sait que $(x - 2)(x - 5) > 0$. Que signifie cette affirmation ?

Quatre élèves ont répondu de manière différente à cette question.

Julien : ..... $x - 2 > 0$ *et* $x - 5 > 0$
Anaïs : ..... $x - 2 > 0$ *ou* $x - 5 > 0$
Valentin : ..... $x - 2 < 0$ *et* $x - 5 < 0$
Carole : ..... $x - 2 < 0$ *ou* $x - 5 < 0$

1) Exprimer chacune des réponses à l'aide d'intervalles puis les critiquer.

2) Donner votre réponse par la méthode de votre choix.

3) L'exercice est noté sur 5 points. Comment noteriez-vous ces quatre élèves ?

4) Mauricette a trouvé la bonne réponse à l'aide d'inégalités. Quelle est cette réponse ?

2 – Restitution du « *et* » et du « *ou* »

On considère l'inéquation $(x - y)(x + y + 1) > 0$.

Transformer cette inéquation en utilisant les mots « *et* » et « *ou* ».

ANNEXE N°2

Raisonnement par barres

Tout ce qui a été établi au-dessus d'une barre peut-être utilisé pour faire une déduction, qu'on écrit sous la barre avec, en face de la barre, la justification de la déduction, si elle n'est pas triviale. Nous ne détaillons pas plus la présentation de ce type de raisonnements.

Exemple 1

Soit ABC un triangle rectangle en A, O le milieu de [BC], M un point de la droite (AC) distinct de C et I le milieu de [BM].

Montrer que la droite (OI) est la médiatrice du segment [AB].

Pour écrire une démonstration de ce résultat présentée sous la forme de raisonnement par barres, appelons T le théorème affirmant que le centre du cercle circonscrit d'un triangle rectangle est le milieu de l'hypoténuse de ce triangle, autrement dit, affirmant que le milieu de l'hypoténuse est équidistant des trois sommets du triangle. On peut alors écrire le raisonnement de la façon suivante, la partie à droite étant nécessaire pour montrer qu'il faut éviter le cas particulier M = C.

	ABC rectangle en A, O milieu de [BC]	ABM rectangle en A, I milieu de [BM]	
T appliquée à ABC	T appliqué à ABM		
OA = OB = OC	IA = IB = IM		M distinct de C
OA = OB	IA = IB		I distinct de O
O sur la médiatrice de [AB]	I sur la médiatrice de [AB]		O et I définissent une droite

La droite (OI) est médiatrice de [AB]

Exemple 2

Déterminer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2 + 1}{3x^2 + 2}$

si $x \neq 0$ $\dfrac{x^2+1}{3x^2+2} = \dfrac{1+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right) = 1$ $\lim\limits_{x\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{x^2}\right) = 3$

Limite d'un quotient

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}}\right) = \frac{1}{3}$$

D'après la première ligne

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2 + 2} = \frac{1}{3}$$

Exemple 3

Résolution du système linéaire

$2x + y = 6$ (1)
$3x - y + 3z = 5$ (2)
$2x + 5y - 3z = 4$ (3)

$2x + y = 6$ (1), $3x - y + 3z = 5$ (2) $2x + 5y - 3z = 4$ (3)

(4) = (2) + (3)

(4) $5x + 4y = 9$

(5) = 5 (1) – 2 (4)

$-3y = 12$

$y = -4$

par (4)

$x = 5$

par (2)

$z = \frac{-14}{3}$

Sous cette forme, il faut vérifier que les solutions trouvées sont solutions du système initial car on n'a pas procédé par équivalence. Pour procéder par équivalence, il faudrait écrire à chaque fois les trois équations comme dans la méthode du pivot : (1) (2) (3) puis (1) (2) (4) puis (1) (2) (5), puis le résultat.

Exemple 4

L'activité n°1 du chapitre III pose problème pour le raisonnement par barre comme elle a posé problème pour le raisonnement ordinaire. Ce qui est sous une barre n'est qu'une conséquence de ce qui est au-dessus et ne lui est pas forcément équivalent.

La première écriture du raisonnement :

$\sqrt{1+x} \leq 1 - x$

$1 + x \leq (1 - x)^2$

$1 + x \leq 1 - 2x + x^2$

$x^2 - 3x \geq 0$

$x(x - 3) \geq 0$

$x \geq 0$, $x - 3 \geq 0$	$x \leq 0$, $x - 3 \leq 0$
$x \geq 3$	$x \leq 0$

montre que x doit être ≥ 3 ou bien ≤ 0. Mais cette condition n'est pas équivalente à la condition de départ. Pour obtenir l'ensemble des solutions de l'inéquation, il faut écrire, en omettant les étapes de calculs :

$$\sqrt{1+x} \leq 1-x$$

$$1+x \leq (1-x)^2 \ , \ 1+x \geq 0 \ , \ 1-x \geq 0$$

$$x(x-3) \geq 0 \ , \ x \geq -1 \ , \ x \leq 1$$

$x \geq 0 \ , x-3 \geq 0 \ , x \geq -1 \ , x \leq 1$	$x \leq 0 \ , x-3 \leq 0 \ , x \geq -1 \ , x \leq 1$
contradiction	$-1 \leq x \leq 0$

et on peut vérifier le résultat avec le raisonnement :

$$-1 \leq x \leq 0$$

$$x \leq 0 \ , \ x-3 \leq 0 \ , \ 1+x \geq 0 \ , \ 1-x \geq 0$$

$$x(x-3) \geq 0 \ , \ 1+x \geq 0 \ , \ 1-x \geq 0$$

$$1+x \leq (1-x)^2 \ , \ 1+x \geq 0 \ , \ 1-x \geq 0$$

$$\sqrt{1+x} \leq 1-x$$

Ce n'est ni plus simple, ni plus difficile que les raisonnements du chapitre 3. Si les passages d'une ligne à l'autre sont faciles, la démarche n'est, par contre, pas mise en valeur et demande des explications.

Bibliographie

Les livres cités sont disponibles à la bibliothèque de l'IREM de Rennes.

Georges Glaeser — Mathématiques pour l'élève-professeur, Hermann, 1973

Georges Glaeser — Une introduction à la didactique expérimentale des mathématiques, La pensée sauvage, 1999

Jean Houdebine — La démonstration. Ecrire des mathématiques au collège et au lycée. Hachette, 1998. Avec I. Giorgiutti, D. Hilt, M.A. Juhel, J. Julo, G. Mouraud.

Repères – IREM

N° 1 — Démontrer ou ne pas démontrer voilà, la question.

N° 8 — Le thème est : Activités.

N° 12 — F. Bonafé
Les narrations de recherche.

R. Duval et M.A. Egret
Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif.

N° 18 — C. Chrétien et D. Gaud
Interdisciplinarité mathématiques et philosophie.
Un exemple : le raisonnement par récurrence.

N° 19 — M. Billy, D. Moutier, N. Pol et M. Talfer
Entre situation didactique ou situation a-didactique : regard de l'élève ou regard du technicien ?

N° 22 — R. Duvert
La notion de contre-exemple au collège.

N° 29 — H. Lombardi
Le raisonnement par l'absurde.

N° 30 — Narrations de recherche.

Enfin, nous aimerions éditer :

Dagman Morched « La cuisine libanaise » car l'apprentissage des structures logiques s'est doublé d'un apprentissage de la cuisine libanaise. Merci, Morched, c'était délicieux !

CHEZ MORCHED

RESTAURANT LIBANAIS

Menu

Apéritif.
Vouvray de Touraine

Mta'ball.
(Purée d'aubergines.)

Hhommos.
(Purée de pois chiche.)

Taboulé .
(Semoule + Oignons + Sel + Poivre + Persil + Salade + Tomates + Huile d'olives)

Salada.
(Tomates + Oignons.)

Concombres à la crême.

Kebbé au four.
(1 couche de viande hachée avec semoule +farce (viande hachée + pignons de pin) + 1 couche de ...)

Laban.
(Yaourt + huile d'olives + ail + sel + poivre.)

Kafta.
(Viande ...)

Gombos à la sauce tomate.
(Fruit de forme pyramidale d'une plante exotique à fleurs jaunes.)

Desserts au choix :
Gateau aux noix.
Clafoutis.
...

Vins :
Chenas 93.
Volnay 89.
St Emilion La Rose Côte Rol 86.

Café.

Imprimé et édité
par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Deuxième trimestre 2000
N° de publication : 00/04

I.R.E.M. DE RENNES - Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu - Bâtiment 32 B
35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 26 34
Fax : 02 99 28 16 38
Site WEB : http://www.univ-rennes1.fr/irem

Commande :
Tél : 02 99 28 26 08
e.mail : Daniele.Quentin@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : ***"APPRENTISSAGE DES STRUCTURES LOGIQUES"***

I.R.E.M. : RENNES

AUTEUR : **Groupe :**
"APPRENTISSAGE DES STRUCTURES LOGIQUES"

DATE : MAI 2000

NIVEAU : Classe de Secondes, Premières et Terminales

PUBLIC CONCERNE : **Professeurs de lycées**

MOTS-CLES :

- Logique
- Implication
- Condition nécessaire
- Condition suffisante
- Equivalence

RESUME :

La logique des raisonnements mathématiques s'apprend peu à peu à travers les raisonnements exposés dans les cours, les raisonnements mis en forme dans les exercices et les corrections de devoirs. Ce document propose quelques activités spécifiques qui peuvent aider les élèves à mettre en place quelques structures logiques élémentaires.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX T.T.C.	TIRAGE
21 × 29,7	80	~~45,00 F~~ 8 Euros	250 Ex.

I.S.B.N. 2-85728-052-1