UNIVERSITE DE RENNES 1

IREM RENNES

Préparer plutôt que remédier

Répondre aux besoins de tous

JUILLET 1999

PREPARER PLUTÔT

QUE REMEDIER

Répondre aux besoins de tous

IREM DE RENNES JUILLET 1999

Malgré les soins apportés à la réalisation de ce document, il est possible que vous trouviez quelques erreurs (fautes de frappe, une ou plusieurs pages blanches). Si tel est le cas, écrivez à l'IREM en indiquant le numéro de ces pages, afin que nous puissions les remplacer.

ISBN 2-85-728-047-5

Ont participé à la rédaction de ce document :

COQUIL Patrice
Collège Louis Guilloux - PLEMET

GOURLAOUEN Philippe
Collège des Livaudières – LOUDEAC

HOUDEBINE Jean
IREM – Université de RENNES 1

MESGOUEZ Christine
Collège des Livaudières - LOUDEAC

THOMAS Jean-Michel
Collège Saint Exupéry - VANNES

THORAVAL Jean-Yves
Collège Cousteau - SENE

Cette recherche a été menée avec des moyens de l'IREM et de la DAFI.

La mise en page a été assurée par Danièle QUENTIN.
La reprographie par Françoise LE BESCOND.

La couverture a été réalisée par Jacques GRENNEPOIX.

Les illustrations précédant chaque chapitre ont été réalisées par :

Fabien RAULIC
René CALVE
et des élèves du Collège des Livaudières de LOUDEAC.

SOMMAIRE

INTRODUCTION

VERS UNE PEDAGOGIE DIFFERENCIEE

La rénovation des collèges a pour objectif un meilleur traitement de l'hétérogénéité des élèves. L'idée que les élèves n'aient pas tous le même enseignement commence à être admise et par les élèves, et par les parents, en témoigne la mise en place de nombreux dispositifs tels que : groupes de niveaux, remédiation, soutien, consolidation, parcours pédagogiques diversifiés ...

PEDAGOGIE DIFFERENCIEE : UN PARTI PRIS DIDACTIQUE

Cette idée de pédagogie différenciée est maintenant ancienne. Elle fut d'abord le plus souvent abordée en termes de modification de la pratique d'enseignement : c'est-à-dire par la description et la mise en place de nouveaux dispositifs et pratiques pédagogiques (formation d'ateliers, de groupes de niveaux ou de besoins, ...). Elle fut ensuite développée davantage en termes didactiques : c'est-à-dire en prenant beaucoup plus en compte la spécificité de chacun des contenus enseignés et les problèmes spécifiques liés à l'apprentissage.

Notre ambition est de nous inscrire plutôt dans cette deuxième perspective. L'essentiel de notre travail nous semble être une analyse approfondie des difficultés des élèves pour les contenus mathématiques que nous avons choisis et la conception d'une ingénierie didactique adaptée.

ACTIVITES PREPARATOIRES PLUTOT QUE REMEDIATION

Notre approche et l'organisation pédagogique qui en découle s'appuient sur un constat. Dès que les difficultés des élèves sont profondes, la recherche a mis en évidence l'inefficacité de ce qu'il est convenu d'appeler « la remédiation ». Cette démarche consiste, après avoir constaté un échec important dans un domaine, à travailler avec les élèves concernés pour essayer de surmonter cet échec. Elle intervient souvent après le contrôle sur la leçon abordée. Deux écueils majeurs nous semblent donc inévitables : le manque de motivation de l'élève qui n'aura pas, la plupart du temps, la possibilité « de se rattraper au niveau de la note » et le sentiment de « redite » à partir d'une situation d'échec.

En conséquence, la base de notre recherche repose sur la conviction de l'efficacité d'une stratégie d'enseignement basée sur l'idée d'activités préparatoires. Plutôt que de tenter de réparer un échec constaté à la suite d'un certain enseignement (le plus souvent sans succès), il nous semble préférable de préparer les élèves par des activités adaptées de manière à créer de meilleures garanties de réussite.

REPONDRE AUX BESOINS DE TOUS

Deux idées fondamentales ont donc conduit notre projet :

- d'une part, concevoir les activités préparatoires à partir de la résolution de vrais problèmes afin de fonder solidement chez l'élève les nouvelles notions abordées ;
- d'autre part, gérer de manière pertinente l'hétérogénéité de manière à mieux préparer les élèves qui ont le plus de difficultés tout en proposant aux autres (les meilleurs) des activités différentes qui entretiennent leur motivation.

Le fil conducteur de notre travail est de tenter de répondre aux aspirations et aux besoins de tous les élèves à partir de parcours diversifiés, en s'appuyant sur une pédagogie différenciée.

UN DISPOSITIF ORIGINAL
« Préparer plutôt que remédier »

Afin de respecter notre objectif principal, à savoir répondre aux besoins de tous les élèves (ceux qui éprouvent des difficultés mais aussi les autres qui n'ont pas de difficultés particulières), nous proposons de mettre en place un dispositif pédagogique qui permette de mieux prendre en compte les besoins des élèves et donc de mieux appréhender l'hétérogénéité de la classe. Nous avons décidé de nous inspirer d'une expérience qui avait été proposée il y a quelques années dans le document « *Pédagogie différenciée* » de l'IREM de Rennes.

LE PRINCIPE DU DISPOSITIF PEDAGOGIQUE ADOPTE

Après quelques semaines, l'expérience montre que les enseignants sont capables, sans test vraiment spécifique, de repérer les élèves qui risquent d'avoir le plus de difficultés quand on abordera les thèmes que nous avons retenus (les nombres relatifs et l'initiation au calcul littéral) et donc de dissocier la classe en deux groupes de besoin. Le dispositif que nous proposons est différent des modules tels qu'ils sont conçus actuellement car tous les élèves n'abordent pas le même sujet. Ce dispositif induit une progression pédagogique qui se déroule en deux étapes.

1 - La séparation de la classe en deux groupes

Dans un premier temps, nous proposons de diviser la classe en deux groupes :

- le premier groupe est constitué des élèves en difficulté ainsi repérés ;
- le deuxième groupe est constitué des élèves qui ne devraient pas a priori connaître de problèmes sur ces notions.

Les deux groupes devant être encadrés par un professeur, notre dispositif nécessite donc soit l'alignement de deux classes pendant le thème abordé, soit l'intervention ponctuelle d'un autre professeur, de manière à disposer de deux enseignants. Dans le cas où un alignement de deux classes peut être réalisé, chacun des deux groupes sera formé d'élèves issus des deux classes.

Pendant quelques séances on propose un parcours diversifié aux deux groupes. On prépare les élèves du premier groupe à aborder la notion nouvelle en leur proposant des problèmes adaptés. Ce qui est recherché ici, c'est de déclencher une véritable activité de résolution de problème ; les problèmes choisis ne sont pas des petits exercices faciles mais plutôt des activités nécessitant l'investissement des élèves et au cours desquelles une aide peut leur être apportée. Dans le même temps, on rassemble dans le deuxième groupe les élèves qui n'ont pas de difficultés ; on leur propose des travaux qu'ils pourront réaliser de manière autonome et qui n'ont pas de rapport avec la notion abordée dans l'autre groupe. On peut s'arranger pour que le travail effectué avec ce deuxième groupe ait une retombée lorsque la classe entière sera reconstituée.

A l'intérieur des deux groupes, nous proposons de former des petits groupes de 3 ou 4 élèves afin de favoriser les échanges et l'investissement de chaque élève. Un groupe de 3 élèves nous paraît être la meilleure formule car elle permet une meilleure participation de chaque élément. Nous conseillons de ne pas dépasser 4 élèves pour éviter qu'un leader ne se détache ou que certains éléments du groupe soient rejetés ou encore que d'autres se reposent totalement sur le travail du groupe.

Afin d'être plus efficace, il nous semble utile de préciser d'emblée quelques modalités de fonctionnement :

- la formation des groupes peut se faire de manière libre et spontanée ;
- demander aux élèves de toujours commencer par une recherche individuelle ;
- leur demander ensuite de confronter leurs idées puis d'effectuer une mise en commun pour rédiger le compte rendu du groupe ;
- l'intervention du professeur n'est nécessaire qu'en cas de dysfonctionnement ou de blocage.

2 - La reconstitution de la classe entière

Dans un deuxième temps, à l'issue de cette période préparatoire, nous proposons la reconstitution de la classe entière et plusieurs séances communes à tous les élèves ont alors pour objet l'enseignement du thème choisi.

Ces séances communes s'inscrivent bien sûr dans la continuité des activités préparatoires abordées avec les élèves en difficulté mais permettent également aux élèves de l'autre groupe d'aborder le thème choisi sans réelles difficultés. Les règles essentielles et la synthèse du cours peuvent alors être traitées de manière plus traditionnelle et des exercices d'application sont proposés.

LES EXPERIENCES REALISEES

Dans la pratique, il faut chaque année, dans chaque établissement, négocier les modalités d'application.

Voici les deux exemples d'expérimentations que nous avons réalisées :

1 - L'alignement de deux classes

(expérimenté au collège des Livaudières à Loudéac)

Afin de pouvoir former deux groupes qui soient encadrés par un professeur et qui puissent fonctionner simultanément, nous avons obtenu auprès de notre administration que quelques classes de 5ème soient alignées deux par deux sur 3 des 4 heures hebdomadaires. Cela a été le cas d'une part, des 5ème A et des 5ème B et d'autre part, des 5ème C et des 5ème F. Avec deux classes, nous avons pu alors former les deux groupes. Un professeur encadrait le groupe des élèves en difficulté pendant que l'autre professeur encadrait celui des meilleurs. Lors de la reconstitution des classes entières, chaque professeur reprenait la classe qui lui était habituellement attribuée et poursuivait le travail en s'inscrivant dans la continuité de ce qui avait été abordé avec les élèves en difficulté.

Quelques observations :

- le mélange des deux classes provoque une stimulation des élèves ;
- les élèves se sentent en confiance et sécurisés car ils remarquent que ce n'est pas une expérience marginale mais un projet qui a été mûri par plusieurs professeurs ;
- les alignements peuvent être exploités à d'autres moments (devoirs communs, soutien, modules, ...) ;
- le professeur, qui encadre le groupe des « bons », ne suit pas les activités préparatoires et peut éprouver plus de difficultés d'adaptation lors du regroupement de toute la classe. Une concertation très suivie avec l'autre collègue est donc nécessaire.

2 - La participation ponctuelle d'un deuxième intervenant

(expérimentée aux collège Saint-Exupéry de Vannes, collège Louis Guilloux de Plémet et collège Cousteau de Séné).

Nous avons adopté la solution de l'intervention ponctuelle d'une tierce personne. La participation d'un autre professeur de Mathématiques est bien sûr la solution idéale. Dans le cas où l'emploi du temps d'un autre professeur volontaire ne coïncidait pas avec celui des élèves, nous pouvions également avoir le concours d'un surveillant de formation scientifique, toujours demandeur de ce genre d'expérience, ou d'un aide éducateur. Bien que cette situation soit moins satisfaisante, elle nous a paru réalisable car nous avons estimé que confier de « bons élèves » avec de « bonnes activités » à un encadrement « moins performant » représentait peu de risques. Le rôle de l'intervenant occasionnel était alors d'encadrer le groupe « des bons élèves » de la classe (10 à 15) dans une autre salle, c'est-à-dire de les aider à planifier leur travail dans la séance et éventuellement de leur apporter, au bout d'un certain temps, les aides que nous avions prévues. Cela nécessite donc une concertation importante avec le professeur de la classe. Cette formule reste néanmoins d'une grande souplesse.

L'alignement de deux classes est bien sûr l'aménagement le plus performant afin d'optimiser notre dispositif pédagogique.

LES AVANTAGES D'UN TEL DISPOSITIF :

Ils sont a priori :

- de permettre aux élèves en difficulté sur un sujet central, de travailler assez longtemps pour avoir des chances de réussir ;
- de créer une dynamique dans laquelle, à un certain moment, ceux qui sont habituellement considérés comme en difficultés, et qui par conséquent n'osent pas s'exprimer, sont d'une certaine manière à égalité avec les meilleurs sur le sujet choisi ;
- de poursuivre avec les meilleurs des objectifs que l'on néglige trop souvent faute de pouvoir mener toute la classe au même rythme (rendre les élèves plus autonomes, améliorer leur capacité à résoudre des problèmes, écrire des textes mathématiques, ...) ;
- de favoriser un travail d'équipe entre les enseignants (ce qui est indispensable lors d'un alignement).

Il nous semble ici fondamental de souligner l'intérêt de ces parcours diversifiés pour chaque groupe ainsi que l'influence qui en résulte sur la motivation des élèves et par là même sur l'investissement dans le travail qu'ils accomplissent.

Au départ la séparation de la classe en deux groupes peut s'avérer quelquefois assez dévalorisante pour les élèves en difficulté et entraîne des remarques du type : « le prof a mis les nuls ensemble » ou « les intellos vont faire autre chose ». On peut donc facilement concevoir qu'il puisse y avoir, du côté des élèves, une petite réticence à accepter de se considérer comme « mauvais » et la toute première séance peut être parfois plus difficile à gérer. C'est pour cela qu'il faut absolument présenter aux élèves les objectifs à atteindre afin que cette situation soit mieux acceptée.

♦ **Des groupes équilibrés :**

Il nous semble également essentiel de veiller à bien équilibrer quantitativement les deux groupes afin d'éviter la marginalisation de l'un ou de l'autre. En effet, chacun des groupes étant d'une taille suffisante, il sera plus facile pour un élève d'accepter d'appartenir à l'un d'eux. Mettre trop peu d'élèves dans le groupe des faibles risque de créer un sentiment d'exclusion. Au contraire, si l'on a trop d'élèves dans ce groupe, il sera difficile pour l'enseignant d'apporter une aide suffisante et efficace à chacun. Il est important de se rappeler que si l'on met, avec son accord, un élève plutôt considéré comme faible dans le groupe des forts, celui–ci va acquérir un autre statut et son comportement va s'en trouver modifié : au lieu de subir, il fera comme ceux de son groupe et développera une véritable activité de résolution de problème.

L'expérience prouve qu'il est plus aisé de montrer une certaine souplesse. Quand le professeur demande si quelques élèves souhaitent changer de groupe, peu en font la demande. Quelques rares élèves en difficulté qui se trouvent dévalorisés expriment le souhait de rejoindre les bons et au contraire quelques bons élèves qui craignent de ne pas être à la hauteur ou de manquer « le début » vont choisir la solution de prudence et demander à faire partie du groupe des élèves en difficulté. Dans le cas où le professeur a initialement proposé un partage équilibré, l'acceptation de ces changements ne pose aucun problème.

Au moment du regroupement, la gestion de la classe se trouve facilitée : des groupes mixtes se constituent aisément et les interventions sont bien réparties. Enfin un équilibre quantitatif des deux groupes permet, dans le système de classes en parallèle, d'avoir pour chaque enseignant un nombre d'élèves proche du nombre habituel (ce qui permet en particulier un travail dans des salles de dimensions usuelles).

♦ **Une adhésion rapide des élèves :**

Malgré les petits problèmes qu'engendre la séparation de la classe en deux groupes, l'expérience montre qu'à partir de la deuxième séance, on constate une évolution très rapide du comportement des élèves. L'intérêt des activités, l'impression de maîtriser des choses pas tout à fait évidentes, le plaisir de travailler dans de meilleures conditions, créent une excellente atmosphère de travail.

Dans le cas de l'alignement de deux classes, la présence, dans les deux groupes, d'élèves d'une autre classe a toujours été un facteur positif (il suffit de remarquer à ce sujet que spontanément se forment souvent des groupes d'élèves issus des deux classes).

Dans tous les cas, le fait de travailler par groupes de 3 ou 4 élèves s'est avéré plus motivant et plus enrichissant pour tous les élèves, que ce soit dans le groupe des élèves en difficulté ou dans celui des « bons ». D'abord, il nous semble incontestable que cette forme de travail par groupes, qui permet aux élèves en difficulté d'échanger et de s'entraider, est plus efficace. En effet, à l'intérieur d'un groupe, les explications fournies par un élève peuvent contribuer davantage à la levée des blocages que le langage du professeur qui leur paraît souvent trop hermétique et technique. Ensuite, avec les meilleurs, cette forme de travail en groupes peut quelquefois s'avérer une réelle découverte. En effet, le fait d'aborder des activités plus difficiles conduit naturellement les « bons » à échanger leurs opinions et, donc, à accéder à un véritable travail de groupe auquel ils ne sont pas souvent habitués faute d'en voir la nécessité, car les activités habituellement traitées ne leur posent pas de problèmes particuliers.

Un autre phénomène est constaté lors de la reconstitution de la classe entière. En dehors du fait que certains élèves habituellement en difficulté n'hésitent pas à intervenir et à prendre la parole, nous avons noté l'attention très soutenue des élèves provenant du groupe des « bons ». Ces derniers qui reprennent la suite du travail déjà commencé avec le groupe des élèves en difficulté ont l'impression d'avoir « manqué quelque chose » et redoublent de vigilance.

La première séance commune où toute la classe est reconstituée est souvent l'occasion de scènes inhabituelles qui permettent la mise en valeur de certains élèves en difficulté face à des élèves plus à l'aise mais qui découvrent le sujet. D'une manière générale, les élèves « a priori en difficulté » s'investissent davantage et interviennent oralement plus souvent que les autres. Cela contribue à les valoriser, casse les habitudes et modifie quelque peu la structure relationnelle de la classe. Ils sont également plus attentifs à ce que peuvent dire les bons car ces derniers quand ils interviennent s'expriment suffisamment clairement tout en adoptant un langage qui leur paraît plus accessible que celui du professeur. La pratique de la correction/débat qui est ici naturelle est très performante, car elle met en valeur les productions des élèves. De cette façon ne sont institutionnalisées que des connaissances comprises par le plus grand nombre. Cette pratique permet aussi à l'enseignant de mieux appréhender les difficultés et les progrès des élèves.

En définitive, il paraît incontestable que les élèves en difficulté ont le sentiment qu'on s'intéresse à eux et les « bons » ne sont pas pour autant délaissés.

LES OBSTACLES A LA MISE EN PLACE D'UN TEL DISPOSITIF

♦ Des obstacles structurels :

Ils tiennent essentiellement à la rigidité de la structure qui nécessite soit l'alignement de deux classes soit l'intervention d'un professeur supplémentaire.

Il en découle quelques contraintes :

- l'administration doit permettre et favoriser la mise en place de ce type de dispositif : dans le cas d'un alignement de deux classes, il n'est pas nécessaire qu'il soit effectif sur toute l'année scolaire et il suffit d'un aménagement ponctuel pendant les périodes où les thèmes choisis sont traités ;

- le travail en commun des deux professeurs concernés suppose une coordination accrue et une entente parfaite sur la progression pédagogique lors des thèmes qui sont abordés d'autant plus que chaque professeur ne peut suivre qu'un seul groupe pendant les activités préparatoires ;

- des heures de concertation entre les professeurs devront être prévues.

Quel que soit le dispositif choisi (alignement de deux classes, intervention d'un deuxième professeur, ...), il est très difficile d'obtenir les moyens, même s'ils sont modestes et de le faire fonctionner dans de bonnes conditions. Bénéficier de quelques heures supplémentaires, récupérer une salle supplémentaire afin de dédoubler une classe, prévoir des alignements d'horaires s'avèrent souvent ardus et ces initiatives ne trouvent pas toujours un écho positif auprès de l'administration. Les chefs d'établissement en effet sont sollicités par les initiatives du ministère et préfèrent parfois des actions plus spectaculaires qui sont plus faciles à mettre en valeur auprès des médias. Il nous semble pourtant que le dispositif que nous proposons est d'un coût faible ; nous pensons pour l'avoir expérimenté qu'il n'est pas si lourd à mettre en place et que les quelques contraintes qu'il engendre peuvent facilement être acceptées au regard du bénéfice qu'en retirent les élèves. C'est donc une raison essentielle pour que chacun dans son établissement se batte afin d'obtenir les moyens nécessaires à sa mise en place. Il faut pour cela impliquer le chef d'établissement et utiliser les médias.

De toute façon, même si les différentes structures proposées ne peuvent être obtenues, les séquences et les fiches de travail que nous exposons dans ce document peuvent sans aucun problème être réalisées dans un cadre traditionnel mais bien sûr leur efficacité est moindre. Si, comme nous l'espérons, les résultats obtenus sont néanmoins significatifs, cela peut encourager l'enseignant à s'engager l'année suivante dans la démarche que nous proposons.

♦ **Des obstacles didactiques :**

L'idée d'activités préparatoires n'est pas une idée simple à mettre en œuvre.

Bien que beaucoup d'enseignants adhèrent à cette idée au niveau des principes, elle est plus difficilement acceptée dans la pratique. L'un des principaux obstacles est la peur de donner aux élèves des idées fausses ou au mieux des idées floues. Comment, en effet, les connaissances des élèves vont-elles pouvoir s'organiser si l'enseignant ne leur apporte pas suffisamment tôt les éléments de cette organisation ? Devant ce danger, il est alors tentant de faire précéder l'activité d'un minimum de cours, mais dans ce cas celle-ci se retrouve complètement dénaturée et son efficacité est gravement altérée.

En réalité, la liberté que donne aux élèves un travail de résolution de problèmes sans intervention préalable du professeur pour décrire les connaissances, permet à l'élève de se construire son propre modèle et l'expérience montre que le travail de la classe permet alors de rejeter efficacement les idées fausses. L'institutionnalisation par l'enseignant est ensuite plus facile à accepter par l'élève, même si elle diffère sensiblement de son propre point de vue.

Un autre obstacle est la mise au point de telles activités. Elles doivent satisfaire plusieurs conditions :

- être ressenties par les élèves comme de véritables problèmes ;
- mettre réellement en question la notion que l'on désire introduire ;
- aider à terme les élèves à surmonter les difficultés qui sont habituellement observées.

Il est difficile de réaliser ces trois objectifs simultanément. Une analyse approfondie des contenus mathématiques que l'on a choisis est d'abord nécessaire. Puis il faut essayer de comprendre l'origine des difficultés des élèves en tenant compte de cette analyse. Enfin, pour arriver à une fiche ou une séquence performante, plusieurs expérimentations conduisant à des modifications sont indispensables.

Quelques principes sous-tendent cette démarche :

- pour que la tâche choisie soit ressentie par les élèves comme un vrai problème, elle ne doit pas comporter de contraintes que les élèves sentiraient comme artificielles ; les questions intermédiaires doivent être évitées, mais les aides apportées doivent conduire la majorité des élèves au succès ;

- des tâches d'écritures sont souvent utiles ; l'objectif n'est pas d'obtenir des textes parfaits ; il est d'obliger les élèves à expliciter certaines démarches plus ou moins implicites, à préciser leur pensée ; les débats deviennent alors plus fructueux car les textes produits peuvent servir de point de départ à la discussion entre des élèves qui ont mieux compris leur propre démarche.

LA PRESENTATION DU DISPOSITIF AUX ELEVES

Pour que ce dispositif soit ressenti positivement par les élèves (et aussi par leurs parents), il nous semble nécessaire qu'il soit clairement décrit au départ.

Par exemple on peut expliquer aux élèves :

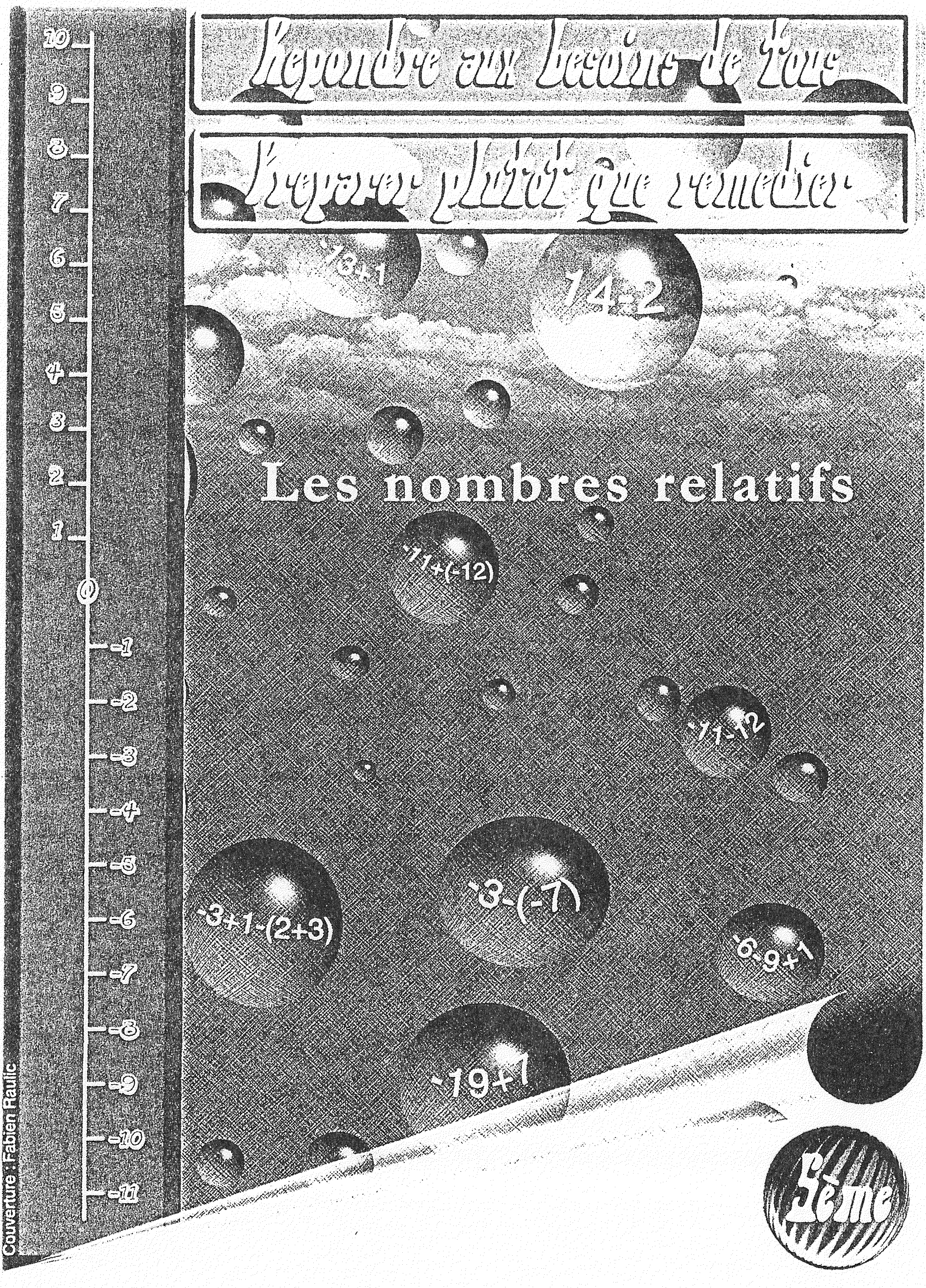
« Lors du prochain cours, nous allons séparer la classe en deux groupes et cela durera 3 ou 4 séances.

Un groupe sera formé par ceux d'entre vous qui ont le plus de difficultés. Avec ce groupe, on préparera la prochaine leçon de manière à ce que vous soyez plus à l'aise pour pouvoir y réussir. Vous pourrez travailler par groupes de 3 ou 4 élèves mais vous devrez rendre un compte-rendu écrit par groupe à la fin de chaque séance.

Un autre groupe sera formé avec le reste de la classe. Pour vous qui n'avez pas de difficultés particulières, on fera un travail différent : par exemple on fera des problèmes inhabituels comme des problèmes de logique et de réflexion, on apprendra à mieux écrire des textes mathématiques. Il faudra que vous appreniez à travailler de façon autonome sans que je sois toujours là pour vous aider car c'est comme cela que vous devrez travailler plus tard.

Quand on aura fini ces 3 ou 4 séances, on remettra toute la classe ensemble et on commencera alors la nouvelle leçon ».

LES NOMBRES RELATIFS



Du point de vue mathématique, les relatifs recouvrent deux idées : d'une part ils permettent de se repérer sur une droite dès que l'on choisit une origine ; d'autre part ce sont des nombres qui donnent du sens à des opérations comme 3 – 8, et donc la possibilité d'effectuer des soustractions dans tous les cas. Ces deux idées sont si différentes que les exemples choisis pour les illustrer auprès des élèves sont distincts :

- pour le repérage sur une droite, les températures, les dates, les étages seront des exemples types, mais ces exemples ne peuvent pas contribuer à donner du sens à l'addition ou à la soustraction ;

- pour aborder ces opérations, le thème choisi sera, le plus souvent, « gains et pertes » ; mais cette fois, dès qu'il y a plus de deux nombres à manipuler, la représentation sur une droite n'est guère efficace.

L'organisation actuelle des programmes est de ce point de vue favorable. Dans un premier temps, en sixième, c'est l'aspect repérage qui est l'objet de l'apprentissage. Pour éviter des confusions ultérieures, il est sans doute préférable de ne pas parler de nombres relatifs à cette occasion : l'introduction de nombres comme – 4 ne le demande pas. Dans un deuxième temps, au début de la cinquième, on aborde l'addition et la soustraction des nombres relatifs. Notre hypothèse est que, pour cela, on ne peut s'appuyer de manière vraiment utile sur le travail fait en classe de sixième concernant le repérage. Dans un troisième temps, sans doute en fin de cinquième, ou au début de la quatrième, les deux points de vue sont rapprochés à l'occasion d'exercices ; on peut en particulier s'appuyer sur la similitude des notations introduites dans les deux cadres.

La séquence dont nous allons parler correspond à l'introduction, au début de la classe de cinquième, de l'addition et la soustraction des nombres relatifs. Nous avons donc cherché des activités qui permettent d'effectuer ces opérations sans imposer de règle préalable, ni même de notation. Ainsi, l'écriture simplifiée apparaît dès l'introduction des opérations. Les notations habituelles ne sont pas les seules possibles, cependant leur sélection se fera dans l'action, par un débat, et non pas de manière imposée.

Deux difficultés principales :

Quelles sont les difficultés principales rencontrées sur ce sujet par les élèves de cinquième ? L'idée d'introduire les nombres relatifs n'en est pas une ; pas plus que l'addition d'un nombre positif et d'un nombre négatif ayant une valeur absolue plus petite. Les deux principaux obstacles semblent être :

- les élèves rechignent à écrire une opération de la forme 5 – 12. Il s'agit sans doute d'un obstacle didactique, c'est-à-dire créé par l'enseignement antérieur. Cette écriture a en effet été considérée comme impossible et sans signification pendant tout le primaire ;

- l'introduction d'opérations du type 4 – (– 12) et la mise en évidence que cela fait 4 + 12 est difficile. On peut penser qu'il s'agit cette fois d'un obstacle épistémologique. Soustraire un nombre négatif n'est jamais réellement nécessaire pour résoudre un problème concret. Ce sont des raisons théoriques qui le justifient : la nécessité d'avoir un ensemble de nombres sur lequel toutes les opérations sont possibles. Il faut donc que, d'une manière ou d'une autre, l'élève comprenne cette nécessité pour qu'il se décide à écrire cette soustraction.

Cette deuxième difficulté est peut-être à l'origine de la préoccupation de beaucoup d'enseignants, le besoin de clarifier dans chaque cas la nature de l'opération associée à telle ou telle situation concrète : est-ce une addition, est-ce une soustraction ? Cependant cela ne nous semble pas pertinent ; par exemple, devant une situation concrète peuvent apparaître les écritures – 5 + 7 et 7 – 5 ; elle sont toutes deux légitimes et correspondent pratiquement à des points de vue semblables. Et pourtant, l'une sera considérée comme une addition et l'autre comme une soustraction. C'est même le constat du fait qu'une soustraction peut se réduire à une addition qui est le principal point d'appui pour surmonter l'obstacle – (–). En fait, la distinction addition-soustraction est essentiellement une préoccupation théorique, et l'objet de la construction des relatifs est justement de la supprimer avec l'introduction de l'idée de somme algébrique.

I - PROGRESSION PEDAGOGIQUE ET ORGANISATION DES SEANCES

Les trois premières séances ne concernent que les élèves en difficulté, et les deux suivantes se font en classe entière. (Chaque séance dure cinquante-cinq minutes). Pendant toutes ces séances, les élèves travaillent en groupes de trois ou quatre.

1 ère séance
- Première activité : « La réglette qui calcule » *(30 minutes)*
- Deuxième activité : « La récréation »

2 ème séance
- Bilan des deux premières activités (débat) *(30 minutes)*
- Troisième activité : « Karim et Benjamin »

3 ème séance
- Corrigé rapide de la troisième activité *(10 minutes)*
- Quatrième activité : « L'argent de poche »

4 ème séance
- Cinquième activité : « Vérifions les comptes » *(30 minutes)*
- Sixième activité : « Des calculs à la pelle »

5 ème séance
- Corrigé de la sixième activité de a) jusqu'à i) *(25 minutes)*
- Ecriture des règles utilisées à partir du corrigé précédent *(15 minutes)*
- Exercices à définir par le professeur.

II - DESCRIPTION DE LA SEQUENCE POUR LES ELEVES EN DIFFICULTE

Préparatifs

S'appuyant sur la représentation des relatifs sur une droite, bien acceptée par les élèves, nous leur avons proposé l'usage d'une réglette à coulisse dans une situation ludique : un jeu de dé bicolore à douze faces. L'intérêt de la coulisse est d'associer opérations et mouvements.

Ne voulant pas leur imposer de notation particulière, seule la partie fixe de la réglette est graduée avec un zéro central (en l'absence de celui-ci, les élèves ont tendance à placer le zéro à l'extrémité gauche, ce qui engendre des difficultés matérielles insurmontables). Dans le même esprit, nous avons introduit les couleurs bleue et rouge pour caractériser les points gagnants et les points perdants.

Au cours d'une séance préalable, on aura distribué la fiche "Confection d'une réglette à coulisse", montré une réglette réalisée et demandé à chacun d'en fabriquer une à la maison. Une autre formule consiste à en faire soi-même une quinzaine que l'on récupérera à la fin de chaque séance et qui pourront servir pour d'autres classes.

L'analyse suivante porte sur 44 groupes d'élèves en difficulté, dont un constitué uniquement de redoublants, provenant de dix classes.

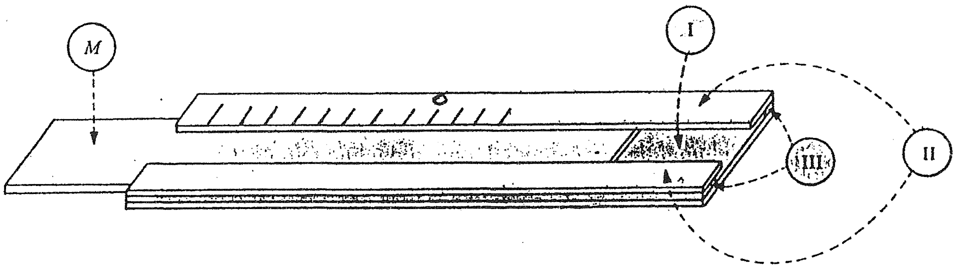
Confection d'une réglette (Bordas – 6è – 1992)

Toutes les dimensions données sont en centimètres.

Découper, dans une feuille de carton épais, un rectangle de 6 × 32 (*I*), un rectangle de 3,8 × 32 (*M*), deux rectangles de 2 x 32 (*II*), quatre rectangles de 1 × 32 (*III*). Réaliser alors la réglette dont un schéma est donné par la figure.

Pour cela coller les rectangles (*III*) sur le rectangle (*I*), en bordure de chaque côté. Coller ensuite les rectangles (*II*) sur les rectangles (*III*) de façon à réaliser un guide dans lequel coulissera le rectangle *M*. La réglette marquée *M* est mobile.

Le rectangle (M) est appelé règle mobile, l'autre partie est appelée règle fixe.



Maintenant, sur la règle fixe, marque un trait tous les centimètres et place le nombre 0 au milieu de la règle fixe.

Première activité : La réglette qui calcule

Objectif : introduction à l'addition des nombres relatifs. (Cette activité peut être abordée par des élèves n'ayant pas encore rencontré les nombres relatifs).

Descriptif : dé à douze faces, rouges (points perdants) ou bleues (points gagnants), et réglette à coulisse. Le choix des nombres respectent trois contraintes :

- commencer par un nombre négatif, c'est-à-dire par une perte, pour déclencher dès les premières opérations une réflexion sur le traitement de ces nombres ;
- choisir des nombres qui, pour toutes les procédures de traitement, soient assez petits pour être représentés sur la réglette ;
- obtenir un résultat final négatif pour que le problème de la comparaison de deux négatifs soit posé.

Déroulement : la mise en route de cette partie de la séquence est celle qui nous semble susciter le plus de difficultés. Plusieurs facteurs interviennent : familiarisation avec la réglette, compréhension du jeu, acclimatation à un mode de travail nouveau. Une fois cette mise en place réalisée, la suite de la séance se déroule très aisément.

Résultats : sur quarante-quatre groupes, trente-deux ont respecté la consigne et utilisé la réglette. Ils ont en général bien associé le zéro central, avec déplacement de l'extrémité de la coulisse (qui reste non graduée). Ils ont ainsi choisi les déplacements qui caractérisent les points gagnants et les points perdants (gauche-droite ou haut-bas). L'emploi de résultats négatifs n'est pas systématique : les réponses sont alors données sous forme de points perdants/gagnants ou rouges/bleus. On remarque toutefois que certains résultats sont donnés sous forme de nombres négatifs, même si les relatifs n'ont pas été employés dans les manipulations. Notons cependant qu'après une bonne manipulation, quelques élèves, pour lire le résultat final sur la réglette, commettent l'erreur de compter en partant de l'extrémité de la règle fixe au lieu de partir du zéro.

Trois groupes (difficulté ou manque de travail) ont eu besoin de plus de temps. Trois autres groupes (dont celui des redoublants, très difficiles à motiver et qui n'ont même pas pensé aux nombres relatifs) n'ont pas réussi cette activité : ce sont les seuls qui n'ont pas su manier la réglette à coulisse. Six groupes ignorent la réglette : certains ajoutent les points perdants puis les points gagnants et calculent la différence ; ils obtiennent en général les bonnes réponses. Les autres calculent pas à pas mais se trompent plus facilement.

Quant aux modes d'emploi écrits par les élèves à propos de l'utilisation de la réglette à coulisse, s'ils manquent de rigueur, ils n'en sont pas moins acceptables. Ils montrent que les élèves en ont compris le fonctionnement. Par exemple : « Quand on perd, on va vers la gauche, et quand on gagne, on va vers la droite ». A noter toutefois qu'un groupe a confondu le mode d'emploi de la réglette et la règle du jeu.

LA REGLETTE QUI CALCULE

A la récréation, Paul et Virginie jouent avec un dé à 12 faces. Certaines faces sont bleues et d'autres sont rouges. Les points marqués sur les faces bleues sont des points gagnants et les points marqués sur les faces rouges sont des points perdants.

Arthur et Chloé qui les regardent jouer, utilisent chacun une réglette à coulisse pour suivre l'évolution du score.

Arthur dit : *« je m'occupe de Paul »* et Chloé lui répond : *« d'accord, je prends Virginie »*.

Paul et Virginie commencent à jouer et jettent chacun une première fois le dé. Paul obtient une face rouge marquée 11 et Virginie une face rouge marquée 12.

Arthur dit : *« c'est Paul qui gagne car il perd moins »*.

Paul et Virginie jettent chacun une deuxième fois le dé. Cette fois Paul obtient une face bleue marquée 8 et Virginie une face bleue marquée 10.

Chloé dit : *« Pour l'instant, c'est Virginie qui gagne car elle a, au total, un point de plus que Paul, ça se voit bien sur les réglettes »*.

Paul et Virginie continuent à jouer et ils jettent en tout chacun dix fois le dé. Les résultats des dix jets sont notés dans les tableaux suivants :

Paul :

couleur	R	B	B	R	R	B	R	R	B	R
point	11	8	6	7	1	5	7	1	10	9

Virginie :

couleur	R	B	B	R	R	B	B	R	B	B
point	12	10	3	7	1	6	2	11	2	3

a) On peut connaître le vainqueur sans faire de calculs en utilisant seulement la réglette à coulisse comme l'ont fait Arthur et Chloé. **Fais comme eux et trouve le vainqueur**.

b) **Rédige maintenant ton propre mode d'emploi de la réglette à coulisse** (tu pourras écrire des nombres sur la règle fixe et sur la coulisse).

LA RECREATION

A la récréation suivante, une nouvelle partie s'organise entre 6 joueurs. Ils lancent chacun 2 fois le dé et obtiennent les résultats suivants :

Daniel :

R	B
11	8

Elodie :

R	B
1	10

Pierre :

B	R
10	7

Julie :

B	R
2	12

Marc :

R	R
7	1

Sophie :

B	B
3	4

1) Trouve le score de chacun, puis établis un classement (tu pourras utiliser la réglette).

2) Peux-tu présenter ces scores sous forme d'opérations ?

Exemples de travaux d'élèves :

Au départ, on met l'extrémité de la coulisse sur le zéro.
Quand on gagne, on va vers la gauche en fonction des points gagné.
Quand on ~~sur sur~~ tombe sur une face bleu. et on repard de la nouvelle position.
Quand on perd, on va vers la droite en fonction des points perdu.
Quand on tombe sur une face Rouge.
Quand on est à gauche. c'est celui qui a le plus de points qui gagne.
et quand on est à droite c'est celui qui est le plus près de
zéro qui gagne.

Paul = - 7 Virginie = -5

Virginie à gagné

Qand c'est bleu on avance, quand c'est rouge on recule. On avance ou on recule à partir du chiffre qui est marqué sur la face du dé. Au départ, on commence par le O.

Conclusion : cette activité fonctionne bien quand les élèves ont réussi à associer mouvement de la coulisse et gain ou perte. Il ne faut donc pas laisser un groupe chercher sans succès pendant plus de vingt minutes, et lui donner des conseils dans ce sens en temps utile.

Deuxième activité : La récréation (toujours dans la même séance)

Objectif : addition de deux nombres relatifs.

Descriptif : dé à douze faces numérotées de 1 à 12 ; deux jets et présentation des résultats sous forme d'opérations. Les nombres sont choisis pour que tous les cas d'addition de deux nombres relatifs se présentent.

Déroulement : la réglette à coulisse a souvent été abandonnée après le calcul des résultats des premiers joueurs. Cependant, elle a parfois servi comme moyen de contrôle en cas de désaccord dans le groupe : cela permet de démontrer à un camarade quel est le bon résultat. Les fiches sont ramassées à la fin de la séance (une par groupe) afin de préparer le débat qui suivra.

Résultats : vingt-six groupes ont trouvé les bons scores et les huit autres n'ont fait qu'une ou deux erreurs : $11 - 8 = -3$; $-1 + 10 = -9$; $7 + 1$ au lieu de $-7 - 1$.

Huit groupes n'ont pas eu le temps de terminer cette activité. Le groupe de redoublants n'a pas su faire. Un groupe soustrait systématiquement les nombres en valeur absolue (le plus grand moins le plus petit) et ne donne donc que des scores positifs. Un autre répond en terme de bleu et rouge.

Les groupes ont présenté leurs opérations sous des formes différentes :

- en ligne avec ou sans parenthèses ;
- en colonne avec ou sans signe d'opération en plus des signes des nombres ;
- avec le signe moins placé parfois après le nombre.

Des écritures fausses accompagnent parfois de bons résultats :

$-7 - -1 = -8$ $\qquad 11 - 8 = -3$

ou $-7 + 1 = -8$ $\qquad 11 - 8 = 3$ donc -3

Exemples de travaux d'élèves :

1) A la réglette.

Elodie - Sophie - Pierre - Daniel - Marc - Julie

+9 +7 +3 -3 -8 -10

2) Oui,

Elodie = 10 - 1 = +9

Shophie = 3 + 4 = +7

Pierre = 10 - 7 = +3

Daniel = 8 - 11 = -3

Marc = 1 + (-7) = -8

Julie = 2 - 12 = -10

ACTIVITÉ N° 2

1) 1ère : Elodie → +9 pts

2ème : Sophie → +7 pts

3ème : Pierre → + 3 pts

4ème : Daniel → − 3 pts

5ème : Marc → − 8 pts

6ème : Julie → − 10 pts

2) Nous pouvons présenter ~~les~~ scores sous formes d'opérati

Daniel	Elodie	Pierre	Julie	Marc	Sophie
8	10	10	2	−1	3
−11	− 1	− 7	−12	+ − 7	+ 4
−3	+9	+3	−10	−8	+7

Conclusion : on constate que les couleurs sont abandonnées et que les signes arrivent spontanément. L'écriture de certaines opérations déstabilise un peu les élèves ; par exemple $2 - 12$ était jusqu'alors considérée comme une opération impossible.

Cette activité est intéressante car elle donne lieu à des écritures différentes. Elle permet aussi des procédures différentes :

- comptage en valeur absolue avant restitution (ou non) du signe ;
- addition des nombres accompagnés de leur signe.

Le débat sur la deuxième activité

Celui-ci se place au début de la deuxième séance. Les différentes opérations produites par les élèves sont rassemblées au tableau ou sur un transparent et servent de base à la discussion. Celle-ci permet quelques mises au point où les bonnes présentations sont finalement acceptées de tous. Toutefois, le débat peut être difficile à amorcer, certains élèves n'étant pas habitués à prendre la parole devant leurs camarades, a fortiori s'ils viennent de classes différentes. Mais il se révèle rapidement fécond : les élèves ont beaucoup de remarques à faire, soit pour valider leurs écritures, soit pour éliminer celles qui leur paraissent trop complexes ou fausses. A ce propos, l'usage de la réglette permet de régler des conflits et de montrer l'équivalence d'écritures différentes (exemple : $-11 + 8 = -3$ *et* $8 - 11$ aussi).

Voici le genre d'opérations posées par les élèves :

Ecriture directe des lancés	$-11 + 8 = -3$	$2 - 12 = -10$
Valeur supérieure placée d'abord	$11 - 8 = -3$	$12 - 2 = -10$
Initialisation avec zéro	$(0 - 11) + 8 = -3$	$(0 + 2) - 12 = -10$
Addition exprimée	$-11 + +8 = -3$	$2 + -12 = -10$
Somme de relatifs	$-11 + (+8) = -3$	$2 + (-12) = -10$
Opération en colonnes	$\begin{array}{r} -11 \\ -\underline{+8} \\ -03 \end{array}$	$\begin{array}{r} 12 \\ -\underline{2} \\ -10 \end{array}$

L'écriture « Initialisation avec zéro » a la cote car elle fait référence à la règle à coulisse : *« Il faut bien savoir d'où l'on part, sinon cela pourrait être 1 – 11, ou 5 – 11, ou autre chose »*. Cependant, en rappelant la priorité des opérations, (0 – 11) + 8 devient –11 + 8.

L'écriture « Valeur supérieure placée d'abord » est tout de suite éliminée, ainsi que l'écriture « Opération en colonnes », puis c'est au tour de l'écriture « Addition exprimée » car inélégante. Sont donc maintenues les écritures « Ecriture directe des lancés » et « Somme de relatifs ».

Finalement, ce débat fonctionne très bien et peut durer assez longtemps (une demi-heure) : veiller à conserver au moins vingt minutes pour l'activité « Karim et Benjamin ».

Troisième activité : Karim et Benjamin (à la suite du débat précédent)

Objectif : somme de grands nombres relatifs.

Descriptif : texte remanié à plusieurs reprises dans un but de clarification et dans l'espoir de voir apparaître la soustraction d'un négatif. Le choix des valeurs beaucoup plus grandes que précédemment a pour but de remplacer l'usage de la réglette par des calculs.

Déroulement : un groupe s'est encore servi de la réglette pour répondre à la première question. Le calcul se fait soit pas à pas, soit en regroupant les points gagnants d'une part et les points perdants de l'autre. Il est à noter que l'on trouve plus d'erreurs avec la première méthode. Là encore, les fiches sont ramassées pour en exploiter les résultats.

Résultats : la première question a été réussie par trente-quatre groupes. A la deuxième question, les scores de Karim et de Benjamin ont été en général bien calculés, mais les signes ne sont pas souvent exprimés. Nombreux sont ceux qui ont écrit 150 – 125 = 25, ou 25 + 125 = 150, ce qui indique qu'ils ont résolu une opération à trou. D'autres ont simplement calculé 150 – 25 = 125. Cela ne les a pas gênés pour annoncer la face 5, alors qu'aucun n'a fait apparaître de scores négatifs. On n'a pas observé de calculs de la forme –150 – (–25) = –125 : donc pas de soustraction de nombres négatifs !

Exemples de travaux d'élèves :

1)

Benjamin	200 +	275 −	50 +	225 −	300 +	+250

Karim	225 −	250 +	175 −	125 −	300 +	+125

Benjmen a gagné la partie.

2)

Benjamin	125 −	25 −	300 +	125 −	175 −

Karim,	275 −	50 +	50 +	25 −	50 +	−150

Oui, Cendy peut retrouver la face obtenue lors de son 1er jet de Benjamin.

Benjamin	8	11	2	9	12	total	Karim	9	10	7	5	12	total
	+200	-75	+25	-250	+25	=+50		-225	+25	-150	-275	+25	=+25

Donne le score de chaque joueur . Qui a gagné la partie ?

Le gagnant est Benjamin=+150 KARin =+25.

2) Le soir, à la sortie de l'école, ils jouent une nouvelle partie en 5 jets . Cindy arrive en cours de partie et manque le 1er jet de Benjamin . Elle note les autres jets :

Benjamin	5?	1	12	5	7	total	Karim	11	2	2	1	2	total
	-125	-25	+275	+150	-25	=-25	-	-275	-225	-175	-200	-150	=-150

A la fin de la partie, Benjamin et Karim s'exclament : « nous sommes ex-aequo »
Cindy peut-elle retrouver quelle face a obtenu Benjamin lors de son 1er jet ?

Benjamin =-25 et KARime =-150 mais comme ils sont ex-aequo 25+125 =-150 pour Benjamin.

-125 dans le tableau est =5 alors le point d'interrogation =25

Benjamin	8	11	2	9	12
	+200	-275	+50	-225	+300

Karim	9	10	7	5	12
	-225	+250	-175	-125	+300

Donne le score de chaque joueur . Qui a gagné la partie ? Benjamin

Benjamin +50 Karin + 25

2) Le soir, à la sortie de l'école, ils jouent une nouvelle partie en 5 jets . Cindy arrive en cours de partie et manque le 1er jet de Benjamin . Elle note les autres jets :

Benjamin	5	1	12	5	7
	-125	-25	+300	-125	-175

Karim	11	2	2	1	2
-	-275	+50	+50	-25	+50

-150

A la fin de la partie, Benjamin et Karim s'exclament : « nous sommes ex-aequo »
Cindy peut-elle retrouver quelle face a obtenu Benjamin lors de son 1er jet ?

1) le gagnant est Benjamin car il a +50 et karim +2

2) le score du 1er jet de Benjamin est: 5

Conclusion : la somme de plusieurs nombres relatifs s'effectue en général correctement. En particulier, le regroupement des nombres positifs d'une part, et des nombres négatifs d'autre part, se fait assez naturellement.

KARIM ET BENJAMIN

Le lendemain, Benjamin arrive à l'école avec un nouveau dé dont les 12 faces sont numérotées de 1 à 12 .

1) A la récréation du matin, Benjamin propose une partie à son camarade Karim. Ils se mettent tous les deux d'accord pour compter les points comme l'indique le tableau :

numéro	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
points gagnés		50		100		150		200		250		300
points perdus	25		75		125		175		225		275	

Par exemple, si le dé tombe sur la face 6, tu gagnes 150 points, si le dé tombe sur la face 9, tu perds 225 points.
Ils jettent chacun 5 fois le dé et obtiennent les résultats suivants :

Benjamin	8	11	2	9	12

Karim	9	10	7	5	12

Donne le score de chaque joueur. Qui a gagné la partie ?

2) Le soir, à la sortie de l'école, ils jouent une nouvelle partie en 5 jets. Cindy arrive en cours de partie et manque le 1er jet de Benjamin. Elle note les autres jets :

Benjamin	?	1	12	5	7

Karim	11	2	2	1	2

A la fin de la partie, Benjamin et Karim s'exclament : « nous sommes ex-aequo »

Cindy peut-elle retrouver quelle face a obtenu Benjamin lors de son 1er jet ?

L'ARGENT DE POCHE

Les 7 enfants de la famille Dépenstrop reçoivent de l'argent de poche tous les mois. Certains ne dépensent pas tout, d'autres dépensent plus qu'ils n'ont reçu grâce aux parents qu'il faudra hélas rembourser plus tard. A la fin de chaque mois, on doit faire les comptes.

Voici le tableau récapitulatif des mois de Mai et de Juin.

	Etat du compte à la fin Mai	Etat du compte à la fin Juin	Variation pendant le mois de Juin
Annabelle	48	12	– 36
Boris	11,4	23,7	12,3
Diane	– 23,7	– 11,4	12,3
Emile	–12	–48	–36
Fabien	–28,50	37,10	65,6
Geneviève	23,7	11,4	–12,3
Hélène	12	–48	–60

1. Diane a remarqué que l'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne.
   Quelle est cette opération ?

2. Pour chacun des 7 enfants, écris l'opération qu'il faut effectuer.

Quatrième activité : L’argent de poche

Objectif : préparation à la soustraction d’un nombre négatif.

Descriptif : le but initial de cette activité était de faire apparaître la soustraction d’un négatif. Malgré de nombreux essais, nous n’avons pas réussi à mettre au point une fiche qui conduise suffisamment d’élèves à proposer cette soustraction. C’est pourquoi nous opérons en deux temps : d’abord l’activité « L’argent de poche » propose une familiarisation avec une situation où elle pourrait être utilisée, puis, dans un second temps, sur la même situation, un scénario, l’activité « Vérifions les comptes », force cette écriture. L’observation ne porte que sur seize groupes provenant de quatre classes.

Déroulement : après un corrigé rapide de l’activité « Karim et Benjamin » à partir des travaux d’élèves, et au bout de quelques minutes de réflexion sur la fiche « L’argent de poche » il est nécessaire d’apporter une explication aux titres des colonnes à partir de l’exemple d’Annabelle.

Résultats : douze groupes ont répondu correctement à la première question, sans préciser obligatoirement les termes de la soustraction ; trois groupes ne répondent pas et un groupe répond qu’il y a des additions et des soustractions.

A la deuxième question, deux groupes sont réticents à écrire 12 – 48 à la première ligne. Les difficultés apparaissent surtout à partir de la troisième ligne. On constate beaucoup d’écritures fausses associées à des résultats exacts.

Un seul groupe écrit et effectue la bonne opération : $-11{,}4 - (-23{,}7) = 12{,}3$
Cinq groupes effectuent la soustraction habituelle : $23{,}7 - 11{,}4 = 12{,}3$
Voici le genre d’écritures fausses constatées :

$-11{,}4 + -23{,}7 = 12{,}3$ $\qquad$ $-23{,}7 - 11{,}4 = 12{,}3$ $\qquad$ $12{,}3 + -11{,}4 = -23{,}7$

Exemples de travaux d’élèves :

2) Annabelle : 12 - 48 = -36
Boris : 23,7 - 11,4 = 12,3
Diane : -11,4 + 23,7 = 12,3
Emile : -48 + 12 = -36
Fabien : 37,10 + 28,5 = 65,6
Geneviève : 11,4 - 23,7 = -12,3
Hélène : -48 - 12 = -80

1) On fait pour toutes les opérations la deuxième colonne moins la première.

1) Pour trouver le résultat de chaque calcul il faut soustraire.
Etat du compte à la fin juin - Etat du compte la fin mai = Variation pendant le mois de juin

2)
Annabelle = 12 - 48 = -36
Boris = 23,7 - 11,4 = 12,3
Diane = -23,7 - 11,4 = 12,3
Emile = 48 - 12 = -36
Fabien = -28,50 - 37,40 = 65,6
Genière = 11,4 - 23,7 = -12,3
Hélène = 12 - 48 = -60

Pour ces 2 personne il faut aditionner

<u>Conclusion</u> : la soustraction de nombres négatifs ne correspond pas à une opération concrète. C'est la raison pour laquelle les élèves la contournent tranquillement en employant des procédures intuitives : le « moins-moins » n'a vraiment rien de naturel !

III - REGROUPEMENT DE LA CLASSE

Cinquième activité : Vérifions les comptes

Objectifs : • soustraction d'un nombre négatif ;
• intégration des bons élèves.

Descriptif : cette activité permet de faire le bilan de l'activité précédente et d'imposer la soustraction des nombres négatifs grâce à la quatrième ligne. L'ordre des enfants correspond à une progression de la difficulté à écrire les bonnes opérations. Les quatre premières lignes mettent en évidence la soustraction à écrire, et la ligne de Toto permet la généralisation par le professeur. Les trois dernières lignes conduisent à écrire la soustraction d'un nombre négatif.

Déroulement : cette fiche est très guidée par le professeur. Les bons élèves, sentant leur retard, sont très attentifs et rentrent vite dans la danse.

Les questions 1) et 2) ne posent pas de problèmes particuliers : les quelques mauvaises réponses sont rapidement éliminées. La troisième question est mieux acceptée par les bons élèves. La quatrième question conduit à la rédaction de la règle par quelques élèves et à son adoption par l'ensemble de la classe.

Résultats : la réponse à la deuxième question est souvent incomplète : « une soustraction », alors qu'on attend : « Etat du compte fin Juin - Etat du compte fin Mai ». La comparaison avec les résultats de l'activité « L'argent de poche » (rappelés sur un transparent par exemple) permet de découvrir que 37 – (–28) est équivalent à 37 + 28. Les élèves rédigent alors une règle pour la soustraction d'un nombre négatif et un énoncé final est adopté par l'ensemble de la classe.

Exemple de travail d'un élève en difficulté :

1) Diane affirme qu'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne. Ecris cette opération pour les 4 premières lignes du tableau .

2) Quelle est cette opération qui permet d'obtenir le résultat de la 3ème colonne ?
la Boustraction ; colone Juin – colone Mai

3) Ecris maintenant cette opération pour les 3 dernières lignes du tableau.

4) Observe les 3 dernières opérations écrites et rédige une règle pour les effectuer.
il faut que les nombres négatif de la colone a deviennes des nombres positif.
Ex : 37.10 –(– 28.50) ; -> 37.10 + 28.50

Exemple de travail d'un bon élève :

Les 7 enfants de la famille Dépenstrop reçoivent de l'argent de poche tous les mois. Certains ne dépensent pas tout, d'autres dépensent plus qu'ils n'ont reçu grâce aux parents qu'il faudra hélas rembourser plus tard. A la fin de chaque mois, on doit faire les comptes.

Voici le tableau récapitulatif des mois de Mai et de Juin.

	Etat du compte à la fin Mai	Etat du compte à la fin Juin	Variation pendant le mois de Juin
Boris	11,4	23,7	23,7 – 11,4 = 12,3
Annabelle	48	12	12 – 48 = -36
Geneviève	23,7	11,4	11,4 – 23,7 = -12,3
Hélène	12	-48	–48 – 12 = -60
Toto	*a*	*b*	b – a
Fabien	-28,50	37,10	37,10 – (–28,50) 37,10 + 28,50 = 65.6
Diane	-23,7	-11,4	–11,4 – (–23,7) –11,4 + 23,7 = 12,3
Emile	-12	-48	–48 – (–12) –48 + 12 = -36

1) Diane affirme qu'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne. Ecris cette opération pour les 4 premières lignes du tableau.

2) Quelle est cette opération qui permet d'obtenir le résultat de la 3ème colonne ?
b – a (– a) + b – a + b
Etat du compte fin juin – Etat du compte fin mai

3) Ecris maintenant cette opération pour les 3 dernières lignes du tableau.

4) Observe les 3 dernières opérations écrites et rédige une règle pour les effectuer.
"si le 2e nombre est négatif on le transpose à la forme affirmative"
" je vais ôter le signe de soustraction et celui qui est devant et je vais le transformer en signe additionnaire"
" au lieu de mettre – –, on peut le remplacé par + "

Conclusion : la règle du « moins-moins égale plus » n'est pas évidente, mais le déroulement de cette séance en permet une bonne acceptation par l'ensemble de la classe.

VERIFIONS LES COMPTES

Les 7 enfants de la famille Dépenstrop reçoivent de l'argent de poche tous les mois.
Certains ne dépensent pas tout, d'autres dépensent plus qu'ils n'ont reçu grâce aux parents qu'il faudra hélas rembourser plus tard. A la fin de chaque mois, on doit faire les comptes.
Voici le tableau récapitulatif des mois de Mai et de Juin.

	Etat du compte à la fin Mai	Etat du compte à la fin Juin	Variation pendant le mois de Juin
Boris	11,4	23,7	= 12,3
Annabelle	48	12	= – 36
Geneviève	23,7	11,4	= –12,3
Hélène	12	– 48	= – 60
Toto	*a*	*b*	
Fabien	– 28,50	37,10	= 65,6
Diane	– 23,7	– 11,4	= 12,3
Emile	– 12	– 48	= – 36

1) Diane affirme qu'on effectue toujours la même opération pour trouver le résultat de la 3ème colonne. Ecris cette opération pour les 4 premières lignes du tableau.

2) Quelle est cette opération qui permet d'obtenir le résultat de la 3ème colonne ?
....

3) Ecris maintenant cette opération pour les 3 dernières lignes du tableau.

4) Observe les 3 dernières opérations écrites et rédige une règle pour la soustraction d'un nombre négatif.

DES CALCULS A LA PELLE

1) Calcule :

$a = 10 - 15$; $b = -9 + 6$; $c = -12 + 18$; $d = -3 - 7$; $e = 17 - 10$;

$f = 27 + 13$; $g = 3 + (-15 + 8)$; $h = -19 + (-32 + 43)$; $i = (7 - 12) + 13$;

$j = 37 - (68 - 71)$; $k = (-11 + 23) - (4 - 7)$; $m = -9 - (-12 + 17)$;

$n = 33 - 17 - 14 + 5 - 33 + 14 - 9$; $p = 15 - (-6) + (-12) - 5$;

$q = -11 + 18 - 5 - 13 + 17$; $r = 32 - (-21) + (-53) + (-32) + 21$

2) Ecris toutes les règles que tu utilises pour effectuer ces calculs.

Sixième activité : Des calculs à la pelle

Objectif : énoncé des règles d'addition et de soustraction des relatifs.

Descriptif : progression des difficultés à partir de calculs variés abordant les différents aspects de la somme algébrique.

Déroulement : les opérations a), b), c), e) et f) se font facilement. Des élèves en difficulté ont demandé à travailler avec la réglette à coulisse, et d'autres parmi les bons ont souhaité faire de même pour effectuer les calculs. Le résultat du d) se justifie bien avec le déplacement de la réglette. Le g), le h) et le i) obligent à un rappel sur la priorité des opérations. Il est important de faire rédiger les règles par les élèves, puis de sélectionner les meilleures productions pour aboutir à l'énoncé final. Il est normal que dans une formule il puisse y avoir des parenthèses en trop ; cela ne présente aucun inconvénient, ni pour la lecture par les élèves d'expressions algébriques, ni pour la maîtrise de l'écriture : par exemple $(3 + 1) - 12$ pour $3 + 1 - 12$.

A noter qu'on peut préférer intégrer la correction de cette activité au cours lui-même.

Résultat : la règle concernant la somme de nombres de même signe ne pose pas de problème. Pour la somme de deux nombres de signes contraires, la formulation de la règle est plus délicate mais la signification est correcte. Quant à la règle de soustraction d'un nombre négatif, elle est issue de l'activité « Vérifions les comptes ».

Exemples de travaux d'élèves :

Les règles

Si on additionne un positif avec un négatif, on fait une soustraction

Si on additionne un négatif avec un positif, on fait une soustraction

Si on addionne deux positifs ensembles, on fait une addition

Si on additionne deux négatif ensemble, on fait une addition.

Les deux nombres relatifs ont des signe différents

- je prends les signe de la plus grande valeur
- je calcul la différence des valeurs

Qand il ya 2 nombre negatif les resultat est negatif.	Quand il ya 2 nombre positif le resultat est positif

Lorsqu'il y a un calcul entre parenthèse on le calcul en premier.

ex : $3 + (-15+8)$

$= 3 + (-7) = 3 - 7.$

$= -4$

<u>Conclusion</u> : la méthode qui consiste à définir les règles concernant l'addition et la soustraction des nombres relatifs à partir des productions d'élèves nous paraît plus motivante et plus performante, d'autant plus qu'il s'agit ici de les substituer à des rédactions qui sont habituellement d'une complexité bien décourageante. On constate que les élèves préfèrent énoncer plusieurs petites règles plutôt qu'une règle synthétique.

IV - OPPORTUNITE DE CETTE APPROCHE DES RELATIFS

1 - Les raisons de nos choix

Les avantages de la règle à coulisse : la représentation des nombres relatifs sur la droite des réels n'est pas un acquis quand il s'agit d'une situation de gains et pertes. Plutôt que l'imposer aux élèves, il nous semble préférable de les aider à se construire ce type de représentation. Dans cet esprit, nous avons cherché à fournir aux élèves un outil leur laissant le maximum de liberté. Cependant nous avons placé le zéro au milieu de la graduation car l'expérience nous a montré que les élèves le placent plus naturellement à l'une des extrémités, ce qui les conduit à des manipulations impossibles. De plus, pour éviter des graduations inadaptées, soit trop larges empêchant de réaliser les opérations de nos exercices, soit trop étroites posant des problèmes de lecture, soit irrégulières, nous avons imposé une graduation. Mais nous laissons aux élèves la liberté de choisir les nombres qu'ils vont disposer sur cette graduation.

Nous avons construit notre séquence pour qu'interviennent naturellement et simultanément deux langages différents : celui de la réglette et le langage algébrique. Chacun de ces langages a en effet ses avantages :

- la réglette permet une représentation aisée d'un gain ou d'une perte et le traitement de l'addition de deux nombres relatifs ; en revanche elle est mal adaptée à la soustraction des relatifs.

- le langage algébrique est efficace pour représenter une situation complexe. Il est au départ inconnu des élèves donc inapproprié pour effectuer des opérations.

C'est l'articulation entre ces deux langages qui va permettre, peu à peu, à l'élève de créer dans le langage algébrique des méthodes de traitement adaptées. Le langage algébrique devient alors pour l'élève un outil performant, la réglette n'étant plus qu'un moyen de contrôle utile dans les cas difficiles.

La présentation des données : pour éviter de privilégier une notation ou une présentation des opérations, nous avons choisi de présenter dans les premières fiches les données dans des tableaux peu adaptés au traitement et avec un code de couleur pour désigner les points gagnants et les points perdants. Ce n'est qu'avec l'activité « Des calculs à la pelle », que l'on retrouve les notations habituelles dans l'énoncé.

Les tâches d'écriture : le but de ces tâches n'est pas d'obtenir des textes parfaits, mais d'obliger les élèves à expliciter certaines démarches plus ou moins implicites. Cela rend plus fructueux les débats, les textes produits pouvant servir de point de départ.

Les calculs sont parfois effectués avec un certain automatisme, et le sens des opérations est souvent déterminé par intuition. L'écriture impose une réflexion sur la démarche suivie, permettant d'éliminer des procédures fantaisistes et de conforter les bonnes options.

Les débats : on a choisi de placer les débats en début de séance. En effet, cela permet d'étudier auparavant les productions des élèves récupérées à la fin de la séance précédente, et de pouvoir les utiliser en rassemblant par exemple les plus pertinentes d'entre elles sur un transparent. De plus, s'il est facile d'écourter un débat qui traîne, il est regrettable d'interrompre un échange riche par la sonnerie de fin de cours.

L'intérêt de ces débats est de faire sélectionner par les élèves eux-mêmes les bons calculs et les bonnes écritures, et de révéler la multiplicité des formulations équivalentes. Cette variété permet de repérer les solutions les plus simples et de mieux ancrer la bonne démarche.

2 - Les résultats

Les signes : l'un des grands avantages de cette approche est d'introduire d'emblée plusieurs écritures pour les opérations sur les nombres relatifs. Ce sont en effet les élèves qui créent leur propre manière d'écrire et chacun d'eux va choisir celle qui correspond le mieux à sa façon de voir. Les uns vont naturellement proposer $+8$ ou 8^+ pendant que d'autres écriront 8. Des expressions comme $-11 + +8$, ou $+10 - +7$ vont apparaître. On constate que chacun, s'appuyant sur l'écriture qu'il a choisie, va vite comprendre les écritures des autres ; les formes erronées ou dangereuses seront le plus souvent rejetées d'un commun accord.

Ce n'est évidemment pas le cas quand l'enseignant commence par imposer une écriture avec de nombreuses parenthèses ; certains élèves peuvent être déroutés par des expressions du type $(+4) + (-5)$; et la situation ne s'arrangera pas quand l'enseignant devra introduire la notation dite « simplifiée ». Il n'est pas surprenant que, dans ces conditions, l'équivalence de $2 + (-12)$ et de $2 - 12$ soit ressentie par trop d'élèves comme une convention d'écriture. Au contraire, après cette séquence, la plupart des élèves en comprennent le bien fondé.

Ces difficultés de l'enseignement viennent de ce qu'il n'y a pas de notation canonique, c'est-à-dire s'imposant à tous comme la plus efficace. Par exemple, pour désigner un nombre positif, il est aussi légitime d'employer une notation comme 8, qui identifie le nombre relatif positif avec le nombre naturel, que la notation $+8$ qui les distingue.

Les opérations : grâce à la manipulation de la réglette à coulisse, la grande majorité des élèves en difficulté a pu passer sans heurt de la notion d'abscisse, déjà acquise, à celle d'addition des nombres relatifs. Les bons élèves, qui n'ont pas eu cet apprentissage, ont montré qu'ils accédaient facilement à l'utilisation de cette opération.

Malheureusement la soustraction de nombres négatifs, n'ayant rien de naturel, est systématiquement détournée. Cela n'empêche pas les résultats justes donnés par beaucoup d'élèves grâce à leur bon sens.

Soustraire un nombre négatif : c'est effectivement la difficulté centrale. Comme nous l'avons déjà dit, aucune situation concrète ne conduit à cette écriture car elle est remplacée immédiatement par une addition. Celle-ci ne se justifie que pour une situation où intervient une variable et où l'on veut exprimer les différents cas par une formule unique. C'est bien dans cet esprit que les activités « L'argent de poche » et « Vérifions les comptes » ont été conçues. L'expérience montre que, après les hésitations des élèves au cours de ces activités, la difficulté semble être surmontée.

3 - Le cours

Pour clarifier les règles d'opérations sur les relatifs, il est indispensable de les énoncer. Dans un cours traditionnel, les énoncés de ces règles, qui ne sont pas obtenues à partir du travail des élèves, sont souvent complexes. Dans notre démarche, il est possible de choisir, parmi les productions des élèves, des énoncés beaucoup plus elliptiques ; il ne s'agit pas en effet de tout expliquer, mais d'exprimer en quelques mots les points sur lesquels l'ensemble de la classe s'est mis d'accord à l'issue d'un débat approfondi. L'enseignant s'assure naturellement qu'aucune idée essentielle n'a été oubliée.

Les énoncés choisis finalement vont évidemment dépendre de l'enseignant. Si celui-ci a l'habitude de s'exprimer de manière très précise, il modifiera les propositions d'énoncés des élèves pour les compléter. Si au contraire, il souhaite mettre plus l'accent sur la signification que sur la précision, il pourra accepter des expressions d'élèves incomplètes mais parlantes. Il est important de bien comprendre qu'un énoncé incomplet, qui est aux yeux de certains enseignants incorrect, peut, dans la classe où il a été introduit avec les précautions indiquées, se révéler très performant, aussi bien sur la forme, car il est plus simple que l'énoncé traditionnel, que sur le fond, car il a plus de sens pour les élèves qui savent très bien ce qui est sous-entendu.

A titre d'exemple, on trouvera ci-après ce qui a été noté dans le cahier de cours d'un élève, sur la base de leur production.

4) Addition et soustraction de deux nombres relatifs :

2+7=9

13,7+8,8=22,5

R1 $\boxed{\text{Quand il y a deux nombres positifs, le résultat est positif et on ajoute les deux nombres}}$

-7-9=-16

-3,2+(-1,4)=4,6.

R2 Quand il y a deux nombres négatifs, le résultat est négatif et on ajoute les deux nombres.

$-2-5=-3$

$-2,1+(-7,2)=-3,1$

$-12-5=-7$

$-8+15=7$

$2+(-7)=-5$

$-9+14=5$

R3 Quand il y a un nombre positif et un nombre négatif, on effectue une soustraction.

* Le résultat est positif quand c'est le nombre positif qui l'emporte.
* Le résultat est négatif quand c'est le nombre négatif qui l'emporte.

$-12-12=0$

$-7+7=0$

$1,2+(-1,2)=0$

R4 Quand on ajoute deux nombres opposé, le résultat est égal à 0.

$12-(-7)=12+7=19$

$-3-(-8)=-3+8=5$

$-11-(-5,2)=-11+5,2=-5,8$

R5 Quand on veut soustraire un nombre négatif, on ajoute le nombre positif opposé.

5) Sommes algébriques :

Une somme algébrique est une suite d'addition et de soustractions de nombres relatifs.

a) somme de plusieurs nombres relatifs :

$A = 7,2 - 9 + 8 + 6,3 - 14,5 - 8 - 1,8$

Ce sont des nombres opposés.

Leur somme est 0.

$= 13,5 - 25,3$

$= -11,8$

RETENIR :

Pour calculer la somme de plusieurs nombres relatifs on peut :

* Annuler les nombres opposés s'il y en a.

* Regrouper et additionner les nombres relatifs du même signe (positif et négatif).

Remarque :

Un nombre relatif se déplace toujours accompagné de son signe.

$7-10+4-8$

$=7+4-10-8.$

b) Sommes algébriques :

$B=-5\boxed{-(-8)}-23-7+6-9+23.$

$=-5\boxed{+8}-23-7+6-9+23$

$=14-21$

$=-7$

RETENIR :

Pour calculer une somme algébrique

* On transforme les soustractions de nombres négatifs en additions s'il y en a.

* Puis on utilise la règle précédente.

LE CALCUL LITTERAL

I - INTRODUCTION

1 - L'usage des lettres

L'usage de lettres à la place de nombres, si utile pour la résolution de problèmes, si pratique pour la généralisation de calculs, n'est pas une démarche évidente pour certains élèves. Les travaux sur ce sujet ont permis de reconnaître plusieurs niveaux de difficulté.

Dans le cas le plus simple, la lettre se présente comme une abréviation : ainsi, pour le calcul de l'aire d'un rectangle, les lettres l et L qui apparaissent dans la formule $l \times L$ peuvent être considérées comme des abréviations de largeur et longueur ; la formule elle-même est un résumé d'une procédure qui pourrait s'énoncer : « pour calculer l'aire d'un rectangle, on multiplie la largeur par la longueur ».

Remplacer un nombre fixe par une lettre est aussi une démarche en général bien acceptée par les élèves de $5^{\text{ème}}$. C'est le cas par exemple dans un problème du type : « On multiplie un nombre ***a*** par 5, puis on additionne le nombre ***a*** au résultat. Faire ce calcul sachant que ***a*** = 17 ».

La situation où une lettre est une variable, c'est-à-dire représente un nombre qui peut prendre plusieurs valeurs, est source de plus de difficultés. Surtout si elle est présente en plusieurs endroits d'une formule ou si plusieurs variables doivent être traitées en même temps. C'est cette situation que nous voulons aborder dans ce chapitre. L'idée de fonction, c'est-à-dire d'une quantité qui varie en fonction d'une autre quantité, est encore plus complexe.

Notons enfin que les inconnues, c'est-à-dire les lettres qui apparaissent dans les équations pour représenter des nombres que l'on cherche à déterminer, jouent encore un rôle différent et présentent de ce fait des difficultés particulières.

2 - Le calcul littéral en Cinquième

L'idée de formule, contenant une ou plusieurs variables, est en fait très peu familière aux élèves en début de cinquième. Il est donc normal que des difficultés se présentent.

- Bien sûr, il y a d'abord les difficultés dont nous venons de parler : concevoir qu'une lettre représente un nombre qui peut prendre plusieurs valeurs.

- Mais la compréhension d'une formule va aussi se heurter à des difficultés de « lecture » ; pour un expert, l'organisation d'une formule est si évidente que le repérage du signe d'opération qui est prioritaire est quasiment immédiat. Ce n'est pas du tout le cas pour beaucoup d'élèves. Dans le même ordre d'idée, il est difficile pour un élève de maîtriser les priorités des opérations, l'usage des parenthèses et les symboles d'opérations sous-entendus.

- Il n'est pas simple de concevoir que deux formules différentes puissent donner toujours le même résultat.

- Enfin, l'intérêt du calcul littéral est de faciliter l'étude de nombreuses situations ; il est donc nécessaire d'être capable d'associer à certaines situations une formule adaptée.

II - LE POURQUOI DE NOTRE DEMARCHE

Au départ, voici ce que nous avons proposé aux élèves par écrit :

« Vous avez sans doute déjà rencontré des formules ; écrivez ces formules et précisez à quoi elles servent ».

Les réponses obtenues sont très disparates. Plusieurs affirment ne pas savoir ce que c'est. D'autres expriment des idées du type : « une formule est une règle qui nous permet de résumer quelque chose ». Finalement, les formules citées sont en général celles qui permettent de calculer le périmètre ou l'aire d'un rectangle, d'un carré ou d'un disque.

$(L + l) \times 2$; longueur × largeur ; $2 \times \pi \times r$.

Ceci prouve bien que tout est à faire dans ce domaine, c'est l'une des raisons qui ont motivé notre travail.

L'autre raison concerne l'insistance des nouveaux programmes sur l'initiation au calcul littéral, plus particulièrement durant le cycle central. Il nous a paru intéressant d'aborder ce thème dès la $5^{ème}$. Notre principal objectif a été de donner un sens au calcul littéral par le biais d'activités et de faire percevoir son efficacité pour résoudre des problèmes ; nous avons privilégié cet aspect par rapport à « la technique ». Des élèves familiarisés avec les lettres et les formules (alors qu'on peut observer que l'apparition des lettres peut entraîner des réactions de quasi-rejet) auront moins de difficultés à calculer ensuite avec un nombre inconnu. Les exercices de technique pure sont réservés pour la suite (en $4^{ème}$).

Les formules correspondant à des calculs de périmètres, d'aires ou de volumes semblent avoir dans l'esprit des élèves le statut de résumé d'un algorithme plutôt que celui de formule ; on peut le constater par exemple dans le fait que l'idée qu'il puisse y avoir plusieurs formules pour le même résultat leur est étrangère : le passage de $2(l + L)$ à $2l + 2L$ pour le calcul du périmètre d'un rectangle ne leur semble pas aller de soi. C'est pourquoi nous pensons qu'il vaut mieux éviter de commencer une séquence sur le calcul littéral en s'appuyant sur ces formules. Il nous semble utile, au contraire, de choisir celles-ci comme thème de travail en fin de séquence pour renforcer chez les élèves l'idée qu'il s'agit bien de formules susceptibles de transformations algébriques.

Nous nous sommes posés la question de savoir si des calculs répétitifs étaient un moyen de susciter chez les élèves un intérêt pour les formules. Il semble que la réponse soit négative, puisque, devant des tâches fastidieuses de calcul, on ne constate aucun recours à leur utilisation. D'autres indices vont dans le même sens : la simplification des formules peut nous paraître très utile lorsqu'on veut calculer les résultats obtenus pour plusieurs valeurs des variables. Ce n'est pas le cas pour les élèves ; en effet, si on leur propose successivement :

- de calculer sur une formule complexe,
- de simplifier celle-ci,
- de calculer la valeur de la formule initiale pour de nouvelles données numériques,

très peu utilisent la formule simplifiée pour mener ces nouveaux calculs.

III - CONCEPTION DE LA PROGRESSION PEDAGOGIQUE

Au moment où nous abordons ce thème, les priorités opératoires ont été vues et les élèves ont rencontré la distributivité (sans lettres, le but étant alors de calculer astucieusement 12×103 ou encore $7,5 \times 13 - 7,5 \times 3$ ...) et le vocabulaire « développer, factoriser » a été évoqué.

1 - Pour les élèves en difficulté

Etape n° 1 : rencontrer et se familiariser avec des formules.

Fiche : « **La moquette** ».

La tâche de « La moquette » a été choisie pour que le seul objectif soit la lecture de formules, sans avoir de calculs à faire. Pour que ces formules aient une véritable signification elles sont associées à une situation bien précise, mais le travail demandé ne nécessite aucune réflexion sur la justification. Plusieurs formules sont proposées pour traduire cette situation.

Etape n° 2 : utiliser des formules pour calculer.

Fiches : « **La distance d'arrêt** », « **En Amérique** », « **Arthur demande de l'aide** ».

A partir de formules contenant une ou plusieurs variables, la tâche dans la « Distance d'arrêt » et « En Amérique » se limite à trouver la valeur de ces expressions pour plusieurs valeurs des variables. La grande variété des formules rencontrées habituellement explique qu'il faille plusieurs exercices pour faire le tour des difficultés les plus évidentes : la présence d'une même variable en plusieurs endroits d'une même formule, la présence de plusieurs variables, la présence de constantes, la gestion des parenthèses, la priorité des opérations...

Les deux premières activités concernent des formules associées à des situations « concrètes ». Dans la troisième, « Arthur demande de l'aide », les formules sont sans support concret, et cette tâche comporte plusieurs difficultés :

- écriture fractionnaire ;
- deux formules différentes peuvent prendre la même valeur pour le même nombre ;
- une même formule peut prendre la même valeur pour deux nombres différents ;
- utiliser plusieurs fois la même lettre dans une formule (car l'idée que la même lettre cache le même nombre nous semble assez difficile) ;
- organiser et gérer un nombre assez important de données ;
- des valeurs communes à plusieurs formules engendrent des stratégies complexes de traitement.

<u>Etape n° 3</u> : associer une formule à une situation.

Fiches : « **Longueurs et formules** », « **Jeu de cubes** ».

On ne demande pas à ce stade de construire la formule adaptée à une situation, mais seulement de la reconnaître. La première fiche, « Longueurs et formules », concerne une situation de base pour l'application du calcul littéral en géométrie : un calcul de longueur de segment. On sait que les élèves commettent beaucoup d'erreurs sur ce type de situation. Plusieurs représentations d'une même situation sont proposées, l'idée d'expressions égales est sous-jacente. Dans la fiche « Jeu de cubes », il s'agit de reconnaître une formule correspondant à une situation donnée. Les élèves n'ont pas les moyens d'établir cette formule, mais ils peuvent trouver des valeurs prises par cette formule.

2 - Avec l'ensemble de la classe

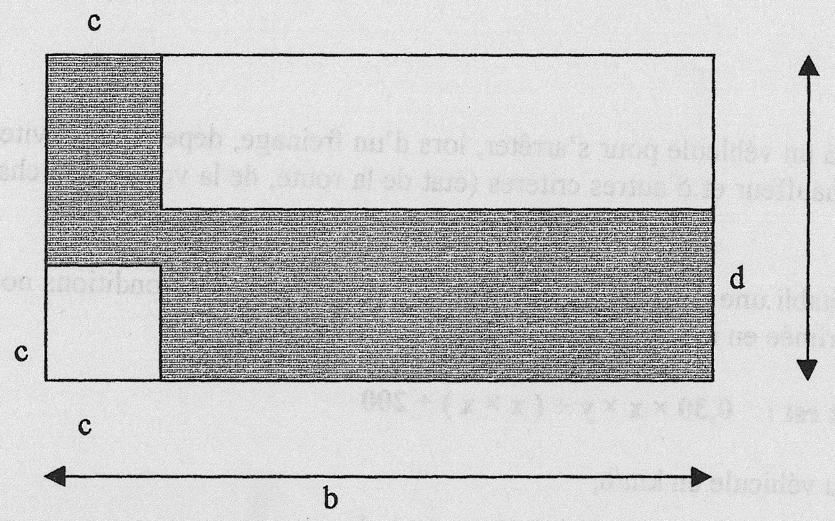
<u>Etape n°4</u> : apprendre à lire ou interpréter des formules.

Fiches : « **Simplifications d'écriture** », « **A chaque texte sa formule** »,
« **A la recherche de formules** ».

Le but est de faire découvrir aux élèves comment sont structurées les formules. La première fiche, « Simplifications d'écriture », met en évidence la complexité des conventions d'écriture et les libertés qui sont permises. L'expérience montre que le simple énoncé de règles ne suffit pas pour permettre aux élèves d'acquérir ces connaissances. C'est pourquoi cette fiche est essentiellement orientée vers l'écriture de règles par les élèves avec, comme complément indispensable, une discussion sur leur validité. Les autres fiches, « A chaque texte sa formule » et « A la recherche de formules », ont pour but de passer du langage des formules au français ordinaire et inversement. Elles sont l'occasion de se familiariser avec le vocabulaire qui sert à lire ces formules : somme, produit, différence, quotient, moitié, triple, ajouter, additionner, soustraire, ôter, retrancher, multiplier, diviser...

LA MOQUETTE

Quatre élèves Michel, Hélène, Philippe et Geneviève font des calculs.
Il s'agit de calculer l'aire d'une moquette dans la pièce dessinée ci-dessous.



Chaque élève essaie de trouver une formule pour faire le calcul.
Ils ont finalement obtenu les quatre formules suivantes :

1. Aire de la moquette = $\mathbf{a \times b - c \times c - (b - c) \times (a - d)}$

2. Aire de la moquette = $\mathbf{c \times (a - c - d) + b \times d}$

3. Aire de la moquette = $\mathbf{a \times c + b \times d - c \times d - c \times c}$

4. Aire de la moquette = $\mathbf{a \times c + b \times d - c \times (c + d)}$

Chacun prétend que sa formule est la meilleure.

Michel dit : *« moi je déteste les multiplications ; c'est avec ma formule qu'il y en a le moins à faire ».*

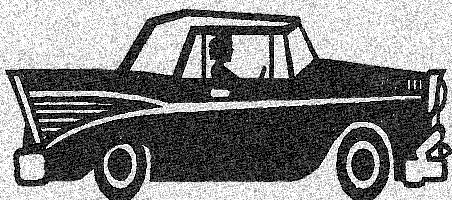
Hélène dit : *« ce sont les soustractions qui sont désagréables et avec ma formule j'en ai moins que toi ».*

Philippe dit : *« avec ma formule je fais toutes les multiplications d'abord et après il ne reste plus que des additions et des soustractions ».*

Geneviève dit : *« je trouve que ma formule est tout aussi valable que les vôtres ».*

Attribue à chaque élève la formule qu'il a trouvée.

LA DISTANCE D'ARRET



La distance nécessaire à un véhicule pour s'arrêter, lors d'un freinage, dépend de sa vitesse, du temps de réaction du chauffeur et d'autres critères (état de la route, de la voiture, du chauffeur, etc…).

La sécurité routière a établi une formule qui permet de calculer, dans des conditions normales, la distance d'arrêt, exprimée en mètres.

Cette distance d'arrêt est : $\mathbf{0{,}30 \times x \times y + (x \times x) \div 200}$

x est la vitesse du véhicule en km/h,

y est la durée de réflexe (temps de réaction) en secondes,

0,30 et **200** sont des coefficients (ou des opérateurs constants).

<u>1er cas</u> :

Un automobiliste dont la durée de réflexe est de 0,5 seconde roule en ville à 50 km/h (vitesse maximale autorisée).

Il est à 15 m d'un feu quand celui-ci passe à l'orange.
Explique pourquoi il ne peut pas s'arrêter avant le feu.

<u>2eme cas</u> :

Un gendarme rentre chez lui le soir, en voiture, par l'autoroute. Il roule à 120 km/h et s'inquiète de la distance nécessaire pour s'arrêter à cette vitesse. Il sait que sa durée de réflexe est de 1 seconde et il se souvient avoir lu dans une revue, qu'au dessus de 100 km/h, la distance d'arrêt en mètre est égale à la vitesse en km/h (100 m pour 100 km/h, 150 m pour 150 km/h, etc…).

Que penses-tu des conseils de la revue ?

EN AMERIQUE

L'avion de Didier atterrit à New-York. La température affichée à l'aéroport est de 41° et pourtant tout le monde est en manteau ! Didier fait part de son étonnement à son ami Bill venu l'accueillir, mais celui-ci lui explique qu'aux Etats-Unis, on mesure la température en degrés Fahrenheit alors qu'en Europe, cela se fait en degrés Celsius.

Et Bill de rajouter : « D'ailleurs, hier il faisait 32° : il gelait. Mais on prévoit un réchauffement pour les jours à venir : le thermomètre devrait dépasser les 50° ».

Si on appelle C la mesure en degrés Celsius et F la mesure en degrés Fahrenheit, la formule suivante permet de trouver la température en degrés Celsius quand on connaît la température en degrés Fahrenheit :

$$\mathbf{C = \frac{5}{9} \times (F - 32).}$$

A quelles températures en degrés Celsius correspondent toutes les températures : 41°, 32° et 50° exprimées en degrés Fahrenheit ?

ARTHUR DEMANDE DE L'AIDE

Arthur vient de finir son exercice de mathématiques ; par souci de clarté, il a présenté les résultats dans un tableau. Dans la $1^{ère}$ colonne, il a mis les formules et dans la $2^{ème}$ colonne il a écrit les valeurs qu'il a trouvées en remplaçant x par 4 et ainsi de suite. Malencontreusement, son chat gourmand est passé par là et a renversé un verre de lait sur son cahier !

Arthur est découragé ; aide-le à restaurer ce tableau très abîmé en retrouvant les 4 formules de la première colonne et les valeurs qui manquent dans les autres colonnes. Attention ! Arthur n'a pas suivi l'ordre de l'exercice pour placer les formules dans son tableau.

x Formules	4	1	3
			10,5
			20
			0,2
		8,5	10,5

Voici le texte de l'exercice qu'Arthur avait à faire.

On donne 4 formules :

$\boxed{1}$ $\dfrac{x+6}{10} - 0{,}7$

$\boxed{2}$ $x \times (5 - x) + 4{,}5$

$\boxed{3}$ $x - \dfrac{x}{2} + 3 \times x$

$\boxed{4}$ $7 \times (x - 1) + 2 \times x$

Par exemple, si on calcule la valeur de la formule $\boxed{1}$ *pour* $x = 3$ *, on obtient :*

$\dfrac{3+6}{10} - 0{,}7 = 0{,}9 - 0{,}7 = 0{,}2.$

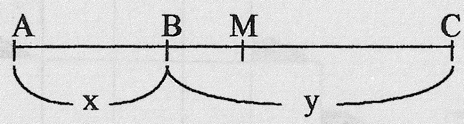
Calcule les valeurs prises par ces 4 formules dans chacun des cas suivants :

$x = 4$; $x = 1$ et $x = 3$.

LONGUEURS ET FORMULES

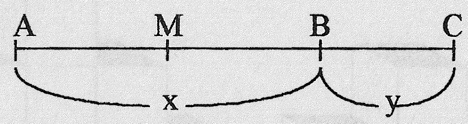
Voici quatre figures. Pour chacune de ces figures, on veut exprimer la longueur **AM** en fonction de **x** et **y**, où **x** désigne la longueur **AB** et **y** la longueur **BC**.

Figure **a**



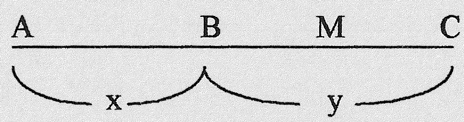
M est le milieu de [AC]

Figure **c**



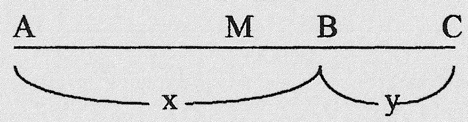
M est le milieu de [AB]

Figure **b**



M est le milieu de [BC]

Figure **d**



M est le milieu de [AC]

Voici huit formules :

1. $AM = x - y$ **2.** $AM = \dfrac{x+y}{2}$ **3.** $AM = x + \dfrac{y}{2}$

4. $AM = \dfrac{x}{2}$ **5.** $AM = (x + y) : 2$

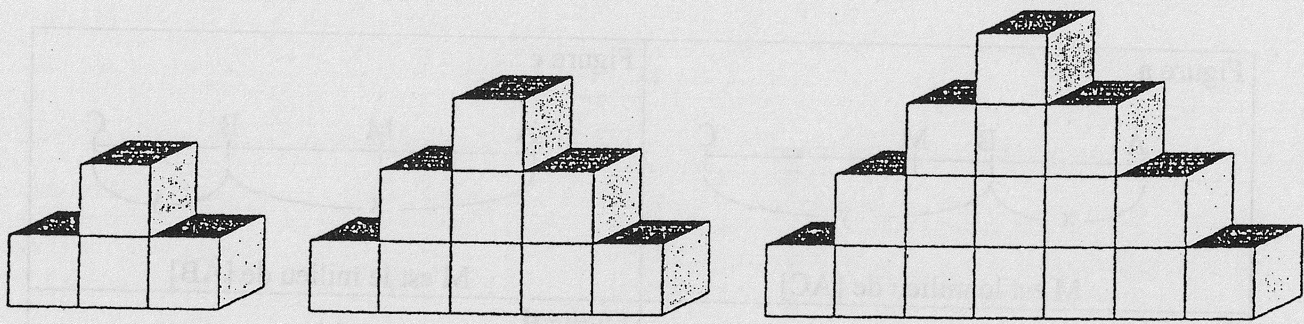
6. $AM = x + x$ **7.** $AM = \dfrac{1}{2}x$ **8.** $AM = x + y - \dfrac{y}{2}$

Consigne : Associer à chaque figure les formules qui conviennent (réponses dans le tableau ci-dessous).

Attention : - plusieurs formules peuvent convenir à la même figure ;
- la même formule peut convenir à plusieurs figures ;
- certaines ne conviennent à aucune figure.

Figure	**a**	**b**	**c**	**d**
Formules qui conviennent				

JEU DE CUBES



1) Combien faut-il de cubes pour construire chacun de ces empilements ?

2) Pour chaque empilement, on appelle C le nombre de cubes et R le nombre de rangées. Parmi les formules suivantes, une seule permet de connaître le nombre de cubes à partir du nombre de rangées : laquelle ?

$C = 2 \times R$, $C = 2 \times 2 \times 2 \times \ldots$ *(R fois)*, $C = R \times R$, $C = 2 + R$

3) Quel est alors le nombre de cubes nécessaires pour construire un empilement de dix rangées semblable aux précédents ?

SIMPLIFICATIONS D'ECRITURE

Pour écrire les expressions algébriques, les scientifiques utilisent beaucoup de conventions afin de simplifier leur écriture.

Voici un tableau qui comprend 7 expressions littérales numérotées de 1 à 7.

1. Complète ce tableau en retrouvant dans chaque cas l'expression qui convient dans la liste des « expressions simplifiées » qui se trouve sous le tableau.

	Plutôt que ...	**on préfère souvent ...**
1	$b \times 4$	
2	$c \times (b + 4)$	
3	$2c + (-3)$	
4	$b \times 3 \times a$	
5	$a + a + a + a + a$	
6	$a \times 3 + b \times 5 - c \times a$	
7	$(a - 2) \times 5 \times (b + 3)$	

Liste des « expressions simplifiées » :

	$2c - 3$	$3ab$	$3a + 5b - ac$
$5(a - 2)(b + 3)$	$4b$	$c(b + 4)$	$5a$

2. Dans chacune de ces expressions, une ou plusieurs simplifications d'écriture ont été utilisées. Décris par des phrases les simplifications d'écriture effectuées en donnant le numéro des expressions dans lesquelles elles s'appliquent.

A CHAQUE TEXTE SA FORMULE

1) Voici une liste d'expressions littérales dans lesquelles a et b sont deux nombres :

$\frac{a-b}{2}$ $(b+a)(a-b)$ $\frac{b}{2}-\frac{a}{2}$ $\frac{a+b}{ab}$

$3ab$ $ab+\frac{b}{a}$ $2(a+b)$

Associe à chaque texte l'expression littérale qui lui convient.

Texte	Expression littérale
Le double de la somme des deux nombres	
La moitié de la différence des deux nombres	
Le triple du produit des deux nombres	
La différence des moitiés de chaque nombre	
La somme du produit des deux nombres et de leur quotient	
Le produit de la somme des deux nombres et de leur différence	
Le quotient de la somme des deux nombres par leur produit	

A CHAQUE TEXTE SA FORMULE (suite)

2) Voici une liste d'expressions littérales :

$x - 5 \times 3$ $x + 5 \times 3$ $3(x+5)$

$5x+3$ $3x+5$ $5(x-3)$ $5x-3$

Associe à chaque phrase l'expression littérale qui lui correspond.

	Formule
1. Je choisis un nombre x, je le multiplie par trois puis j'ajoute cinq au résultat.	
2. Je choisis un nombre x, je lui ajoute cinq puis je multiplie le résultat par trois.	
3. Je choisis un nombre x, je lui ôte trois puis je multiplie le résultat par cinq.	
4. Je choisis un nombre x, je lui ajoute le produit de cinq par trois.	
5. Je choisis un nombre x, je le multiplie par cinq puis je soustrais trois au résultat.	
6. Je choisis un nombre x, je le multiplie par cinq puis j'ajoute trois au résultat.	
7. Je choisis un nombre x, je lui retranche le produit de cinq par trois.	

A LA RECHERCHE DE FORMULES

Ecris une expression littérale qui correspond à chacun des textes suivants :

	Formule
Je choisis un nombre x, je le multiplie par 4 puis je retranche 11.	
Je choisis un nombre x, je lui ajoute 2 puis je divise le résultat par 7.	
Je choisis un nombre x, je le divise par 4 puis j'ajoute 9 au résultat.	
Je choisis un nombre x, je lui ajoute 3 puis je multiplie le résultat par 10.	
Je choisis un nombre x, je le multiplie par lui même puis je retranche 1 au résultat.	

IV - ACTIVITES PREPARATOIRES : ANALYSES, REFLEXIONS

Les activités se font en groupes de trois. Un compte rendu de chaque séance (cela peut être très rapide) est fait au début de la séance suivante.

Les conventions qui permettent de simplifier les écritures littérales seront élaborées lors d'un débat autour des productions d'élèves.

1 - La moquette

Objectif : se familiariser avec des formules qui ne sont pas forcément très simples.

Déroulement : cette activité dure de 15 à 25 minutes. Certains élèves pensent qu'il faut trouver la ou les bonnes formules, d'autres pensent qu'il faut les expliquer ; pour ces derniers, il est nécessaire de relire et de préciser la consigne.

Résultats : il n'y a pas de problème pour Michel et Hélène. On note quelques inversions entre Philippe et Geneviève.

Conclusion : cette activité fonctionne assez bien. Les inversions entre Philippe et Geneviève feront l'objet d'une mise au point sur les priorités opératoires.

2 - La distance d'arrêt

Objectif : utiliser une formule pour calculer.

Déroulement : cette activité dure de 30 à 40 minutes, la calculatrice est autorisée.

Deux difficultés ont été rencontrées :

- des interrogations sur l'origine et la validité de cette formule que l'on ne peut pas expliquer en $5^{ème}$;
- des questions à propos des constantes ;
  - d'où viennent ces nombres, quelle est l'unité ?
    « 0,30 c'est 30 m » ou encore « 200 c'est 200 km/h »
  - certains refusent d'intégrer ces nombres.
    « je ne prends pas 0,30, je ne sais pas à quoi ça sert »
  - d'autres les transforment, ils pensent que 0,30 et 200 sont des exemples.
    $0,15 \times 50 \times 0,5 + (50 \times 50) : 100$

A ce moment là, il est nécessaire que le professeur explique que 0,30 et 200 ne changent pas ; on peut par exemple établir le parallèle avec le rôle de π dans la formule $2\pi r$.

Résultats : les premiers résultats obtenus avec la calculatrice sont parfois farfelus, car les élèves tapent les calculs sans support écrit. Après une mise au point, la plupart des groupes parviennent à faire les calculs avec encore quelques erreurs de priorités. L'interprétation des résultats reste laborieuse pour certains.

En voici un exemple : *« il ne peut pas s'arrêter car il est à 15 mètres du feu et son temps de réaction pour s'arrêter est de 20 mètres ».*

Cet élève a fait les bons calculs, mais sa réponse montre une confusion entre la distance d'arrêt et le temps de réaction.

Conclusion : les élèves doivent surmonter plusieurs obstacles pour réussir, c'est en cela que l'activité nous paraît enrichissante. Un rapide bilan fait à la séance suivante permet de clarifier la situation.

3 - Arthur

Objectif : rencontrer et utiliser des formules sans support concret.

Déroulement : cette activité dure de 30 à 45 minutes.

Les élèves mettent un certain temps à entrer dans l'activité et cela suscite des discussions à l'intérieur des groupes.

Par exemple, dans un groupe :
- Maxime : *Est-ce que les valeurs sont dans l'ordre des formules ?*
- Swann : *Ben non, t'as 3 valeurs et 4 formules.*

Maxime ne comprend pas.
- Swann : *Madame, la valeur 4 c'est pour quelle formule ?*
- Maxime, plus tard : *c'est facile de placer la* $\boxed{1}$ *puis on a calculé pour 3 et comme on trouve deux fois 10,5 on fait les calculs avec 1.*

Lorsqu'ils ont compris qu'il faut remplacer x par les trois valeurs dans les quatre formules, le déroulement est assez rapide, mais un peu anarchique, et l'exploitation des résultats n'est pas toujours rationnelle (le facteur chance ayant parfois aidé).

Plusieurs stratégies ont été observées :

- plusieurs groupes ont commencé en remplaçant x par 3 puis par 1 dans les formules $\boxed{2}$ et $\boxed{3}$. Les formules ayant été placées dans la première colonne du tableau, ils terminent les calculs ;
- d'autres, moins nombreux, ont fait les douze calculs en se répartissant la tâche, ceux-ci ont souvent eu plus de mal à reconstituer le tableau (résultats dans le désordre) ;
- on a même remarqué un groupe qui écarte la valeur 3 car on obtient deux fois 10,5 ; ils remplacent x par 1 dans la formule $\boxed{2}$ (la formule $\boxed{1}$ est déjà donnée par l'exemple).

Résultats : tous les groupes parviennent à placer les formules dans le tableau. On note cependant quelques erreurs de calcul.

Le travail écrit ne laissant pas apparaître la stratégie utilisée, il est intéressant de la faire expliciter par les élèves au cours d'un débat, et ainsi de retrouver et de justifier la démarche utilisée.

Conclusion : bien que cette activité soit réalisée avec succès, on remarque de nombreuses hésitations dans la formulation de la démarche, ce qui prouve bien qu'ils ont plein de doutes sur le sujet.

4 - Longueurs et formules

Objectif : associer une formule à une situation.

Déroulement : cette activité dure de 20 à 30 minutes.

Quelques groupes ont cherché à substituer des nombres aux lettres en mesurant ; on peut alors leur relire la première phrase qui est : « *exprimer AM en fonction de x et de y* ».

Certains pensent qu'une formule ne sert qu'une fois (ils les barrent au fur et à mesure). Dans ce cas, une relecture attentive de la consigne (cf. Attention…) s'impose. Deux démarches ont été remarquées :

- prendre les formules une à une et voir à quelle figure on peut les attribuer ;

- examiner les figures et chercher dans la liste les formules qui conviennent.

Résultats : pour les figures a, b et d, la plupart des groupes trouvent les bonnes formules avec quelques rajouts de formules qui ne conviennent pas. Par exemple, pour la figure a, on a parfois trouvé les formules 7 ou 8 et pour la figure d, les formules 1, 3 ou 7 ; nous n'avons pas toujours réussi à analyser et comprendre ces erreurs.

Pour la figure c, tous les groupes ont trouvé $\frac{x}{2}$, mais peu d'entre eux voient que la formule $\frac{1}{2}x$ convient aussi (pour certains élèves, il n'est pas évident que $\frac{50}{2} = \frac{1}{2} \times 50$).

Conclusion : cette activité se passe bien. Elle pourrait faire l'objet d'un travail sur l'égalité de deux formules. En effet, un groupe a fait la remarque suivante : "les formules 2 et 5 sont égales", mais n'écrit pas que les formules 3 et 8 (attribuées à la figure d) le sont aussi. Cela laisse supposer que pour eux, des formules ne sont égales que lorsqu'on les obtient par la même démarche ou qu'elles ne diffèrent qu'au niveau de l'écriture.

5 - Jeu de cubes

Objectif : sélectionner une formule correspondant à une situation donnée.

Déroulement : cette activité dure de 10 à 15 minutes ; elle a été proposée en fin de séance aux élèves qui avaient terminé « Longueurs et formules ». La situation est assez difficile à analyser : au départ, il y a quelques hésitations sur la signification des lettres C et R, mais elles sont assez vite surmontées. Certains élèves, dans l'esprit de l'activité précédente, pensent qu'il faut associer une formule à chaque empilement ; d'autres pensent que plusieurs formules conviennent malgré la formulation de la consigne.

Conclusion : bien que cette activité n'ait pas été abordée par tous les groupes, elle nous paraît intéressante car il ne suffit pas d'une ou deux vérifications pour valider la bonne formule.

6 - Les simplifications d'écriture

A partir de cette activité, nous travaillons avec toute la classe.

Objectif : découvrir des simplifications d'écriture et les exprimer par écrit.

Déroulement : cette activité dure de 30 à 40 minutes. Aucune contrainte n'a été imposée pour la constitution des groupes, on retrouve dans chacun d'eux des élèves issus des deux moitiés de classe.

La première question ne pose pas de problème (5 à 10 minutes). Ils complètent bien le tableau en barrant au fur et à mesure les expressions.

La deuxième question est plus difficile, on observe deux étapes :

- une phase de reconnaissance : échanges dans les groupes à propos des constats de chacun ;

- une phase d'écriture, tâche difficile pour laquelle il faut parfois rassurer et encourager.

Dans quelques groupes, la consigne n'a pas été bien comprise ; ils ont décrit ce qu'ils voyaient à chaque ligne et n'ont pas fait de synthèse.

Voici quelques productions d'élèves :

* On peut enlever le signe + lorsque dans le calcul il y a des parenthèses dans lesquelles il y a un signe plus un chiffre car c'est comme dans les nombres relatifs et le signe + est inutile : (exemple : le calcul n° 3).

*Après avoir enlever le signe multiplier si il y a des lettres, on met le chiffre devant la lettre et si il y a plusieurs lettres elles doivent être dans l'ordre alphabétique.

ex : ; 4 ; 6 ; 7

Opération n° I : Lorsque qu'une opération comprend une lettre et un chiffre et qu'il n'y a qu'une opération à effectuer, On doit, pour abréger : mettre le chiffre d'abord et enlever le signe d'opération

2) Quand il y a des parenthèses et un chiffre tout seul, on met le chiffre avant, les parenthèses après.

Résultats : sur l'ensemble des comptes rendus, on obtient tout ce que l'on attend :

- la suppression du signe "×" dans un produit qui contient au moins une lettre ;
- les nombres sont placés avant les lettres ;
- les lettres sont écrites dans l'ordre alphabétique ;
- les facteurs "solitaires" sont écrits avant les facteurs écrits entre parenthèses ;
- une somme de n termes égaux peut être remplacée par un produit (mais ceci est toujours très mal exprimé) ;
- pour la simplification d'écriture "2c + (–3)", ils se souviennent du travail effectué sur les nombres relatifs.

Conclusion : un débat peut être mené à partir de plusieurs productions d'élèves présentées sur transparent, les objectifs consistent alors à :

- dégager l'essentiel qui pourra ensuite figurer dans le cahier de cours ;
- rassurer les élèves sur la valeur de leurs écrits en leur montrant que les textes des autres sont aussi quelquefois maladroits, ce qu'il faut bien sûr distinguer du contenu. La mise en commun permet justement d'améliorer la forme et d'obtenir une formulation à laquelle tous les élèves adhèrent ;
- bien leur indiquer qu'il s'agit d'usages et non de règles inviolables ; elles facilitent souvent la lecture. Le but n'est pas de les respecter à tout prix, mais les connaître est utile pour lire les formules des autres et pour écrire plus librement.

7 - A chaque texte sa formule, à la recherche de formules

Objectif : traduire une formule par un texte et réciproquement.

Déroulement : ces activités durent de 20 à 45 minutes. Elle sont constituées de trois fiches qui sont données au fur et à mesure ; chaque groupe avance à son rythme (certains sont très rapides).

Les tâches à effectuer sont claires, mais complémentaires. « A chaque texte sa formule » ne pose pas de problème. La fiche « A la recherche de formules » suscite un peu plus de discussions, les mises en commun à l'intérieur de chaque groupe ont levé la plupart des difficultés, le professeur étant parfois sollicité pour jouer le rôle d'arbitre.

Résultats : on note quelques confusions entre $ab + \frac{a}{b}$ et $\frac{a+b}{ab}$.

L'écriture x4 (au lieu de 4x) ne dérange pas certains élèves, mais dans beaucoup de groupes cette écriture a été corrigée par l'un des élèves.

Le mot *retrancher* est peu connu, il est souvent confondu avec *diviser*.

Conclusion : au cours de ces activités, on a remarqué beaucoup "d'auto-corrections", cela laisse penser qu'avec une certaine pratique, le travail de groupe devient très efficace.

V - SUITE DE LA SEQUENCE

Les nouveaux programmes évoquent à plusieurs reprises l'usage des lettres dans les calculs :

- connaître et utiliser les identités $k(a \pm b) = ka \pm kb$ dans les deux sens ;
- utiliser les expressions « en fonction de », « est fonction de » ;
- s'initier à la résolution d'équations.

Nous avons travaillé essentiellement sur les deux premiers points.

Très peu de manuels scolaires consacrent un chapitre au calcul littéral ; celui-ci fait souvent l'objet du dernier paragraphe de la leçon « Enchaînements d'opérations, priorités opératoires » et il se réduit aux formules de distributivité $k(a \pm b) = ka \pm kb$. L'introduction des lettres à cet endroit est assez artificielle car la principale utilisation de la distributivité en 5ème est le calcul mental. Il est vrai que cette leçon peut paraître assez « pauvre » en termes de « contenus » ce qui explique sans doute qu'elle soit souvent négligée. Pourtant, c'est un palier important, qui peut créer des blocages si l'on ne s'y arrête pas.

Au contraire, nous avons proposé un cours assez étoffé sur le sujet. Il commence par les règles de simplifications élaborées après discussion avec les élèves lors du débat qui suit l'activité « Simplifications d'écriture » ; c'est la principale formalisation de ce cours (voir ci-dessous l'extrait d'un cahier d'élève).

Calcule littérale
(avec des lettres)

I) Simplifications d'écriture

* Dans un produit qui contient des lettre on peut supprimer le signe × : $4 \times b = 4b$; $6 \times 2 \times c = 12c$

* Dans un produit s'il y a des nombres et des lettres on écrit les nombres d'abord : $b \times 5 = 5b$;

* S'il y a plusieurs lettres dans un produit, on les écrits dans l'ordre alphabétiques : $b \times 3 \times a = 3ab$

* Dans un produit les facteurs écrits entre parenthèses sont placés après les facteurs "simples" : $(a-2) \times 5 \times (b+3) = 5(a-2)(b+3)$

* $1 \times a = a$ et $0 \times a = 0$

II) Simplifier grâce à la distributivité

La suite est composée d'exercices et de problèmes extraits de manuels scolaires. Les principaux objectifs sont : fréquenter des situations où l'on rencontre des lettres et percevoir l'utilité de ce langage. Par exemple, aux exercices de technique sur la distributivité, nous avons préféré des problèmes qui nécessitaient un développement ou une factorisation. Certains exercices ont été l'occasion de revenir sur les formules de périmètres, d'aires ou de volumes. Au cours de ces différents exercices, nous avons amené les élèves à se poser la question de « l'égalité de deux formules ». Les élèves ont découvert que deux expressions qui prennent la même valeur pour un nombre ne sont pas forcément égales, et que deux expressions en apparence très différentes peuvent prendre toujours la même valeur. C'est aussi l'occasion d'utiliser les acquis (distributivité par exemple) pour démontrer que deux expressions sont égales. On peut à ce sujet montrer la différence qui existe entre « tester une égalité » et « montrer que deux expressions sont égales ». Enfin, à propos d'aires et de volumes, nous avons défini x^2 et x^3. Ce cours est constitué presque exclusivement de problèmes ou d'exercices-types.

Voici quelques thèmes qui peuvent être abordés :

1 - Simplifications d'écritures

Nous avons proposé quelques exercices qui permettent de réinvestir le travail précédemment fait.

Exercice 1 (IREM de Brest 91 - « Mathématiques au collège »)

- $3 \times a \times b$ s'écrit plus simplement 3ab.
- Tu sais que : $a \times 5 \times b = 5 \times a \times b$ donc on peut écrire $a \times 5 \times b = 5ab$
- De même : $3 \times a \times 4 = 3 \times 4 \times a$
  $= 12 \times a$
  $= 12a$

Réduis l'écriture de chacun des produits suivants : (il ne doit plus rester de signe « × »)

$2 \times a \times 8 =$	$a \times b \times 7 =$	$5 \times a \times b \times 3 =$
$2 \times a \times 0{,}5 \times b =$	$3 \times y \times 2 =$	$4 \times y \times 0{,}25 \times b =$

Exercice 2 (Editions Nathan 97 « Transmath » - 5ème)

1. Ecris plus simplement :

$3 \times x - 7$	$a \times (b + 3)$
$5{,}3 \times a$	$a \times 2$
$(3 - x) \times (2 + y)$	$2 \times \pi \times R$

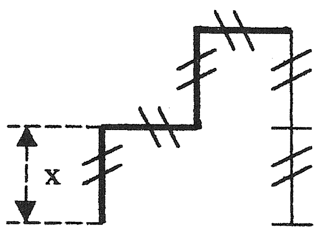
2. Pourquoi dans l'écriture $2{,}56 \times 3$ ne peut-on pas supprimer le signe × ?

3. Deux des écritures suivantes sont des écritures simplifiées de $5 \times a \times 2$; lesquelles ?
52a 7a $5 \times 2a$ 5a2 10a 25a

2 - Simplifier grâce à la distributivité

Longueur d'une ligne brisée (Editions Hachette 97 « Cinq sur cinq » - 5$^{\text{ème}}$)

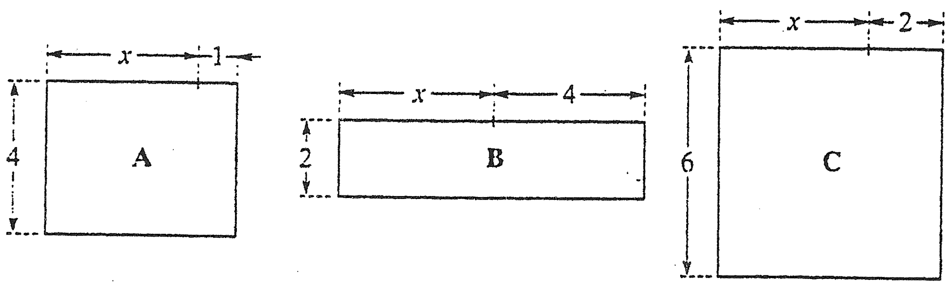
1 – Léane cherche à exprimer la longueur de la ligne en traits gras à l'aide de la lettre x. Comment peut-elle l'écrire ?



2 – Théo propose l'écriture $2 + x$ pour la ligne en traits fins. Etes-vous d'accord avec Théo ?

3 – Pour la longueur totale de la ligne brisée Madeleine propose l'écriture $6 \times x$. Etes-vous d'accord avec elle ? Compléter l'égalité : $4 \times x + 2 \times x = \ldots \times \ldots$

Aires de rectangles (Editions Hachette 97 « Cinq sur cinq » - 5$^{\text{ème}}$)



L'aire du rectangle C est-elle égale à la somme des aires des rectangles A et B ?
Conseil : exprimer d'abord, à l'aide du nombre x, l'aire de chaque rectangle.

Longueurs et cercles (Editions Hachette 97 « Cinq sur cinq » - 5$^{\text{ème}}$)

1 – Calculer la longueur d'un cercle de rayon 4 cm, puis celle d'un cercle de rayon 5 cm. (On prendra 3,14 pour valeur de π). Quelle est la différence entre ces deux longueurs ?

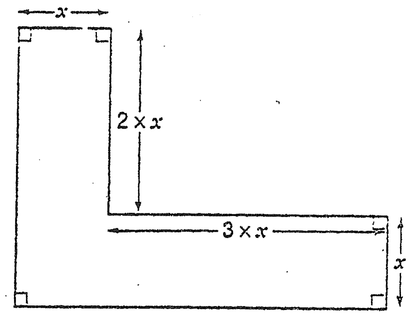
2 – Même question avec deux cercles de rayons respectifs 16 cm et 17 cm.

3 – Comment expliquer que la différence des longueurs de deux cercles de rayon respectif R et (R + 1) soit toujours égale à 2π ?

3 - Exprimer « en fonction de »

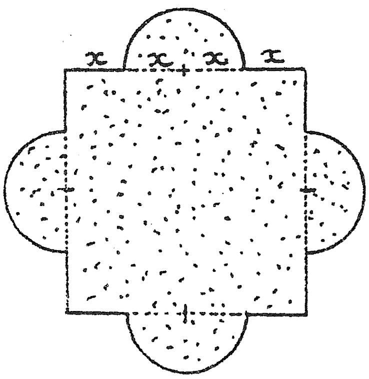
Calculer un périmètre (Editions Hatier 97 – Manuel de 5ème – Collection « Triangle »)

a) Ecrire en fonction de x le périmètre de la figure ci-dessous.
b) Pour quelle valeur de x ce périmètre est-il égal à 21 cm ?
c) Construire la figure pour la valeur de x trouvée.



Longueur de la bordure (Editions Didier 97 – Manuel de 5ème – Collection « Dimathème »)

Voici le plan d'un massif qu'a dessiné un paysagiste. Chaque demi-cercle a pour rayon x (en mètres) et le carré a pour côté $4x$ (en mètres).



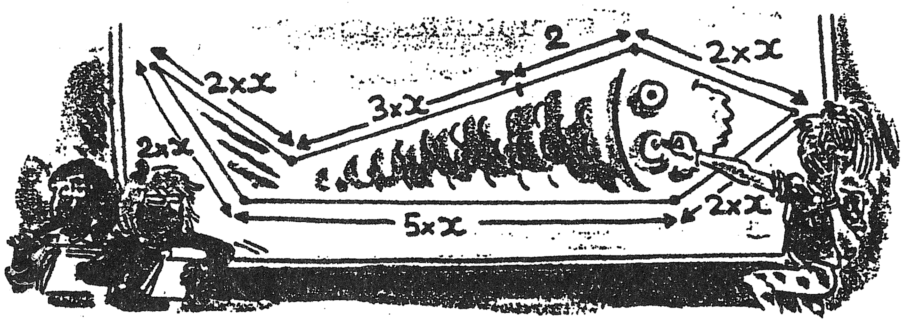
1 – Exprimer, en fonction de x, la longueur en mètres de la bordure de ce massif (on prend 3,14 pour π).

2 – Calculer cette longueur pour $x = 2,5$ m puis pour $x = 3,5$ m.

4 - Egalité de deux expressions littérales

La formule du poisson (Editions Hatier 97 – Manuel de 5ème – Collection « Triangle »)

On veut connaître le périmètre du poisson pour toutes les valeurs de x entières de 2 cm à 15 cm.



A – Calculer le périmètre du poisson pour $x = 2$ cm, puis pour $x = 3$ cm ; $x = 4$ cm ; $x = 6$ cm.

B – Amélie a écrit le périmètre du poisson en fonction de x :

$$P = 2 \times x + 3 \times x + 2 + 2 \times x + 2 \times x + 5 \times x + 2 \times x$$

Stéphanie pense avoir trouvé une formule beaucoup plus simple. Quelle formule a-t-elle trouvée ?

C – Utiliser la formule de Stéphanie pour achever de calculer le périmètre du poisson pour les autres valeurs de x.

Tester une égalité (Editions Hatier 97 – Manuel de 5ème – Collection « Triangle »)

Céline a calculé $4 \times x + 1$. Pour $x = 1$, elle a trouvé 5, puis pour $x = 3$, elle a trouvé 13.

Claire a calculé $x \times x + 4$. Pour $x = 1$, elle a trouvé 5, puis pour $x = 3$, elle a trouvé 13.

A – Vérifier les calculs de Céline et de Claire.

B – Claire dit : « Nous avons l'égalité : $4 \times x + 1 = x \times x + 4$ ».
Céline dit : « Je suis sûre que tu te trompes, il n'y a pas égalité, je l'ai vérifié ! »
Qui a raison ?

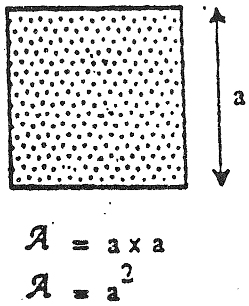
5 - Carrés et cubes

Carrés (IREM de Brest 91 – « Mathématiques au collège »)

1 – Calcule l'aire d'un carré de côté 6 cm (n'oublie pas de donner l'unité).

$\mathcal{A} =$

2 – L'aire d'un carré de côté a s'écrit $a \times a$.



On réduit l'écriture : « $a \times a$ » en l'écrivant a^2 On peut donc écrire : $a \times a = a^2$ L'écriture a^2 se lit : « a au carré » On réduit l'écriture : « $2 \times a \times a$ » en l'écrivant $2a^2$

Réduis l'écriture des produits suivants :

$5 \times a \times a =$ $\quad a \times a \times 3$ $\quad a \times 1 \times a =$ $\quad 2a \times 3a =$

3 – Le carré du nombre 5 s'écrit 5^2 ; $5^2 = 5 \times 5$
$= 25$

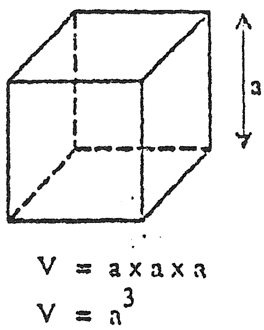
Calcule les carrés des nombres entiers positifs inférieurs à 11.

Cubes (IREM de Brest 91 – « Mathématiques au collège »)

1) Calcule le volume d'un cube d'arête 4 cm. (N'oublie pas de donner l'unité).

V =

2) Le volume d'un cube d'arête a s'écrit $a \times a \times a$.



On réduit l'écriture « $a \times a \times a$ » en l'écrivant a^3 On peut donc écrire : $a \times a \times a = a^3$ L'écriture a^3 se lit « a au cube »

Réduis les écritures suivantes :

$5 \times a \times a \times a =$ $\quad 2a \times 3a \times 5a =$ $\quad 3a \times 2a^2 =$

3) Le cube du nombre 2 s'écrit 2^3 ; $2^3 = 2 \times 2 \times 2$
$= 8$

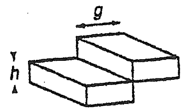
Calcule le cube des nombres entiers positifs inférieurs à 11.

6 - Equations

Cette notion, qui aurait pu faire l'objet d'une étude plus approfondie, a été abordée au travers de quelques exercices.

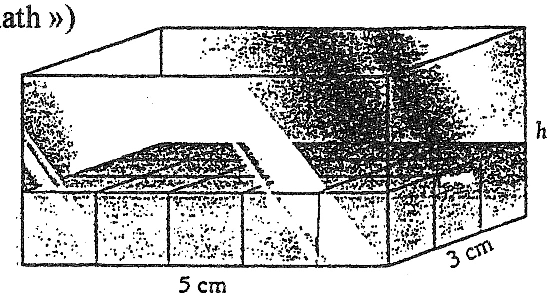
<u>L'escalier</u> (Hatier 97 – Manuel de 5ème « Triangle »)

Pour fabriquer un escalier « dans les règles de l'art » il faut que la formule suivante : $2h + g = 63$ cm soit vérifiée (h est la hauteur de la marche et g sa largeur).



A – Si $h = 15$ combien vaut g ?
B – Si $g = 27$ combien vaut h ?

<u>Le bac en verre</u> (Nathan 97 – 5ème « Transmath »)



1 – Ce bac en verre, sans couvercle supérieur, a la forme d'un pavé droit.
Aurélie range dans ce bac des cubes de côté 1 cm.
a) Exprime le volume de ce pavé droit à l'aide de h.
b) Quelle devrait être la valeur de h pour que ce volume soit égal à 60 cm^3 ?

2 – a) Explique pourquoi la somme des longueurs de toutes les arêtes est égale à :
$$4(h + 5 + 3).$$
b) Vérifie qu'une autre écriture de cette expression est $4h + 32$

3 – a) Montre que la somme des aires des faces de ce bac est égale à : $16h + 15$.
b) L'égalité $16h + 15 = 100$ est-elle vraie pour $h = 5{,}25$?

<u>Programme de calcul</u> (Hachette 97 – 5ème « Cinq sur cinq »)

- Choisir un nombre décimal.
- Multiplier par 4.
- Ajouter 8.
- Multiplier le tout par 1,25.
- Retrancher 10.
- Annoncer le résultat.

1 – Appliquer ce programme de calcul avec 3, puis 11, puis 20,5 comme nombre de départ.

2 – Peut-on trouver le résultat de ce programme plus rapidement sans faire tous les calculs demandés ? (Utiliser x au départ).

3 – Quel était le nombre de départ choisi sachant que le résultat annoncé est 80 ? 12,5 ?

VI - CONCLUSION

1 - Des difficultés plus ou moins tenaces

Tout au long de notre séquence, les élèves ont presque tous rencontré les mêmes obstacles, parfois à plusieurs reprises :

1. Les règles de priorité (les élèves sont capables de les énoncer, mais ne les appliquent pas toujours).
2. Les coefficients dans les formules : « *pourquoi 0,3 ? C'est comme π pour la longueur du cercle* ». De manière générale, les élèves acceptent mal une formule dont on ne peut pas expliquer l'origine ; et dans ce cas, nous avons remarqué que remplacer une lettre par une valeur numérique n'est pas si facile.
3. L'expression « en fonction de ».
4. La même variable à plusieurs endroits.
5. $1 \times a = a$ paraît naturel ; par contre la difficulté apparaît lorsqu'il faut reconnaître $a = 1 \times a$, par exemple lorsqu'il faut simplifier l'écriture $6a + a$.

2 - Des difficultés surmontées

Calculer avec un nombre inconnu commence à entrer dans les habitudes, et le bilan que nous avons réalisé à la suite de cette séquence montre que certains obstacles sont bien surmontés, en particulier les difficultés 3, 4 et 5 précédemment énoncées.

En fin de séquence, quelques exercices de technique pure ont été proposés et nous avons été surpris par l'aisance des élèves.

Les élèves de $5^{ème}$ réussissent assez bien lorsque le support du problème leur permet de concevoir une formule ou d'en appréhender le sens. C'est une première étape qui permet de fréquenter le calcul littéral, de prendre confiance et d'être mieux préparé à travailler avec des expressions détachées de tout contexte.

3 - Une hypothèse à confirmer

Enoncer des règles comme la distributivité ou la commutativité dans toute leur généralité, avant d'aborder des activités sur le calcul littéral, nous semble peu efficace ; en effet les élèves qui ont dans ce domaine des difficultés ne comprennent pas réellement la signification de ces énoncés. Ces élèves, pour transformer des écritures littérales, appliquent des règles sans moyen de contrôle. En effet, il n'est pas rare d'entendre dans les classes : « *est-ce qu'on a le droit de* ... ». Le danger est alors que les élèves s'approprient de « fausses règles » comme : $6a - a = 6$ ou encore $6 - 2a = 4a$

On peut faire la comparaison avec le rôle de la grammaire en français : celle-ci n'est vraiment utile que pour celui qui maîtrise suffisamment la langue (on n'apprend la grammaire aux enfants que lorsqu'ils savent lire). De même, il nous semble pertinent d'attendre que les élèves aient rencontré des situations donnant du sens aux formules avant de travailler sur des transformations d'écritures littérales.

DES OBJECTIFS AMBITIEUX POUR TOUS

I - INTRODUCTION

Au départ les enseignants du groupe étaient surtout sensibilisés par les problèmes des élèves en difficultés. Pour les autres élèves, nous nous contentions de tester plusieurs problèmes « non-standards » ou classés difficiles, de manière un peu désordonnée. Mais dès les premières expérimentations nous avons pris conscience de l'opportunité qu'on avait de faire « autre chose » avec des élèves qui, a priori, ne rencontrent pas de difficultés et nous avons éprouvé le besoin de structurer ces séquences pour en profiter au maximum. Nous voulions aider les élèves en difficultés sans négliger les autres.

Nous avons pensé qu'il fallait développer chez les élèves des compétences un peu délaissées, faute de temps, lorsqu'on travaille avec la classe entière :

- lire toutes sortes d'énoncés (même longs),
- apprendre à résoudre des problèmes difficiles en élaborant sa propre stratégie,
- devenir plus autonome,
- apprendre à écrire des textes mathématiques.

Nous avons donc choisi nos activités conformément à ces objectifs et nous les avons classées par thèmes ; lorsque les élèves en difficultés préparent une leçon, les autres travaillent sur un thème qui n'a rien à voir avec cette leçon. Nous avons aussi envisagé que les élèves de ce groupe présentent aux autres ce qu'ils ont réalisé pendant ces séquences.

II - UNE AUTRE APPROCHE DES MATHS

1 - Les maths : est-ce seulement des règles ?

L'idée que les élèves se font de la discipline ressemble souvent à : « en maths, on a des règles d'action, des techniques qu'on apprend et qu'on applique » ; paradoxalement cette idée est peut-être encore plus forte chez les élèves qui réussissent plutôt bien : quand on comprend de suite comment ça marche on a moins besoin de réfléchir. La complexité des tâches proposées ici les oblige à devenir acteurs : ils sont amenés à chercher et à élaborer leurs propres outils. Certains élèves peuvent être déstabilisés au départ mais l'intérêt porté au problème l'emporte.

2 - Accomplir un travail de longue haleine

Le travail personnel demandé aux élèves consiste souvent à résoudre plusieurs exercices, chacun d'eux pouvant être généralement traité assez rapidement. Il est important que les élèves découvrent qu'une tâche plus complexe nécessite du temps, qu'il faut quelquefois faire plusieurs essais infructueux pour avancer et qu'analyser une situation demande qu'on s'investisse vraiment. Il faut donc être perspicace pour achever le travail mais réaliser un travail plus long et plus difficile procure toujours de la satisfaction. Il faut veiller à ce que les problèmes soient suffisamment intéressants et qu'ils n'entraînent pas de situation d'échec car un certain découragement pourrait avoir des conséquences contraires à ce que nous recherchons.

3 - Découvrir que résoudre un vrai problème peut procurer le plaisir de chercher

L'idée suivante est aussi trop répandue : « en maths la solution est immédiate, quand on trouve c'est tout de suite, on a la bonne règle et on l'applique sinon ce n'est pas la peine d'insister ». Les activités proposées peuvent bousculer ces idées bien ancrées car la réponse n'est pas immédiate et il faut chercher. Or pour faire des maths et y prendre plaisir il faut être capable de faire face à une situation inconnue.

Un de nos objectifs est de montrer que chaque situation est différente et qu'il n'y a pas forcément de recette toute prête. Donner aux élèves l'occasion de réaliser une tâche difficile a priori peut leur donner confiance et éviter de considérer comme un échec le fait qu'ils ne parviennent pas à résoudre rapidement un problème. Le plaisir de chercher, de réfléchir, de trouver n'est pas négligeable. Travail et plaisir se concilient très bien et c'est ce qui entraîne la motivation.

III - FONCTIONNEMENT

1 - Travail en groupes

Les bons élèves sont souvent enclins à travailler individuellement ; dans les activités proposées c'est souvent la « panne » qui a déclenché les premiers échanges. Les discussions obligent chaque élève à exprimer clairement ce qu'il a fait et à critiquer ce que peuvent proposer les autres. Enoncer ce qu'on est en train de faire permet de clarifier ses idées et on finit par échafauder une solution. A plusieurs on peut surmonter plus de difficultés et élaborer des stratégies plus performantes.

Pour chaque activité faite en groupe, on a demandé un compte-rendu par groupe, toujours dans le souci de leur montrer la richesse du travail en commun. Ce type de fonctionnement est souvent une découverte pour les bons élèves et au départ ce n'est pas toujours évident. En classe entière, certains de ces élèves ne voient pas la nécessité des séquences « activités » pour préparer une notion et s'ennuient car la tâche leur paraît trop facile. On peut saisir l'occasion de leur montrer que le travail de groupe n'est pas seulement récréatif.

2 - Exploitation des travaux : élaboration d'une affiche

Il est important de préciser aux élèves, au départ, les objectifs : présenter le thème qui va être abordé, préciser dans quelle partie du programme il s'inscrit et le bénéfice qu'ils peuvent en tirer. Il faut qu'ils sentent qu'on ne se contente pas de les occuper. Pour que le travail réalisé ne soit pas immédiatement classé, nous leur avons demandé de faire des affiches pour faire une synthèse de ce qui a été fait dans le but de les présenter aux élèves de l'autre groupe.

Suite aux expérimentations réalisées, voici ce que nous conseillons :

◊ il faut que chaque groupe ait une affiche à réaliser sur une activité (les élèves sont plus motivés quand ils ont une tâche spécifique à faire) ;

◊ plusieurs affiches peuvent être réalisées sur un même problème mais on peut alors nuancer : une affiche peut présenter le problème, une autre peut proposer une piste de résolution, une autre encore une démarche différente ;

◊ il vaut mieux demander aux élèves de ne pas écrire la solution, c'est souvent ce qu'ils ont envie de faire au départ mais ce n'est pas très accrocheur pour le spectateur ;

◊ il faut que dès le départ les élèves sachent qu'ils ont ce travail à faire, cela leur laisse du temps pour imaginer leur affiche.

Ces affiches peuvent être utilisées pour informer l'autre groupe : il faut prévoir un moment lorsque la classe se retrouve au complet et demander à chaque groupe de commenter son affiche. Ceci peut répondre à la curiosité légitime que nous avons remarquée de la part des élèves en difficulté à propos de ce que les « autres » font.

IV - CHOIX DES ACTIVITES

Au départ, nous avons cherché un peu dans toutes les directions : des problèmes un peu difficiles à caractère ludique. Puis nous avons retenu les critères suivants dans les choix que nous avons faits :

- il nous paraît essentiel que les compétences développées dans les activités proposées soient en adéquation avec le programme. Ce fonctionnement est une opportunité offerte aux « bons » élèves pour approfondir des domaines étudiés et enrichir les acquis ;

- nous avons choisi des problèmes où la solution n'est pas immédiate, ce qui implique un travail assez long (jusqu'à une heure) où les élèves s'investissent ;

- les activités sont prévues pour fonctionner autant que possible de manière autonome (on peut éventuellement envisager de faire travailler ce groupe dans une salle voisine de celle où travaillent les élèves en difficulté mais ceci ne nous paraît pas facile à gérer) ;

- les problèmes choisis sont concrets, ils nécessitent des connaissances mathématiques mais demandent aussi de s'organiser, de bien lire, de mathématiser et enfin, quand on a la solution, de pouvoir l'expliquer.

Nous avons classé les problèmes selon trois thèmes :

Premier thème *: Lecture d'énoncés, traitement d'informations, organisation.*

Deuxième thème : *Manipuler en géométrie.*

Troisième thème : *Vers les équations.*

1 - Premier thème : Lecture d'énoncés – Traitement d'information – Organisation

« A la recherche du butin » [1]

C'est un travail de lecture avec deux supports d'information se complétant : un texte assez long et une carte. Il s'agit de retrouver 5 itinéraires à partir d'informations dispersées dans le texte, ce qui nécessite une lecture complète du texte et pas seulement linéaire.

C'est un travail individuel qui nécessite de 30 minutes à 1 heure. L'itinéraire n° 1 est reconstitué assez rapidement mais ensuite des relectures plus approfondies et multiples sont nécessaires pour trouver les indices qui se situent dans différents endroits du texte. Il faut aussi bien utiliser la légende de la carte (y compris la flèche indiquant le nord). Les élèves ont quelques difficultés à différencier les villes des lieux-dits ou villages. Voici les erreurs les plus fréquentes :

* à propos du renseignement B, les élèves pensent que la cache 1 est à 4 km de la mairie, la cache 2 à 9,3 km etc ... ;
* ils ne tiennent pas compte du renseignement C ;
* ils trouvent Laubel-Vernon au lieu de Mournay-Vange pour l'itinéraire 4 ; au départ ils ne pensent pas à contrôler la distance Beaumont-cache 4, c'est l'occasion de les inciter à valider leurs réponses ;
* la consigne D n'est pas toujours bien prise en compte.

C'est une activité stimulante et ludique (on joue à l'inspecteur de police) que tous parviennent à faire en plus ou moins de temps : quelques élèves ont eu besoin de plus d'une heure. Il faut rassurer certains élèves qui ont essayé plusieurs fausses pistes et les relancer, mais la gradation des difficultés favorise la réussite. Une correction individuelle a été effectuée. Ce travail peut être aussi proposé en groupes mais il nous semble préférable, dans un premier temps, de demander un travail individuel.

« En vacances »

C'est un travail de lecture et de traitement d'informations. On donne des renseignements concernant 5 personnes, il s'agit de retrouver pour chacune d'elles : l'âge, le lieu d'habitation, la profession et le sport qu'elle pratique. Cette activité peut être présentée avec un tableau de vérité mais cela nous a paru contraire à nos objectifs, car favorisant nettement une seule procédure.

Nous avons proposé cette activité en travail individuel, elle dure de 20 à 50 minutes et tous parviennent au résultat.

Les procédures observées sont assez différentes : certains commencent par les âges alors que d'autres terminent par cette donnée. Ils ont la possibilité de s'auto-contrôler en relisant les informations mais ils n'aiment pas trop le faire.

---

[1] Cette activité est tirée du poly IREM « Quelles lectures pour quelles tâches ? » (Février 1996).

Ils présentent généralement les résultats sous forme de tableau mais ils n'utilisent pas le tableau comme stratégie de résolution.

Aux informations données, ils en rajoutent certaines qui leur paraissent « évidentes » comme : « *l'étudiant est plus jeune que l'ingénieur* » ou « *secrétaire, c'est un métier de femme* ».

Cette activité fonctionne bien ; au départ la consigne est claire mais le grand nombre d'informations déroute un peu les élèves. Toutefois ils se débrouillent plus ou moins rapidement en mettant les différentes informations en relation. La solution est facile à écrire ; il serait peut-être intéressant de leur demander d'expliquer et d'écrire la stratégie adoptée. Nous avons procédé à une correction individuelle.

« La Fourmi et le cube »

A partir d'un support géométrique et d'une tâche a priori assez simple, l'objectif est de fabriquer un algorithme (arbre permettant de classer toutes les possibilités).

La fourmi partant d'un sommet se promène sur les arêtes d'un cube (elle parcourt une arête en une minute), on demande de trouver tous les itinéraires possibles en 3 minutes puis en 4 minutes (attention ! à un autre sommet du cube se trouve un oiseau qui peut manger la fourmi).

Cette activité s'est faite en groupes de 3 élèves et a duré une heure ; tous n'ont pas terminé faute de temps.

Au départ, ils travaillent individuellement et écrivent plusieurs trajets possibles (méthode empirique) ; ils pensent qu'il ne faut pas que la fourmi aille en G. En comparant les trajets obtenus (ils en ont entre 10 et 15) à l'intérieur de chaque groupe, ils prennent conscience que cette méthode ne leur permet pas de trouver toutes les solutions et qu'il faut s'organiser. Le problème est alors clairement posé : comment trouver tous les trajets et ne pas en oublier ? Ils commencent alors à ranger et à voir qu'en partant d'un sommet, il y a 3 possibilités à chaque fois ; exemple : AE AB AD.

Au bout de 45 minutes, sans arbre mais en ayant compris, ils ont les 27 solutions, mais il y a toujours des réticences à écrire les parcours atteignant G.

On obtient :	ABAB	ABCB	ABFB
	ABAD	ABCD	ABFE
	ABAE	ABCG	ABFG
	ADAD	ADCD	ADHD
	ADAB	ADCB	ADHE
	ADAE	ADCG	ADHG
	AEAE	AEFE	AEHE
	AEAD	AEFB	AEHD
	AEAB	AEFG	AEHG

Pour trouver ensuite tous les itinéraires que la fourmi peut faire en 4 minutes, plusieurs groupes recommencent tout le travail sans utiliser le travail fait précédemment. Il faut souvent intervenir pour leur montrer qu'on peut réinvestir le travail précédent. A la fin de la séance les groupes qui ont fini parviennent en complétant le travail précédent comme ceci :

Groupe 3 :

ABAB → A, C, F

ABAD → C, H, A

ABAE → A, H, F

ou groupe 1 :

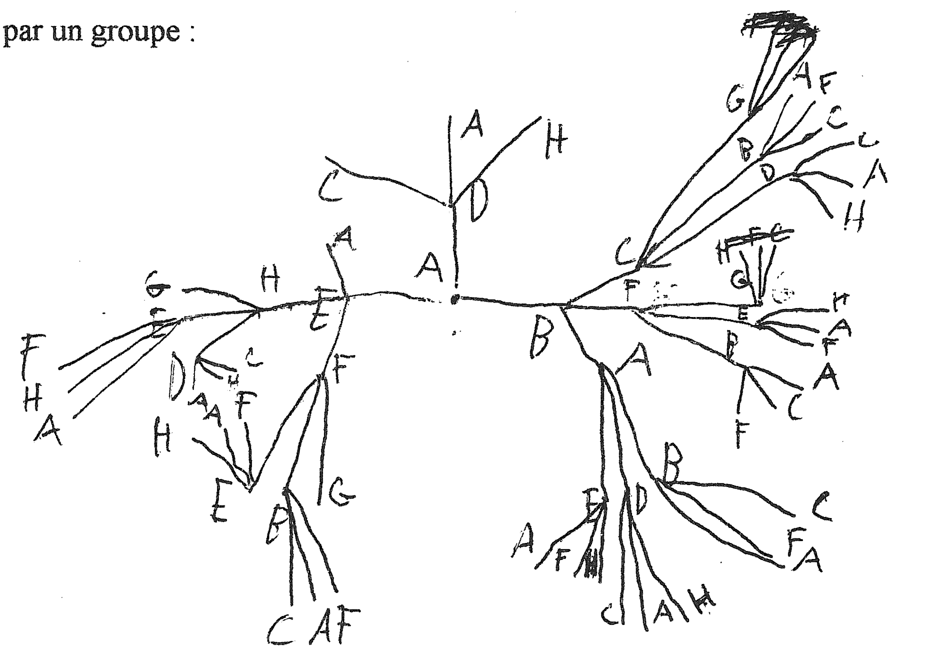
ABAB (BF ou BA ou BC)
ABAD (DC ou DA ou DH)
ABAE (EA ou EH ou EF)

Quelques groupes terminent à la séance suivante dont un qui réécrira les 63 solutions sans utiliser le travail déjà fait.

Cette activité propose une situation où une classification s'impose (sous forme d'arbre éventuellement) ; c'est un travail de gestion assez nouveau pour les élèves et il a fallu relancer la recherche car au départ ils ne voient pas que le travail est inachevé même quand ils ont obtenu 15 ou 19 solutions. Un seul groupe a pensé à faire un arbre mais la présentation n'était pas parfaite (cf. extrait ci-dessous). Les autres ont immédiatement vu l'intérêt de cette disposition quand on le leur a montré.

Les compte rendus ne contiennent pas que les réponses aux questions posées, on a rencontré des commentaires comme : « *En 3 minutes la fourmi a 21 chances sur 27 d'être encore en vie* », d'autres ont encadré ou barré les itinéraires aboutissant au sommet occupé par l'oiseau ; ceci prouve bien que la présence de la fourmi et de l'oiseau qui peut nous paraître anecdotique contribue à maintenir l'intérêt des élèves.

Arbre réalisé par un groupe :



A LA RECHERCHE DU BUTIN

Bernard Mignot est un escroc qui a caché son butin dans cinq endroits de la région, dont voici la carte.

Pour les retrouver il a écrit un certain nombre de renseignements.

A) Les 5 itinéraires suivants partent de villes différentes, et pour rejoindre les « caches » qui sont hors des villes on ne traverse aucune agglomération.

Itinéraire n° 1 : Partir vers la carrière. Prendre la première à droite. Après le moulin tourner à gauche et rejoindre la troisième maison.

Itinéraire n° 2 : Direction Beaumont. Traverser la voie ferrée, tourner à gauche au premier carrefour. Prendre à droite dans la forêt. C'est la troisième habitation sur la gauche. Il n'y a pas de calvaire sur cet itinéraire.

Itinéraire n° 3 : Direction Vibourg. Traverser la voie ferrée. Ensuite prendre la première à gauche. Traverser la rivière. Au calvaire, prendre à droite jusqu'à la première maison.

Itinéraire n° 4 : Partir vers l'Est. Prendre la première à gauche. Passer sur la rivière puis prendre la deuxième à droite jusqu'au château.

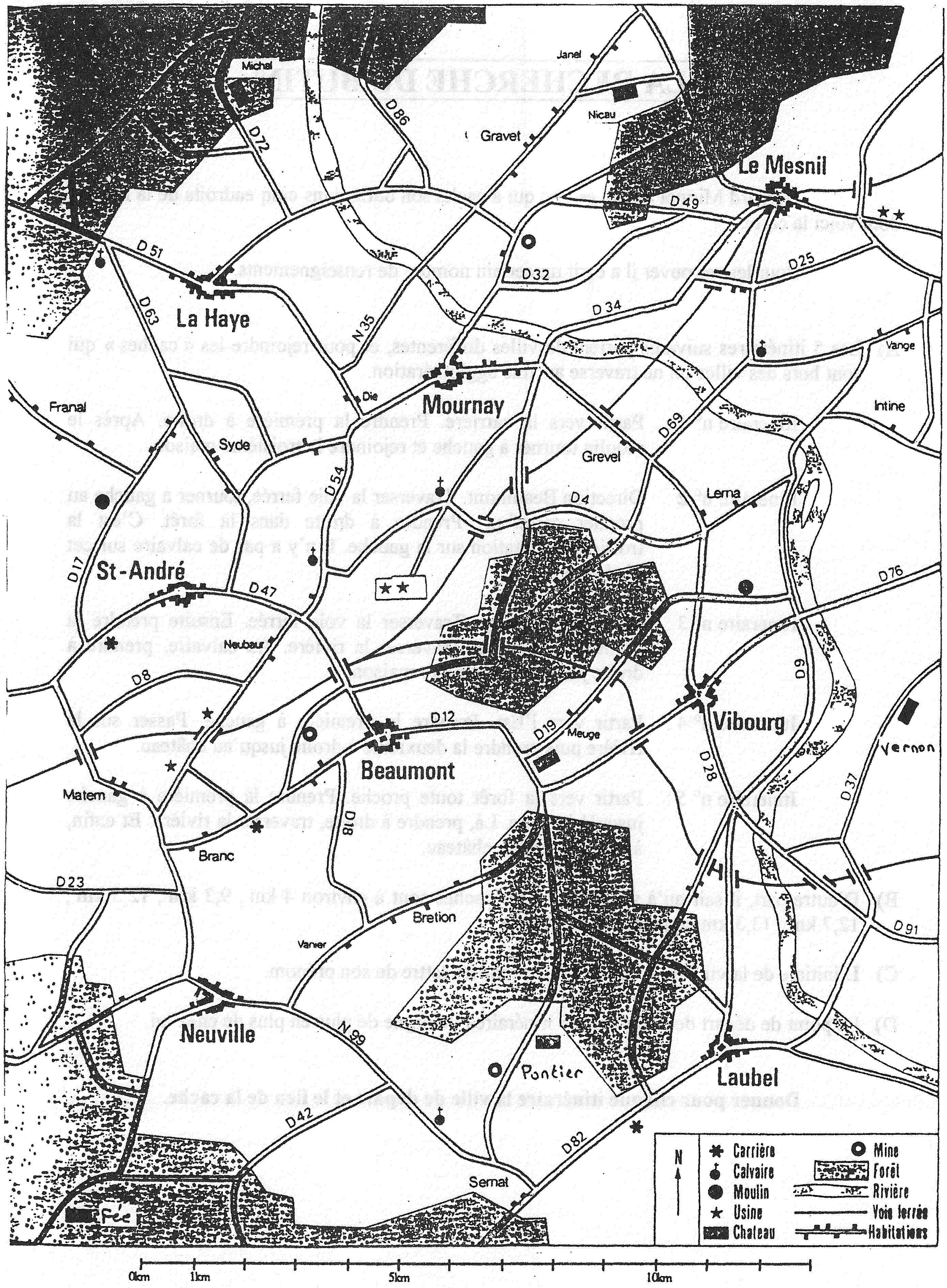
Itinéraire n° 5 : Partir vers la forêt toute proche. Prendre la première à gauche jusqu'à la mine. Là, prendre à droite, traverser la rivière. Et enfin, à droite jusqu'au château.

B) D'autre part, il sait qu'à vol d'oiseau les caches sont à environ 4 km ; 9,3 km ; 12,5 km ; 12,7 km ; 13,3 km de la mairie de sa ville.

C) L'initiale de la ville où il habite est la première lettre de son prénom.

D) Le point de départ de chacun des 5 itinéraires l'éloigne de plus en plus de chez lui.

Donner pour chaque itinéraire la ville de départ et le lieu de la cache.


Michel
Janel
Nicau
Gravet
D86
D72
Le Mesnil
D49
D51
D32
D25
La Haye
D63
N35
D34
Vange
Franal
Die
Mournay
Intine
D69
Syde
Grevel
D54
D4
Lerna
D17
St-André
D47
D76
Neubaur
D8
D9
D12
Vibourg
D19
Meuge
Vernon
Beaumont
D28
D37
Matem
D18
Branc
D23
Bretion
D91
Varner
Neuville
N99
Pontier
Laubel
D42
D82
Semat
Fée
N
Carrière
Calvaire
Moulin
Usine
Chateau
Mine
Forêt
Rivière
Voie ferrée
Habitations
0km
1km
5km
10km

EN VACANCES

Cinq personnes passent leurs vacances ensemble.

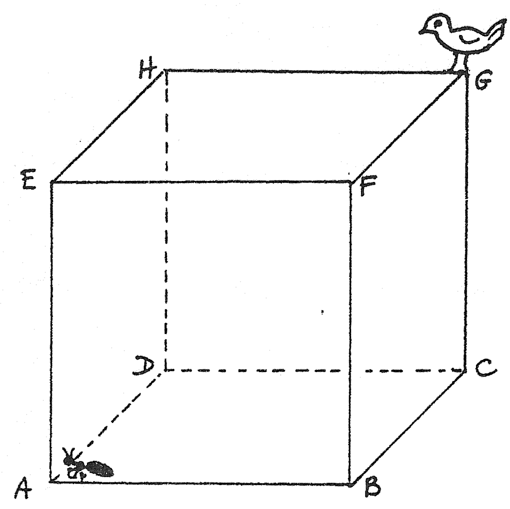
On connaît les renseignements suivants :

- La somme de leurs âges est 122 ans.
- Les âges s'échelonnent de 1 an en 1 an sauf pour deux personnes qui ont le même âge.
- Il y a deux femmes et trois hommes.
- Les deux personnes qui ont le même âge sont de sexe différent.
- Christine est la plus âgée, elle n'habite pas Paris
- Dominique qui est d'Antibes fait de l'escalade.
- Maxime qui est seul de son âge est ingénieur.
- Stéphane est plus âgé que Vincent, il fait de la planche à voile.
- Le parisien fait de la natation. Il est plus jeune que le nancéien qui fait de la marche et que la cycliste qui est pharmacienne.
- L'étudiant qui est le plus jeune n'habite ni Brest, ni Antibes, ni Versailles.
- Le professeur est brestois ; il n'est pas secrétaire et ne nage pas.

Qui, a quel âge, habite où, a quelle profession, pratique quel sport ?

LA FOURMI ET LE CUBE

Une fourmi se promène sur les arêtes d'un cube en fil de fer.
Elle part du sommet A. Pour parcourir une arête, il lui faut une minute. A chaque sommet, elle choisit au hasard une des trois arêtes qui partent de ce point. Si elle parvient au point G, elle est mangée par un oiseau…
Trouve tous les itinéraires que la fourmi peut faire en 3 minutes, puis en 4 minutes.
Si tu veux aller vite et trouver tous les trajets, il va falloir t'organiser sérieusement.



2 - Deuxième thème : Manipuler en géométrie

Il y a deux problèmes dans ce thème dont la solution passe par la réalisation d'un dessin, mais celle-ci est loin d'être immédiate.

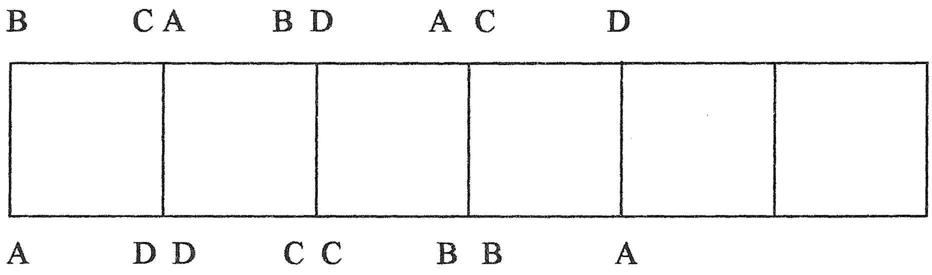
« Trajectoire d'un point »

Il s'agit de déterminer et de dessiner des lieux géométriques. On leur demande d'abord de dessiner l'ensemble des positions occupées par un des sommets d'un triangle équilatéral qu'on fait « rouler » sur une droite. Puis on leur demande de faire la même chose avec un carré à la place du triangle équilatéral.

Ce travail est individuel, on demande à chaque élève de faire les tracés, mais ils peuvent se concerter. Il faut prévoir entre 40 minutes et 1 heure.

Au départ les élèves tracent plusieurs triangles juxtaposés sur la droite et il faut leur expliquer qu'ils n'ont pas fini le travail demandé et que l'objectif est d'obtenir la ligne que dessine le sommet choisi en se déplaçant (il faut dessiner la « trace » de ce sommet). Il faut parfois les inciter à tracer des triangles intermédiaires. Ils parviennent finalement à la bonne trajectoire.

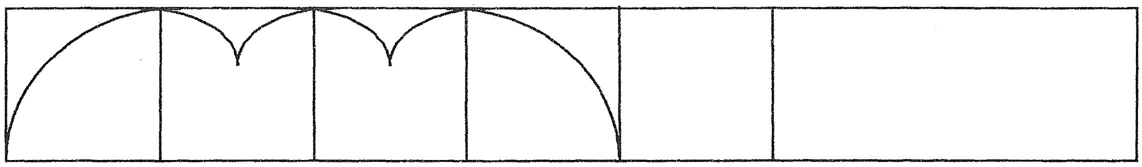
Pour le carré, certains groupes tracent les carrés « stratégiques » en plaçant correctement le sommet A dont on cherche la trajectoire mais celle-ci n'apparaît pas (cf. dessin suivant).



Il faut alors les inciter à tracer d'autres carrés. Certains élèves au contraire, tracent trop de carrés intermédiaires, la figure est très confuse et il devient alors très difficile de s'y retrouver (dans ce cas il est préférable de recommencer, d'où la nécessité de prévoir des fiches supplémentaires). D'autres ont manipulé soit un carré de carton soit une gomme qu'ils ont fait « rouler » sur la table.

Cette activité souvent nouvelle pour les élèves requiert de la rigueur et du soin mais ils y parviennent, parfois après avoir refait leurs tracés.

Nous avions proposé une première version de la fiche dans laquelle était fourni l'exemple du triangle équilatéral (triangles intermédiaires et trajectoire) mais l'activité perd alors beaucoup de son intérêt : il y a moins de difficultés mais il n'y a plus le plaisir de la découverte ; nous avons même remarqué que l'exemple induisait parfois les élèves en erreur (ils reproduisaient une trajectoire semblable à celle du triangle comme sur le dessin ci-après). Ces 2 exemples permettent de graduer les difficultés : l'exemple du triangle leur permet de comprendre ce qu'est une trajectoire, ils sont ensuite mieux armés pour l'exemple du carré qui est plus difficile.



L'ordinateur nous semble être l'outil idéal pour corriger cette activité mais nous n'avions pas les moyens de l'utiliser.

« **Les ronds-points** » (d'après Gérard AUDIBERT)

C'est un travail de tracé de figures : on leur demande de tracer 2 cercles et 1 rectangle de façon à ce qu'ils aient, deux à deux, le maximum de points d'intersection (en fait c'est 18).

C'est un travail individuel rapide qui ne peut pas faire l'objet d'une séance mais qui peut être proposé aux élèves qui ont terminé « Trajectoire d'un point ».

Ils trouvent 16 points d'intersection assez facilement. Il faut ensuite leur dire que ce n'est pas le maximum. Ils découvrent alors qu'on obtient deux points de plus lorsque chaque cercle coupe les 4 côtés du rectangle. Il est souvent nécessaire, ensuite, de faire plusieurs dessins afin d'en proposer un qui soit clair.

Cet exercice ne présente pas de difficultés particulières, il exige surtout des qualités de soin.

« **L'Araignée et la Mouche** » (d'après Repère IREM n°8 Juillet 92)

C'est une activité géométrique dans l'espace : il faut trouver le plus court chemin d'un point à un autre d'un pavé droit en suivant les faces. Pour obtenir ce chemin il faut développer le pavé mais pas n'importe comment.

C'est un travail de groupe difficile et long ; il faut prévoir au minimum 1 heure (souvent c'est trop juste). Ce problème peut difficilement être résolu sans l'aide du professeur.

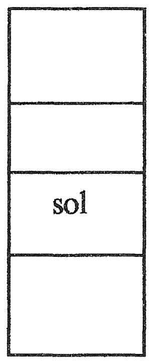
Lorsque les élèves lisent le problème, une solution « évidente » s'impose à eux très rapidement (8,40 m) et ils sont un peu désemparés lorsqu'on leur dit qu'il y a plus court (nous avons remarqué que ce problème déroutait aussi des collègues). Voici quelques réactions d'élèves :

- Maude : « *On va mettre des couleurs pour voir s'il y a plus court* »
- Sabrina : « *Ça ne peut pas être plus petit que 6 m* »
- Gaëlig : « *L'araignée tisse un fil et traverse la pièce* »
- Yoann : « *Doit-elle suivre les arêtes ?* »

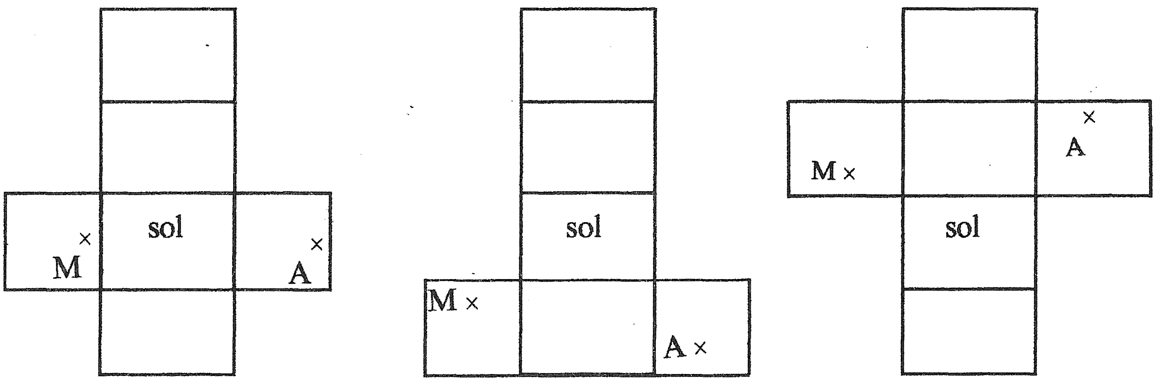
Au départ ils travaillent tous sur le dessin en perspective donné dans le texte, certains font des mesures sur ce dessin et il faut rappeler que sur une perspective les dimensions ne sont pas proportionnelles aux longueurs réelles. D'autres observent la salle de classe pour imaginer différents trajets. Il faut attendre un certain temps pour que des élèves pensent à faire un patron, ce n'est d'ailleurs pas le développement lui-même qui les intéresse dans un premier temps mais le volume qu'ils vont ainsi réaliser. Ici l'intervention du professeur est souhaitable pour confirmer (ou éventuellement suggérer) qu'on trouve le chemin le plus court en utilisant le développement. La tâche qui reste à accomplir est encore suffisamment « consistante » (voir qu'on peut développer le pavé de plusieurs façons, réaliser le patron à l'échelle, placer l'araignée et la mouche au bon endroit sur les différents développements.....).

Ce problème, très riche, est difficile mais l'intérêt des élèves l'emporte et on a remarqué un certain acharnement à chercher. La solution ne s'obtient qu'en passant de l'espace au plan, le développement est ici un moyen alors que souvent, dans les exercices que les élèves ont pu rencontrer, c'est une finalité. Les manipulations que les élèves sont amenés à faire sont très formatrices.

Nous avons parlé d'aide à apporter aux élèves mais nous n'avons pas pris le temps de bien répondre à cette question. Lors d'une expérimentation, lorsque l'idée de développer est apparue chez les élèves, nous leur avons proposé des patrons inachevés sur du papier millimétré.

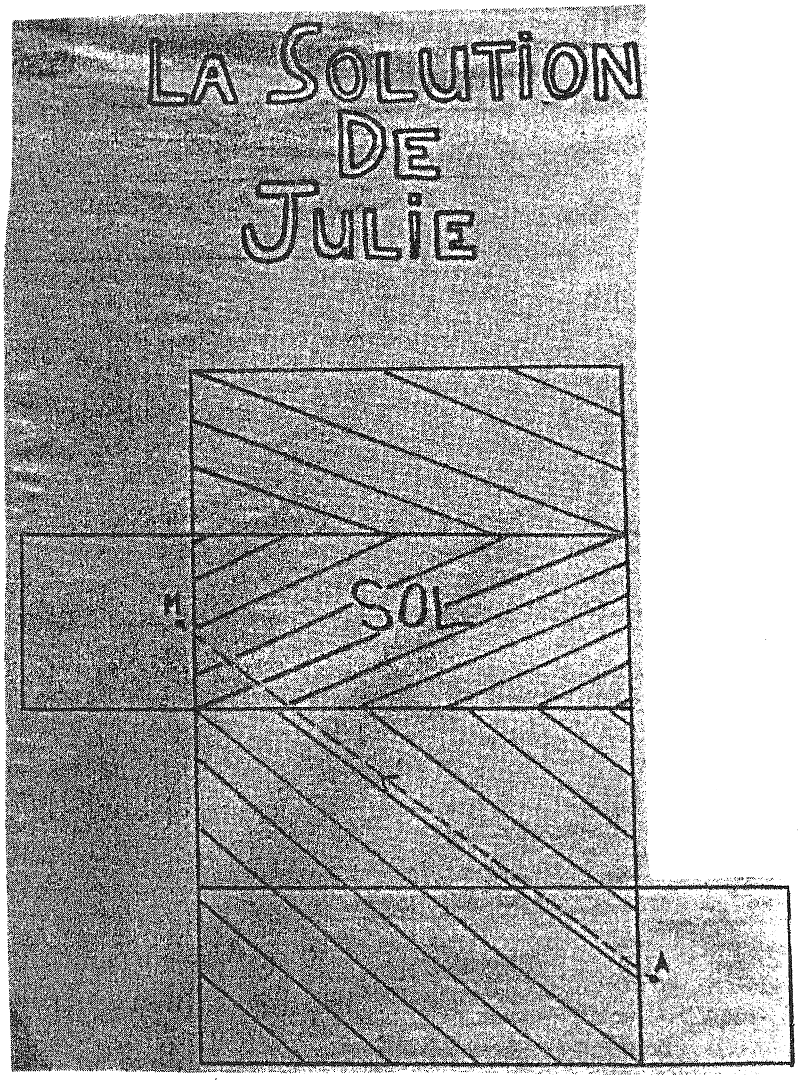


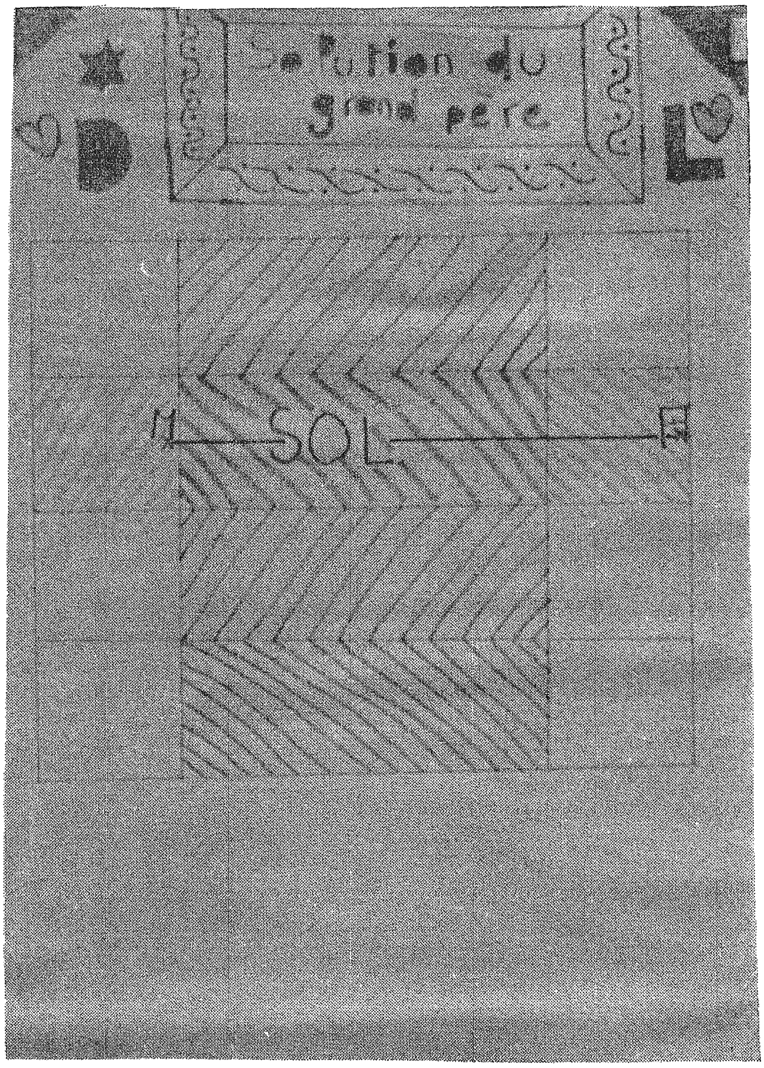
Les élèves commencent par plier ces patrons « manchots », l'idée de compléter ces patrons ne vient qu'ensuite. Au départ les carrés ajoutés sont « face à face » et il faut insister pour qu'ils imaginent autre chose. Dans un groupe la superposition des 3 patrons obtenus a conduit au succès (cf. dessins).



On peut sûrement imaginer des aides qui permettraient aux élèves de travailler de manière plus autonome. Il existe un matériel pédagogique formé de rectangles et de carrés (entre autres) de couleur en plastique qui peuvent s'assembler ou se dissocier, ce qui permet de réaliser des volumes et de les développer suivant les arêtes choisies. Mais ceci n'est pour le moment qu'une hypothèse.

En conclusion ce problème mérite qu'on y réfléchisse et malgré la difficulté, il ne faut pas hésiter à le donner, les élèves accrochent bien. Un groupe a d'ailleurs fait deux affiches originales exposant 2 solutions : la bonne et celle du grand-père.

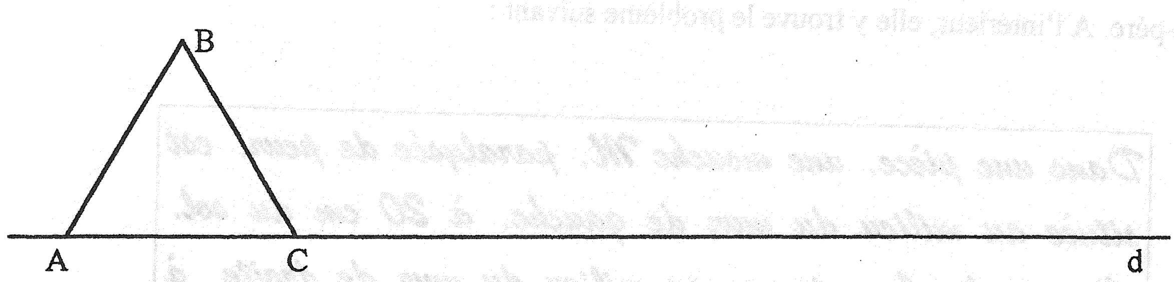



Solution du
grand père
D
L
M
SOL

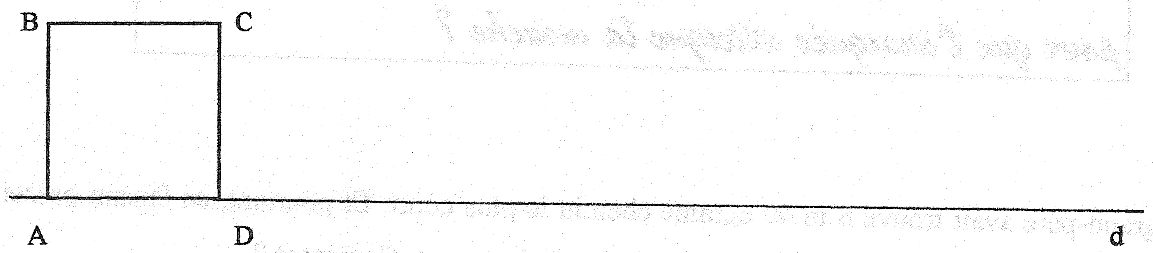
TRAJECTOIRE D'UN POINT

(d'après le bulletin inter IREM, suivi scientifique – 1985/1986)

Tracer la ligne parcourue par le sommet A quand on fait « rouler » le triangle équilatéral ABC sur la droite d.

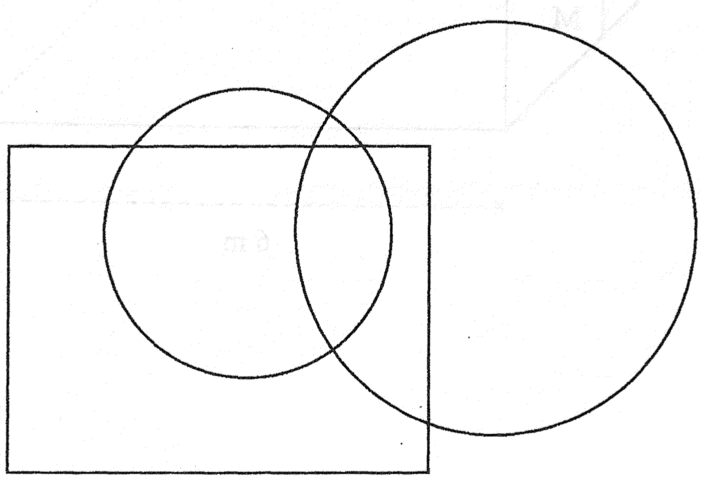


Tracer la ligne parcourue par le sommet A quand on fait « rouler » le carré ABCD sur la droite d.



RONDS – POINTS

Tracer deux cercles et un rectangle afin d'avoir le maximum de points d'intersection.
Exemple : ici, 6 points d'intersection.

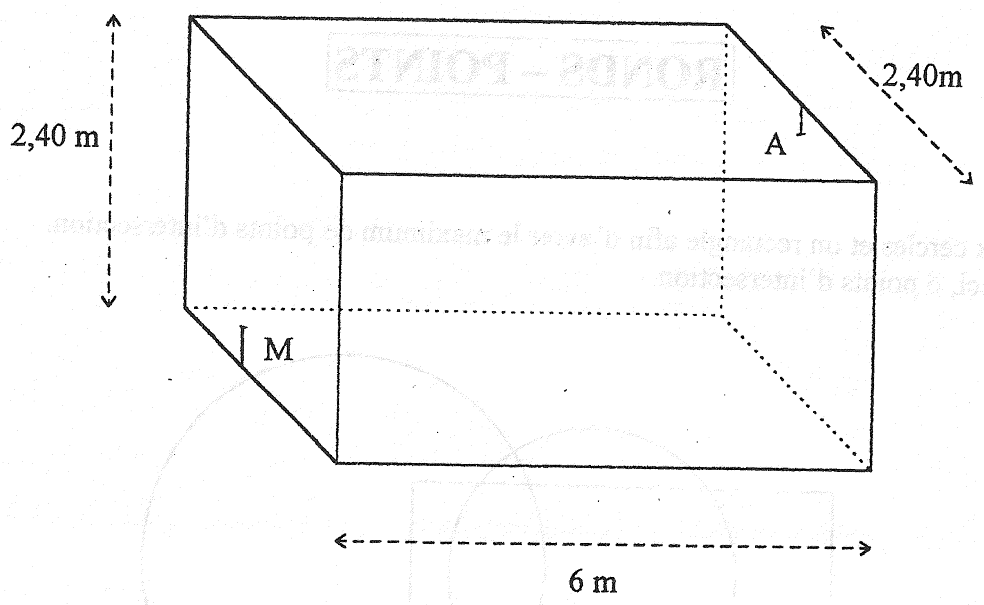


L'ARAIGNEE ET LA MOUCHE

Dans le grenier de sa maison, Julie a trouvé un cahier de Mathématiques qui a appartenu à son grand-père. A l'intérieur, elle y trouve le problème suivant :

> *Dans une pièce, une mouche M, paralysée de peur, est située au milieu du mur de gauche, à 20 cm du sol. L'araignée A se trouve au milieu du mur de droite, à 20 cm du plafond. Combien mesure le plus court chemin pour que l'araignée atteigne la mouche ?*

Son grand-père avait trouvé 8 m 40 comme chemin le plus court. Et pourtant, en faisant passer l'araignée sur presque toutes les faces, Julie a trouvé plus court. Comment ?



3 - Troisième thème : Vers les équations

On a proposé aux élèves des problèmes que nous ne savons plus guère résoudre autrement que par des équations. Les élèves parviennent à les résoudre, parfois de manière très astucieuse. La méthode « par essais et erreurs » est souvent utilisée mais pas toujours. Nous avons même vu certains groupes utiliser des lettres.

C'est toujours un travail de groupes. Chaque groupe a travaillé à son rythme, nous n'avons pas relevé les durées. En 2 heures, les 10 groupes observés ont traité : « Les boîtes de thé », « Les chats de Félicie » et « Les bouquets de fleurs » ; 8 groupes ont aussi fait : « Les enfants des pirates » et 4 groupes ont eu encore le temps de faire : « Mes profs chéris » et « Echec à mon grand frère ».

« Les boîtes de thé »

C'est un problème qui peut se traduire par un système de 3 équations à 3 inconnues ; g désigne la grande boîte, m la moyenne et p la petite.

$$\begin{cases} 2\,g + 1\,m = 7 \\ 1g + 3\,m + 2\,p = 7 \\ 6\,m + 2\,p = 7 \end{cases}$$

Les 10 groupes ont obtenu la solution avec une grande variété dans les procédures. 7 groupes proposent un dessin ; parmi ceux-là un groupe a utilisé des couleurs pour indiquer des poids égaux. 4 groupes procèdent par déduction et 2 groupes n'écrivent que la solution suivie d'une vérification.

Voici quelques extraits de copies d'élèves qui sont sûrement plus convaincantes que les commentaires :

On peut penser que la première ligne est déduite des deux dernières équations : 1 grande boîte vaut 3 moyennes, puisqu'en ajoutant 3 moyennes et 2 petites on obtient à chaque fois 7. De même la deuxième ligne peut être déduite de la première et de la troisième équations puisqu'on sait que 2 grandes valent 6 moyennes. L'égalité de la troisième ligne se déduit immédiatement de ces deux premières lignes. La première équation est alors suffisante pour trouver la valeur d'une moyenne.	1 grande boite = 3 moyennes 1 moyenne = 2 petites 1 grande boite = 6 petites 2 grandes boites + 1 moyenne = 7 moyennes 3500 g = 3 K 5g = 7 livres 3500 : 7 = 500 g 1 moyenne = 500g 500g : 2 = 250g 1 petite = 250 g 500 X 3 = 1500 1500 = 1,5 Kg 1 grande vaut 1,5 Kg

Ici, c'est une résolution où se côtoient combinaison et substitution. En comparant les équations (1) et (2), on déduit que : 1g = 2m + 2p ; de même en comparant les équations (2) et (3), on voit que 1g = 3m d'où 1m = 2p. Enfin, en substituant 2p à chaque m dans la troisième équation, on obtient 14p = 7, ce qui permet de calculer p puis m et g.	G = grande M = moyenne P = petite G G M = 7 livres = 3500 g G M M M P P = 7 livres = 3500 g M M M M M M M P P = 7 livres = 3500 g P P PPPPPPPPPPPP = 14 P G = M M P P ou M M M M = P P P = ½ M Donc P = 3500 : 14 = 250 g = 0,250 kg M = P x 2 = 250 x 2 = 500 g = 0,5 kg G = M x 3 = 500 x 3 = 1500 g = 1,500 kg

Ce problème plaît bien aux élèves, ils ne sont jamais en situation d'échec, en effet quand ils n'ont pas de solution « raisonnée » ils essaient différentes valeurs donc ils n'ont pas « séché ». Ceux qui procèdent par essais et erreurs n'écrivent pas, en général, comment ils ont procédé (est-ce parce qu'ils considèrent que ce n'est pas une bonne manière ?) mais dans ce cas ils proposent une vérification. L'analyse des copies d'élèves nous a montré que les élèves ont une grande imagination qu'il est important de cultiver.

« Les chats de Félicie »

C'est un problème qui, éventuellement, peut se traduire par une équation à une inconnue.

$$a + 30 - a + a + 3 + 38 - a + a + 11 = 100$$

Sur 10 groupes observés, 9 parviennent au résultat. 3 groupes ont une solution très rapide, en effet les données permettent de calculer le nombre de croquettes que contient la 5ème assiette, on obtient ensuite facilement ce que contient la 1ère assiette (cf. document 1). 3 autres groupes répartissent également les croquettes entre les 2 premières assiettes : 15 et 15, mais ils voient que ça ne marche pas et corrigent (cf. document 2). Les autres groupes procèdent par essais et erreurs en commençant toujours par les 2 premières assiettes (cf. document 3).

Pour ce problème, on remarque encore que les procédures sont variées mais que les élèves ne sont absolument pas démunis. Les quelques groupes qui n'expliquent pas comment ils ont trouvé vérifient. Il y a souvent des schémas (pas forcément utilisés pour la résolution) et même des dessins de chats assez « rigolos ».

Document 1

100 - (30 + 41) = 100 - 72 = 28

28 - 11 = 18 croquettes

Il y a 18 croquettes dans la première assiett

30 - 18 = 12 croquettes

Il y a 12 croquettes dans la deuxième assiette

33 - 12 = 21 croquettes

Il y a 21 croquettes dans la troisième assiette

41 - 21 = 20 croquettes

Il y a 20 croquettes dans la quatrième assiette

18 + 11 = 29 croquettes

Il y a 29 croquettes dans la cinquième assiette

Document 2

Au début, je croyais que les 2 ère assiettes contenaient la même quantité de croquettes alors j'ai essayé avec 15. Arrivé à la 5ème assiettes j'ai trouvé 29. J'ai voulu vérifié mes résultats donc j'ai fais 29 - 11 qui devais me donnez le résultat de la 1ère assiette (donc 15), mais j'ai trouvé 18.

J'en ai conclu que j'avais faux et que la 1ère assiette contenait 18 croquettes et la 2ème 12.

Et j'ai recommencé tous mes calculs.

18 - 12 - 21 - 20 - 29

1ère 2è 3è 4è 5è assiettes.

Document 3

On a essaie avec 15 croquettes dans la 1ère et la 2ème assiette, mais, ça ne marchait pas car on n'arrivait pas à 100 croquettes. Alors, on a essaie avec 16 + 14 croquettes, ça ne marchait toujours pas.... Ça ne marchait qu'avec 18 + 12

18 + 12 + 21 + 20 + 29

« **Les bouquets de fleurs** » (d'après un sujet du Brevet des Collèges 1994)

C'est un problème que nous avons extrait d'un sujet de Brevet et qui se traduit par un système de 2 équations à 2 inconnues.

$$\begin{cases} 3\,m + 1\,t = 30 \\ 4\,m + 3\,t = 50 \end{cases}$$

Tous les groupes obtiennent la solution le plus souvent en procédant par essais, mais il y a toujours des réticences dans ce cas à l'écrire. A noter l'apparition de lettres dans 2 groupes et pour l'un des deux un travail remarquable (cf. document 3).

Ce problème habituellement proposé aux élèves de 3$^{\text{ème}}$ est réussi à 100 % par des élèves de 5$^{\text{ème}}$. Il nous a paru très positif que certains élèves éprouvent le besoin d'utiliser des lettres même si c'est seulement pour synthétiser une situation (cf. document 2), c'est un progrès non négligeable pour la suite.

Document 1

Comme 3 marguerites + 1 tulipe coûte 30 F
Dans le 2ème bouquet, on a 3 marguerites + 1 tulipe et il reste 2 tulipes + 1 marguerites donc 20 F (50 F - 30 F). Dans le dernier bouquet, il y a 2 tulipes + 1 marguerites = 20 F + 1 marguerite.
On a donc essaié de trouver le prix d'1 marguerite.
On a essaie avec 9 F la marguerite et 3 F la tulipe, mais ça ne marchait pas, donc nous avons essaié avec 8 F la marguerite et 6 F la tulipe et ça marchait.
Donc le dernier bouquet coûte 28 F.

8 x 3 = 24   12 + 8 = 20 F
6 x 2 = 12   20 + 8 = 28 F

Document 2

M = Marguerite
T = Tulipe

(M x 3) + (T x 1) = 30
(M x 4) + (T x 3) = 50
(M x 2) + (T x 2) = ?

On a fait des essais et on a trouvé :

(8 x 3) + (6 x 1) = 24 + 6 = 30
(8 x 4) + (6 x 3) = 32 + 18 = 50
Donc (8 x 2) + (6 x 2) = 16 + 12 = 28

Le bouquet de fleur coûte 28 francs

Document 3

Exercice n° 3 : mg => marguerite
t => tulipe

3 mg + 1 t = 30 F
4 mg + 3 t = 50 F
donc
30 F – 3 mg = 1 t
50 F – 4 mg = 3 t

(30 F × 2) – (3 mg × 2) = 2 × 1 t
= 60 F – 6 mg = 2 t

50 F – 30 F = 20 F
4 mg – 3 mg = 1 mg
3 t – 1 t = 2 t

60 F – 20 F = 40 F
6 mg – 1 mg = 5 mg
donc 40 : 5 = 8 F
=> 8 F la marguerite

1er bouquet : 8 × 3 (8 F × 3 mg) = 24 F

30 – 24 = 6 F
donc 6 F la tulipe

2ème bouquet.

(8 × 4) + (3 × 6) = 32 + 18 = 50 F

3ème bouquet :

(2 × 8) + (6 × 2) = 16 + 12 = 28 F
le dernier bouquet coûte 28 F.

« **Les enfants des pirates** »

Dans ce problème fait par 8 groupes sur 10, il y a 2 inconnues et une difficulté particulière : il y a 10 ans l'enfant du second pirate n'était pas encore né, or il n'y a pas d'âge négatif donc on ne peut pas mettre ce problème en équation car alors on obtient :

$$\begin{cases} 3\,x + y = 50 \\ 3\,(x - 10) + y - 10 = 12 \quad \text{qui s'écrit} \quad 3\,x + y = 52 \end{cases}$$

Tous les groupes ont procédé par essais et ont découvert que le fils du 2$^{\text{ème}}$ pirate n'était pas né 10 ans plus tôt (cf. document ci-dessous). Ici la procédure utilisée a été la même pour tous les groupes et ils ont tous réussi. ·

L'âge du fils du second pirate à 8 ans.

On a essaié de trouver ~~la somme~~ des âges des garçons il y a 10 ans.
On a essayer avec 1 an les 3 garçons et 9 ans le fils du 2ème pirate, mais ça ne marchait pas. On a essayer avec 2 ans et 10 ans, ça ne marchait toujours pas ..... Puis avec 4 ans les 3 garçons et l'autre enfant n'était pas nait et ça marchait. On a donc 3 garçons de 14 ans et 8 ans le dernier.
Ce qui fait un total de 50 ans. 1
$14 \times 3 = 42$
$42 + 8 = 50$

Citons encore 3 activités que nous n'avons pu expérimenter, faute de temps, mais qui nous paraissent intéressantes :

- **Mes profs chéris.**
- **Echec à mon grand frère.**
- **Autoroutes à goudronner.**

LES BOITES DE THE

Un commerçant dispose de trois modèles de boîtes de thé (grande, moyenne et petite) qui ne portent pas l'indication de leur masse en kg.
On sait que :

- deux grandes boîtes et une boîte moyenne pèsent ensemble 7 livres.
- une grande boîte, trois boîtes moyennes et deux petites boîtes pèsent aussi 7 livres.
- six boîtes moyennes et deux petites boîtes pèsent encore ensemble 7 livres.

Sachant qu'une livre correspond à 500 g, trouve la masse en kg de chacun de ces trois modèles de boîtes.

LES CHATS DE FELICIE

Félicie possède cinq chats, qui ont tous bon appétit. Félicie aussi !
Lorsqu'elle veut les nourrir, elle procède toujours de la même manière.
Elle commence par disposer cinq assiettes devant elle.
Ensuite, elle ouvre une grande boîte de croquettes, qui contient exactement cent croquettes, qu'elle répartit alors dans les cinq assiettes d'une manière immuable :

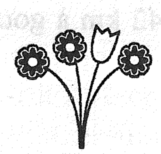
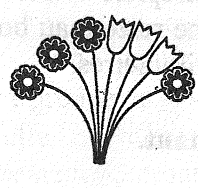
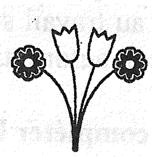
- elle répartit 30 croquettes entre les deux premières assiettes ;
- elle remplit ensuite la troisième assiette, de telle sorte que la deuxième et la troisième assiette contiennent, à elles deux, exactement 33 croquettes ;
- elle continue en garnissant la quatrième assiette, de telle manière que les troisième et quatrième assiettes contiennent, à elles deux, 41 croquettes.

Félicie termine alors en vidant le reste de la boîte dans la cinquième assiette, généralement destiné à son chat favori.
Aujourd'hui, la cinquième assiette contenait 11 croquettes de plus que la première assiette.

Peux-tu dire combien de croquettes contenait cette première assiette ?

LES BOUQUETS DE FLEURS

A partir d'une gerbe de marguerites et de tulipes, un fleuriste a constitué ces trois bouquets :

 Ce bouquet coûte 30 F	 Celui-ci coûte 50 F	 Combien coûte celui-ci ?

LES ENFANTS DES PIRATES

Quatre anciens pirates, aujourd'hui reconvertis en de paisibles et honorables commerçants, se rencontrent.
Chacun de nous a un fils, dit le premier, et ils rêvent tous de prendre la mer !
Oui, mais les trois vôtres ont exactement le même âge, contrairement au mien, dit le second.
C'est vrai qu'à eux quatre, ils totalisent déjà 50 ans, dit le troisième.
Le quatrième remarque alors :
Comme le temps passe ! Il y a dix ans, la somme des âges de nos garçons n'était que de 12 ans !
Quel est l'âge actuel du fils du second pirate ?

MES PROFS CHERIS

« Il y a trois profs cette année que je ne peux vraiment pas supporter. C'est, comme vous l'avez deviné, M. Dupuis, Mme Montfort et Mlle Lalanne. A eux trois, ils ont 130 ans. Mme Montfort avait 20 ans à la naissance de Mlle Lalanne, qui en avait 10 quand M. Dupuis est arrivé au monde. Et moi, je dois les subir tous les trois alors que mon âge est seulement égal à la somme des âges de M. Dupuis et de Mlle Lalanne diminuée de l'âge de Mme Montfort c'est-à-dire....... »

Quel est mon âge ?

ECHEC A MON GRAND FRERE

Quand je joue aux échecs avec mon grand frère, je perds en général et lui donne 25 francs. Si par hasard je gagne, il me donne au contraire 40 francs. Pendant nos dernières vacances en Bretagne, nous avons fait 15 parties, et je n'ai perdu que 245 francs.

Vous en déduirez aisément combien de fois j'ai réussi à faire échec à mon grand frère......

AUTOROUTES A GOUDRONNER

Il faut goudronner un tronçon d'autoroute. L'entreprise Clément promet de mettre 24 jours pour le faire, l'entreprise Grancour 12 et l'entreprise Martin 8 seulement. Et ainsi, en mettant les 3 entreprises au travail simultanément, il ne restera au bout de 3 jours que 42 km à goudronner, car le tronçon autoroutier initial fait .... kilomètres.

A vous de compléter le nombre manquant.

V - BILAN : ils ont aimé !

Le sérieux avec lequel les élèves ont réalisé ces activités mérite d'être signalé car ils ont travaillé avec des contraintes beaucoup moins importantes : temps non limité, travail non noté, pas de contrôle pour établir un bilan et pourtant ils ont bien accroché. Au départ, les plus « scolaires » sont un peu déstabilisés par la nouveauté des tâches et rechignent, mais cela s'estompe rapidement et laisse place à la satisfaction de franchir les obstacles. Beaucoup ont découvert qu'on peut venir à bout d'un problème qui paraît ardu à la première lecture, que les fausses pistes font parfois avancer le travail et qu'on peut même éprouver du plaisir à chercher.

Nous avons noté une évolution très positive sur le travail de groupes, au fil des séances les élèves ont appris à s'organiser et sont plus efficaces. Les échanges sont plus nombreux et deviennent fructueux alors qu'au départ l'interlocuteur privilégié des élèves reste le professeur qui doit souvent insister pour que chacun s'exprime à l'intérieur du groupe et surtout écoute les autres (autrement que poliment).

Les productions écrites ne permettent pas toujours d'analyser ce qui a été fait. Par exemple, dans le thème « Vers les équations » certains groupes n'écrivaient que les solutions, ce qui ne donne aucun renseignement sur la procédure utilisée ; or on ne peut pas observer tout le monde. Il faudrait sans doute être plus exigeant sur le compte-rendu rédigé par chaque groupe en prenant soin de ne pas alourdir une tâche qui paraît déjà ardue pour certains. Ce travail peut être fait oralement, par exemple en commentant une affiche réalisée sur ce problème.

La réalisation d'affiches est intéressante mais pas toujours évidente. Pour le contenu, ils ont souvent envie d'écrire la solution ; c'est plus facile que de donner seulement des pistes ...

Pour cette réalisation, la collaboration avec le professeur d'arts plastique peut être précieuse.

Les élèves sont intrigués par ce qu'on leur propose au départ et posent des questions comme :

« Est-ce que c'est là-dessus qu'on va travailler ensuite ? » ou encore
« Ce sera quoi la prochaine leçon ? »

On retrouve cette inquiétude lors du regroupement de la classe où ils redoublent de vigilance ; il est donc indispensable de présenter clairement les objectifs. Les élèves doivent être convaincus qu'ils vont progresser dans plusieurs domaines et que ce travail sera bénéfique à long terme. C'est une autre dimension de notre discipline.

CONCLUSION

Notre rôle d'enseignant de mathématiques est de développer les facultés de réflexion et d'adaptation des élèves face aux situations mathématiques qu'on leur propose. Mais réaliser pleinement cet objectif n'est pas si facile. D'abord, il semble inaccessible pour les élèves en difficulté ; l'amplitude des programmes, les échecs successifs, le temps passé pour surmonter certaines difficultés, nous poussent à leur enseigner des méthodes, voire des recettes, pour qu'au moins ils soient capables de résoudre quelques-uns des problèmes qu'on leur propose. Ensuite, parmi les élèves qui "réussissent", trop s'attachent à ne retenir de l'enseignement qu'ils reçoivent que les méthodes les mieux adaptées pour résoudre chaque type de problème, sans pour autant réfléchir aux raisons mathématiques qui rendent ces méthodes efficaces. Enfin, l'expérience montre qu'un effort de réflexion d'un élève est souvent accompagné, dans un premier temps, par une perte de performance dans la résolution des problèmes standards.

C'est avec la conviction qu'à terme il est rentable de mettre cet objectif au centre de l'enseignement, aussi bien pour ceux qui réussissent que pour ceux qui sont en difficulté, que nous avons engagé nos travaux. Les idées sur lesquelles notre réflexion s'appuie sont simples, même si leur mise en oeuvre est difficile :

- pour construire des séquences efficaces il ne suffit pas de définir un dispositif pédagogique ; il faut pour chaque contenu mener une réflexion didactique ;

- plutôt que d'intervenir après l'échec, il vaut mieux préparer les élèves à réussir du premier coup ;

- pour les élèves en difficulté, une des premières priorités est d'ébranler leur conviction qu'il faut trouver la "méthode" et l'appliquer. Il faut pour cela leur proposer des activités qui les forcent à réfléchir ;

- pour tous les élèves il faut les faire accéder à une véritable démarche de résolution de problème.

Le succès du dispositif pédagogique et des séquences que nous proposons dans ce fascicule est indéniable. Passée la déception de quelques élèves moyens regrettant d'être classés parmi les élèves en difficulté lors de la formation des deux groupes, tous les élèves adhèrent pleinement au système. Les bons élèves trouvent de l'intérêt à l'étude de problèmes ouverts ou de situations complexes et les autres apprécient la progression adaptée à leur rythme et la disponibilité du professeur à leur égard. Et quand tous se retrouvent ensemble, les bons élèves, forts de leur faculté d'adaptation, se mettent rapidement dans le coup, sans que les autres aient l'impression d'être dépassés.

Notons cependant que l'objectif n'est pas ici de diminuer les écarts entre les élèves ; il est d'essayer de faire profiter au mieux chaque élève des heures d'enseignement qui lui sont proposées. Pour diminuer cet écart en travaillant dans le même esprit, il faudrait consacrer plus de temps aux élèves qui ont plus de difficultés.

Nous sommes convaincus que la démarche que nous proposons mérite d'être utilisée à tous les niveaux à chaque fois qu'une notion nouvelle est abordée, ne serait-ce que sur une seule séance. Mais il faut avoir conscience que, s'il est assez facile de trouver des situations complexes pour le groupe des bons, la mise au point des activités préparatoires pour les autres élèves est un travail didactique difficile qui nécessite une recherche approfondie. Nous formulons le voeu que ce que nous avons entrepris dans notre groupe pour les thèmes des relatifs et du calcul littéral en cinquième soit repris pour d'autres thèmes et d'autres classes.

Notre groupe a obtenu du Rectorat, dans le cadre de la mise en valeur des innovations, quelques moyens pour continuer son action dans le cadre de l'IREM. Notre objectif est de poursuivre l'expérimentation des thèmes déjà mis au point et d'aborder un nouveau thème : les volumes. Un fascicule viendra donc en complément de celui-ci.

Imprimé et édité
Par l'I.R.E.M. de RENNES
Dépôt Légal : Troisième trimestre 1999
N° de publication : 99-06

I.R.E.M. de RENNES – Université de RENNES 1
Campus de Beaulieu – Bâtiment 32 B
35042 RENNES CEDEX
Tél : 02 99 28 26 34
Fax : 02 99 28 16 38
Site WEB : http://www.univ-rennes1.fr/irem

Commande :
Tél : 02 99 28 26 08
e.mail : Daniele.Quentin@univ-rennes1.fr

FICHE DUBLIREM

TITRE : PREPARER PLUTOT QUE REMEDIER – Répondre aux besoins de tous

I.R.E.M. : RENNES

AUTEUR : Groupe « FAIRE RESOUDRE DES VRAIS PROBLEMES EN MATHEMATIQUES : QUELLES AIDES POUR LES ELEVES EN DIFFICULTE ? »

DATE : JUILLET 1999

NIVEAU : Cinquième

MOT CLES :

- Activités préparatoires.
- Relatifs.
- Calcul littéral.
- Travail en groupe.
- Pédagogie différenciée.
- Elèves en difficulté.
- Remédiation.

RESUME :

Nous proposons un dispositif d'enseignement pour la $5^{ème}$ dont le but est de gérer d'une manière pertinente l'hétérogénéité. Il s'agit de préparer les élèves qui ont le plus de difficultés à aborder de nouvelles notions, tout en proposant aux autres des activités motivantes avec des objectifs ambitieux.

Pour cela la classe est divisée en deux groupes de besoin. On propose au groupe des élèves en difficulté des activités préparatoires à la notion nouvelle : celles-ci sont variées, progressives et constituent de véritables problèmes. Dans le même temps on propose à l'autre groupe des travaux demandant réflexion et méthode, à réaliser de manière autonome et sans relation avec la notion abordée.

Les thèmes choisis sont : les nombres relatifs et le calcul littéral.

FORMAT	NOMBRE DE PAGES	PRIX	TIRAGE
21 x 29,7	108	3 Euros ~~50 F~~	400 Ex.

ISBN 2-85728-047-5