LUMIERES LOINTAINES

Exposé de Renaud Chorlay, SPHERE (UMR 7219 Paris Diderot) – IREM de Paris

Compte rendu de Patrick Perrin[1]

Cet exposé s'appuie de manière fondamentale sur les travaux de recherche de Cécile de Hosson et Nicolas Decamp parus en avril 2014 dans la revue Science & Education.[2]

Trois textes présentant des méthodes de détermination de distances inaccessibles en astronomie ont été étudiés :

Taille de la Terre dans le texte de Cléomède (méthodes d'Ératosthène et de Poseidônios)

Distance Terre-Soleil dans le *Zhou Bi Suan Jing* (classique chinois composé sous la dynastie Han)

Distance Terre-Lune dans l'*Astronomie des dames* de Jérôme de Lalande (1732-1807)

La mesure de la terre dans le texte de Cleomede

La méthode d'Ératosthène

Ératosthène vécut au 3e siècle avant notre ère. Historien, géographe, géomètre, astronome, philosophe, poète, il fut appelé par le roi Ptolémée III pour diriger la bibliothèque d'Alexandrie. Contemporain d'Archimède, celui-ci lui adressa son traité de *la méthode.* Ératosthène est réputé avoir établi une partition du globe avec une grille de longitudes et de latitudes mais sa *Géographie* a été perdu. Il est célèbre également pour avoir calculé une évaluation correcte de la circonférence de la Terre. La méthode qu'il utilisa nous est connue par un petit traité d'astronomie écrit par Cléomède au 1er siècle de notre ère. Dans cet ouvrage Cléomède adopte comme presque tous les astronomes grecs un modèle géocentrique[3] : la Terre est sphérique et au centre de l'Univers. Voici un extrait *du mouvement des corps célestes* de Cléomède dans lequel est décrite la méthode d'Ératosthène :

> *« Qu'il soit admis pour nous :*
>
> *- premièrement que Syène et Alexandrie sont établies sous le méridien ;*[4]
>
> *- deuxièmement que la distance entre les deux cités est de 5000 stades ;*
>
> *- troisièmement que les rayons envoyés de différents endroits du soleil sur différents endroits de la Terre sont parallèles ; en effet, les géomètres supposent qu'il en est ainsi ;*

1 Ce compte rendu a été rédigé à partir des notes prises lors de l'exposé et des documents fournis par Renaud Chorlay. Il a reçu son approbation. Nous avons ajouté quelques explications dont une annexe en fin d'article concernant quelques résultats classiques d'astronomie.

2 De Hosson, C. & Décamp, N. Sci & Educ (2014) 23: 809. doi:10.1007/s11191-013-9625-2 https://link.springer.com/article/10.1007/s11191-013-9625-2

3 Aristarque de Samos (3e s. av. J.-C.) avait proposé un modèle héliocentrique.

4 En fait il existe une différence de 3° entre les longitudes d'Alexandrie et de Syène (Assouan en arabe) mais cette erreur est négligeable en face de l'incertitude sur la mesure de la distance entre ces deux villes.

- quatrièmement que ceci soit admis comme démontré auprès des géomètres, que les droites sécantes des parallèles forment des angles alternes égaux ;

- cinquièmement que les arcs de cercle qui reposent sur des angles égaux sont semblables, c'est-à-dire qu'ils ont la même similitude et le même rapport relativement aux cercles correspondants, ceci étant démontré aussi chez les géomètres. Lorsqu'en effet les arcs de cercle reposent sur des angles égaux, quel que soit l'un (d'entre eux), s'il est la dixième partie de son propre cercle, tous les autres seront les dixièmes parties de leurs propres cercles.[5]

Celui qui pourrait se prévaloir de ces faits comprendrait sans difficulté le cheminement d'Ératosthène qui tient en ceci : il affirme que Syène et Alexandrie se tiennent sous le même méridien [...]. Il dit aussi, et il en est ainsi, que Syène est située sous le tropique de l'été.[6] *À cet endroit, au solstice d'été, lorsque le Soleil est au milieu du ciel, les gnomons des cadrans solaires concaves*[7] *sont nécessairement sans ombres, le soleil se situant exactement à la verticale [...]. À Alexandrie à cette heure-là, les gnomons des cadrans solaires projettent une ombre, puisque cette ville est située davantage vers le nord que Syène [...].*[8]

Si nous nous représentons des droites passant par la Terre à partir de chacun des gnomons, elles se rejoindront au centre de la Terre. Lorsque donc le cadran solaire de Syène est à la verticale sous le soleil, si nous imaginons une ligne droite venant du Soleil jusqu'au sommet du gnomon du cadran, il en résultera une ligne droite venant du soleil jusqu'au centre de la Terre.

Si nous imaginons une autre ligne droite à partir de l'extrémité de l'ombre du gnomon et reliant le sommet du gnomon du cadran d' Alexandrie au soleil, cette dernière ligne et la ligne qui précède seront parallèles, reliant différents points du Soleil à différents points de la Terre. (cf. Figure 1)

Sur ces droites donc, qui sont parallèles, tombe une droite qui va du centre de la terre jusqu'au gnomon d'Alexandrie, de manière à créer des angles alternes égaux ; l'un d'eux se situe au centre de la Terre à l'intersection des lignes droites qui ont été tirées des cadrans solaires jusqu'au centre de la Terre, l'autre se trouve à l'intersection du sommet du gnomon d'Alexandrie et de la droite tirée de l'extrémité de son ombre jusqu'au soleil, à son point de contact avec le gnomon.[9]

Et sur cet angle s'appuie l'arc de cercle qui fait le tour de la pointe de l'ombre du gnomon jusqu'à sa base tandis que (sur) celui qui est proche du centre de la Terre s'appuie l'arc qui va de Syène à Alexandrie. Ces arcs de cercle sont donc semblables

---

5 On peut remarquer que Cléomède présente au même niveau cinq demandes de nature différente puisque les deux premières sont des données empiriques, la troisième relève d'une hypothèse de modèle et les deux dernières sont des propriétés géométriques démontrées.

6 Tropique du Cancer.

7 Il s'agit des scaphés, cadrans solaires en forme de demi-sphère dont la pointe du style occupe le centre.

8 Dans les passages non cités, Cléomède apporte quelques précisions : les méridiens sont des grands cercles de la Terre, par conséquent le cercle passant par Alexandrie et Syène est un grand cercle ; la zone dans laquelle les gnomons n'ont pas d'ombre au solstice d'été s'étend en fait sur 300 stades (cela s'explique par le fait que le soleil n'est pas une source lumineuse ponctuelle).

9 Il s'agit des angles SOA et AA'B sur la figure 1.

l'un à l'autre en s'appuyant sur des angles égaux.[10] *Le rapport qu'a l'arc du cadran avec son propre cercle, l'arc qui va de Syène à Alexandrie a ce rapport aussi. Mais on trouve que l'arc du cadran est la cinquantième partie de son propre cercle.*[11] *Il faut donc nécessairement que la distance qui va de Syène à Alexandrie soit la cinquantième partie du plus grand cercle de la Terre. Et elle est de 5 000 stades. Le cercle dans sa totalité fait donc 250 000 stades. Voilà la méthode d'Ératosthène ».*[12]

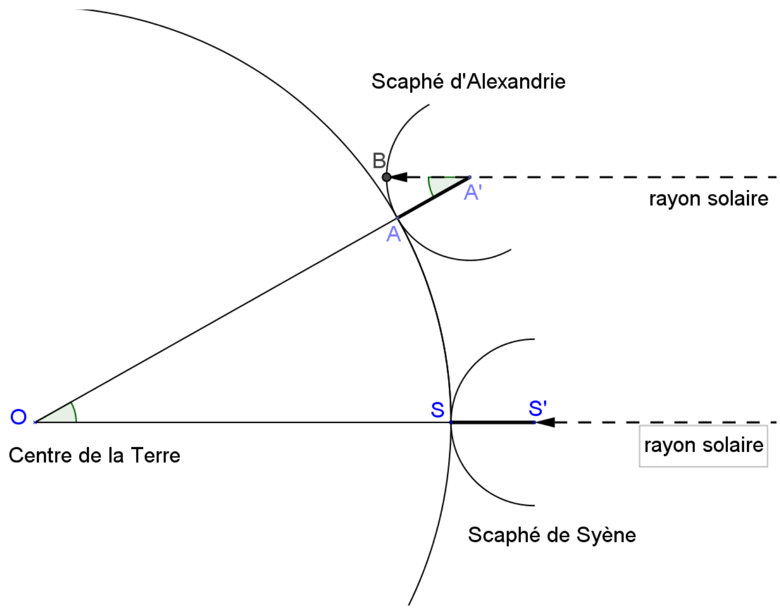


Figure 1: la méthode d'Eratosthène

Notons que les autres auteurs anciens mentionnant la découverte d'Ératosthène donne la valeur de 252 000 stades pour la circonférence terrestre sans détailler sa méthode. Une explication possible sur cette différence de 2000 stades est que Cléomède aurait arrondi les valeurs mesurées (5000 stades et 1/50 de cercle) par souci de simplification.

La méthode d'Ératosthène est souvent présentée dans les manuels scolaires et autres ouvrages pédagogiques avec un cadran solaire plan ce qui peut en faire un exercice du chapitre trigonométrie (si l'on veut déterminer l'angle AA'B de la figure 1 à partir de la longueur de l'ombre du gnomon) alors que dans le texte de Cléomède la connaissance des lignes trigonométriques n'est pas nécessaire puisque ce même angle AA'B est mesuré directement sur le cadran solaire hémisphérique. Ajoutons que selon Decamp et Hosson la principale difficulté d'ordre didactique est dans la modélisation de la lumière solaire par des rayons parallèles. En effet celle-ci repose sur le fait que la distance Terre Soleil est suffisamment grande devant les dimensions de la Terre pour que l'on puisse considérer le soleil comme une source infiniment éloignée, mais lorsqu'on s'intéresse aux représentations spontanées de la situation chez les élèves on observe souvent un soleil représenté à distance

10 Dans la figure 1, les arcs de cercle SA et AB sont semblables.

11 Cette valeur est remarquablement précise pour l'époque : en effet Alexandrie se trouvant à la latitude de 31° 12', la différence de latitude avec le tropique du Cancer est égale à 7° 30' soit 18' de plus que la valeur donnée par Cléomède.

12 Cléomède, *le mouvement des corps célestes*, livre I, chap. X, trad. Richard Goulet

finie avec des rayons divergents. On verra ci-après que l'on retrouve ce type de représentation dans l'astronomie chinoise antique.

La méthode de Poseidônios

Poseidônios (135-51 av. J.-C.) est un philosophe et savant grec qui dispensa son enseignement à Rhodes. Cicéron fut un de ses élèves. D'après Heath une partie du traité de Cléomède devrait beaucoup à Poseidônios. Cléomède trouve la méthode de celui-ci pour calculer la circonférence de la Terre beaucoup plus simple que celle d'Eratosthène et l'expose, dans son *mouvement des corps célestes*, juste avant celle-ci. Cette méthode repose sur la mesure de la hauteur de l'étoile Canopus[13] au-dessus de l'horizon. Cléomède explique que lorsqu'on se déplace (en méditerranée) du nord vers le sud l'étoile Canopus devient visible à partir de Rhodes. Elle se trouve alors juste au-dessus de l'horizon pendant un court moment[14]. A Alexandrie elle est visible plus longtemps et sa hauteur maximale est égale à 1/48 de cercle[15]. Comme Rhodes et Alexandrie se situent sur le même méridien et que ces deux villes sont distantes de 5 000 stades, Poseidônios en déduit une valeur de 240 000 stades pour la circonférence terrestre (cf. figure 2).

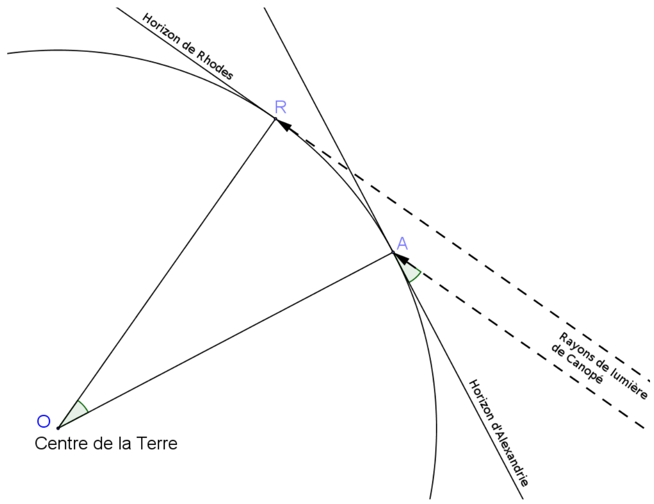


Figure 2: Méthode de Poseidônios

Cette valeur qui pourrait sembler convenable résulte en fait de la compensation de deux erreurs. En effet les deux mesures ont été surévaluées : la différence entre les angles de culmination est de 5°¼ et non de 7°½ , quant à la distance Rhodes Alexandrie, elle ne mesure que 3500 stades au lieu de 5000 stades.

13 Canopus ou α Carinae est la deuxième étoile la plus brillante du ciel après Sirius ; actuellement elle n'est visible qu'au sud du 37e parallèle.

14 A l'époque de Poseidonius la déclinaison de Canopus était d'environ -52° 41' ; sachant que la latitude de Rhodes est environ 36° 27' on en déduit que Canopus devait culminer à environ 52' au-dessus de l'horizon. Des explications détaillées sont données en annexe en fin d'article.

15 La latitude d'Alexandrie est d'environ 31° 12' ce qui donne pour l'angle de culmination de Canopus environ 6° 7'.

La distance Terre-Soleil dans le *Zhou Bi* et ses commentaires

Le *Zhoubi Suanjing* 周筆算經 (*canon des calculs gnomoniques de la dynastie des Zhou*) est un classique de l'astronomie chinoise. Il aurait été rédigé à l'époque des Han (-206 220) et contiendrait une compilation de connaissances antérieures[16]. Le but principal de l'astronomie chinoise antique est l'élaboration d'un calendrier précis et la prédiction d'événements exceptionnels comme les éclipses ; ses observations remarquables d'étoiles « invitées » (supernovæ) sont encore utiles aujourd'hui. L'utilisation du gnomon qui d'après la tradition remonte à l'époque des Zhou (11e s. 5e s. av. J.-C.) permet en particulier de déterminer les dates des solstices. La cosmographie chinoise antique peut paraître très exotique à un esprit moderne, dans le *Zhoubi Suanjing* se trouve la description du système *Gaitian* 蓋天 (« ciel couvrant ») : la Terre est plate, le Ciel est comme un couvercle au dessus de la Terre, et les astres décrivent des trajectoires circulaires autour d'un axe vertical passant par le pôle nord céleste. Dans un tel système la notion de distance Terre-Soleil est très relative et implique la prise en compte du lieu d'observation.

Dans les deux extraits suivants de la traduction en anglais du *Zhoubi Suanjing* par Cullen[17] un lien est établi entre la mesure de l'ombre du gnomon et la distance Terre-Soleil :

> #B10 [26c] *The zhoubi is eight chi in length. On the day of the summer solstice its* [noon] *shadow is one chi and six cun. The bi is the altitude* [of the right-angled triangle]*, and the exact* [noon] *shadow is the base. 1000 li due south the base is one chi and five cun, and 1000 li due north the base is one chi and seven cun. The further south the sun is, the longer the shadow.*[18]

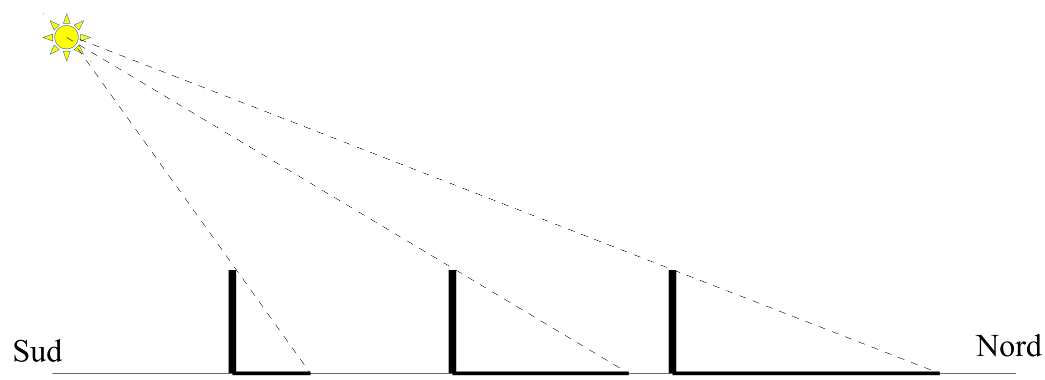


Figure 3: l'ombre du gnomon des Zhou du Sud vers le Nord

Rappelons que 1 *chi* (pied) égale 10 *cun* (pouce) et 1 *li* égale 1800 *chi*. Les valeurs numériques qui apparaissent dans ce premier passage appellent quelques remarques. La hauteur standard du gnomon chinois est 8 *chi* ou 80 *cun*. L'observation d'un rapport base sur

16 Pour une présentation plus détaillée de cet ouvrage nous renvoyons le lecteur à l'article d'Arnaud Gazagnes p.8 de ce présent volume.

17 Le découpage en paragraphes et leur numérotation sont de Cullen.

18 Christopher Cullen, *Astronomy and mathematics in ancient China* : the Zhou bi suan jing, p.178
« Le *Zhoubi* (gnomon des Zhou) a une longueur de 8 *chi*. Le jour du solstice d'été à midi son ombre est de 1 *chi* et 6 *cun*. Le *bi* (gnomon) est la hauteur [d'un triangle rectangle], et l'ombre [à midi] exact est la base. 1000 *li* plus au sud la base est de 1 *chi* et 5 *cun*, et 1000 *li* plus au nord la base est de 1 *chi* et 7 *cun*. Plus le soleil est éloigné au sud, plus l'ombre s'allonge. »

hauteur égal à 1/5 au solstice d'été permet de situer le lieu d'observation au voisinage du 35e parallèle nord[19] ce qui correspond à très peu près à la latitude de l'ancienne capitale des Zhou orientaux et des Han orientaux, Luoyang. Le texte suggère que lorsqu'on se déplace d'une distance constante (1000 *li*) vers le sud, l'ombre du gnomon diminue d'une longueur constante (1 *cun*). On verra que cette propriété est valable sous l'hypothèse du modèle cosmographique *Gaitian*. En revanche un calcul simple montre qu'une ombre de 1 *chi* et 5 *cun* serait observable à une distance de 77 km vers le sud, ce qui donnerait une valeur de 77 m pour 1 *li*. Or on considère qu'à cette époque 1 *li* valait à peu près 415 m. L'erreur est telle qu'on peut sérieusement remettre en cause le fait que le rapport de 1 *cun* pour 1000 *li* repose sur des mesures réelles[20].

> #B11 [26h] *Wait until the base is six chi, then take a bamboo [tube] of diameter one cun, and of length eight chi. Catch the light [down the tube] and observe it : the bore exactly covers the sun, and the sun fits into the bore. Thus it can be seen that an amount of eighty cun gives one cun of diameter. So start from the base, and take the bi as the altitude. 60 000 li from the bi, at the subsolar point a bi casts no shadow. From this point up to the sun is 80 000 li. If we require the oblique distance [from our position] to the sun, take [the distance to] the subsolar point as the base, and take the height of the sun as the altitude. Square both base and altitude, add them and take the square root, which gives the oblique distance to the sun. The oblique distance to the sun from the position of the bi is 100 000 li. Working things out in proportion, eighty li gives one li of diameter, thus 100 000 li gives 1250 li of diameter. So we can state that the diameter of the sun is 1250 li.*[21]

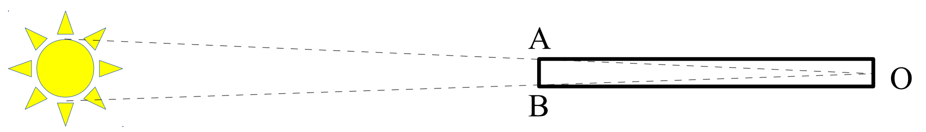


Figure 4: Diamètre apparent du soleil dans le Zhoubi

19 cf. annexe pour plus d'explications.

20 cf. bibliographie [14] p.21.

21 Ibidem, p.178

« Attendez que la base soit de 6 *chi*, prenez alors un [tube de] bambou de diamètre 1 *cun*, et de longueur 8 *chi*. Interceptez la lumière [à travers le tube] et observez : l'orifice cache exactement le soleil, et le soleil s'ajuste dans l'orifice. Ainsi on peut voir qu'un total de 80 *cun* donne un *cun* de diamètre. Partez ainsi de la base, et prenez le gnomon comme hauteur. A 60000 *li* de là, au point à la verticale du soleil un gnomon ne projette aucune ombre. De ce point jusqu'au soleil il y a 80000 *li*. Si l'on a besoin de la distance oblique [de notre position] au soleil, prenez [la distance] jusqu'au point à la verticale du soleil comme base, et comme hauteur celle du soleil. Élevez au carré base et hauteur, ajoutez-les et prenez la racine carrée, ce qui donne la distance oblique au soleil. La distance oblique au soleil depuis la position du gnomon est 100000 li. En raisonnant par proportionnalité, 80 *li* donne un *li* de diamètre, donc 100000 *li* donne 1250 *li* de diamètre. Ainsi nous pouvons affirmer que le diamètre du soleil est 1250 *li*. »

Dans ce second passage le texte établit d'abord une relation entre la taille du Soleil et sa distance à la Terre grâce à une simple observation à l'aide d'un bambou (cf. figure 4).

Notons α le diamètre apparent du soleil (il est égal à l'angle AOB dans la figure 4). D'après le *Zhoubi* , $\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{160}$ ce qui donne pour α environ 43' . La valeur obtenue est certes sensiblement différente de la valeur réelle 32', mais compte tenu des outils rudimentaires utilisés le résultat reste remarquable. Le texte considère ensuite implicitement deux triangles rectangles semblables ; le premier est formé par le gnomon et son ombre, son côté horizontal a pour longueur 6 *chi* et son côté vertical 8 *chi* ; le second triangle a pour sommets le soleil, le point à la verticale du soleil et le point d'observation, d'après la règle énoncée dans le premier extrait (lorsqu'on se déplace de 1000 *li* vers le sud l'ombre diminue de 1 *cun*) le côté horizontal de ce triangle a pour longueur 60000 *li* et par conséquent un côté vertical de longueur 80000 li. Ces valeurs n'ont pas été choisies au hasard, en effet le *Zhoubi Suanjing* contient une preuve du théorème dit de Pythagore[22] dans le cas particulier du triangle 3, 4, 5. Ce triangle joue un rôle important dans cet ouvrage, ici il permet d'obtenir pour la distance oblique du soleil la valeur remarquable de 100000 li.

Le texte suivant est extrait de la préface de Liu Hui (fin du 3^{e} siècle) des *neuf chapitres sur les procédures de calcul*[23]. Il reprend la méthode du *Zhoubi* mais indique une procédure de calcul de la distance terre-soleil légèrement différente.

> *Set up two gnomons at the city of Yangcheng[24]. Let them be eight chi tall, and to north and south let the ground be quite level. On the same day, precisely at noon, take the shadow difference as the divisor, multiply the gnomon height and the distance between the gnomons to make an area, count one of each [subtraction] of the divisor [i.e. divide and take the integral result], add what you get to the gnomon height, and it is the distance of the sun from the earth.*
>
> *Multiply the shadow lenght at the southern gnomon by the distance between the gnomons to make an area, count one for each [subtraction] of the divisor, and you get [the distance] from the southern gnomon to the subsolar point.*
>
> *Take the distance to the subsolar point and the distance of the sun from the earth as base and altitude, and by means of these find the hypotenuse, which is the distance of the sun from the observer.*[25]

---

22 cf. article Arnaud Gazagnes p.8-9.

23 Cet ouvrage est présenté dans l'article d'Arnaud Gazagnes p.10-11.

24 Le site de Yangcheng se trouve à une centaine de kilomètres au sud-est de Luoyang. Sous les Han postérieurs il est utilisé pour les observations astronomiques.(cf. bibliographie [14] p.20)

25 Ibidem, p.220

« Dressez deux gnomons dans la cité de Yangcheng. On suppose qu'ils ont 8 chi de hauteur et que le sol est tout à fait horizontal vers le nord et le sud. Le même jour, à midi précis, prenez la différence des ombres comme diviseur, multipliez la hauteur du gnomon par la distance entre les gnomons ce qui donne une aire, comptez un à chaque fois que vous soustrayez le diviseur [il s'agit d'une technique élémentaire pour calculer le quotient entier de deux nombres], ajoutez ce que vous obtenez à la hauteur du gnomon, et c'est la distance du soleil à la terre. Multipliez la longueur de l'ombre du gnomon placé au sud par la distance entre les gnomons ce qui donne une aire, comptez un à chaque fois que vous soustrayez le diviseur, et vous obtenez [la distance] du gnomon sud au point à la verticale du soleil. Prenez la distance au point à la verticale du soleil et la distance du soleil à la terre comme base et hauteur, et au moyen de ceux-ci trouvez l'hypoténuse, qui est la distance du soleil à l'observateur »

Notons h la hauteur des gnomons, d la distance entre eux et u et u' la longueur de leurs ombres (cf. figure 5). Le texte indique que la distance terre-soleil est $H = \frac{h \times d}{u' - u} + h$.

Cette formule, établie sous l'hypothèse du modèle issu du système cosmographique *Gaitian*, montre que dans ce cas la différence $u' - u$ serait proportionnelle à la distance d entre les gnomons (puisque h et H sont constants), comme l'affirmait le *Zhoubi*.

La distance entre le point à la verticale du soleil et le gnomon placé au sud est $D = \frac{u \times d}{u' - u}$. Enfin la distance du soleil à l'observateur est : $\sqrt{D^2 + H^2}$.

On trouve dans le commentaire du *Zhoubi* par Zhao Shuang (3e siècle) une démonstration de la formule donnant la hauteur du soleil H qui s'appuie sur la figure 5, ainsi que le lien avec les résultats donnés dans le *Zhoubi*.

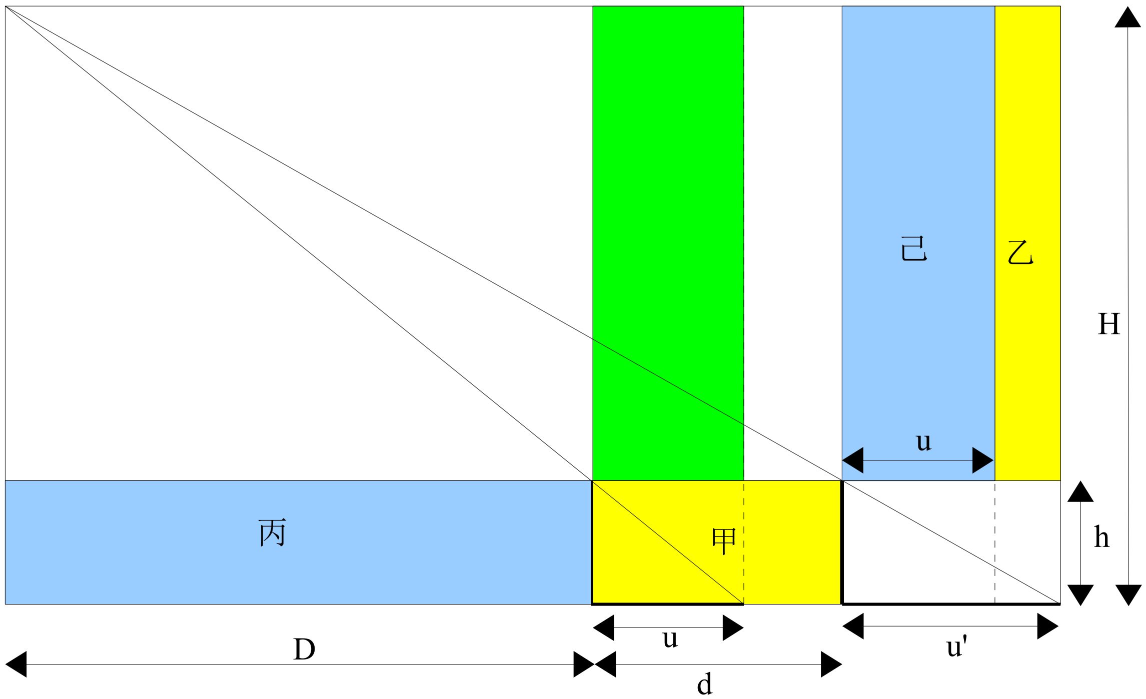


Figure 5: proposition de restauration du diagramme (d'après Cullen).

> *The areas [marked with] a yellow jia 甲 and a yellow yi 乙 are exactly equal. The area [marked with] a yellow jia is made by multiplying the height of the gnomon by the distance between them. If you count one for each time [you subtract] the shadow difference [i.e. divide by the shadow difference], which is the breadth of the [area marked with] a yellow yi, what you obtain is transformed into the length of the [area marked with] a yellow yi, which goes up level with the sun. Referring to the diagram, [it is evident that] you must add the height of the gnomon. Now when [the text] says 80000 li, this is to be added on top of the gnomon.*

The [areas marked with] a blue bing 丙 *and the blue ji* 己 *are likewise equal. If you amalgamate the [areas marked with] a yellow jia and a blue bing, and amalgamate the [areas marked with] a yellow yi and a blue ji, the [resulting] areas are likewise equal.*[26]

Cette preuve repose sur la configuration de la figure 6 dans laquelle un rectangle est partagé en six parties par une de ses diagonales et deux parallèles aux côtés se coupant sur cette diagonale : les triangles 1 et 4 sont isométriques ainsi que les triangles 3 et 6 donc les rectangles 2 et 5 ont la même aire.

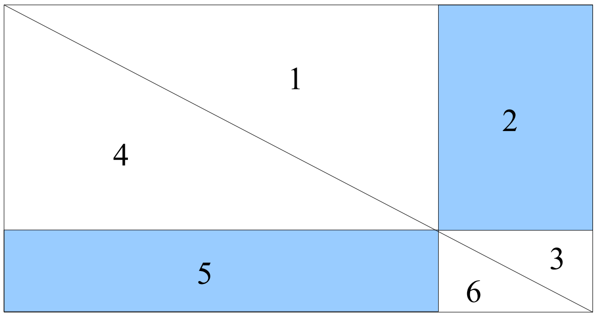


Figure 6: Deux rectangles de même aire

Ainsi dans la figure 5 le rectangle bleu 丙 a la même aire que le rectangle vert qui par construction est identique au rectangle bleu 己. De même le rectangle formé de la réunion du bleu 丙 et du jaune 甲 a la même aire que celui formé de la réunion du bleu 己 et du jaune 乙. Donc par différence les rectangles jaunes 甲 et 乙 ont la même aire .

Ce qui se traduit par la relation $h \times d = (u' - u) \times (H - h)$ qui donne la première formule du texte de Liu Hiu.

Si l'on prend $h = 8$ *cun*, $u' - u = 1$ *cun* et $d = 1000$ *li*, on retrouve bien $H - h = 80000$ *li*.

En conclusion Liu Hiu et Zhao Shang s'attachent à justifier rigoureusement par la géométrie les résultats donnés dans le *Zhoubi* sans remettre en cause son modèle cosmographique ou ses données numériques.

26 Ibidem, p.219

« Les aires marquées avec un jia et un yi jaunes sont parfaitement égales. L'aire marquée avec un jia jaune s'obtient en multipliant la hauteur du gnomon par la distance entre eux. Si vous comptez un à chaque fois que vous soustrayez la différence d'ombre [i.e. divisez par la différence d'ombre], qui est la largeur de l'aire marqué avec un yi jaune, ce que vous obtenez est transformé en la longueur du rectangle marqué avec un yi jaune, qui s'élève jusqu'à la hauteur du soleil. En se référant au diagramme, il et évident que vous devez ajouter la hauteur du gnomon. Donc quand le texte dit 80000 li, cette distance doit être prise depuis le sommet du gnomon. Les aires marquées avec un bing et un ji bleus sont pareillement égales. Si vous réunissez les aires marquées avec un jia jaune et un bing bleu, et réunissez les aires marquées avec un yi jaune et un ji bleu, les aires résultantes sont pareillement égales. »

Distance Terre-Lune selon de Lalande (1732-1807)

Source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France

Joseph Jérôme Lefrançois de Lalande est un des plus grands astronomes français du 18e siècle. Il travailla en particulier sur la détermination des distances dans le système solaire et sur la trajectoire des comètes. Il fut membre de l'académie des Sciences à partir de 1753. Enseignant passionné, il donna un cours réputé au Collège Royal (Collège de France) de 1761 à 1807. Parmi ses nombreux ouvrages citons son *Traité d'astronomie* (1764), la partie astronomique de l'*Encyclopédie méthodique* (1784-1789) et son catalogue d'étoiles (1801). Sa carrière débute à 19 ans lorsque son professeur Pierre-Charles Lemonnier lui demande de le remplacer à Berlin pour effectuer des observations destinées à déterminer la parallaxe de la Lune[27] pendant que l'abbé La Caille effectue les siennes au Cap de Bonne Espérance. Les résultats de ses observations et la détermination de la distance Terre Lune à partir de celles-ci seront les sujets de ses premiers mémoires à l'académie royale.

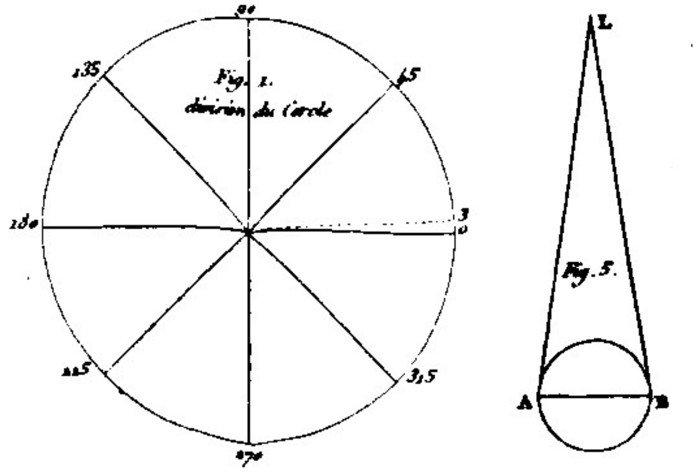
L'*astronomie des dames*[28] est un ouvrage de vulgarisation publié en 1786. Dans l'extrait qui suit Lalande présente une version simplifiée de la détermination de la distance Terre-Lune à partir d'une mesure de sa parallaxe.

> *Supposons deux observateurs A et B (fig.5) qui soient diamétralement opposés sur la Terre, c'est-à-dire : aux antipodes l'un de l'autre, et qui aient observé la Lune C en même temps ; à leur retour, s'ils comparent leurs observations, ils trouveront que la Lune paraissait plus élevée de deux degrés pour l'un que pour l'autre, pourvu qu'ils aient tous deux rapporté la Lune à la même étoile pour juger de sa situation.*
> *Ainsi d'après les observations, la largeur entière A B de la Terre produit deux degrés de différence ou un angle ALB sur la position de la Lune, c'est-à-dire que les rayons visuels des deux observateurs sont inclinés l'un à l'autre de deux degrés. Si on veut savoir ce qui en résulte pour l'éloignement de la Lune, on n'a qu'à faire sur un carton un angle de deux degrés, c'est-à-dire, tirer deux lignes qui fassent entre elles un angle de deux degrés (fig. 1), on verra que l'écartement de ces lignes est partout la 29e partie de leur longueur ou environ ; d'où il suit que les deux rayons visuels qui des deux extrémités de la Terre vont faire sur la Lune un angle de deux degrés sont 30 fois plus longs que leur écartement, qui est le diamètre de la Terre ; donc ce diamètre étant de*

27 La parallaxe de la Lune est l'angle sous lequel on verrait, depuis cet astre, un rayon équatorial de la Terre.

28 Ce titre ne doit pas être mal interprété. Dans sa préface Lalande cite plus d'une douzaine de femmes qui se sont illustrées dans le domaine de l'astronomie dont Hypatia d'Alexandrie, la marquise du Chatelet, Caroline Herschel et sa propre nièce ; avant d'ajouter : « je crois qu'il ne manque aux femmes que les occasions de s'instruire et de prendre de l'émulation, on en voit assez qui se distinguent, malgré les obstacles de l'éducation et des préjugés, pour croire qu'elles ont autant d'esprit que la plupart des hommes qui acquièrent de la célébrité dans les sciences. »

2900 lieues , l'éloignement de la lune est de 84 mille lieues environ.[29]



Source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France

Dans son souci de simplification Lalande propose une situation improbable puisque la lune ne peut pas être visible au même instant pour deux observateurs diamétralement opposés. En fait pour les observations de 1751 et 1752 on avait choisi deux villes très éloignées Le Cap et Berlin situées sur des méridiens proches. Si l'on suppose la Terre sphérique le problème de la détermination de la distance Terre-Lune relève de la trigonométrie élémentaire (cf. figure 7).

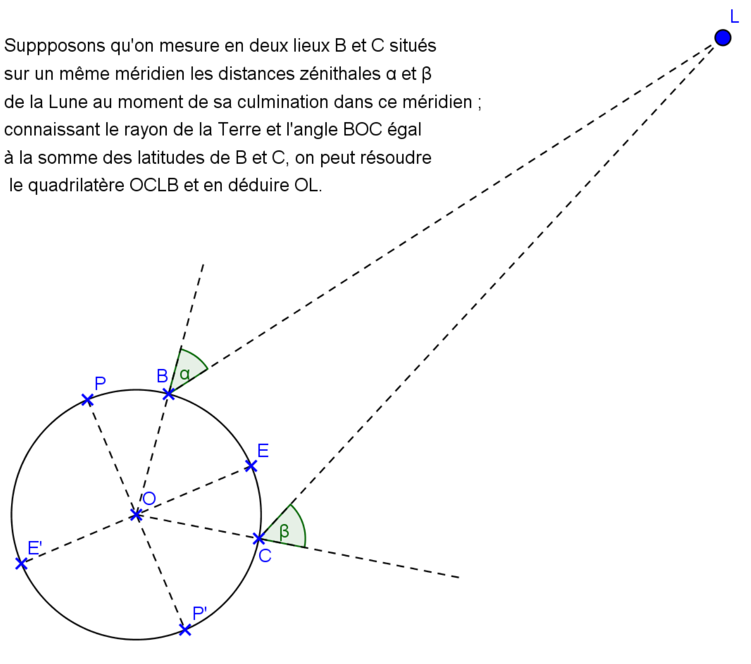


Figure 7: distance Terre-Lune sous l'hypothèse d'une Terre sphérique

Mais si l'on tient compte de l'aplatissement de la Terre aux pôles, le problème se complique sérieusement et c'est tout le mérite de Lalande que d'avoir mené à bien les calculs correspondants pour trouver une valeur remarquablement précise de la distance moyenne Terre-Lune (85 464 lieues soit 384 352 km, la valeur actuellement admise étant 384 400 km)[30]

29 Jérôme de Lalande, *Astronomie des dames* (4e édition). p118-119.
30 En fait la distance Terre-Lune peut varier entre 356 400 km et 406 700 km.

Bibliographie (fournie par R. Chorlay)

Sources :

[1] Christopher Cullen. *Astronomy and mathematics in ancient China* : the Zhou bi suan jing. Needham Research Institute Publications. Cambridge : Cambridge University Press, 1996

[2] Nicolas Decamp et Cécile de Hosson, Quelques éléments historiques et didactiques sur l'expérience d'Eratosthène, Bulletin de l'Union des professeurs de Physique et de Chimie n°937 (oct. 2011), p.1065-1082.

[3] Nicolas Decamp et Cécile de Hosson, *Using Ancient Chinese and Greek Astronomical Data: A Training Sequence in Elementary Astronomy for Pre-Service Primary School Teachers*, in Science & Education Volume 23, Issue 4, Avril 2014. pp 809–827 ; Springer Netherlands

doi:10.1007/s11191-013-9625-2 ; https://link.springer.com/article/10.1007/s11191-013-9625-2

[4] Richard Goulet. *Cléomède : théorie élémentaire*. Paris : Vrin, 1980.

[5] Jérôme de La Lande, *Astronomie des dames* (4e édition). Paris : Salmon, 1824.

Compléments :

[6] Jérôme de La Lande. Astronomie (4 tomes). Paris : Veuve Desaint, 1771-1781.

[7] Glen van Brummelen. *The mathematics of the heavens and the earth : the early history of trigonometry.* Princeton (N.J.): Princeton University Press, 2009.

[8] Jean Pierre Verdet. *Une histoire de l'astronomie*. Points Sciences. Paris : Seuil, 1990.

[9] Jean-Pierre Verdet. *Astronomie et astrophysique. Textes essentiels.* Paris : Larousse, 1993.

[10] Jean-Pierre Verdet. *Voir et rêver le monde : images de l'univers de l'Antiquité à nos jours.* Paris : Larousse, 2002.

Autres ressources utilisées pour ce compte-rendu

[11] F. Brachet P. Couderc & J. Dumarqué. *Cosmographie, classe de mathématiques.* Paris : Delagrave, 1951.

[12] Cléomède, *Cleomedis Meteora, graece et latine , a Roberto Balforeo ex ms. codice bibliothecae illustrissimi Cardinalis Joyosii [...]*. Burdigalae, 1605.

[13] Thomas Heath, *A history of greek mathematics*, vol.2. Oxford : Clarendon Press, 1921.

[14] Marc Kalinowski. *Le calcul du rayon céleste dans la cosmographie chinoise.* In: Revue d'histoire des sciences, tome 43, n°1, 1990. pp. 3-34;

doi : 10.3406/rhs.1990.4154 ; http://www.persee.fr/doc/rhs_0151-4105_1990_num_43_1_4154

[15] Logiciel Stellarium (gratuit) : http://www.stellarium.org/fr/

[16] Calcul en ligne de l'obliquité de l'écliptique :
http://www.neoprogrammics.com/obliquity_of_the_ecliptic/

Illustrations

p. 38 : Portrait de Jérôme de Lalande, estampe : André Pujos dessinateur, Dupin graveur, source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France, département Estampes et photographie.

p. 39 : Reproduction de la planche originale extraite de [5], source gallica.bnf.fr/Bibliothèque nationale de France.

La position des astres sur la sphère des fixes est repérée par leurs coordonnées équatoriales : ascension droite et déclinaison[31]. Pour les astres ayant un diamètre apparent non nul on prend la position de leur centre. La déclinaison est l'angle que fait la direction de l'astre (ou de son centre) avec le plan de l'équateur céleste. La déclinaison est positive si l'astre se trouve dans l'hémisphère nord céleste, négative sinon. Par exemple en 2016 la déclinaison de l'étoile polaire est 89° 20' et celle de Sirius -16° 44'. La déclinaison du Soleil a varié pendant cette année entre +23° 26' au solstice d'été et – 23°26' au solstice d'hiver.[32]

On suppose que le lieu d'observation est situé dans l'hémisphère nord à la latitude φ. L'angle φ est égal à NÔP la hauteur du pôle (cf. figure 8). On considère un astre de déclinaison δ qui se lève en L, culmine en A et se couche en C. Dans la figure 8, le demi-cercle NZS est le méridien supérieur, il passe par le pôle céleste P et coupe l'équateur céleste en E. L'angle δ est alors égal à ± AÔE (dans la figure 8, δ < 0).

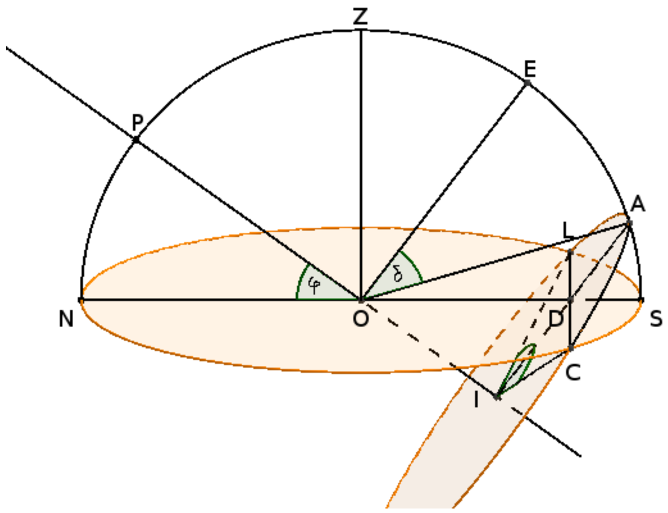


Figure 8: visibilité d'une étoile

Si A appartient à l'arc SZ, alors la hauteur de culmination est l'angle AÔS = 90° - φ + δ.

Lorsque les astronomes chinois ont observé au solstice d'été une hauteur de culmination du soleil égale à environ 78° 40' (= arctan (5)), la latitude du lieu d'observation était environ 35° (= 90° + 23° 40' – 78° 40').

Pour déterminer la durée de visibilité d'une étoile de déclinaison δ négative, il suffit de connaître l'angle LÎC.

Or LÎC = 2AÎC avec $\cos(\widehat{AIC})=\dfrac{ID}{IC}=\dfrac{ID}{IA}=\dfrac{OI\tan\varphi}{-OI\,cotan\,\delta}=-\tan\varphi\tan\delta$.

(La formule reste valable lorsque 0 ≤ δ ≤ 90° - φ).

Dans le cas de l'observation de l'étoile Canopus à Rhodes en l'an 100 avant notre ère, on a φ = 36° 27' , et δ = -52° 41' ce qui donne AÔS = 52' et AÎC = 14° 27'. Autrement dit l'astre pouvait être visible pendant un peu moins de deux heures dans des conditions d'observation parfaites.

31 On peut faire une analogie avec les coordonnées terrestres : longitude et latitude.

32 En raison du mouvement de précession des équinoxes les coordonnées équatoriales des étoiles ont changé depuis l'antiquité ; ainsi en l'an -100 la déclinaison de l'étoile polaire était 77° 45' et celle de Sirius -16°. Il existe également une variation séculaire de l'obliquité de l'écliptique, en l'an -100 celle-ci valait 23° 42'.