DIMENSION EXPÉRIMENTALE DANS LA CONSTRUCTION DES MATHÉMATIQUES CHEZ BOURBAKI

Hussein Sabra, hussein.sabra@univ-reims.fr

Cérep EA 4692, Université de Reims Champagne Ardenne

1. Introduction

Les collectifs mathématiques ont joué un rôle essentiel dans l'évolution de cette science (les mathématiques au niveau du savoir savant ou les mathématiques à enseigner). Bourbaki en forme un bon exemple. Nicolas Bourbaki est un collectif de mathématiciens dont les travaux ont influencé considérablement l'enseignement des mathématiques et l'évolution des mathématiques au vingtième siècle (Beaulieu 1990). Le rayonnement des travaux de Bourbaki a dépassé même ce cadre pour porter un courant structuraliste qui a dépassé les mathématiques. Dans ses premières années (de 1934 jusqu'à 1937), ce collectif a combiné un projet d'enseignement et un projet de réécriture des mathématiques suivant la *méthode axiomatique* de Hilbert (Patras 2001).

Les mathématiques de Bourbaki sont connues par un niveau élevé de formalisme et d'abstraction, reflétés dans leur mode d'exposition des mathématiques. Nous allons étudier dans ce texte le processus d'élaboration des mathématiques chez Bourbaki, et ce dans l'objectif :

- d'identifier les sources de cette abstraction,
- de repérer des pistes pour penser l'enseignement des mathématiques,
- de développer des perspectives pour une considération de ce collectif de mathématiciens dans les recherches en didactique des mathématiques.

Nous commençons par une présentation du contexte historique de naissance de Bourbaki (§2). Nous continuons par la présentation de l'arrière-plan épistémologique déterminant les démarches de base (§3) adoptées par Bourbaki : la méthode axiomatique (§3.1) et les mathématiques modernes (§3.2). Nous illustrons ces démarches dans le cas des « théorèmes d'existence » en analyse (§4). Nous terminons par une conclusion et des perspectives.

2. Naissance de Bourbaki et mathématiques modernes

Nous présentons dans cette partie des éléments historiques du contexte de développement des mathématiques en première moitié du vingtième siècle. Ces éléments ont conduit à la naissance de Bourbaki tel qu'on le connaît. Nous présentons aussi des éléments du contexte de l'enseignement de l'analyse en France pendant la même période.

2.1 Le cours d'analyse d'Edouard Goursat

Edouard Goursat (1858 – 1936) est un mathématicien dont le cours d'analyse a été enseigné longtemps en France. Il a été publié pour la première fois en 1902 et réédité à plusieurs reprises. Formé de trois tomes[1], il contenait l'ensemble des savoirs du domaine d'analyse tels qu'ils ont été connus à la fin du 19ème siècle. Le cours de Goursat était le plus utilisé pour l'enseignement de l'analyse en France jusqu'à 1936. Selon Dieudonné (1970), il y avait dans les années trente l'impression que le cours d'analyse de Goursat n'était plus d'actualité, car il ne tenait pas compte des dernières découvertes en mathématiques.

Figure 1. *Portrait d'Edouard Goursat (1858 – 1936)*

Le cours de Goursat comporte un style de rédaction à dimension narrative importante. On donne l'exemple de la présentation de la notion de limite dans la figure 2.

1. **Limites**. — On dit qu'un nombre variable x a pour limite un nombre fixe a, ou tend vers a, lorsque la valeur absolue de la différence $x - a$ finit par devenir et *rester* plus petite que tout nombre positif donné à l'avance. Lorsque $a = 0$, le nombre x est dit *un infiniment petit*. Il revient évidemment au même de dire que x a pour limite un nombre a, ou de dire que la différence $x - a$ est un infiniment petit. Pour prouver qu'un nombre x a pour limite le nombre a, on partage généralement la différence $x - a$ en un certain nombre de parties, trois par exemple, et l'on prouve que la valeur absolue de chacune de ces parties finit par rester plus petite que $\frac{\varepsilon}{3}$, ε étant un nombre positif arbitraire.

Ce type de démonstration, que nous emploierons souvent, est appelé quelquefois *la preuve par* ε.

Figure 2. *La définition de la notion de limite dans le cours de Goursat*

1 En ligne : https://archive.org/details/coursdanalysema02gourgoog

En outre, suivant les critères actuels d'exposition des mathématiques, certaines définitions manquent de rigueur. Par exemple, la définition de l'objet mathématique « ensemble » se base sur des exemples (voir figure 3).

> 3. **Ensembles bornés.** — Nous avons déjà employé plusieurs fois le mot d'*ensemble*. La notion d'ensemble est une de celles qu'il paraît inutile de définir autrement que par des exemples. Toute collection d'un nombre fini ou infini d'objets constitue un ensemble; tels l'ensemble des nombres entiers, l'ensemble des nombres rationnels, l'ensemble des droites d'un plan, etc. Nous ne nous occuperons, pour le moment, que des ensembles de nombres. On dit qu'un ensemble de nombres (E) est *borné supé-*

Figure 3. Définition des « ensembles bornés » à partir des exemples dans le cours de Goursat

Par ailleurs, si on considère le cas des théorèmes d'existence dans le cours de Goursat, on remarque qu'ils prennent un chapitre complet (tome 2, chapitre XIX). Dans l'introduction de ce chapitre, Goursat (1911) note : *«les premières recherches rigoureuses, pour établir l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles ou d'équations aux dérivées partielles, sont dues à Cauchy»* (tome 2, p.347). Il signale plus loin dans le même chapitre que *«la première démonstration donnée par Cauchy de l'existence des intégrales d'un système d'équations différentielles nous a été conservée, grâce aux leçons recueillies par l'abbé Moigno et publiées en 1884»* (tome 2, p.374). Ces phrases de l'introduction, nous donnent une idée sur les méthodes et les techniques suivant lesquels le chapitre a été conçu. Le chapitre «Théorèmes d'existence» est structuré en quatre parties :

1° Calcul des limites.

2° Approximations Successives. Méthode de Cauchy-Lipschitz.

3° Intégrales premières. Multiplicateur.

4° Transformations infinitésimales.

En ce qui concerne la partie 2 (Approximations Successives. Méthode de Cauchy-Lipschitz) de ce chapitre, Goursat (1911) présente les conditions d'existence et d'unicité des solutions du problème de Cauchy comme une « méthode », il l'appelle « la méthode Cauchy-Lipschitz »[2]. La méthode de Cauchy-Lipschitz est présentée comme une combinaison de techniques opératoires, appliquée sur le cas d'une seule équation $\frac{dy}{dt}=f(t,y)$ vérifiant : 1° la condition de Lipschitz ; 2° l'existence d'une limite supérieure M de $f(t, y)$. Une fois ces deux conditions présentées, on procède par une méthode calculatoire employant le calcul des limites et la méthode approximative. Cette dimension technique et calculatoire est mise en évidence par l'auteur à la fin de l'exposition de la méthode : *«La méthode de Cauchy-*

[2] Voir le tome 2 du cours d'analyse de Goursat (1911), pp. 374-381.

Lipschitz s'étend aux systèmes d'équations différentielles sans autre difficulté que des complications dans les formules» (Goursat 1911, tome 2, chapitre XIX).

En guise de synthèse de cette sous-partie, nous tirons que le cours de Goursat (1911) admet des caractéristiques liées à un style de rédaction et d'exposition des mathématiques :

1° Narratif.

2° Employant des exemples pour la définition des objets mathématiques.

3° Mobilisant des méthodes et techniques de calcul.

Ces trois caractéristiques ne sont pas restreintes au traité d'analyse de Goursat, c'était le mode d'exposition des mathématiques dominantes à cette époque.

2.2 L'émergence de Bourbaki, raison d'être et les débuts

Nicolas Bourbaki est un mathématicien imaginaire, sous le nom duquel un collectif de mathématiciens francophones a commencé à écrire et éditer des textes mathématiques à la fin des années 1930. Leurs travaux ont influencé considérablement l'enseignement des mathématiques au 20ème siècle. Les membres fondateurs de Bourbaki sont des anciens élèves de l'Ecole Normale Supérieur de Paris, en particulier : André Weil (1906 – 1998), Henri Cartan (1904 – 2008), Jean Dieudonné (1906 – 1992), Jean Delsarte (1903 – 1968), Claude Chevallay (1909 – 1984), Jean Leray (1906 – 1998) et Szolem Mandelbrojt (1899 – 1983).

Les archives de Bourbaki sont numérisées, indexées et publiées en ligne par le Laboratoire d'Histoire des Sciences et de Philosophie - Archives Henri-Poincaré[3]. Les archives ont été numérisées pour la première fois par la cellule Mathdoc[4] entre 2001 à 2003. Les fichiers numérisés sont disponibles en ligne à l'exception de la correspondance.

Le projet de Bourbaki est né d'un besoin : après la première guerre mondiale, les étudiants ne pouvaient pas s'appuyer sur une génération antérieure (enseignants ou chercheurs en mathématiques). Selon Jean Dieudonné (1970), cela signifiait que les étudiants, comme lui, manquaient d'une connaissance sur les dernières découvertes et progrès réalisés en mathématiques. Henri Cartan affirmait qu'ils étaient de la première génération après la guerre, faisant suite à un « vide », une génération qui devait entreprendre des choses nouvelles (Jackson 1999). André Weil et Henri Cartan étaient, à cette époque, chargés du cours « analyse différentiel et intégral » à l'université de Strasbourg. Weil (1992) rapporte que Cartan venait constamment lui poser des questions sur la meilleure façon de présenter une notion donnée à des étudiants, insistance qui lui vaut l'appellation de « grand inquisiteur ». Le projet de Bourbaki, en son début, avait une visée didactique signalée explicitement dans le compte rendu de la première réunion du collectif : *« il est ensuite décidé que le traité sera un traité 'enseignable' et non un traité de référence ... »* (compte rendu Bourbaki, 12 décembre 1934).

Le projet a évolué sensiblement durant ces discussions. Elles ont conduit à une négociation de certains aspects du projet commun (Weil 1992) ; les membres de Bourbaki ont envisagé

[3] http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/

[4] http://sites.mathdoc.fr/archives-bourbaki/

d'élargir le public qui pourrait être intéressé par le traité à concevoir : *« Il faut faire un traité utile à tous : aux chercheurs (patentés ou non), aux « trouveurs », aux candidats aux fonctions de l'enseignement public, aux physiciens et à tous les techniciens. Comme critérium, il faut qu'on puisse, sans mercantilisme, conseiller la fréquentation du traité, ou tout au moins de ses fascicules essentiels, à un étudiant obligé de travailler seul, présumé d'ailleurs d'intelligence médiocre »* (compte rendu Bourbaki, 14 janvier 1935). Pour cela, il fallait alors fournir des outils, suivant les mots de Weil (1992) *« aussi robustes et aussi universels que possibles »*.

3. Démarches de base

3.1 La méthode axiomatique

Les membres fondateurs de Bourbaki avaient fait des séjours scientifiques en Allemagne à la fin des années vingt où ils ont appris de nouvelles mathématiques de l'Ecole de Hilbert, Noether et Artin. Influencés par ces séjours scientifiques, le travail de Bourbaki dès le début, s'est développé suivant la méthode axiomatique d'Hilbert : *« […] plus généralement il importe, pour commencer le traité, de faire un exposé abstrait, axiomatique, de certaines notions essentielles générales ; (corps – opérations – ensemble – groupe – etc.) »* (compte rendu Bourbaki, 10 décembre 1934). La méthode axiomatique avait été élaborée par Hilbert pour analyser les fondements de la géométrie élémentaire (Hilbert 1899). Elle consiste, *« après avoir analysé les démonstrations des théorèmes pour en extraire les hypothèses utilisées, à poser ces hypothèses comme axiomes de la théorie et à ne plus faire intervenir que ces axiomes dans les démonstrations »* (Houzel 2004). Dieudonné (1939) note à propos de ce travail de Hilbert : *« il y formulait un système de 21 axiomes*[5]*, et montrait que ces axiomes étaient nécessaires et suffisants pour démontrer rigoureusement toutes les propriétés connues de géométrie euclidienne à 2 et 3 dimensions »*. La méthode axiomatique remet en question la *vérité* des propositions mathématiques. Dieudonné (1939) délimite la portée, dans la méthode axiomatique, de la vérité des propositions mathématiques : *« en ce qui concerne la vérité des propositions mathématiques, on avait dégagé cette notion de tout contact avec celle de vérité expérimentale ; il est vrai que, ce faisant, on lui avait fait perdre ce caractère absolu qui enchantait tant nos ancêtres ; il s'agissait maintenant d'une vérité hypothétique en quelque sorte, c'est-à-dire que les propositions mathématiques ne devaient plus être considérées comme vraies qu'en vertu du décret purement arbitraire, par lequel on déclarait vrais les axiomes ; la seule vérité absolue qui subsistât, c'était celle des règles de la logique »*.

Les membres de Bourbaki ont fixé la méthode d'exposition des mathématiques dans le traité d'analyse : c'est la méthode axiomatique. La question qu'ils se posaient : d'où et par quoi peut-on commencer ? Après des longs débats, Bourbaki décide que *« l'idéal, pour l'orateur, serait que toutes les théories générales et abstraites nécessaires, soient présentées dès le début du traité. C'est en somme l'idée du paquet abstrait initial qui a été longuement évoquée dans la précédente réunion »* (compte rendu Bourbaki, 14 janvier 1935). En revanche, en ce moment du développement du projet commun, le « paquet abstrait initial »

[5] Un système d'axiomes doit être non-contradictoire. Il est non-contradictoire si on ne peut pas déduire un énoncé et sa contradiction de ces axiomes.

n'était pas fixé. *« Weil et Chevalley insistent à plusieurs reprises sur le fait qu'il faut commencer par définir les notions d'opérations et de corps. Cartan voudrait qu'on parle d'ensembles dès le début – Ce n'est pas l'avis de Chevalley – la discussion devient confuse – historique et philosophique. Finalement rien n'est décidé sur le point en litige »* (compte rendu Bourbaki, 10 décembre 1934).

Cartan rédige un rapport intitulé « Ensembles » illustrant son point de vue sur le rôle que pourraient jouer les ensembles comme théorie générale contenant tous les outils abstraits nécessaires pour la conception du traité d'analyse. Ce rapport a été discuté et évalué lors du premier congrès annuel de Bourbaki à Besse en Chandesse (1935). Le rapport « Ensembles » contient en première page une « introduction sur la méthode axiomatique ». Dans cette introduction on note : *« En particulier, on n'axiomatisera pas la théorie des ensembles* […]. *Mais on avertit le lecteur une fois pour toutes que les opérations qui vont être faites sur les ensembles peuvent être axiomatisées et justifiées à condition qu'elles ne soient jamais effectuées que sur ~~des~~ certains ensembles ~~en nombre fini~~ qu'on prend comme objet d'étude dans chaque théorie mathématique »*[6]. Dieudonné (1939) note à ce propos : *« les notions indéfinissables de la nouvelle mathématique, et dont il était pourtant nécessaire d'avoir une claire représentation mentale, était la notion d'ensemble et toutes les notions connexes : correspondance, fonction, sous-ensemble, somme (réunion) d'ensembles, etc., en un mot, toutes les notions dont l'étude propre constituait la jeune théorie des ensembles que venait de fonder le génie de Cantor »*.

Les contenus mathématiques exposés selon la méthode axiomatique avait un objectif de réaliser une *« économie de pensée considérable »* (Bourbaki 1948), d'où le processus de définition des *structures mathématiques*[7]. Bourbaki décrit le processus de définition de structure : *« pour définir une structure, on se donne une ou plusieurs relations, où interviennent ces éléments* […] *; on postule ensuite que la ou les relations données satisfont à certaines conditions (qu'on énumère) et qui sont les axiomes de la structure envisagée ». Faire la théorie axiomatique d'une structure donnée, c'est donnée les conséquences logiques des axiomes de la structure, en s'interdisant toute autre hypothèse sur les éléments considérés (en particulier toute hypothèse sur leur « nature propre ») »* (Bourbaki 1948). Dans ce cadre, la théorie des ensembles joue encore un rôle pour renforcer l'*intelligibilité* du langage mathématique (Dieudonné 1939).

Ce travail fondamental (sur la méthode axiomatique, et la considération de la théorie des ensembles) a servi comme connaissance collective qui a soutenu la poursuite du travail durant la deuxième guerre mondiale[8] : *« les premières années*[9] *ont été les plus difficiles, parce que nous avions à construire une base solide ; on peut considérer maintenant qu'à ce point de vue, le plus grand est fait ; le reste devrait aller plus vite »* (la tribu, bulletin interne de Bourbaki, n°3, 15 septembre 1940).

---

6 La citation est présentée telle qu'elle apparaît dans le rapport « Ensembles » (avec les mots barrés).

7 L'idée de structure était déjà courante en algèbre abstraite et dans la théorie des groupes, Bourbaki a étendu l'idée de structure à l'ensemble des mathématiques.

8 Pendant la deuxième guerre mondiale, il était difficile pour les membres de Bourbaki de se réunir. Il y poursuivait en partie leur travail de rédaction, de relecture, et de modification par correspondance.

9 On parle des premières années du travail de Bourbaki.

Les connaissances émergentes au sein de Bourbaki avaient à l'époque un domaine de validité qui ne dépasse pas forcément les frontières du collectif. Nous avons identifié ce point dans les écrits des membres autour de leur mouvement collectif :

- *« on reproche souvent aux méthodes axiomatiques leur sécheresse et leur stérilité » ; « Une fois reconnue la nécessité de la méthode axiomatique, quelles allaient être la nouvelle base de la science mathématique ? ... »* (Dieudonné 1939) ;
- *«* […] *une tendance qui est généralement connue sous le nom de « méthode axiomatique ». On dit aussi parfois « formalisme » ou « méthode formaliste » ; mais il faut dès le début mettre en garde contre le risque d'une confusion que provoquent ces mots mal définis, et qui n'est que trop souvent exploitée par les adversaires de l'axiomatique »* (Bourbaki 1948).

Dans les années trente, les connaissances construites au sein de Bourbaki n'acquéraient pas un soutien large de la communauté des mathématiciens. En revanche, ce qu'on peut établir c'est que ces connaissances sont considérées par les membres du collectif, comme valides pour la réalisation de leur projet commun.

3.2 Les mathématiques modernes

La notion de mathématiques modernes est apparue dans le discours des membres de Bourbaki. En revanche, cette dénomination est liée à l'héritage de l'école de Göttingen et Hambourg initiée par Hilbert (§ 3.1). Emil Artin[10], voyait en l'algèbre l'instrument pour les autres domaines mathématiques (Bénis-Sinaceur 1987). En 1930, Bartel Leeder Van der Waerden a représenté le point de vue d'Artin et a contribué à le répandre (Benis-Sinaceur 1987) avec le livre «moderne Algebra » (voir figure 4). La publication de ce livre a connu huit éditions et restera la référence privilégiée, sinon unique jusque dans les années 70.

Ce livre n'était pas seulement un traité d'algèbre qui rendait disponible un savoir neuf, mais encore il focalisait l'attention sur une nouvelle façon de faire l'algèbre. Suivant les termes de Cartan, une des manifestations du règne de l'algèbre moderne est l'«éclosion» de Nicolas Bourbaki. On voit même dans le compte rendu de la première réunion de Bourbaki une illustration de cette influence : *«il est entendu que ce traité* [traité d'analyse] *sera aussi moderne que possible»* (compte rendu Bourbaki, 10 décembre 1934).

[10] Emil Artin (1898 – 1962) est un mathématicien autrichien. Il a fait carrière en Allemagne à Hambourg puis aux Etats-Unis. Il a fait partie du groupe de mathématiciens algébristes que David Hilbert a constitué pour « moderniser l'algèbre » (réforme axiomatique et conceptuelle de l'algèbre).

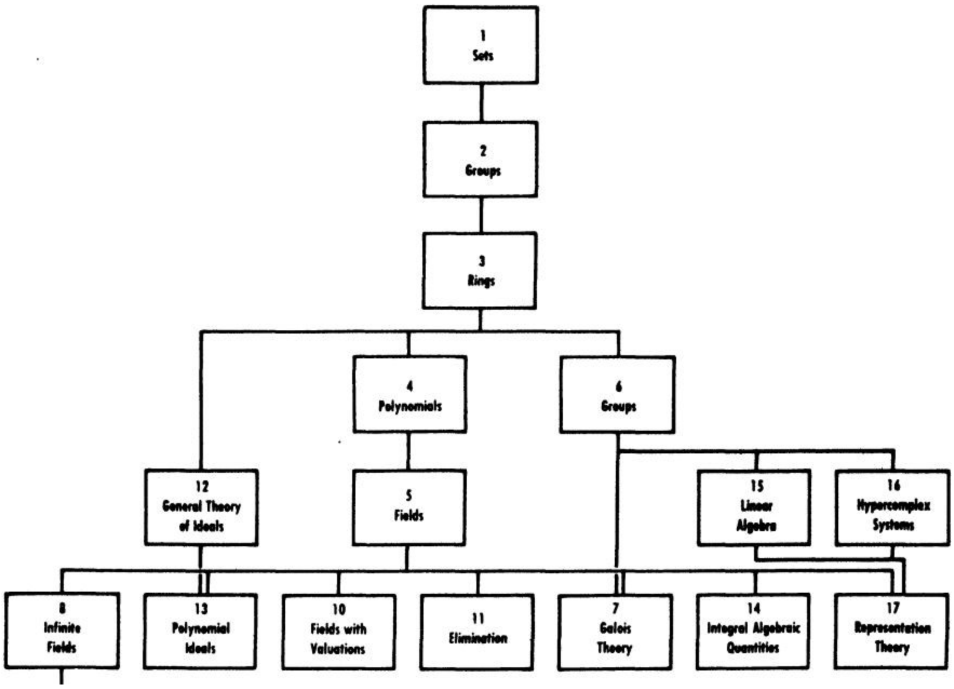

Figure 4. *Extrait du livre « modern Algebra » de Vander Waerden (1930), présentant la structure des chapitres*

La modernité est donc liée à l'extension de l'écriture et l'exposition des mathématiques de Van der Waerden (1930) à toutes les mathématiques (Corry 2008). Ce style de rédaction est basé sur la méthode axiomatique (§ 3.1). Les membres de Bourbaki voulaient appliquer ce mode d'exposition et d'écriture à l'analyse. Pour renforcer cette dimension, ils ont demandé à Emil Artin de participer à quelques-unes de leurs premières réunions à «titre consultatif», à titre d'exemple la réunion de Bourbaki du 11 février 1935[11].

4 Bourbaki et l'analyse, exemple des théorèmes d'existence

Bourbaki voulait donc concevoir un traité d'analyse moderne, en ayant comme méthode d'écriture et d'exposition, la méthode axiomatique. Nous présentons dans cette partie un extrait de ce processus de conception : le cas des théorèmes d'existence.

4.1 Les premiers échanges autour des théorèmes d'existence

Les discussions autour des théorèmes d'existence dans le traité d'analyse de Bourbaki, ont commencé le 14 janvier 1935 : *«Enfin, Dieudonné étant présent, on reparle des théorèmes d'existence, en particulier du théorème de Cauchy-Lipschitz. Weil trouve les hypothèses demandées, anti-naturelles. Leray critique vivement la démonstration donnée par Goursat et attire l'attention sur l'intérêt qu'il y aurait à donner avant tous les théorèmes de ce type des théorèmes généraux, de caractères topologiques, qui sont des théorèmes d'existence purs, et non des théorèmes de calcul, mais qui permettent de prévoir quand il est possible d'énoncer un théorème de calcul»*(réunion du 14 janvier 1935). La proposition de Leray place les

[11] Le compte rendu de cette réunion en ligne : http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/archive/files/bb2bfae6c551f577cbc0956ae6b1e3c4.pdf

théorèmes d'existence dans le domaine topologique. Ce domaine permet, selon Leray, d'assurer le caractère pur général aux théorèmes d'existence. Dans ce cadre, le théorème de Goursat (théorème de calcul selon Leray) devient un théorème d'application.

Leray a proposé un premier plan d'exposition des théorèmes d'existence, qui contient un théorème d'existence local et un théorème d'existence global, et il est intitulé «Projet d'exposé des théorèmes d'existence topologique ». Lors des échanges autour de ce projet, *«On lui reproche cependant de ne pas éviter l'exposition des théorèmes d'existence classiques, les propositions utilisées par Leray laissant de côté les questions d'analyticité. De plus ces propositions font appel à des notions topologiques qui sont peut-être trop spéciales pour trouver place dans le traité »* (compte rendu Bourbaki, 25 janvier 1935).

Dans la réunion du 25 février 1935, Delsarte expose la progression élaborée par la sous-commission «équations différentielles» : *«Delsarte propose de la diviser en trois parties : Théorèmes d'existence. Problèmes de valeurs propres, se rattachant par conséquent à la théorie des équations intégrales. Enfin les problèmes n'ayant pas de rapport avec cette théorie, c'est-à-dire essentiellement ceux qui concernent l'étude approximative des propriétés locales ou générales des solutions»* (compte rendu Bourbaki, 25 février 1935). Nous en tirons que le travail des différentes sous-commissions est corrélatif.

Durant la réunion du 25 mars 1935, les membres ont dressé un plan sommaire des matières à traiter sur la théorie des équations différentielles. La progression établie contient *« l'existence d'une solution d'un système d'équations différentielles (variables réelles, et variables complexes). Unicité de la solution sous des conditions convenables dans le cas réel, dans le cas complexe. Existence et unicité d'une solution holomorphe»* (compte rendu Bourbaki, 25 mars 1935). Les membres décident ensuite de présenter des théorèmes moins généraux (comme le théorème d'existence global pour les équations différentielles réelles dans tout domaine où les conditions d'existence locale sont remplies, continuité de la solution. Mêmes théorèmes pour le cas des variables complexes). Les applications viennent dans un troisième temps avec :

1° des équations et systèmes linéaires à coefficients constants avec second membre ;

2° des équations linéaires générales ;

3° des équations linéaires à coefficients et second membre périodiques.

A la fin des cas particuliers et des exemples.

Le 8 avril 1935, lors d'une réunion, les membres ont révisé la constitution de toutes les sous-commissions. Ces sous-commissions avaient comme tâches de préparer des rapports pour le premier congrès annuel de Bourbaki à Besse qui a eu lieu en juillet 1935. Ils ont décidé de mettre en place une sous-commission pour les théorèmes d'existence. Il a été décidé que cette sous-commission soit constituée de Weil, Cartan et Leray.

Le 13 avril 1935, il a eu une réunion qui était l'occasion pour la mise en place d'une sous-commission bibliographique. Les membres de cette sous-commission organisent la mutualisation des références bibliographiques entre les membres. Nous avons remarqué que la rubrique spécifique aux théorèmes d'existence ne comporte aucune référence.

4.2 Les théorèmes d'existence au premier congrès annuel de Bourbaki

Dans un fichier des archives intitulé « projet de programme des travaux, ordre du jour»[12] destiné à la préparation du premier congrès annuel de Bourbaki, les membres ont fixé le lundi 15 juillet 1935 comme date pour traiter le point de développement des parties sur la topologie et les théorèmes d'existence. Dans l'ordre des 10 jours du congrès, Bourbaki note *«TH. D'EXISTENCE : méthodes Leray à adopter ou repousser définitivement»*.

Dans un autre fichier intitulé « ordre et évaluation (Trois étapes) », on trouve trois versions d'ordre des matières du traité d'analyse. Ces trois versions résultent des échanges qui ont eu lieu à Besse (premier congrès de Bourbaki). Dans ces trois versions, les théorèmes d'existence sont fixés directement après la partie «Topologie» (effet de la proposition de Leray). La progression intermédiaire adoptée est la suivante : Ensembles abstraits → Algèbre → Nombres réels et complexes → Topologie et théorèmes d'existence. Les équations différentielles viennent à la fin de la progression.

Durant ce congrès la sous-commission «Equations différentielles» a rencontré beaucoup de critique. Bourbaki note dans un rapport détaillé, intitulé «Brève histoire des travaux de Bourbaki» : *«la commission des équations différentielles réussit rapidement à ne plus rien comprendre à la question et se sépare. Weil abandonné par ses co-commissaires, reste seul en face d'un comité légèrement avachi. Le rapport est adopté à moitié ; le reste, insuffisamment mûri, est laissé aux bons soins des rédacteurs futurs»*. En consultant le rapport de la commission des équations différentielles, les rapporteurs ont signalé que : *«il paraît difficile de faire grande chose si on ne possède pas d'abord des théorèmes d'existence. Pour le reste, l'ordre est quelque peu arbitraire»*. Ils proposent ensuite l'organisation suivante :

1° Formulation d'un problème d'équations différentielles (globalement).

2° Point de vue local. Dans cette partie, ils recommandent de formuler le problème d'existence d'une façon qui renvoie à la méthode de Leray. Ensuite, ils terminent par le cas de Lipschitz avec les conditions de stabilité locale. On illustre ceci à la fin par des théorèmes plus spécifiques (qui forme une sorte d'application de ce cadre général) : cas de n équations du premier ordre ; et cas de n équations du second ordre.

3° Point de vue global. Il comprend le théorème d'existence global, et d'unicité ou de stabilité sur tout intervalle fini. Les exemples et les applications de l'étude globale ne sont pas encore fixés.

Nous signalons que ce rapport contient beaucoup d'annotations, de paragraphes barrés, et des points d'interrogation, ce qui reflète une instabilité des idées ainsi que de leur organisation.

4.3 Ecriture et typographie

La fin du congrès de Besse en Chandesse était l'occasion pour un nouveau partage des tâches de rédaction entre les membres de Bourbaki (rédaction individuelle ou en binôme). La

[12] En ligne : http://archives-bourbaki.ahp-numerique.fr/archive/files/ede04c80e9a4a4566cd49b52d57f4b11.pdf

rédaction du rapport sur les équations différentielles a été confiée à Chevalley et le rapport topologie à Weil et de Possel.

Après le congrès, le 15 décembre 1935, Delsarte a communiqué aux membres des remarques pour l'uniformité d'apparence extérieure qui rentre *« en harmonie avec son unité essentielle et substantielle»* :

- Numérotation des théorèmes.
- Typographie des titres de paragraphes.
- Emploi des mots «théorème, définition, lemme, remarque, conséquence, corollaire».
- Typographie de ces mots.

Weil présente son rapport de topologie qui a été discuté lors d'une réunion le 22 mars 1936. Dans le compte rendu de cette réunion, daté du 25 mars 1936, est noté : *«Pas de difficulté dans l'analyse de la seconde partie - quelques frottements pour le degré topologique et les théorèmes de Leray. Il est définitivement admis qu'on fera les applications de ces théorèmes en dehors de la topologie »*. On ne sait pas exactement s'il s'agit ici des théorèmes d'existence de Leray. Mais l'analyse des productions ultérieures nous conduit à considérer qu'il s'agit des théorèmes d'existence. Par exemple dans un compte rendu du 6 juillet 1936, les membres ont décidé de fusionner les travaux sur les nombres réels avec les travaux de Weil dans le rapport de « Topologie », ce qui donne une nouvelle orientation à la table des matières.

Une nouvelle décision a été prise, renforçant un principe de généralité dans l'élaboration du traité d'analyse : *«il ne suffit pas de tout ramener à quelques théorèmes généraux, il faut encore montrer comment les résultats classiques sont des conséquences triviales de ces théorèmes généraux»* (juillet 1936). Cette décision a conduit à un chantier de conception de ressources pour les théorèmes classiques, les théorèmes d'applications, les cas particuliers et les exemples à présenter dans le traité d'analyse.

4.4 Synthèse et discussions

D'après l'étude d'un extrait de la genèse des théorèmes d'existence dans le traité d'analyse de Bourbaki, nous tirons que :

- l'exposition des savoirs a lieu suivant le principe de généralité : définition, théorèmes généraux, théorèmes des cas particuliers, théorèmes d'applications illustrés par des exemples ;
- la ressource à concevoir autour des théorèmes d'existence est cruciale pour la structuration du traité d'analyse, vu la corrélation de cette ressource avec les travaux de deux sous-commissions : la sous-commission «Topologie» et la sous-commission « Equations différentielles ».

L'organisation des savoirs mathématiques dans le traité « moderne » d'analyse, a émergé à l'issue d'une réflexion sur l'ensemble des notions en jeu et leur agencement. Elle a subi plusieurs tentatives d'abstraction, se développant par des allers-retours permanents entre le général/global et le particulier/local. En revanche, l'exposition des mathématiques chez Bourbaki est liée à une certaine rigueur et linéarité d'exposition, liées à l'héritage du formalisme algébrique moderne (cf. Van der Waerden 1930). Le processus d'élaboration de « l'analyse moderne » comporte une dimension expérimentale importante, qui apparaît dans les démarches adoptées.

5 En guise de conclusion et perspectives

Les archives de Bourbaki pourraient donner un appui à différents types de recherche, pas seulement en histoire et épistémologie des mathématiques, mais aussi en didactique des mathématiques. L'analyse de l'expérience de Bourbaki donne des potentialités pour le développement d'une entrée épistémologique permettant de capter et comprendre des dynamiques dans les collectifs d'enseignants des mathématiques. Cette considération de Bourbaki peut contribuer au développement d'une approche spécifiquement didactique pour l'étude des collectifs d'enseignants des mathématiques.

Dans l'enseignement des mathématiques au supérieur, on privilégie souvent le mode d'exposition Bourbakiste des contenus notionnels plutôt que les démarches de leur élaboration. L'insistance sur la rigueur présente dans les mathématiques exposées, au détriment parfois des démarches, cache les enjeux épistémologiques de ces mathématiques et donne l'impression qu'il y a un niveau d'abstraction non justifié.

La consultation des archives de Bourbaki montre que la dénomination des concepts mathématiques et l'utilisation des terminologies n'émergent qu'après de multiples essais avortés. Le processus de dénomination des nouveaux objets mathématiques (surtout en lien avec la théorie des ensembles) pour la réalisation d'une œuvre mathématique commune paraît utile pour déterminer les caractéristiques des démarches mathématiques qui ont impacté l'enseignement des mathématiques (réformes des mathématiques modernes, la naissance de la didactique, etc.).

Bibliographie

Beaulieu, L., (1990). *Bourbaki. Une histoire du groupe de mathématiciens français et de ses travaux (1934-1944)*. Thèse de Ph. D., Université de Montréal.

Bénis-Sinaceur, H., (1987). Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès, *Revue d'histoire des sciences*, 40/1, pp. 5-30.

Bourbaki, N., (1948). L'architecture des mathématiques, In *les grands courants de la pensée mathématiques*. Cahier du sud, pp. 35-47.

Corry, L., (2008). Writing the Ultimate Mathematical Textbook: Nicolas Bourbaki's Eléments des mathématiques. In Eleanor Robson et al. (eds.), *The Oxford Handbook of the History of Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Dieudonné, J., (1939). Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques. *La Revue scientifique*, 77, p. 224-232 (repris dans F. le Lionnais [1962]).

Dieudonné, J., (1970). The work of Nicholas Bourbaki, *The American Mathematical Monthly*, 77, pp. 134-145.

Goursat, E., (1911). Cours d'analyse mathématique, 3 volumes, 2ème éditions, Paris : Gauthier-Villars.

Hilbert, D. (1899). *Grundlagen der Geometrie*. Teubner : Leipzig.

Houzel, C., (2004). Le rôle de Bourbaki dans les mathématiques du vingtième siècle. *Gazette des Mathématiciens*, 100, pp. 53-63.

Jackson, A. (1999). Interview with Henri Cartan, *Notices American Mathematical Society,* 46/7, pp.782-788. http://www.ams.org/notices/199907/fea-cartan.pdf

Patras, F., (2001). *La pensée mathématique contemporaine*. P.U.F.

Van der Waerden, B.-L., (1930). Moderne Algebra. New York: Springer-Verlag.

Weil, A. (1992). The Apprenticeship of a Mathematician. J. Cage (translation). Basel: Birkhäuser.