LA POSTURE DU HÉRON CRABIER

Pierre-François BURGERMEISTER,
DiMaGe, Université de Genève

Résumé. Nous présentons une situation d'investigation organisée autour de la *formule de Héron* et dont l'objectif est d'initier des élèves de lycée à l'emploi de la *dimension fonctionnelle* des formules géométriques. Nous décrivons et discutons le déroulement de deux séances expérimentales réalisées sur la base de cette situation avec des élèves de 3ème année du Collège de Genève (17-18 ans) avant de dégager les perspectives possibles de ce premier travail en vue d'un renforcement plus consistant de la dimension fonctionnelle dans les pratiques scolaires.

Mots-clefs. Formule géométrique, analyse sémiotique, modélisation algébrique, situation d'investigation, héron crabier.

Abstract. We present an inquiry situation for the class organized around the Heron formula which purpose is to introduce the pupils at the use of the functional dimension of a geometric formula. We expose and discuss two experimentations realized from this situation with 3-grade pupils from the College of Geneva (17-18 years old).

Keywords. Geometric formula, semiotic analysis, algebraic modeling, inquiry based learning, squacco heron.

1. Problématique

L'échange ci-dessous se déroule à Genève dans une classe de mathématiques du secondaire2. Il est fictif bien mais emblématique et il va servir à introduire notre propos :

> Thomas (un élève) : L'aire d'un disque, je sais bien que c'est $2\pi r$ ou πr^2, mais je ne me souviens jamais lequel des deux choisir …
> Enseignant : Une aire, c'est des mètres ou des mètres carrés ?
> Thomas : Des mètres carrés.
> Enseignant : Bon. Et bien alors ?
> Thomas : Euh … ??
> Enseignant : $2\pi r$, c'est des mètres carrés ?
> Thomas : Ben … ?

Laissons notre enseignant fictif poursuivre son travail difficile et tentons d'interpréter cet échange. Dans les années qui précèdent, Thomas a appris que la circonférence d'un disque de rayon r est égale à $2\pi r$ et que son aire est donnée par πr^2. Ces formules ont été plus ou moins soigneusement introduites, justifiées et institutionnalisées par ses enseignants, et il a eu l'occasion d'en exercer l'usage dans de nombreux exercices et problèmes. Il est maintenant capable de calculer le périmètre ou l'aire d'un disque de rayon donné en convoquant l'une ou l'autre de ces deux formules, mais le choix qu'il opère entre les deux est incertain et dénué de possibilités de contrôle. En particulier, il ne paraît pas capable de discerner le lien qui existe entre le type de grandeur (longueur ou aire) représenté par chaque formule et la puissance à laquelle y est élevé le rayon du disque.
Cet exemple introductif illustre le propos de ce texte : il vise à apporter des éléments de réflexion sur ce que l'enseignement pourrait faire pour permettre aux élèves d'acquérir

une meilleure compréhension des informations plus ou moins explicitement contenues dans une formule géométrique. Ainsi dans un premier temps (section II), nous dégageons et définissons deux fonctions essentiellement distinctes portées par toute formule géométrique, la *fonction procédurale* que maîtrise Thomas et la *fonction sémiotique* dont il ne tire pas profit. A titre d'exemples, nous analysons ensuite la fonction sémiotique de la formule de l'aire d'un parallélogramme en fonction des longueurs de deux côtés adjacents et de la mesure de l'angle compris entre les deux (section III), puis celle de la formule de Héron pour l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés (section IV). En renversant la perspective, nous obtenons pour ces deux situations géométriques une liste de conditions que doivent remplir toutes formules potentielles destinées à les représenter.
Ces analyses nous permettent alors de dégager des critères heuristiques pour mettre à l'épreuve la validité d'une formule géométrique proposée sous forme de conjecture, critères que nous utilisons pour élaborer un dispositif didactique (section V), sous la forme d'une situation d'investigation autour de la recherche d'une formule géométrique (celle de Héron) par une succession de conjectures et de réfutations.
Ce dispositif vise, plus largement, à familiariser les élèves avec la fonction sémiotique des formules géométriques. Nous rendons compte dans la section VI des deux premières expérimentations de ce dispositif et en discutons les résultats. Finalement, la section VII tente de définir les perspectives que peut ouvrir cette étude.

2. Les deux fonctions d'une formule géométrique

Dans l'institution scolaire, la formule $A=\pi r^2$ possède avant tout une *fonction procédurale* : elle indique comment procéder pour calculer l'aire A d'un disque dont on connaît le rayon r. Cette fonction est la principale raison d'être de la formule dans le cours de mathématiques. Elle est toujours exemplifiée par l'enseignant et largement exercée par les élèves. Elle est au cœur des techniques qui permettent de déterminer l'aire d'un disque donné et on remarque en effet, à l'examen des plans d'études et des moyens d'enseignement, qu'elle possède une niche confortable dans l'écologie des savoirs scolaires.
Mais l'écriture même de la formule $A=\pi r^2$, la façon dont elle associe certains signes, permet de « voir » que l'aire d'un disque est proportionnelle au carré de son rayon, que le coefficient de proportionnalité est π, que, moyennant le fait que π est proche de 3, cette aire correspond à peu près trois carrés de côté le rayon. En outre, le signe du 2 en exposant marque le fait qu'elle s'exprime dans une unité de surface. Nous voyons par là que cette formule possède également une *fonction sémiotique* : elle fonctionne comme une association de signes renvoyant, pour qui sait la décoder, à un ensemble de propriétés mathématiques qui lient le rayon à l'aire du disque.

Pour tenter de préciser le sens que nous donnons à ces deux fonctions, nous nous appuierons sur les notions définies par Bosch et Chevallard (1999) de « valence instrumentale » et de « valence sémiotique » d'un objet ostensif. La première nous semble correspondre assez bien à notre « fonction procédurale » :

> (...) un objet ostensif [dans notre cas : une formule géométrique] est considéré d'abord comme un instrument possible de l'activité humaine, c'est-à-dire comme une entité qui permet, en association avec d'autres, de conformer des techniques permettant d'accomplir certaines tâches, de mener à bien un certain travail [pour nous : calculer l'aire d'un disque dont on connait le rayon]. (Bosch & Chevallard, p. 107)

Et la seconde nous semble englober (mais peut-être en la dépassant) notre « fonction sémiotique » :

> (...) l'ostensif (le représentant) est à la place d'un complexe d'objet (le représenté) qui l'incluent en tant qu'élément intégrant. Pour désigner ce fonctionnement de l'objet ostensif comme signe, nous parlerons de la valence sémiotique ou de la sémioticité des objets ostensifs. (Ibid., pp. 109-110)

Cependant, Bosch et Chevallard voient une ouverture dans l'instrumentalité d'un ostensif :

> Sa nature ostensive donne à l'objet ostensif une instrumentalité potentielle, sa valence instrumentale. Mais c'est son engagement dans un ensemble de techniques institutionnellement déterminées, en vue d'accomplir des tâches déterminées, qui en fera un instrument concrètement défini, et cela sans que son instrumentalité cesse d'être ouverte à d'autres usages possibles. (Ibid., p. 107)

ainsi que dans sa sémioticité :

> Les usages possibles d'un objet ostensif dans différentes pratiques font que sa sémioticité reste toujours ouverte, même si sa valeur sémiotique, réalisée concrètement par son engagement dans une *praxis* déterminée, ne peut être fixée à volonté. (Ibid., p. 110)

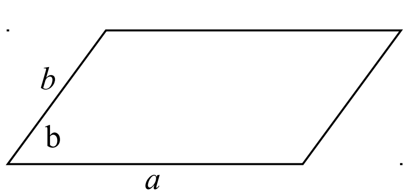
alors que la fonction procédurale d'une formule géométrique est, à notre sens, univoquement déterminée[1], de même que sa fonction sémiotique. Il nous semble que les ouvertures évoquées par Bosch et Chevallard tiennent essentiellement aux possibilités de transformations des objets ostensifs qu'ils décrivent alors que nous considérons ici les formules géométriques de manière statique et que nous nous intéressons à leurs fonctions possibles hors transformation.

Cette contribution s'intéresse plus particulièrement à la fonction sémiotique des formules géométriques et à son apprentissage. Nous considérons que la plupart des élèves du secondaire genevois, à l'image de Thomas, maîtrisent très mal cette fonction. Plus exactement, ils ne sont pas capables d'analyser les liens entre une formule géométrique, c'est-à-dire un ensemble de signes organisés par une syntaxe particulière, et les signifiés concernant les relations entre les variables en jeu auxquelles cette organisation, précisément, renvoie. Dans ce contexte, nous nous proposons de chercher des moyens propres à développer les facultés d'analyse sémiotique des élèves lorsqu'ils sont confrontés à des formules géométriques.

Un exemple élémentaire

Ce premier exemple va nous permettre d'expliciter la fonction sémiotique d'une formule élémentaire. Nous renverserons ensuite la perspective pour constater que l'analyse sémiotique d'une formule géométrique peut être vue comme le processus inverse de la modélisation algébrique d'une situation géométrique.

> Dans le plan euclidien, un parallélogramme est entièrement déterminé par la donnée des longueurs de deux côtés adjacents et de l'angle compris entre ces deux côtés. L'aire de ce parallélogramme peut s'obtenir de ces trois données par la formule $A = a \times b \times \sin(\delta)$.

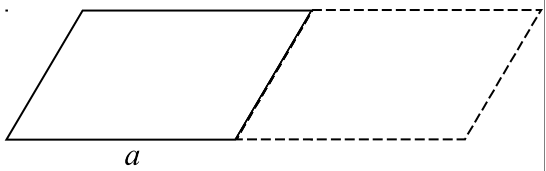


La fonction procédurale de cette formule est évidement de calculer A pour des valeurs données de a, b et δ. Sa fonction sémiotique est de signifier que :

1 Ainsi, la fonction procédurale de la formule $A = \pi r^2$ est de calculer l'aire A correspondant à une valeur donnée du rayon r, alors que cette formule admet au moins deux valences instrumentales potentielles : le calcul de A pour un r donné d'une part ; le calcul de r pour un A donné d'autre part, modulo une transformation de formule.

i. A est proportionnelle à a : pour b et δ fixés, A double (respectivement est multipliée par un facteur k) lorsque a double (respectivement est multiplié par k).
ii. A est proportionnelle à b pour la même raison.
iii. l'aire A étant le produit de a, b et d'un facteur dénué d'unité, elle s'exprime dans une unité composée du produit des unités de a et de b.
iv. A prend les valeurs 0, ab et 0 lorsque δ prend les valeurs 0°, 90° et 180° respectivement.

Nous avons établi cette liste de quatre points en partant d'une formule donnée et en cherchant à y « lire » les relations qu'elle signifie entre les grandeurs variables a, b, δ et A. Renversons maintenant la perspective : plutôt que d'aller de l'algébrique vers le géométrique, allons en sens inverse : en partant de la situation géométrique du parallélogramme représenté ci-dessus et en analysant cette situation, déterminons les relations algébriques qui doivent lier a, b, δ et A dans une formule que nous supposons encore inconnue. Cette analyse géométrique nous amène à remarquer que, dans la formule recherchée, l'aire A doit :

C1 être proportionnelle à a : en effet pour b et δ fixés, A doit doubler (respectivement être multipliée par un facteur k) lorsque a double (respectivement est multiplié par k),	

C2 être proportionnelle à b pour la même raison,
C3 s'exprimer dans une unité de surface,
C4 prendre les valeurs 0, ab et 0 lorsque δ prend les valeurs 0°, 90° et 180° respectivement.

Remarquons que le chemin parcouru en sens inverse, c'est-à-dire du géométrique vers l'algébrique, nous fait passer par les quatre points déjà rencontrés précédemment, mais formulés cette fois sous forme de conditions déduites de la réalité géométriques et dont la formule algébrique cherchée doit rendre compte.

Récapitulons : l'analyse sémiotique de la formule $A = a \times b \times \sin(\delta)$ consiste à interroger la syntaxe de l'écriture $a \times b \times \sin(\delta)$, autrement dit à analyser algébriquement cette formule, pour en retirer les informations i à iv portant sur la situation géométrique à laquelle elle fait référence. En sens inverse, l'analyse géométrique de la situation nous permet de remarquer que les conditions C1 à C4 doivent être respectées par une formule potentielle (supposée encore inconnue). Il nous semble que les deux analyses sont intimement liées sitôt que l'on considère une formule géométrique comme une modélisation algébrique d'une situation géométrique, suivant ainsi Chevallard (1989) pour qui la modélisation mathématique

> (...) suppose essentiellement deux registres d'entités : un système mathématique ou non mathématique et un modèle (mathématique) de ce système. (Op. cité, p. 53)

Considérée ainsi, l'analyse sémiotique d'une formule géométrique consiste à expliciter les informations que porte le modèle (algébrique) relativement au système (géométrique), alors que l'analyse géométrique consiste à retirer les informations essentielles d'un système (géométrique) pour en construire un modèle (algébrique), c'est-à-dire à modéliser algébriquement le système géométrique. Les deux analyses concernent donc un même couple système – modèle. C'est pourquoi nous postulerons par la suite (section V) qu'un travail didactique sur l'analyse géométrique des contraintes et la construction du modèle algébrique à partir de ces contraintes, s'il est porteur d'apprentissages sur la relation entre système et modèle, doit permettre aux élèves de développer, en retour, leurs facultés d'analyse sémiotique des formules géométriques.

Nous passons maintenant à l'analyse de la formule en jeu dans notre situation d'investigation expérimentale.

La formule de Héron pour l'aire du triangle

Dans la plan euclidien, un triangle est entièrement déterminé par la donnée des longueurs a, b et c de ses trois côtés. En particulier, son aire A peut s'exprimer en fonction de a, b et c uniquement. Ce résultat classique est connu sous le nom de formule de Héron (ou théorème de Héron). Dans la littérature, (par exemple Ostermann et Wanner, à paraître, pp.183–185), il apparaît généralement sous la forme suivante :

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad (1)$$

où $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ représente le demi périmètre du triangle.

Dans ce texte, nous préférerons cependant la forme développée :

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)} \qquad (2)$$

La forme (2) présente sur la première un désavantage esthétique qui explique vraisemblablement l'adoption généralisée de la forme (1) dans la littérature tant scolaire que scientifique, mais elle présente à nos yeux un avantage didactique déterminant, celui de permettre une analyse sémiotique plus directe ou, autrement dit, de proposer une modélisation plus facilement « lisible ». En effet, l'analyse algébrique de cette forme nous permet de constater que

i. *Unités* : A s'exprime dans une unité qui est le carré de celle des trois côtés.

ii. *Symétrie* en a, b et c : les trois variables peuvent être interchangées dans la formule sans que le résultat en soit affecté.

iii. *Valeurs extrêmes* : A s'annule si $a+b=c$; idem pour $b+c=a$, $c+a=b$ et $a+b+c=0$.

iv. *Valeurs non définies* : $A \notin \mathbf{R}$ si $a+b<c$; idem pour $b+c<a$ et $c+a<b$.

Mais l'avantage de la forme (2) devient encore plus évidente lorsque nous nous intéressons, à l'inverse, au travail de modélisation algébrique de la situation géométrique. En effet, mettons nous dans la posture de chercher à établir une formule (supposée inconnue) pour établir l'aire A d'un triangle en fonction des longueurs a, b et c de ses trois côtés. Quelles sont, sur la base d'une analyse de cette situation géométrique, les contraintes que la formule recherchée devra respecter ? En voici une liste (non exhaustive mais suffisante pour en déduire la formule) :

C1 *Respect des unités* : le résultat doit être de degré 2.

C2 *Symétrie* en a, b et c : les places des trois côtés doivent pouvoir être interchangées dans la formule sans que le résultat en soit affecté.

C3 *Respect des cas dégénérés de première espèce* : Si $a+b=c$, A doit être nulle ; idem pour $b+c=a$ et $c+a=b$.

C4 *Respect des cas dégénérés de deuxième espèce* : Si $a = 0$ et si $b = c$, A doit être nulle ; idem pour $b = 0$ et $c = a$ ainsi que pour $c = 0$ et $a = b$.

C5 *Respect des cas impossibles de la première espèce* : Il n'existe pas de triangle avec $a + b < c$. La formule doit rendre compte de cette impossibilité. Idem pour $b + c < a$ et $c + a < b$.

C6 *Respect des cas impossibles de la deuxième espèce* : Il n'existe pas de triangle avec $a < 0$. La formule doit rendre compte de cette impossibilité.

C7 *Respect des cas particuliers connus*, par exemple 3–4–5, 5–12–13 et *a–a–a* : dans ces cas particuliers, la formule doit donner les valeurs adéquates pour A ($6, 30$ et $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ respectivement).

Il apparaît clairement que la modélisation proposée par la forme (2) de la formule de Héron est plus facilement accessible, à partir des contraintes ci-dessus (en particulier C3) que celle de la forme (1).

Nous avons établi cette liste en cherchant à répertorier les contraintes minimales qui pourraient permettre, à elles seules, de déterminer un modèle algébrique aussi proche que possible de la forme (2). Notons toutefois que, pour être déjà relativement longue, cette liste n'est pas exhaustive. Par exemple, nous n'avons pas retenu la contrainte « A doit toujours être positive » qu'il n'est pas nécessaire d'ajouter aux précédentes pour pouvoir construire le modèle recherché.

Dans la section suivante, nous allons construire un dispositif didactique autour de la tâche « modéliser algébriquement la relation qui lie l'aire d'un triangle aux longueurs de ses trois côtés ». Cependant, en raison du contrat de recherche que nous définirons avec les élèves, cette tâche sera énoncée sous une forme proche de « deviner une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ». Les contraintes C1 à C7 listées ci-dessus nous servirons de balises pour l'avancement de la recherche.

Élaboration d'un dispositif didactique

Le dispositif que nous allons présenter s'adresse à des élèves du collège genevois (équivalent du lycée français), et en particulier à des classes de 3$^{\text{ème}}$ année (élèves de 17-18 ans). L'objectif général est d'entraîner les élèves à repérer, par décryptage de la syntaxe algébrique, les traits saillants des relations et contraintes liant les variables à l'intérieur d'une formule géométrique donnée. Nous aimerions que les élèves adoptent dans cette recherche la même attitude que le Héron Crabier – espèce de petit héron discret et au regard particulièrement aiguisé – lorsqu'il scrute ses proies cachées dans la vase du marais :

> Tantôt il s'avance lentement, le dos voûté et le cou rentré, levant haut une patte après l'autre ; ses longs doigts lui permettent de marcher sur la vase molle et sur les plantes sans s'enfoncer, à la manière d'un Râle. Tantôt il s'accroupit à l'affût, penché en avant et le cou un peu allongé, le bec très proche de l'eau qu'il scrute du regard, tout comme un Butor. (Géroudet, p. 71)

Au vu du rôle de « chercheur » conféré aux élèves, nous plaçons ce dispositif dans le cadre des « situations d'investigation », ou Inquiry Based Learning, au sens de Linn et al. (2004) :

> By definition, inquiry is the intentional process of diagnosing problems, critiquing experiments, and distinguishing alternatives, planning investigations, researching conjectures, searching for information, constructing models, debating with peers, and forming coherent arguments (cité par Rocard et al. 2007, p.9).

Plus prosaïquement, nous visons essentiellement l'objectif d'apprentissage suivant :

Objectif général (version décodage) :

> Être capable de procéder à l'analyse sémiotique d'une formule géométrique. C'est-à-dire savoir lire dans la syntaxe algébrique de cette formule tout ce qu'elle signifie en termes de relations et contraintes entre les variables géométriques qui la composent.

Notre objectif principal est donc l'apprentissage de l'analyse sémiotique d'une formule ou, autrement dit, de son décodage algébrique. Or, nous adoptons comme postulat que pour pouvoir décoder il est nécessaire de connaître le codage. Dès lors, nous nous proposons d'initier les élèves au codage algébrique d'une situation géométrique. Et nous reformulons notre objectif général de la manière suivante :

Objectif général (version codage) :

> Être capable de modéliser une situation géométrique par un modèle algébrique. Plus précisément : savoir expliciter les contraintes qu'une situation géométrique donnée impose à tout modèle algébrique (formule) supposé la représenter, et savoir organiser ces différentes contraintes au sein d'un modèle algébrique à éprouver.

Pour travailler cet objectif sous la forme d'une situation pour la classe, nous avons choisi le cas particulier de la formule de Héron pour trois raisons. Premièrement, le système géométrique qu'elle modélise est suffisamment simple pour que l'entrée des élèves dans l'activité soit aisée. D'autre part, les contraintes algébriques à respecter (cf. C1 à C7 ci-dessus) sont nombreuses et riches ; l'enjeu d'apprentissage, c'est-à-dire l'explicitation de ces contraintes, est ainsi particulièrement consistant. Finalement, cette formule ne faisant pas partie du plan d'étude genevois, nous pouvons raisonnablement faire l'hypothèse qu'elle ne sera pas déjà connue des élèves de notre dispositif expérimental, condition essentielle pour qu'ils puissent entrer dans une réelle démarche d'investigation (ils ne connaîtront pas le résultat à l'avance).

Dans ce cas particulier, notre objectif général se décline comme :

Objectif spécifique (pour la formule de Héron) :

> Être capable d'identifier les contraintes algébriques que doit vérifier un candidat-formule pour exprimer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ; savoir organiser ces différentes contraintes au sein d'un modèle algébrique à éprouver ; savoir mettre ce modèle à l'épreuve de quelques triangles particuliers.

Notre propos est maintenant d'élaborer un dispositif didactique visant à mettre les élèves en situation d'investigation autour de la tâche « deviner une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés ».

L'objectif premier étant l'identification des contraintes algébriques que cette formule devra respecter, nous désirons que ces contraintes soient mobilisées et formulées par les élèves eux-mêmes. C'est pourquoi, nous avons choisi d'organiser la recherche sous la forme d'un débat scientifique (Legrand 1990) avec toute la classe, et plus particulièrement d'un « débat de conjecture » :

> (...) il s'agit alors pour l'enseignant se susciter un certain nombre d'énoncés conjecturaux (...). Le débat porte alors d'une part sur la correction des énoncés proposés en tant qu'énoncés scientifiques (exigence de forme) et d'autre part sur la validité de l'affirmation ; les arguments apportés par les participants sont à leur tour examinés sous ces deux aspects. (Op. cité, p. 92)

Ce dispositif offre en effet deux caractéristiques particulièrement adéquates à notre propos. D'une part, les propositions de tous les élèves d'une classe s'ajoutant les unes aux autres, les probabilités d'apparition des différentes contraintes visées sont optimisées. D'autre part, la forme du débat place sur les élèves la responsabilité d'examiner la validité des conjectures proposées et donc de les tester sur des cas particuliers, de les réfuter lorsqu'il y a lieu et de poursuivre ainsi la recherche de la manière la plus adidactique possible.

Nous devons néanmoins nous demander, pour chacune des contraintes C1 à C7 identifiées plus haut, dans quelle mesure nous pouvons nous attendre à ce que les élèves de notre expérience y fassent appel d'eux-mêmes. Nous procédons maintenant à cet examen préalable :

C1 devrait être rapidement mobilisé par une partie importante des élèves. En effet, cette contrainte est fréquemment utilisée comme critère de pertinence dans les cours de maths et de physique du collège. Et même s'ils ne l'utilisent généralement pas eux-mêmes dans leurs pratiques mathématiques usuelles (c'est-à-dire sous le contrat didactique usuel), il est probable que dans le contexte d'un débat scientifique (et sous le contrat didactique spécifique à ce contexte), les élèves cherchent à mobiliser des outils de contrôle connus.

La mobilisation de C2 par les élèves semble beaucoup moins probable car cette contrainte n'est pratiquement jamais explicitée dans les cours de mathématiques et de physique. Nous nous attendons donc à ce qu'une intervention de l'enseignant soit probablement nécessaire à son apparition.

Par rapport aux deux premières contraintes, C3 à C6 sont plus spécifiques à la situation géométrique. Leur mise en évidence suppose une analyse fonctionnelle (examiner comment varie l'aire lorsque les côtés varient) couplée avec une modélisation algébrique relativement complexe pour les élèves concernés (par exemple, la contrainte « A est nulle si $a+b=c$ » doit être modélisée par la présence du facteur $(a+b-c)$ dans la formule). En ce sens, elles constituent à la fois une difficulté importante et un enjeu fort de notre dispositif. Avant les expérimentations en classe, nous étions très incertains quant à la probabilité de construction de ces contraintes par les élèves au cours du débat.

C7 doit impérativement être mobilisée par les élèves pour que la recherche puisse avancer de manière contrôlée. Nous pouvons essayer de favoriser son emploi en exposant le problème aux élèves à partir d'un cas particulier (par exemple 3–4–5) et en laissant ce cas exposé durant le débat.

Notons enfin que C4 est contenue dans C3 : si $a=0$ et si $b=c$, alors $a+b=c$. De même C6 est contenue dans C5 : si $a<0$, alors $a+b<c$ ou $a+c<b$. Autrement dit, l'identification des cas dégénérés et impossibles de la première espèce est plus utile que celle des cas de la deuxième espèce. Et de fait, ce sont bien les cas de la première espèce qui constituent les clés pour accéder à un modèle algébrique relativement abouti.

La section suivante décrit les deux expérimentations de ce dispositif que nous avons effectuées.

Expérimentations

Nous avons expérimenté la situation « Héron Crabier » dans deux classes de 3ème année du Collège genevois (élèves de 17-18 ans). La première, dans laquelle nous occupions nous-mêmes le poste d'enseignant de mathématiques, regroupait des élèves qui avaient choisi un niveau « fort » pour cette discipline (classe F pour la suite), alors que la seconde regroupait des élèves de niveau « normal » (classe N) du même établissement et était placée sous la responsabilité d'un autre enseignant de mathématiques. Dans chaque cas, une séance de 45 minutes du cours de mathématique a été consacrée à cette activité, sans aucune préparation spécifique au préalable. Pour la classe N, nous avons préalablement présenté à l'enseignant les objectifs de la séance (identification et emploi de contraintes algébriques par les élèves) et discuté avec lui des modalités de son déroulement, en imposant la forme générale du débat scientifique, mais en lui laissant adapter les détails de sa mise en œuvre.

Dans la classe F, nous avons introduit la séance en demandant aux élèves s'il était possible de construire un ou plusieurs triangles de côtés 8–15–20 puis, après avoir rapidement obtenu et validé les réponses souhaitées, nous avons institutionnalisé l'existence et l'unicité (à isométries près) pour ce cas particulier. Nous sommes ensuite passé au cas général et avons institutionnalisé par extrapolation l'unicité du triangle de côtés *a*–*b*–*c*, lorsque *a*, *b* et *c* sont des réels positifs, sans se préoccuper des cas dégénérés et impossibles. Nous en avons déduit l'existence potentielle d'une formule permettant de calculer l'aire d'un triangle en fonction des longueurs de ses trois côtés uniquement. Finalement, nous avons exposé aux élèves le contrat de la recherche : à eux la responsabilité de proposer une formule possible puis d'en discuter la vraisemblance sans passer par l'élaboration d'un calcul algébrique complexe (du type Aire = ½*base*hauteur, or hauteur = ... , donc ... , etc), et d'affiner ainsi, petit à petit, les conjectures ; à nous de diriger le débat et de prendre note au tableau noir des formules suggérées et des critères utilisés pour en discuter la pertinence.

Nous schématisons ci-dessous l'avancée de cette recherche. Les éléments amenés par l'enseignant sont indiqués par un (Ens), le reste provient des élèves.

Dans le schéma ci-dessous, P indique une proposition (ou conjecture) de formule, C une contrainte explicitée, E un essai de mise à l'épreuve d'une conjecture sur un triangle particulier.

Notons que la proposition P4 a été formulée par un élève qui avait déjà rencontré la formule de Héron dans son parcours antérieur et a fait appel aux bribes de souvenirs qui lui en restaient.

P1 (Ens) : $A = abc$

C1 : il ne faut pas des cm^3.

P2 : $A = \frac{a+b}{2} \times c$

C5 : $a + b \geq c$

Réfutation de P2 : $A = \frac{h}{2} \times c$ où h est la hauteur qui correspond à la base c. Or, h est forcément plus petit que $a + b$.

Deuxième réfutation P2 : si on prend le cas extrême où $a + b = c$, ça nous ferait $\frac{c^2}{2}$. Or, dans ce cas l'aire devrait être nulle.

C3 : Si $a+b=c$, l'aire doit être nulle.

P3 : $(a+b-c)\times c$

E1 : avec 3–4–5, $a=3, b=4, c=5$, P3 donne une aire de 10 alors qu'il faudrait 6.

E1 bis et P3 : avec 3–4–5, $a=3, b=4, c=5$, $(a+b-c)\times a$ est correcte.

I1 (première impasse) : c'est impossible que ça marche quels que soient les côtés que l'on appelle *a*, *b* ou *c*.

Sortie de I1 et C2 (Ens) : si on a une formule qui tient la route, on doit pouvoir échanger les noms sans que ça modifie le résultat.

P4 : $A=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c}$

Réfutation de P4 avec E1 : on obtient 4 et non 6.

P5 : $A=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c}+2$

Réfutation de P5 avec C3 : si $a+b=c$, P5 donne une aire de 2 au lieu de 0.

P6 : $A=\dfrac{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}{a+b+c}\times\dfrac{3}{2}$

E2 et réfutation de P6 : avec *a*–*a*–*a*, P6 est fausse car elle donne $\dfrac{a^2}{2}$ qui ne peut pas être égal à $\dfrac{ah}{2}$ (où *h* est la hauteur correspondant à la base *a*) car la hauteur d'un triangle équilatéral est plus petite que son côté.

E2 suite (sur demande de Ens) : avec *a*–*a*–*a*, l'aire est $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$

I2 : on ne peut pas adapter P4 avec une multiplication par une constante.

Sortie de I2 (Ens) : $(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$ était nécessaire, mais les unités n'étaient pas respectées. Partant de là, y a-t-il un moyen de respecter les unités autre que de diviser par $a+b+c$?

P7 : $\left(\sqrt[3]{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}\right)^2$

Réfutation de P7 et C5 (Ens) : si $a+b-c<0$, le triangle est impossible. P7 ne rend pas compte de cette impossibilité.

P8 : $\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}$

Test de P8 avec E1 et E2 : on trouve 24 et $\sqrt{3}a^2$ au lieu de 6 et $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$ respectivement.

P9 : $\dfrac{1}{4}\sqrt{(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)(a+b+c)}$

Cette recherche collective, qui a duré moins de 40 minutes, a abouti à conjecturer la formule de Héron elle-même. Mais surtout, et c'est ce qui nous intéresse en premier lieu, les contraintes C1 (respect des unités), C3 (cas dégénérés de la première espèce) et C5 (cas impossibles de la première espèce) ont été explicitées par les élèves, alors que C2 (symétrie en *a*, *b*, *c*) a été amenée par nous sur la base d'une ébauche inaboutie des élèves. Observons aussi un phénomène de co-genèse que nous n'avions pas anticipé : C2 a été élaborée sur la base de l'essai E1 après que les différentes utilisations de ce dernier aient montré la nécessité de la symétrie. L'interdépendance entre les mises à l'épreuve des conjectures sur des cas particuliers et l'élaboration des contraintes s'avère plus complexe que nous le pensions.

Nous ne détaillons pas le déroulement de l'expérience réalisée dans la classe N. Disons seulement que l'enseignant a entamé la séance en annonçant aux élèves qu'ils allaient « enfin faire des mathématiques », mais sans préciser davantage les clauses du contrat de recherche. Il a ensuite demandé aux élèves s'il était toujours possible de construire un triangle de côtés donnés *a–b–c*, puis, face au silence persistant de la salle, il a proposé d'essayer avec des exemples. Un élève a proposé le cas 3–4–5, dont l'existence a été admise par l'enseignant qui a demandé s'il y avait des cas « pathologiques ». Après un nouveau mutisme de la classe, c'est l'enseignant lui-même qui a proposé le cas 100–2–2 et qui a ainsi amené la condition C5 qu'il voulait établir préalablement au démarrage de la recherche d'une formule d'aire. Lorsque cette recherche a alors commencé, il nous semble que le contrat était déjà implicitement biaisé : les élèves se sont installés dans une position d'auditeurs en attente des réponses de l'enseignant à ses propres questions et celui-ci s'est effectivement trouvé peu à peu contraint à prendre sur lui la totalité de l'avancée de la recherche.

Perspectives

Quelles conclusions pouvons-nous tirer de ces premières expérimentations ? Et quelles perspectives nous laissent-t-elles entrevoir ?

En premier lieu, l'expérience de la classe F montre que l'objectif spécifique que nous visions à travers cette activité est bien à la portée du groupe classe, pour autant qu'un certain encadrement soit apporté par l'enseignant. Quant à l'expérience de la classe N, elle montre bien que la tâche proposée aux élèves n'est – de loin – pas aisée pour les élèves. Elle illustre d'autre part la difficulté du travail de l'enseignant qui doit tenir un équilibre périlleux entre une direction de débat la moins interventionniste possible et la nécessité d'insuffler lorsque c'est nécessaire quelques éléments de relance judicieusement choisis. Ce double constat confirme à la fois l'intérêt de notre situation d'investigation relativement aux objectifs visés et la difficulté de sa mise en pratique dans la classe.

En deuxième analyse, nous devrons examiner plus finement le déroulement des deux séances expérimentales (nous disposons des enregistrements vidéo) et, surtout, réaliser d'autres expérimentations pour essayer d'améliorer notre situation, notamment dans les modalités de son déroulement. On peut par exemple se demander si une première phase de recherche par groupes d'élèves permettrait d'améliorer l'implication de chacun dans le débat en grand groupe qui suivrait dans une seconde phase, ce point étant particulièrement important pour les élèves aux profils les moins scientifiques.

Nous aimerions à plus long terme construire d'autres situations d'investigation en vue d'ancrer la pratique de la démarche d'analyse sémiotiques des formules géométriques dans le bagage technique des élèves. Finalement, il s'agira de s'interroger sur la possibilité d'insérer cette pratique dans l'enseignement usuel, en construisant des situations collant de plus près, dans leur contenu, au plan d'étude du Collège genevois et plus proches, dans leur forme, des exercices habituellement proposés aux élèves dans les cours de mathématiques.

Références

Bosch M., Chevallard Y. (1999) La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 19.1, 77-124.

Chevallard Y. (1989) Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège, deuxième partie : perspectives curriculaires, la notion de modélisation. *Petit x* 19, 43-72.

Géroudet P. (1978) *Grands Echassiers, Gallinacés, Râles d'Europe*. Neuchâtel : Delachaux et Niestlé.

Legrand M. (1990) Le débat scientifique en cours de mathématiques. In Commission Inter-Irem-Université (Ed.) *Enseigner autrement les mathématiques en DEUG A première année, principes et réalisations* (pp.91-109).

Linn, M. C., Davis, E. A. et Bell, P. (2004). *Internet environments for science education*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Ostermann A., Wanner G. (à paraître) *Geometry by Its History*. Berlin : Springer.

Rocard, M., Cesrmley, P., Jorde, D., Lenzen, D., Walberg-Herniksson, H., Hemmo, V. (2007). Science education NOW: A Renewed Pedagogy for the Future of Europe. Retrieved March 2010, from http://ec.europa.eu/research/science-society/document_library/pdf_06/report-rocard-on-science-education_en.pdf.

UN EXEMPLE DE PROBLÈME

Dans le problème qui va suivre, on se place dans le plan affine euclidien P et on désigne par P l'ensemble des vecteurs associés à P. On s'intéresse aux figures du plan, et en particulier aux triangles et aux droites remarquables de ces triangles.

Partie A : Des histoires de partages

Source : Perrin (2007)

1. *Dans cette première question, on s'intéresse au problème suivant : On considère un triangle ABC. Quels sont les points M du plan P qui sont tels que le rapport $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ soit égal à une constante positive d donnée ? (où $\mathcal{A}(AMB)$ désigne l'aire du triangle AMB)*

   (a) On s'intéresse au cas où $\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ égale 1. Démontrez la proposition suivante : *si M est sur la médiane issue de A ou sur la parallèle à (BC) passant par A, alors les aires de AMB et AMC sont égales.*

   (b) On note M un point distinct de A. On suppose de plus que (AM) coupe (BC) en M'. Démontrer que l'on a :$\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)} = \dfrac{M'B}{M'C}$. On pourra distinguer plusieurs cas suivant que M est à l'intérieur de ABC ou que M est à l'extérieur de ABC.

   (c) Énoncez une proposition dans le cas général ($\dfrac{\mathcal{A}(AMB)}{\mathcal{A}(AMC)}$ est égal à une constante positive quelconque) et démontrez la.

   (d) L'énoncé du problème évoqué à la question 1.a. est proposé sous la forme suivante à des élèves de seconde :
   "On considère un triangle ABC. Quels sont les points M qui sont tels que le rapport des aires des triangles AMB et AMC soient égales ? "
   Discutez l'intérêt potentiel de l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique dans la résolution de ce problème par les élèves.

2. *Dans cette seconde question, on considère un triangle ABC et un point M situé sur un côté de ce triangle. On s'intéresse à la question du partage de ce triangle en n parties de même aire par des droites issues de M (n entier naturel non nul).*

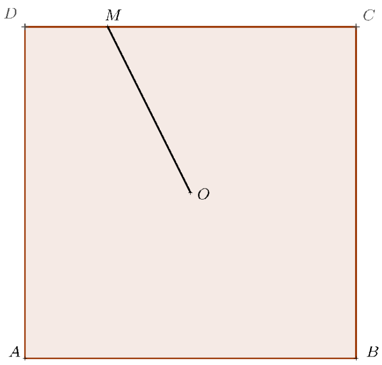
   (a) On s'intéresse dans un premier temps au cas particulier où $M = A$. Énoncez une proposition sur le partage de ABC en n parties de même aire et démontrez la.
   Rédigez un programme de construction dans le cas $n = 5$.

(b) On s'intéresse dans un second temps au cas où $n = 2$ et où M n'est pas un sommet. Énoncez une proposition sur le partage de ABC en 2 parties de même aire par des droites issues de M et démontrez la.

(c) Faites de même pour $n = 3$ puis pour n un entier quelconque non nul.

(d) Un problème proche concernant le partage d'un carré a été proposé à des élèves de cinquième.

On veut effectuer le partage d'un gâteau carré en trois parts égales avec un couteau. Un premier coup a été malencontreusement donné du centre au bord du gâteau comme ci-dessous. Comment poursuivre la découpe ?



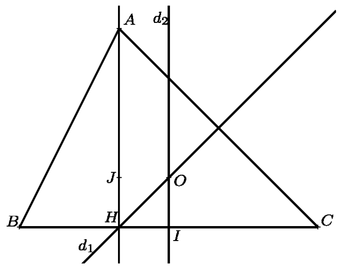
Proposez une résolution possible de ce problème en précisant les connaissances mathématiques mises en jeu.

Partie B : Les médiatrices du triangle

Source : Chevallard (2006-2007)

1. Démontrez la propriété de concours des médiatrices du triangle.

2. Considérons dans la suite le cas particulier de la figure ci-contre, où le point H est le projeté orthogonal de A sur (BC). $AH = HC = 4$ et $BH = 2$. On se place dans le repère (H, I, J) tel que $4\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HC}$ et $4\overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{HA}$. d_1 et d_2 sont respectivement les médiatrices de $[AC]$ et $[BC]$ et se coupent en O.



   (a) Dans le repère (H, I, J), la médiatrice d_2 de $[BC]$ a pour équation $x = 1$. Supposons alors que, par suite d'une erreur de tracé, la médiatrice d_2 de $[BC]$ soit remplacée subrepticement par la droite d'équation $x = 1+\varepsilon$, avec ε "petit". Le point O, intersection de d_1 et d_2 est alors remplacé par le point O'. Démontrez que $O'B \geq O'C$ ou $O'B \leq O'C$ selon que $\varepsilon \geq 0$ ou $\varepsilon \leq 0$, l'égalité se produisant lorsque $\varepsilon = 0$.

   (b) On considère $\varepsilon \geq 0$. Calculez $lim_{\varepsilon->0^+} \dfrac{O'B - O'C}{\varepsilon}$. En déduire qu'avec une erreur ε donnée, la distance $O'B - O'C$ est presque deux fois plus grande que ε.

3. Partant du fait que les erreurs de tracé en géométrie sont inévitables, et souhaitant faire démontrer à ses élèves de quatrième que les médiatrices d'un triangle sont concourantes, un enseignant propose la situation d'enseignement suivante :

Le professeur demande "sérieusement" à ses élèves de tracer les trois médiatrices d'un triangle ABC très aplati et prétend donner des noms appropriés A' B' C' aux sommets du petit "co-triangle" qu'ils "doivent" ainsi obtenir. Devant la trop petite taille de ce triangle le professeur prétend avoir choisi un triangle ABC particulier et incommode. Il demande aux élèves de trouver un triangle dont le "co-triangle" sera le plus grand possible.

Source : Brousseau (1983)

Analysez les potentialités de cette situation au regard de l'objectif visé par le professeur.

Partie C : Triangles "aplatis"

Source : Chevallard (2006-2007)
Le texte cité ci-dessous est extrait d'un article intitulé *Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes* d'A. Berté, paru dans la revue *Petit x*.

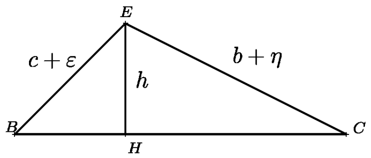
> La séquence se passe cette fois en début de seconde. Le maître demande à chaque élève : "Choisissez trois nombres entre 2 et 10 et écrivez-les". Le maître renouvelle sa demande plusieurs fois. Trois ou quatre triplets suffisent car les choix de chacun étant indépendants de ceux du voisin, on a ainsi une variété assez grande. En général, ils prennent uniquement des entiers, mais ce n'est pas gênant, au contraire, car les choix étant ainsi limités pour eux, ils ont davantage de chance de tomber sur les trois cas, particulièrement sur le cas limite. Le maître demande alors : "Dans chaque cas, essayez de construire un triangle dont les côtés mesurent ces trois nombres en centimètres. Faites un bilan de ce qui se passe suivant les cas"
> Mais en classe de seconde environ 50% des élèves, et parmi eux, certains, repérés par le professeur comme "bons", tracent encore un vrai triangle quand ils ont choisi eux-mêmes des triplets de nombres donnant le cas limite de l'alignement.
> Un élève de seconde a choisi les nombres 2, 5 et 7, dans cet ordre, et il a de ce fait commencé par tracer $AB = 2$. Il a obtenu un " vrai triangle" en plaçant la pointe du compas en A puis en B. Intrigué par le dessin d'un camarade qui, avec les mêmes nombres, ne trouvait pas de triangle, il a recommencé son dessin en traçant d'abord le côté de 7 cm. Il a alors trouvé un triangle complètement plat ! Il en a conclu le "théorème" suivant : *Si on commence par 2, le triangle existe, si on commence par 7, le triangle n'existe pas".*
> C'est parce que, sur une longueur de 2 cm, une erreur sur la place de la pointe du compas est relativement plus forte que sur une longueur de 7 cm, ce qui permet d'obtenir un triangle dans le premier cas et pas dans le second.

Source : Berté A. (1995), Réflexions sur inégalité triangulaire et distance d'un point à une droite à partir d'observations de classes, Petit x, 40, 41-63.
Nous proposons dans un premier temps d'examiner la dernière affirmation de l'auteure.

1. Soient deux points B et C. On se propose ici de conduire la construction du triangle plat ABC avec $BC = a$, $BA = c$ et $AC = b$ et tel que $a = b + c$, en simulant une imprécision dans le tracé du troisième sommet A. La construction usuelle du point A consiste à l'obtenir comme intersection du cercle de centre B et de rayon BA avec le cercle de centre C et de rayon CA. Considérons alors, pour simuler une

imprécision dans le tracé, le cercle $\mathcal{C}_1$ de centre B et de rayon $c+\varepsilon$ et le cercle $\mathcal{C}_2$ de centre C et de rayon $b+\eta$, avec $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$.
Justifier que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont sécants en deux points E et F.

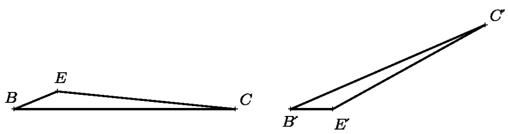
2. Dans le triangle EBC, soit H le pied de la hauteur issue de E. On note $EH = h$



(a) Démontrez que l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle ABC est donnée par la formule suivante (formule de Héron) $\mathcal{A}(ABC) = \sqrt{p(p-AB)(p-BC)(p-AC)}$ où p désigne le demi-périmètre du triangle ABC.

(b) En déduire que $h^2 \sim \dfrac{2bc}{b+c}(\varepsilon+\eta)$ (c'est à dire que h est proportionnel à la racine carrée de l'erreur $\varepsilon+\eta$).

(c) On se propose d'examiner la phrase suivante :
"Le triangle obtenu apparaît exister d'autant plus qu'on commence à le construire par un plus petit côté"
Démontrer que l'on a : $h' \sim \dfrac{a}{c}h$ où h' est la hauteur issue de C'.

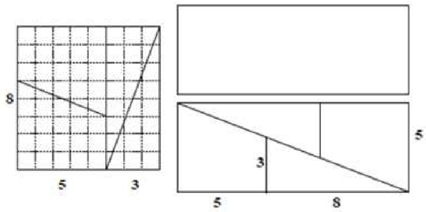


3. Comment expliqueriez-vous le propos de l'élève de seconde cité dans l'article : *"Si on commence par 2, le triangle existe, si on commence par 7, le triangle n'existe pas"* ?

Partie D : Le paradoxe de Lewis Carroll

On se propose d'étudier le problème suivant souvent proposé au collège et au lycée.

Découpez les quatre pièces qui forment le carré ci-dessous et les réarranger pour former un puzzle rectangulaire puis coller les pièces. Comparez l'aire du carré de départ de côté 8 unités avec l'aire du rectangle obtenu. Comment expliquer ce résultat ?



1. On remarque que le triplet (3,5,8) caractérise le problème évoqué. Pour ce triplet et les deux triplets suivants : (2,3,5) ; (8,13,21), comparer les aires du carré initial et du rectangle obtenu.
2. On remarque que chacun de ces triplets sont trois termes consécutifs de la suite de Fibonacci : $u_0 = u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in N$. A chaque triplet (u_{n-1}, u_n, u_{n+1}), on associe le carrée de côté $u_{n-1} + u_n$ et le rectangle de côtés u_n et $u_n + u_{n+1}$. On se propose donc d'étudier cette suite pour explorer ce problème.
   Pour $n \geq 2$ fixé, démontrez que l'aire du carré est : $u_{n+1} \times u_{n+1}$ et que l'aire du rectangle est $u_n \times u_{n+2}$.
3. On se donne la matrice $M(n) = \begin{pmatrix} u_{n+1} & u_n \\ u_n & u_{n-1} \end{pmatrix}$
   (a) Montrer que $M(n) = AM(n-1)$, où A est une matrice 2x2 qu'on précisera.
   (b) On pose $d(n)$ le déterminant de $M(n)$.
   Calculer $d(n)$.
   Monter que $|d(n)|$ est la différence des aires entre la carré et le rectangle associé pour un triplet donné.
   Interpréter géométriquement ce résultat.
4. Origine de l'illusion géométrique
   (a) Soit φ la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$. Montrer que sa seconde racine est $-\dfrac{1}{\varphi}$.
   Montrer que pour tous coefficients b,c la suite $(v_n)_n$ définie par $v_n = b\varphi^n + \dfrac{c}{(-\varphi)^n}$ vérifie $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$.
   Comment choisir b et c pour que pour tout $n \geq 0$ on ait $u_n = v_n$?

(b) Démontrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers φ.

(c) Démontrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ tend vers $\varphi - 1$.

(d) Démontrez que $\dfrac{u_{n+1}}{u_{n+2}}$ équivaut à $\dfrac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}}$ quand n tend vers $+\infty$.

(e) Donnez une interprétation géométrique de ces deux quotients et de leur équivalence pour n suffisamment grand, qui permette d'expliquer le paradoxe de Lewis Carroll au cœur du problème posé.

5. Un professeur a posé le problème dont l'énoncé a été reproduit ci-dessous à ses élèves de seconde.

96 Le puzzle de Lewis Carroll*

Dans un carré de côté 8, on a découpé deux triangles rectangles et deux trapèzes (**fig. 1**).
À l'aide des quatre pièces ainsi obtenues, on reconstitue un rectangle (**fig. 2**).

fig. 1

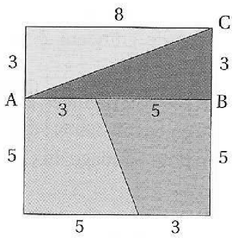
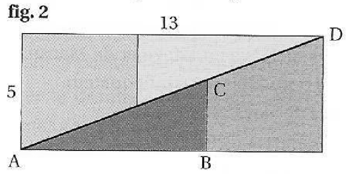


fig. 2



1. Calculer l'aire du carré
Calculer l'aire du rectangle.
Que constate-t-on ?

2. a. Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires.
b. Expliquer alors les résultats obtenus à la question **1**.

* Charles Lutwidge Dodgson, alias Lewis Carrol, (1832-1898), logicien, s'est rendu célèbre grâce à son ouvrage *Alice au pays des merveilles*. Il est l'auteur de nombreuses énigmes mathématiques.

Source : Manuel Odyssée 2de

(a) A la surprise de leur professeur, quelques élèves n'ont pas paru étonnés de la différence d'aires obtenues pour le carré et le rectangle. Certains élèves ont même cherché à justifier la différence obtenue de la manière suivante : *"Quand on change la disposition des pièces du puzzle, l'aire de la figure change"* ou *"On n'utilise pas la même formule pour calculer l'aire d'un carré et l'aire d'un rectangle. C'est pour cela qu'on n'obtient pas le même résultat"*.
Analysez ces réponses d'élèves. Précisez ce qui fait obstacle à l'identification du paradoxe de Lewis Carroll, du point de vue de leurs connaissances mathématiques.

(b) Dans le manuel, on propose de démontrer que les points A, C et D ne sont pas alignés. Rédigez la démonstration visiblement attendue par les auteurs du manuel puis deux autres possibles en précisant à chaque fois les connaissances mathématiques mises en jeu.