ACTIVITES D'ETUDE ET DE RECHERCHE (AER) POUR DYNAMISER L'ETUDE DE LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE EN CLASSE DE SECONDE

Françoise BARACHET
Yann DEMICHEL
Robert NOIRFALISE
IREM de Clermont-Ferrand

Résumé : Comment enseigner de façon dynamique le chapitre relatif à la géométrie de l'espace en classe de seconde ? Ce chapitre n'est pas sans poser des problèmes d'enseignement au professeur car, à suivre la plupart des manuels, il apparaît comme une suite assez indigeste, car non motivée, d'énoncés des propriétés d'incidence dans l'espace auxquels s'ajoutent aussi quelques propriétés d'orthogonalité. Comment enseigner de façon dynamique un tel chapitre est donc, *a priori*, une question problématique posée à la profession. Nous décrivons ci-dessous comment nous avons tenté de répondre à cette question à l'aide d'une activité d'étude et de recherche que nous avons pu expérimenter dans deux classes de 2^{nde}.

Mots clés : géométrie dans l'espace, activité d'étude et de recherche, enseignement dynamique, approche anthropologique.

1. Introduction

1.1 Une vraie recherche de problèmes

"*Prendre du temps pour s'adonner à une vraie recherche de problèmes*" peut-on lire dans les commentaires des programmes de seconde à propos de la géométrie. Cette orientation insistant sur la recherche de problèmes est même qualifiée de fondamentale. Or, pour ce qui est relatif au chapitre de géométrie dans l'espace, force est de constater, en parcourant les manuels, que ce chapitre est le plus souvent fait d'une longue liste de propriétés dites d'incidence, non motivée. On peut avoir l'impression – en forçant un peu le trait – que la place de la géométrie dans l'espace en classe de seconde s'est réduite comme peau de chagrin et qu'il n'en reste qu'un vestige fait de cette liste de propriétés, dont des usages sont annoncés, mais à venir, pour d'autres classes. "*Les programmes ultérieurs s'appuieront sur les propriétés dégagées ici*" peut-on d'ailleurs lire dans les commentaires.

Il se trouve que nous sommes engagés dans un travail de recherche IREM/INRP intitulé " Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place de séquences d'enseignement organisées autour d'Activités d'Étude et de Recherche (AER) ou de Parcours d'Étude et de Recherche

(PER)[1]". Le but de cette recherche est d'organiser un enseignement dynamique où un savoir n'est pas donné *a priori*, avec quelques applications qui suivent mais au contraire où le savoir apparaît fonctionnellement comme réponses à des questions problématiques qui le motivent. Le point de départ d'une AER ou d'un PER est une question Q ou un ensemble de questions qu'il convient de prendre au sérieux. L'intérêt de l'étude est bien d'arriver à produire des réponses aux questions posées! L'activité proposée n'est pas - comme souvent- seulement un prétexte pour introduire un savoir. Selon la portée, en termes d'études, de la question, on parlera d'AER ou de PER : une AER, relative à une question Q, peut-être quasi isolée ; elle peut par contraste, prendre place au contraire dans un PER, au sein d'une lignée d'AER engendrées par l'étude d'une question plus générale Q^* génératrice du PER..

C'était donc un défi que d'essayer de traiter ce chapitre de géométrie de manière dynamique. Tout en respectant le programme officiel et en s'appuyant sur les commentaires du document d'accompagnement, comment motiver le cours en évitant d'énumérer *a priori* une suite d'énoncés admis (propriétés d'incidence)? Comment faire, au contraire, pour que ces énoncés, (le programme impose qu'ils soient donnés, du moins une bonne part d'entre eux) apparaissent comme des éléments constitutifs de réponses à des questions.

1.2 Types de tâches, raisons d'être, techniques...

Pour relever ce défi, il convient de renouer avec des questions problématiques qui fondent cette modélisation des faits spatiaux qu'est la géométrie de l'espace. Pour cela, en utilisant quelques outils de la théorie anthropologique du didactique[2], on peut se demander : quelles en sont les raisons d'être ? Ce qui au sein de cette théorie, revient à se demander : quels types de tâches sont au cœur du travail mathématique à accomplir ? Quelles techniques relatives à ce type de tâches sont à construire sachant que ce sont les propriétés d'incidence qui devront pour un essentiel les justifier ? Notons que l'intérêt, pour nous, de cette référence théorique est de nous conduire à nous poser de telles questions de façon systématique pour tenter de construire un enseignement dynamique qui fasse sens pour les élèves.

A de telles questions, on peut déjà trouver des réponses en parcourant les programmes et les documents d'accompagnement : en particulier, on peut en extraire les types de tâches suivants.

Types de tâches :

T_1 : ***Calculer des grandeurs géométriques*** : **longueurs, aires, volumes**, (ajoutons angles) "*Effectuer des calculs simples de longueur, aire ou volume*" lit-on dans la rubrique "capacités attendues" du programme.

---

[1] On trouvera une description plus détaillée du projet de recherche sur le site "educmath" de l'INRP à l'adresse suivante : http://educmath.inrp.fr/Educmath/ressources/partenariat-inrp-07-08/amperes/

[2] Nous avons utilisé la notion d'organisation mathématique proposée par Y. Chevallard au sein de la théorie anthropologique du didactique. Pour une présentation dans cette revue voir par exemple Matheron Y., Noirfalise R (2006) Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques : quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique in *Petit x* n° 70. 30-47

T_2 : ***Déterminer des sections planes de solides.***

On trouve dans les commentaires (p16) "*L'étude d'éléments d'un solide puis de sections planes de ce solide amène à dégager quelques énoncés concernant les positions relatives de droites et de plans de l'espace.*"

De quoi s'agit-il ? On coupe un solide par un plan et les problèmes qui se posent sont :

1° Déterminer la nature de la section : forme, grandeur?

2° Représenter cette section dans un dessin en perspective cavalière.

3° On peut éventuellement prolonger certains exercices en demandant une représentation plane de la coupe obtenue en vraie grandeur ou à une échelle donnée.

Une technique essentielle pour la réalisation de ce type de tâches est le *tracé hors solide* qu'il conviendra de faire découvrir aux élèves. On peut effectivement penser –le commentaire nous y invite– que cette technique induit un travail avec des droites et des plans (en sortant du solide) et que, pour la justifier, on a besoin de propriétés d'incidence.

T_3 : ***Représentation plane d'un solide de l'espace.***

"*Représenter un solide de l'espace dans le plan d'un dessin*" fait partie des capacités attendues. Grande question mathématique, génératrice d'études, qui, on le sait, a reçu diverses réponses. En seconde, seule la représentation en *perspective cavalière* est citée explicitement dans la rubrique "commentaires" du programme. On peut voir la perspective cavalière comme un code d'écriture des solides sur un plan : il convient que les élèves en connaissent les règles essentielles ; à la fois pour "écrire", c'est ce qui est requis lorsqu'on leur demande de représenter en perspective une coupe d'un solide par un plan ; mais aussi, pour "lire" une telle représentation ; il convient qu'ils sachent quelles informations on peut lire sur un dessin en perspective cavalière, quelles propriétés peuvent en être déduites et celles qui ne le peuvent pas.

T_4 : ***Construire un patron de solide et construire un solide à partir d'un patron.***

" *C'est sur la manipulation d'objets de l'espace que se fondera ce chapitre [géométrie dans l'espace] : la construction d'un patron de solide (autres que ceux déjà étudiés au collège) puis celle d'un solide à partir d'un patron sont des étapes expérimentales indispensables pour nombre d'élèves.*"(commentaires, p16)

Signalons que nous n'avions pas, a priori, apprécié à sa juste valeur la problématicité de ce dernier type de tâches! Peut-être parce que cela nous évoquait des tâches déjà rencontrées par les élèves depuis longtemps, y compris pour certaines d'entre elles depuis le primaire. Peut-être aussi parce que nous n'avions voulu voir dans les manipulations d'objets que des aides pédagogiques. Mais écartons nous des sentiers battus et essayons de construire le patron d'une pyramide qui a pour base un quadrilatère quelconque! C'est une tâche problématique. De même, construire le patron d'un morceau de pyramide coupée par un plan suppose que l'on sache en déterminer la section...

"Déterminer des grandeurs géométriques", "Construire des solides sous certaines conditions", "Représenter des solides" sont des questions Q que les hommes se sont posées : y apporter des réponses est une des raisons d'être de la géométrie de l'espace. Pour être résolus, les problèmes rencontrés impliquent l'étude de configurations de l'espace pour en dégager des propriétés pertinentes, celles qui vont autoriser la détermination de la grandeur ou encore celles qui vont permettre la construction du solide ou sa représentation sous certaines conditions. Ce sont des questions à fort pouvoir générateur d'étude, générant un PER débutant à l'école et se poursuivant, pour l'enseignement secondaire, au collège puis au lycée jusqu'en terminale pour les sections scientifiques. Ce que nous proposons sont des AER s'inscrivant dans un tel parcours.

1.3 Activités d'étude et de recherche

En nous inspirant de cette analyse, nous avons donc essayé de proposer un enseignement avec des activités d'étude et de recherche, laissant une large place à l'action et à la réflexion des élèves et devant provoquer l'émergence des notions et outils mathématiques visés. Les AER proposées sont initiées par trois problèmes : tout d'abord la réalisation d'un patron de pyramide à partir d'une représentation en perspective cavalière (T_4 et T_3), la détermination d'une pyramide à base carrée de volume maximal (T_1 et T_4) et enfin la coupe par un plan d'une pyramide (T_2 et T_4).

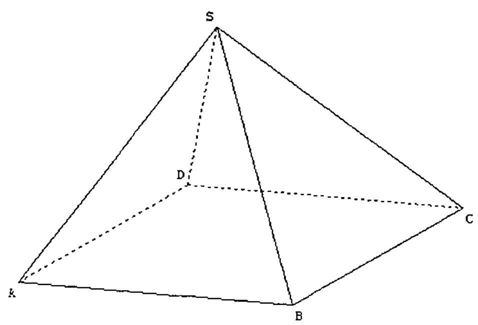
Un autre point important à prendre en compte est la gestion du temps. En classe, le travail de manipulation, de constructions effectives, de réalisations de patrons, nécessite beaucoup de temps. Aussi, pour dégager une plage horaire suffisamment importante, avons nous utilisé la liberté qui est donnée aux professeurs de seconde de traiter d'un ou plusieurs thèmes. Parmi ceux-ci on trouve : -patrons de pyramides non régulières et -représenter en perspective cavalière et en vraie grandeur une section plane d'un solide de référence-.

Si "*le programme ne donne pas d'indication de durée pour le travail sur les thèmes, l'équivalent d'une semaine au moins devrait y être réservée pour chacun des trois chapitres du programme [Géométrie, Statistiques, Calcul et fonctions]*" lit-on dans le document d'accompagnement (p8). C'est donc en conformité avec cette indication que nous avons pu nous donner du temps. Ce même texte invite les enseignants à "*faire vivre l'enseignement au delà de l'évaluation sur les capacités attendues par le programme*" ce que nous nous sommes aussi autorisés à faire. Nous avons consacré huit séances à ce travail, certaines en classe entière, d'autres en modules ou en TP informatique. Nous avons formé des groupes de 3 ou 4 élèves pour la totalité des activités : les élèves pouvaient circuler dans les groupes de façon à échanger sur l'avancement de leur travail.

2. Première AER : réalisation d'un patron de pyramide à partir d'une représentation en perspective cavalière.

2.1 Un premier temps : lire une représentation

On distribue la figure ci-dessous :



La première situation problématique proposée aux élèves est la suivante :

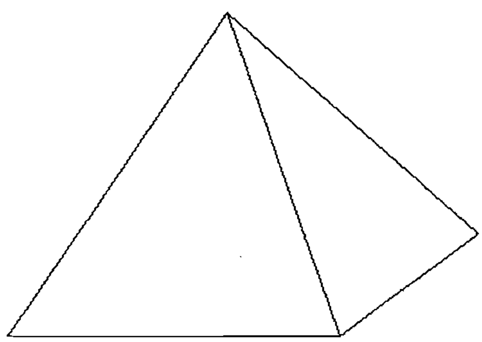
Peut-on construire un patron de cette pyramide et en calculer le volume?

Au collège, on a présenté aux élèves des représentations en perspective cavalière d'une pyramide donnée, mais plus rarement on les a conduits, dans une démarche réciproque, à se demander quels renseignements réels on pouvait déduire sur un solide lorsque seule sa représentation en perspective est donnée. La question a été posée sous cette forme pour que les élèves puissent s'interroger sur leurs *a priori.*

Avec une telle figure, par habitude des exercices types vus en collège, la majorité des élèves ne voit qu'une pyramide régulière et ils réalisent effectivement le patron d'une telle pyramide avec une base carrée et des faces qui sont des triangles équilatéraux ou isocèles.

Le professeur intervient alors et leur demande si le solide dont ils ont une perspective cavalière est bien le solide dont ils viennent de faire un patron : "Etes-vous sûr que la base est un carré?" "Si oui, qu'est-ce qui vous permet d'en être sûrs?" "Etes-vous sûrs que les triangles soient équilatéraux, ou isocèles?". C'est l'occasion pour le professeur, avec les élèves, de rappeler ou d'énoncer quelques-unes des règles de la perspective cavalière et d'examiner avec eux quelles propriétés du solide on peut déduire à partir de sa représentation. Ce genre de questions, avec ce rappel ou cet apport, remet en cause (bien sûr) le fait qu'on puisse être certain que ce soit un carré, que les triangles soient équilatéraux ou isocèles.

C'est ce qui a été fait dans une classe. Dans une autre, nous avons encore radicalisé la situation en présentant tout d'abord une vue opaque du solide



Peut-on construire cet objet ?

Cette situation est plus générale que la précédente : au lieu d'une vue en perspective de la pyramide, on en donne seulement une vue opaque, ce qui fournit un nombre encore plus limité d'informations. La question posée est elle-même très lapidaire. L'objectif est de réfléchir sur la nature mathématique des objets de l'espace puis d'aborder le problème de leur représentation : quels sont les objets (usuels) de l'espace, comment les représenter par une figure plane, de quelles informations a-t-on besoin pour pouvoir en faire une construction à l'aide d'un patron ?

Là aussi, les élèves se sont lancés dans la confection d'un patron de pyramide à base carrée, la seule question pour eux, étant celle des dimensions du solide (On prend ce qu'on veut ? On peut mesurer ?). A la question du professeur : "Etes-vous sûrs qu'il s'agit bien du même solide?", certains groupes d'élèves répondent par l'affirmatif en montrant la maquette obtenue et en demandant au professeur de la regarder de telle sorte que ce qui est vu corresponde au schéma donné.

Après ce premier temps de réponses stéréotypées, dans un cas comme dans l'autre, le professeur relance le questionnement en demandant aux élèves s'ils peuvent être sûrs qu'ils ont bien reproduit le solide dont ils ont une représentation. Très vite apparaissent d'autres possibles qu'une pyramide à base carrée. Ce peut même être, dans le second cas du moins, deux triangles non coplanaires et ayant un côté en commun. Tous les groupes proposent des objets plus ou moins complexes qui correspondent à la vue opaque. Le professeur ajoute qu'il s'agit effectivement d'une pyramide. Munie de cette nouvelle information, la question est relancée que "peut-on dire du solide? Combien de faces?".

Les élèves voient alors que ce peut-être un tétraèdre, une pyramide ayant pour base un quadrilatère quelconque... Ils ont plus de mal à imaginer que la base puisse être un polygone quelconque. Ceci fait apparaître l'intérêt de la représentation usuelle en perspective cavalière, laquelle permet une représentation des faces cachées. Un questionnement identique se poursuit avec la représentation en perspective cavalière.

Les élèves sont bien entrés dans le jeu : après un premier temps où ils ont produit une réponse standardisée, ils ont bien compris qu'à une question n'était pas associée une seule réponse, ce qui était, sans doute, nouveau pour un certain nombre d'entre eux en classe de mathématique.

Lors de ce premier temps, la nécessité de se faire comprendre, de pouvoir désigner tel ou tel élément du solide a été l'occasion de faire un premier bilan sur les termes utilisés, comme sommets, arêtes, faces, pyramides, polyèdres...

Le travail avec la représentation en perspective cavalière conduit aussi, en bilan, à rappeler ou énoncer quelques uns des principes de celle-ci comme: "l'alignement, le concours, le parallélisme sont conservés" avec un examen des réciproques.

2.2 Deuxième temps : une tâche problématique "Construire le patron d'une pyramide à base quadrilatère".

Le questionnement précédent conduit à se demander si l'on peut construire un patron du solide si la base n'est pas carrée, si c'est un rectangle, un losange, un quadrilatère quelconque?

Le temps de faire des essais effectifs de construction de patron, les élèves ont découvert la problématicité de la situation. Seul un groupe, traitant du cas où le quadrilatère est un rectangle, réussi à construire un patron satisfaisant. Pour les autres, leurs "patrons" ne se referment pas pour constituer une pyramide. En effet, ils construisent des patrons en utilisant pour les triangles associés à des côtés opposés du quadrilatère des triangles isométriques.

Les élèves découvrent vite qu'il convient qu'une même arête du solide doit se retrouver sur le patron représentée par des segments de même longueur, en revanche, ils sont surpris de constater que cela ne suffit pas pour pouvoir construire le patron[3].

Les élèves s'investissent : certains pensent qu'il conviendrait de trouver des conditions sur les angles entre les faces triangulaires. D'autres tâtonnent en découpant des morceaux du patron jusqu'à pouvoir fermer le patron. Certains doutent et pensent

---

[3] En effet, le quadrilatère tracé, ils peuvent construire deux triangles sur des côtés adjacents du quadrilatère en choisissant les longueurs de trois des arêtes des faces triangulaires, mais ils sont bloqués car ils n'ont pas la longueur de la quatrième arête, qui est complètement déterminée par les précédentes.

alors qu'il n'est pas possible de construire une pyramide ayant pour base n'importe quel quadrilatère! Un groupe avec un losange réussit mais a bien du mal à expliquer ce qu'il a fait : tracer d'abord les diagonales du quadrilatère, puis reporter par symétrie, mais alors en refermant le patron cela donne un solide aplati! D'où l'idée d'agrandir les triangles...

Un autre groupe propose alors la démarche suivante : "écraser la pyramide pour que le sommet donne un point de la base, relier ce point aux sommets de la base, tracer les symétriques des triangles obtenus à l'extérieur du quadrilatère...D'autres groupes explorent des pistes similaires.

Le travail lors d'une séance s'achève ainsi sur ce questionnement :

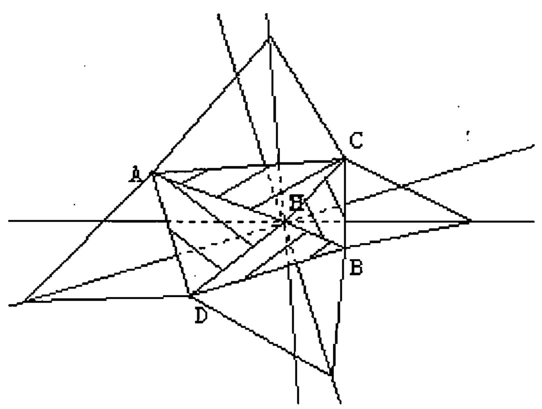
Un quadrilatère quelconque étant donné, comment construire un patron de pyramide ayant pour base ce quadrilatère ?[4]

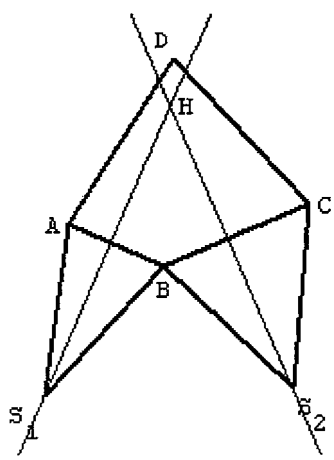
Un "patron" de pyramide à base quadrilatère étant donné, comment sans le replier, peut on savoir s'il se ferme? En d'autres termes, ce qui a l'allure d'un patron en est-il un?

Un travail à la maison est donné : rechercher tous les patrons possible d'une pyramide régulière, ce qui est fait sans trop de difficultés. Et pour prolonger la réflexion : essayer de trouver une méthode pour vérifier qu'un patron de pyramide donné se referme.

La question est difficile, et même si les élèves ne manquent pas d'idées, comme on a pu le voir, ils n'aboutissent pas. Ce qui leur est offert alors est une séance informatique[5] avec Géospace. Plus précisément, en utilisant les fonctionnalités de ce logiciel, on leur propose d'étudier des patrons de pyramides pour, dans une démarche d'analyse, repérer expérimentalement des propriétés nécessaires et décisives pour répondre aux questions posées. On leur demande en particulier d'observer que les hauteurs des triangles du patron passent toutes par le projeté H du sommet de la pyramide.

Voici ci-dessous ce qu'on peut obtenir avec Géospace. On construit une pyramide ayant pour base un quadrilatère dans le plan xOy et on fait construire le patron de cette pyramide. Il s'agit donc d'un patron qui marche bien. La vue qui est donnée ci contre est une vue de dessus, le sommet S se confondant avec son projeté sur la base. On vérifie que les hauteurs des triangles concourent bien en H.





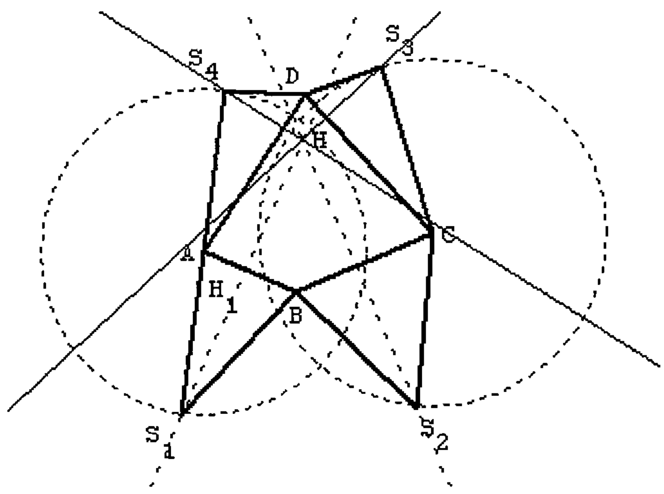
[4] Bien que cela n'ait pas été précisé l'étude de cette question porte sur la construction de "patrons étoilés"

[5] Voir le texte distribué aux élèves en annexe.

On peut alors vérifier l'importance de cette propriété pour la construction d'un patron: en effet, soit un quadrilatère ABCD. On peut commencer à construire le patron en traçant les triangles S_1AB et S_2BC tels que $S_1B = S_2B$. On peut ensuite déterminer le point H comme intersection de la hauteur du triangle S_1AB passant par S_1 et de la hauteur de S_2BC passant par S_2.

Le point H déterminé, on trace la perpendiculaire passant par H à (AD), le cercle de centre A et de rayon AS_1: leur intersection donne le point S_4 (à la condition toutefois que $S_1H_1 > HH_1$, H_1 étant le pied de la hauteur du triangle ABS_1 issue de S_1). On procède de même pour obtenir S_3.

Le mystère est ainsi levé, du moins une grande partie. Un quadrilatère étant donné, on sait construire un patron de pyramide ayant pour base ce quadrilatère. Cela répond aussi à la question que se posaient les élèves concernant l'existence possible ou non d'une telle pyramide.

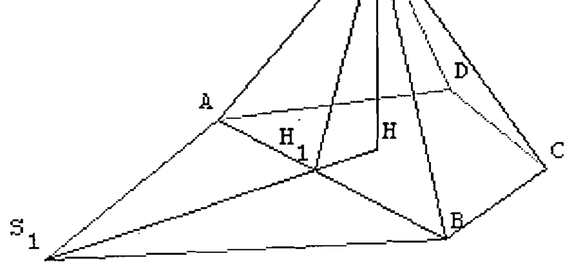


On a pu aussi dégager trois critères devant être vérifiés nécessairement par un patron :

1. R1 : Egalité des segments représentant une même arête du solide.
2. R2 : Intersection des hauteurs (SiHi) en un même point H.
3. R3 : Inégalités : Pour tout i, SiHi > HiH. Ce dernier point est relativement bien perçu par les élèves : certains d'entre eux ont fait des patrons qui une fois repliés, s'aplatissait sur la base, les triangles n'étant pas assez grands.

Appendice : Pour le critère 2 ci-dessus, nous nous sommes contentés de le faire vérifier expérimentalement par les élèves. Peut-être aurions-nous pu pousser plus loin et répondre par exemple à cette question que certains élèves se sont peut-être posés : "Comment penser à un tel critère ?"

Un élément de réponse aurait pu être le suivant :
Une pyramide est entièrement déterminée par la donnée de sa base ABCD et de son sommet S. Ci dessus, nous avions remarqué qu'on pouvait placer les points S1 et S2 du patron en respectant la règle R1.



Ces deux sommets donnés déterminent alors par le pliage le sommet S et aussi son projeté sur le plan (ABCD) soit H.

Examinons la face triangulaire ABS et la hauteur SH_1 : en dépliant la face ABS, cette hauteur devient la hauteur S_1H_1 du triangle ABS_1 (la manipulation du patron rend cela évident, le triangle restant le même!). Comme (SH) est orthogonale au plan de la base, on admettra que (SH) est orthogonale à toute droite de ce plan et donc à (AB) ; (AB) est aussi orthogonale à (SH_1).

Ainsi (AB), étant orthogonale à deux droites non parallèles du plan (SH_1H), est aussi orthogonale à (H_1H). On admettra, pour l'instant qu'il en est bien ainsi: une droite orthogonale à deux droites non parallèles d'un plan est orthogonale à toute droite de ce plan

Dans le plan de base, (S_1H_1) et (H_1H) sont deux droites perpendiculaires à (AB) donc comme elles ont un point commun elles sont confondues et ainsi H est un point de (S_1H_1). Cqfd

3. Deuxième AER : construire une pyramide régulière de base carrée et de volume maximal

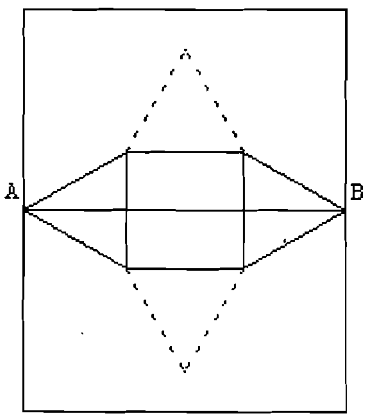
Nous voulions, pour la troisième étape de cette AER, que les élèves disposent de la maquette d'une pyramide régulière pour qu'ils puisent s'en servir pour tenter de visualiser une coupe par un plan. D'où l'idée de leur demander, en cette deuxième étape, pour faciliter la visualisation à venir, de construire une pyramide la plus grande possible dans une feuille de format A4. C'est ce que nous avons proposé avec deux variantes.

Première variante proposée dans une classe :

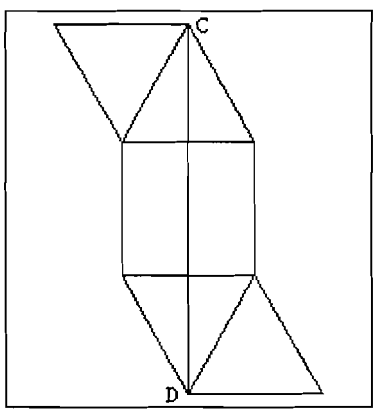
La pyramide est à base carrée et les faces triangulaires sont des triangles équilatéraux. La longueur du côté du carré étant un nombre entier de cm, construire un patron sur une feuille de format A4 afin d'obtenir la figure la plus grande possible. Calculer le volume du solide obtenu.

Le problème a été donné tout d'abord comme un sujet de réflexion à travailler à la maison pour la séance suivante.

Très vite, en classe, l'étude a porté sur la comparaison de deux patrons possibles :



patron étoilé



patron allongé

Sans chercher à positionner autrement les deux patrons, les élèves ont vite conclu qu'ils obtenaient "une pyramide plus grande" avec le patron allongé.

D'une part car cela se "voit": Avec le patron étoilé, la contrainte est : AB < 21cm. Avec le patron allongé : CD < 29,7cm. Si CD>AB, alors la pyramide est plus grande. Mais, ils ont aussi fait des calculs, en appelant a la mesure du côté du carré ils ont trouvé que la plus grande valeur entière pour a est 7cm dans le cas du patron étoilé et 10 cm pour le patron allongé, en montrant que l'on devait avoir $a < \frac{21}{1+\sqrt{3}}$ dans le premier cas et $a < \frac{29,7}{1+\sqrt{3}}$ dans le second.

Ils ont ensuite pu calculer le volume de la pyramide ainsi obtenue en en déterminant la hauteur avec le théorème de Pythagore.

Le problème n'était peut-être pas complètement résolu (*quid* avec d'autres patrons ou en positionnant les patrons autrement sur la feuille?) mais nous pouvions largement nous contenter de ce résultat pour ce que nous voulions faire.

Le premier auteur de cet article ayant communiqué le texte de cette activité au second, celui-ci venant de traiter le chapitre sur les fonctions a pensé que cela pouvait donner matière pour réinvestir ce qui venait d'être vu et ainsi a proposé la version suivante :

Problème 2 : On suppose que l'objet précédent a une base carrée. On dispose d'une feuille carrée de côté 18 cm. Peut-on construire un tel objet de volume maximal ?

Le choix d'une feuille carrée a été fait pour recentrer l'étude sur le patron étoilé. Par ailleurs il n'est pas imposé que les faces triangulaires soient équilatérales.

Les élèves se lancent dans l'étude : ils ont l'intuition qu'il faut que le patron soit le "plus grand possible" et pour cela ont l'idée qu'il convient de placer le patron étoilé de telle sorte que le segment joignant les sommets de deux triangles opposés corresponde à une diagonale de la feuille. Certains émettent l'idée qu'il faut que la base soit la plus grande possible mais ils comprennent vite que si la base est grande, alors la hauteur est petite et réciproquement. "Il s'agirait de trouver une valeur limite qui équilibrerait ces deux grandeurs", disent-ils. Ils ont deux variables et il leur est difficile de penser que l'une peut s'exprimer en fonction de l'autre.

En l'état, les élèves étant engagés dans l'étude, nous avons proposé à la classe un devoir sur table leur permettant d'accéder à une solution du problème.[6]. Certes, cela est classique, avec cette différence cependant, que c'est permettre aux élèves d'accéder à la solution d'un problème qu'ils avaient rencontré auparavant.

4. Troisième AER : la coupe d'une pyramide par un plan.

On se propose d'aborder avec cette troisième étape, le thème "Sections de solide" et à cette occasion de faire un point sur les positions relatives de droites et de plans, les règles d'incidence, et d'aborder la technique centrale pour ce type de tâches : le tracé hors solide.

Les élèves disposent des patrons élaborés dans l'étape précédente, patrons qu'ils peuvent replier pour en faire des maquettes.

[6] On en trouvera le texte en annexe.

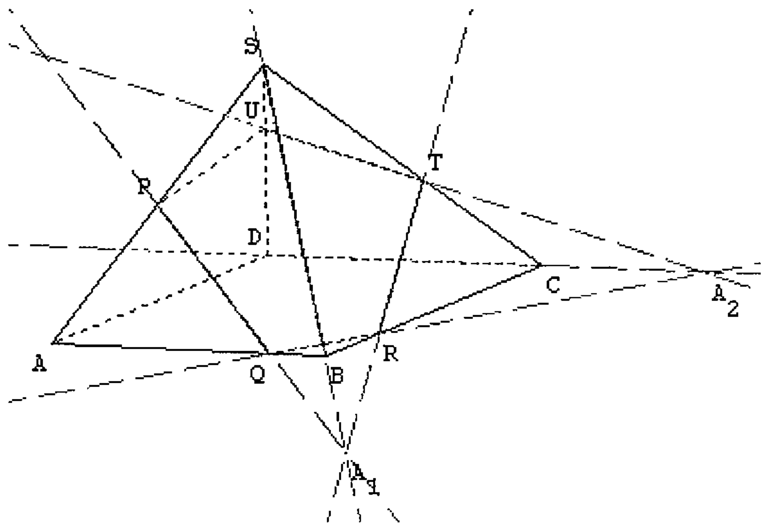
Voici le problème posé dans la première classe :

Problème 3 : SABCD est une pyramide ayant pour base le carré ABCD et les faces triangulaires sont équilatérales. On construit les points P, Q et R tels que P est le milieu de [AS], Q∈[AB] avec BQ=1/5 BA et R∈[BC] avec BR= 1/4 BC. On sectionne la pyramide par le plan passant par P, Q et R et on conserve la partie ne comprenant pas le sommet. Comment faire le patron du nouveau solide obtenu ?

Les élèves ne connaissent pas la technique du tracé " hors solide " et il convient de la leur faire découvrir.

Les élèves ont tout d'abord du mal à comprendre le problème et le professeur doit intervenir pour le faire préciser à l'aide d'images comme couper avec une scie, un couteau. Ensuite, dans un premier temps, les élèves travaillent sur la maquette, positionnent les points P, Q, et R et essaient d'imaginer la forme de la section en la traçant à main levée. Ceci permet au professeur de leur demander "Quelles faces sont sectionnées ? Avec quelles faces peut-on déjà faire le tracé exact de la coupe? Les élèves tracent les segments [PQ] et [QR]. Là, comme on pouvait le prévoir banalement, les élèves sont en difficulté : ils devinent que le plan coupe la face SBC, mais ils n'en connaissent qu'un point, le point R.

Le professeur intervient pour les guider par un jeu de questions. " Vous avez un point : pour se ramener à ce que vous avez su faire pour les deux premières faces, il vous faudrait trouver un autre point. Comment faire ? Le professeur les invite à l'aide de deux règles à prolonger [PQ] et l'arête [SB] comme si on traçait deux droites. Que peut-on dire du point d'intersection de ces deux droites ? Avec, il est vrai, l'aide du professeur, les élèves arrivent à percevoir que ce point est à la fois dans le plan de coupe puisque sur la droite (PQ) et aussi dans le plan de la face (SBC) puisque sur (SB). C'est un candidat pour être le deuxième point cherché.



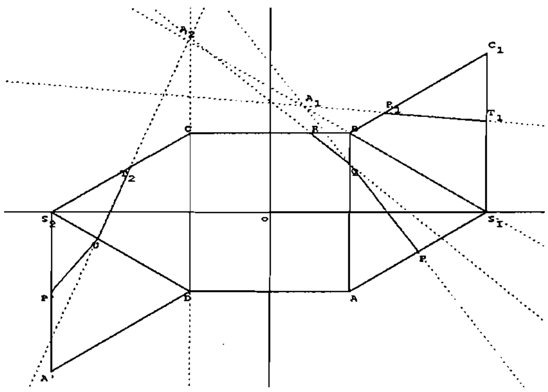
Comme ce point ne peut pas être matérialisé dans l'espace, les élèves sont invités à travailler sur le dessin en perspective cavalière et à représenter ce qui vient d'être esquissé dans l'espace.

Une fois cela fait, le professeur les invite à exploiter la technique dite du tracé hors solide qui vient d'être mise en œuvre pour déterminer la section avec les autres faces.

Ce dessin achevé permet de voir que la section est un pentagone.

En quoi contribue-t-il à la réalisation du patron du nouveau solide ? Ce qui est suggéré est alors d'examiner ce qui se passe pour chaque face (chacune est dessinée sur une feuille) : le tracé hors solide devenant un tracé hors face. Ainsi avec la face SAB ou peut placer le point A_1, puis avec la face SBC on peut, sachant où se trouve A_1 sur (SB), placer le point T sur (SC), et ainsi de suite : reste à faire cela sur le patron.

On obtient avec le patron un dessin comme ci-dessous (ici obtenu avec Géospace)[6]. Il resterait à déterminer plus précisément le pentagone car la connaissance des côtés ne suffit pas. A l'aide de Géospace, on détermine les angles manquants, ce qui permet aux élèves d'achever le patron demandé



Le tracé hors solide invite, en sortant du solide, à travailler avec des plans, des droites. On peut alors se demander quelles sont les positions respectives et en faire un bilan sous forme de tableau. Le tracé hors solide justifie qu'on s'y intéresse et en même temps les règles d'incidence le justifient. Par exemple, l'énoncé "lorsqu'un plan contient deux points A et B, il contient la droite (AB)" justifie que le point A_1 soit bien un point du plan de coupe.

Ce problème peut se prêter à de multiples variantes, en particulier par un jeu sur les positions des points P, Q et R. Dans la deuxième classe, nous en avons proposé la forme suivante :

Problème 3 : On suppose de plus que les faces sont des triangles équilatéraux. Soient P le milieu de [AS] ; Q le point de [AB] tel que BQ =1/4 BA et R le point de [BC] tel que BR=1/4 BC. On sectionne cet objet par le plan passant par les points P, Q et R et on garde la partie ne comprenant pas le point S. Peut-on construire ce nouvel objet ?

6 Patron sur lequel les élèves ont travaillé. Le patron en étoile offre un meilleur confort car il n'y a pas à déplacer la partie $C_1T_1B_1$ pour construire la maquette du solide tronqué mais sa réalisation est un peu plus délicate.

La seule différence avec le sujet précédent est de prendre des positions symétriques pour les points Q et R. Cela simplifie le problème car les élèves ont l'intuition, pour cause de symétrie, de la position du point T. Mais, pour l'essentiel, cela ne modifie pas vraiment l'étude à accomplir.

5. Conclusion

Nous avions fait un pari : il nous semble l'avoir gagné, même si bien des points sont à retravailler. Les élèves se sont engagés dans l'étude des problèmes proposés et ils ont apprécié d'être en recherche effective de solutions. L'essentiel du programme – à se référer au programme lui-même, mais aussi aux manuels de seconde – a été traité et ce en motivant, comme nous le voulions, les énoncés d'incidence. Fonctionnellement, ces derniers apparaissent comme des éléments technologiques permettant de justifier des techniques requises pour réaliser des tâches, a priori, problématiques : nous avons pu ainsi associer le savoir et ses usages. Nous avons pu en apprécier les effets en un problème de synthèse dont les résultats nous ont plutôt satisfait, tout en sachant qu'il y a nécessité à poursuivre un entraînement des techniques, ce qui sera, par exemple, le cas pour les élèves poursuivant en 1re S avec la coupe d'un solide par un plan.

L'usage de patrons et leurs manipulations nous ont semblé décisifs car cela permettait aux élèves de formuler des hypothèses, d'anticiper, de contrôler certains résultats, mais cela mériterait d'être préciser plus que nous ne pouvons le faire.

D'autres choix n'auraient-ils pas été plus judicieux ? Centrer l'étude sur un tétraèdre plutôt que sur une pyramide à base quadrilatérale ? Choisir plus judicieusement la position des points P, Q et R dans la troisième activité ? Utiliser plus que nous ne l'avons fait un logiciel de géométrie ?

Nous avons des interrogations sur les moments de bilan qu'implique une telle manière d'enseigner. Le "cours" n'étant pas donné *a priori*, il se construit en synthèse des activités, des interrogations et des réponses apportées par les élèves, ce qui fait d'ailleurs que d'une classe à l'autre les fiches bilan ne sont pas les mêmes : on peut s'apercevoir que celles-ci diffèrent d'un professeur à un autre. Pourrait-on, peut-être plus que nous ne l'avons fait, laisser les élèves faire eux mêmes des synthèses, mettre au propre des notes de cours, ceci tout en ne perdant pas de vue que c'est au professeur d'indiquer ce qui est à retenir pour des usages réglés par les programmes (moment d'institutionnalisation oblige).

Lorsque nous avons élaboré les activités, nous savions, *a priori*, que les élèves, seuls, sans intervention du professeur ne pourraient pas découvrir l'ensemble des solutions aux problèmes posés. Par exemple, inventer la technique du tracé hors solide nous a semblé hors de portée des élèves. Nous avons donc conçu notre travail comme une direction d'études : nous avions quelque peu anticipé celle-ci en imaginant quelques questions à poser aux élèves pour leur donner des directions à suivre. Il s'agit de s'adapter au travail des élèves et les questions visant à diriger l'étude sont à adapter à ce que font les élèves. Ceci amène à poser des questions sur les questions : "Quelles questions pour contribuer à la dynamique de l'étude? Quelles questions malheureuses pourraient nuire à celles-ci ? "

Bibliographie

CHEVALLARD Y., (2007) Les mathématiques à l'école et la révolution épistémologique à venir in *Bulletin vert de l'APMEP* n°471, 439-461

MATHERON Y., NOIRFALISE R (2006) Construire un savoir professionnel pour le professeur de mathématiques : quelques exemples d'outils apportés par la théorie anthropologique du didactique in *Petit x* n° 70, 30-47

Ministère de l'Education Nationale (2001) Mathématiques ; classe de seconde BOEN hors série n°2 du 30 août 2001

Ministère de l'Education Nationale (2001) Accompagnement des programmes. Mathématiques, classe de seconde, Ed CNDP

Nous avons eu aussi accès au séminaire en ligne d'Yves Chevallard pour les PCL2 de l'IUFM de Marseille en 2004/05.

Annexe 1 : TP sur ordinateur

Géométrie dans l'espace - AER

Travail avec ordinateur
Patrons de pyramides

But : découvrir les propriétés d'un patron de pyramide à base quadrilatère.

Énoncé du problème
On considère un quadrilatère plan $ABCD$ quelconque et S un point quelconque de l'espace. On s'intéresse à la pyramide $SABCD$. Nous allons construire cette pyramide et un de ses patrons à l'aide du logiciel de géométrie dynamique GEOSPACE.

Étude expérimentale

Création d'une pyramide

→ Ouvrir une nouvelle figure de l'espace.
→ Créer les points A, B, C et D libres dans le plan oxy.
→ Créer le sommet S libre dans l'espace.
→ Créer le solide $ABDCS$. Le nommer *pyra* et le rendre opaque avec la palette.
→ Construire le projeté orthogonal H de S dans le plan ABC.
→ Construire les droites du plan ABC passant par H et orthogonales aux arêtes de la pyramide situées dans le plan ABC.

Création d'un patron de la pyramide

→ Créer une variable a libre dans l'intervalle $[0;1]$; elle donnera le coefficient d'ouverture du patron.

→ Créer le patron du solide *pyra* et nommer le *pat*.

→ Créer la commande de dessin en bloc de la pyramide par la touche A.

Simulations et conjectures

→ Faites bouger les points libres pour obtenir des exemples quelconques de pyramides à base quadrilatère.

→ Observer à chaque fois le solide dans l'espace et le patron (faire disparaître la pyramide avec la touche A puis ouvrir le patron en faisant varier a avec le clavier).

→ D'après vos observations, quelle(s) condition(s) sur le patron permettent d'affirmer qu'il est bien le patron d'une pyramide ?

Étude théorique

1) Que se passe-t-il si les points S, A, B, C et D sont coplanaires ?

2) Représenter une pyramide à base quadrilatère $SABDC$ en perspective.

3) Comment est caractérisé le point H ? Le tracer sur la vue en perspective.

4) Essayer de justifier les conjectures précédentes.

Annexe 2 : Texte d'un devoir

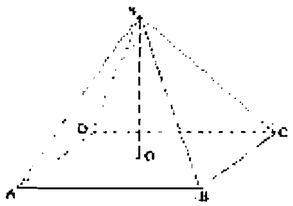
Géométrie dans l'espace AER : Problème 2

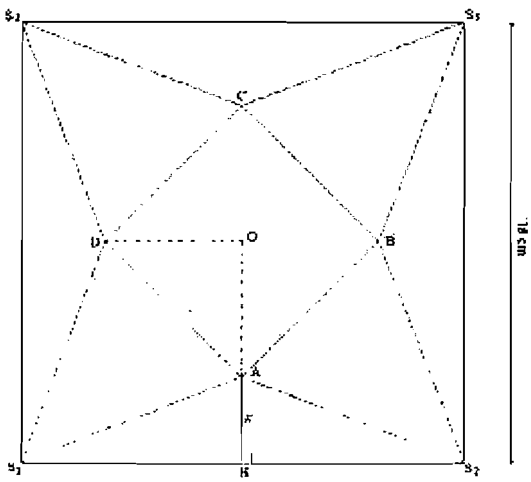
Peut-on construire un tel objet de volume maximal ?
On considère qu'il s'agit d'une pyramide régulière à base carrée.
On souhaite construire celle de plus grand volume à partir d'une feuille carrée de 18 cm de côté

Questions à se poser autour de ce problème :

– Quel patron choisir ? Comment (où) le tracer sur la feuille de papier ?
– Quel sera le volume de la pyramide obtenue ?
– Comment le rendre maximal ?

On décide de choisir la configuration suivante :





La base est un carré $ABCD$ de centre O. Les arêtes issues du sommet S ont la même longueur et la droite (OS) est orthogonale au plan de la base. Donc O est un centre de symétrie pour le patron.

1) On note x la longueur AH.
   a) Calculer les longueurs OA puis AD en fonction de x.
   b) En déduire l'expression de l'aire de la base en fonction de x.
   c) Calculer la longueur AS_1 en fonction de x.
   d) En considérant, dans la figure de l'espace, le triangle SOA, prouver que $OS = 3\sqrt{2x}$.

2) On définit la fonction f qui à x associe le volume de la pyramide obtenue avec le patron ci-dessus.
   a) Déterminer l'expression de $f(x)$.
   b) À l'aide d'une calculatrice ou d'un ordinateur, observer puis estimer une valeur x_M de x pour laquelle le volume de la pyramide semble maximum.
   c) Construire, à l'aide de la valeur x_M obtenue, la pyramide solution du problème.

Thèmes abordés :
- Élaboration de patron
- Calculs de longueurs, d'aires et de volumes.
- Géométrie plane. Orthogonalité dans l'espace.
- Résolution de problème, mise en équation.
- Étude de fonctions (variations), recherche de maximum.
- Valeurs approchées.

Bilan 3; Bilan 5; Bilan 4; Bilan 7.

Annexe 3 : Tracés pour obtenir le patron du solide tronqué