

Différents niveaux pour un texte d'al-Khwarizmi.

Philippe Brin, Martine Bühler et Maryvonne Haliez

Le texte que nous vous présentons ici est extrait du “ Kitab al-jabr wal-muqabala ” d'Al-Khwarizmi (? ; 850). Il s'agit d'un petit problème dont la résolution, proposée par l'auteur, permet d'introduire la notion d'inconnue. Le problème en lui-même ne présente pas beaucoup de difficultés. Il est donc possible de se consacrer exclusivement à la façon dont il est rédigé et notamment à l'apparition du concept d'inconnue notée “ chose ”. C'est un problème du premier degré, contrairement à ce qu'on pourrait penser à la première lecture, dont l'étude a été proposée à différents niveaux :

a) en cinquième, avec une introduction historique et des exercices préparatoires.

b) en seconde, le texte a été donné d'emblée et intégralement, accompagné de sa traduction, et le travail s'est déroulé de façon quasiment autonome au cours d'une séance de module. A cette occasion, on a essayé de juger de l'acquisition de certaines techniques de calcul algébrique (il est à noter que le calcul faisant intervenir le théorème de Pythagore n'a pas été un obstacle). Nous tenons à faire remarquer que

l'identification : *la moitié du côté, une demi chose, $\frac{1}{2} \times chose, \frac{x}{2}$* est ce qui nous a posé le plus de problèmes.

c) en première S.T.T. , le travail effectué tenait plus d'une remédiation. Dans un premier temps, on s'est davantage intéressé au problème lui-même qu'à son traitement algébrique, afin de laisser à l'élève toute latitude pour résoudre celui-ci. Ensuite, un travail d'accompagnement devait lui permettre de trouver la solution ou de découvrir une méthode différente de la sienne.

I. Al-Khwarizmi : activité en cinquième

C'est lors d'une conférence – *contes des mille et une nuits des mathématiques arabes* par Ahmed Djebbar¹ que fut présenté aux élèves de cinquième le problème d'Al-Khwarizmi ainsi que des problèmes d'héritage.

La résolution demande une connaissance du théorème de Pythagore qu'Ahmed leur donna sans démonstration. Je précisai que la démonstration leur serait faite en classe de 4^{ème} ou de 3^{ème}.

Cependant, la semaine suivante, je leur présentai le théorème de Pythagore de façon plus détaillée et leur parlai des triplets pythagoriciens, ce que je considérais comme un exercice préparatoire possible.

¹ Chercheur et enseignant à l'université d'Orsay.

Voici ce que je leur ai proposé comme activité :

Activité préparatoire :

Vous avez pu expérimenter qu'un triangle ayant pour mesures de ses côtés 3 unités, 4 unités et 5 unités était rectangle. A quelle occasion ?

Construisez un tel triangle.

Calculez 3^2 , 4^2 , 5^2 . Quelle remarque pouvez-vous faire ?

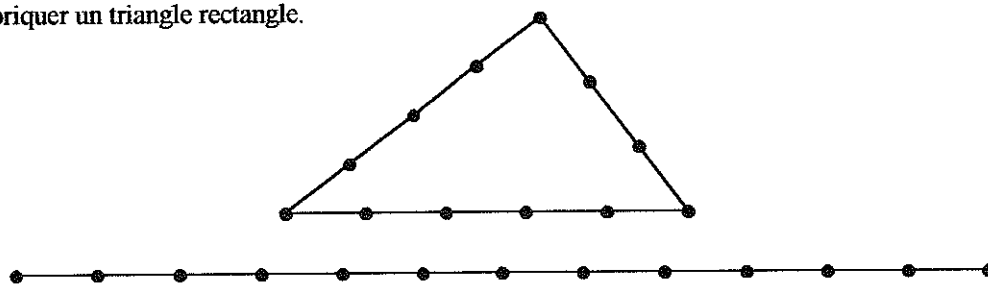
Construisez un triangle ABH rectangle en H tel que BH = 6 unités et AB = 10 unités. Mesurez [AH].

Calculez $AB^2 - BH^2$.

Vous apprendrez à démontrer en classe de 4^{ème} que pour tout triangle ABC rectangle en A, on a :

$AB^2 + AC^2 = BC^2$. Nous supposons ce théorème démontré pour l'exercice suivant.

En Inde, en Egypte, en Grèce le triplet 3, 4, 5 était connu, une corde à 13 nœuds permettait ainsi de fabriquer un triangle rectangle.



Les triplets tels que la somme des carrés des deux plus petits est égale au carré du plus grand sont appelés triplets pythagoriciens : pouvez-vous en donner d'autres exemples² ?

Travail sur le texte d'al-Khwarizmi :

Un terrain triangulaire a deux côtés égaux à dix coudées et sa base égale à douze coudées. A l'intérieur se trouve inscrit un terrain carré. Quel est le côté du carré ?

La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la terre triangulaire, et c'est en multipliant la moitié de la base - et c'est six - par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtes courts multiplié par lui-même - et c'est cent -. Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est la hauteur. Son aire est quarante-huit et c'est la multiplication de la hauteur par la moitié de la base, qui est six.

Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un bien. Nous le conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs du terrain carré et un triangle au-dessus .

Quant aux deux triangles qui sont sur les deux flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et ils sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la moitié d'un bien. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.

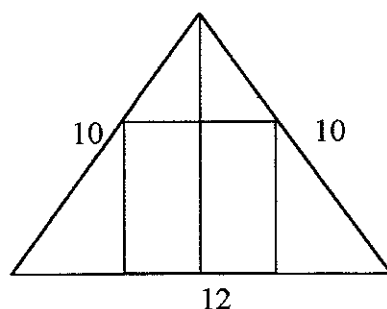
Quant à l'aire du triangle supérieur, c'est en multipliant huit moins une chose, et c'est la hauteur, par la moitié d'une chose ; il vient quatre choses moins la moitié du bien.

² Cf. Brochure M. : A.T.H. n° 79, pp. 57-70

Ceci est l'aire du carré et des trois triangles, et c'est dix choses, qui égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.

De cela la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée et c'est chacun des côtés de la terre carrée.

Et voici sa figure :



Les élèves étant habitués à la lecture de textes anciens et ayant été sensibilisés à ce texte précis par Ahmed Djebbar, j'ai effectué le travail en plusieurs étapes.

J'ai demandé aux élèves de calculer, en fonction de x , les aires de tous les polygones intérieurs au triangle donné, puis je leur est fait remplir le tableau ci-dessous.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$8 - x$									
$x(8 - x)$									
$8x$									
x^2									
$8x - x^2$									
$6 - \frac{x}{2}$									
$(6 - \frac{x}{2})x$									
$\frac{8x - x^2}{2} + \left(6 - \frac{x}{2}\right)x + x^2$									
$10x$									

Ce tableau a permis aux élèves de constater que la somme des aires des polygones intérieurs au grand triangle devait être égale à $10x$.

Ensuite, ils ont calculé l'aire du grand triangle et écrit l'égalité de cette aire avec la somme des aires calculées précédemment. Ainsi, ils ont pu déterminer la solution du problème posé et comparer leur résultat à celui annoncé dans le texte.

Chacune de ces étapes a été effectuée en liaison avec le texte d'al-Khwarizmi dans lequel ils pouvaient retrouver les calculs qu'ils devaient faire.

II. Module de seconde : Un problème d'al-Khwarizmi



Une page de
L'abrégé du calcul par l'algèbre et la muqābala
d'al-Khwarizmi (IX^e s.)

Extrait de Kitāb al - Jabr wal - Muqābala.

Edition de A.M. Musharraf et M. M. Ahmad

Le Caire 1968, pp 65 - 66

D'après une traduction orale d'Achmed Djebbar lors d'un exposé.

Si on dit une terre triangulaire ayant des côtés de 10, 10, 12 coudées dans son ventre (à l'intérieur) une terre carrée, quel est le côté de cette terre ?

Multiplie la moitié de la base par elle-même, retranche la de l'un des côtés les plus petits multiplié par lui-même et c'est 100, il reste 64.

Prends sa racine qui est 8, et c'est la hauteur. Et son aire est 48 et c'est le produit de la hauteur par la moitié de la base qui est 6.

Nous posons l'un des côtés de la terre carrée une chose, nous la multiplions par elle-même, elle devient " le capital ", nous la conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les flancs du carré et un triangle au-dessus de lui. Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs de la terre carrée, ils sont égaux et leur hauteur est la même et ils ont un angle droit. Donc leur aire s'obtient en multipliant une chose par 6 moins une demi chose, ce qui donne six choses moins une demi d'un carré ; et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs de la terre carrée. Quant à l'aire du triangle supérieur, elle s'obtient en multipliant 8 moins une chose, qui est la hauteur, par la moitié d'une chose, cela donne 4 choses moins la moitié d'un carré. Ceci est l'aire de la terre carrée et des trois triangles, et c'est 10 choses et égales à 48 qui est l'aire du grand triangle. La chose est donc 4 coudées et 4/5 et c'est chaque côté de la terre carrée et voici sa figure.

1°) Lisez la traduction du texte d'al-Khwarizmi et faites une figure sur laquelle vous nommerez chacun des points. Vous constatez que la figure originale est cotée ; cotez aussi la vôtre.

2°) Expliquez puis justifiez ce que fait al-Khwarizmi dans les paragraphes 2 et 3.

Vous pourrez utiliser la figure mais vous devez indiquer les théorèmes utilisés.

3°) Comme al-Khwarizmi, calculez, en fonction du côté du carré, les aires des triangles " sur les flancs " et celle du triangle sur le " dessus ".

4°) Effectuez la mise en équation du problème ; résolvez l'équation ainsi obtenue.

III. Un travail en première STT

L'exercice suivant a été traité en module en première STT, c'est-à-dire durant une séance d'une heure en demi groupes. Il s'agissait d'une classe d'élèves plutôt faibles en mathématiques montrant des motivations extrêmement variées : des élèves très sérieux à des élèves ne manifestant aucun intérêt pour la discipline.

L'objectif de cette leçon était de mettre en équation un problème géométrique - qui devient ainsi facile à résoudre - et d'en profiter pour réviser des notions de base. La séance s'est bien passée, les élèves montrant de l'intérêt pour un exercice inhabituel (lire un texte) et tous ont accepté de faire l'effort de comprendre ce dont il s'agissait.

J'avais auparavant présenté le texte et son auteur, ce qui a suscité curiosité et intérêt chez les élèves, principalement ceux d'origine maghrébine (mais pas seulement !). De manière générale, j'ai toujours vu cette classe manifester de l'intérêt pour des travaux " originaux " : étude d'articles de journaux (d'après les travaux de S. Gasquet au C.R.D.P. de Grenoble), lecture d'un texte de Galilée pour introduire les probabilités, etc... Cependant il m'a souvent fallu accepter d'y consacrer beaucoup de temps pour les mener à bien ; les modules à effectifs réduits se sont révélés - sans surprise - un moment idéal pour faire réfléchir les élèves sur un support inhabituel.

Voici donc les document qui a été remis aux élèves :

Dans le texte suivant, les passages en italique sont extraits du Kitab al-jabr wal-muqabala li Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, IX^{ème} siècle, traduit par A. Djebbar (Université Paris-Sud).

1°) Lire le texte du problème ci-dessous et faire une figure correspondant au problème posé, en indiquant les données et en précisant ce qu'on cherche.

Un terrain triangulaire a deux côtés égaux à dix coudées et sa base égale à douze coudées. A l'intérieur se trouve inscrit un terrain carré. Quel est le côté du carré ?

2°) Si vous savez résoudre ce problème, faites-le puis passez directement au 4°).

Si vous ne savez pas le faire, passez au 3°).

3°) *La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la terre triangulaire.*

a) Sur votre figure, marquez la hauteur AH du triangle, puis, à l'aide des données, calculez AH.

b) *Et c'est en multipliant la moitié de la base - et c'est six - par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtes courts multiplié par lui-même - et c'est cent -. Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est la hauteur.*

Est-ce le calcul que vous avez fait ?

c) *Son aire est quarante-huit et c'est la multiplication de la hauteur par la moitié de la base, qui est six.*

4°) Dans la suite du texte :

la chose est le nom donné à l'inconnue.

le bien est la chose multipliée par elle-même.

Précisez quelle est l'inconnue dans le texte.

Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un bien. Nous le conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs du terrain carré et un triangle au-dessus .

a) Sur la figure faite au 1°) :

colorier en bleu **le bien**

colorier en rouge **les triangles sur les flancs**

colorier en vert **le triangle au dessus.**

b) Calculons l'aire du domaine en rouge :

On sait que : aire d'un triangle = $\frac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2}$.

Donc : l'aire des deux triangles ensemble est hauteur x base.

Si le côté du carré intérieur est **une chose**, alors :

la hauteur des triangles rouges est :

la base des triangles rouges est :

donc l'aire rouge est égale à :

Quant aux deux triangles qui sont sur les deux flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et ils sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la moitié d'un bien. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.

c) Calculer de même l'aire du triangle vert.

d) Quelle est l'aire totale du grand triangle, exprimée à l'aide d'**une chose** ?

5°) En 3°) c), on a vu que, au début du texte, al-Khwarizmi démontre que l'aire du grand triangle est égale à quarante-huit.

a) Quelle égalité peut-on alors écrire ?

b) Déduisez-en la valeur d'**une chose** ?

c) voici la réponse d'al-Khwarizmi :

ceci est l'aire du carré et des trois triangles, et c'est dix choses, qui égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.

De cela la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée et c'est chacun des côtés de la terre carrée.