PREMIER CONTE DU LUNDI

MICHAEL STIFEL, ALGEBRISTE DE LA RENAISSANCE

« L'extraction des racines des nombres cossiques »

Odile Kouteynikoff

ARITHMETI-
CA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio.

Cum præfatione Philippi Melanchthonis.

Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.

Cum gratia & priuilegio Cæsareo
atq; Regio ad Sexennium.

L'*Arithmetica Integra* (Nuremberg, 1544) du mathématicien et théologien allemand Michael STIFEL (1487-1567) est une synthèse des connaissances de son époque, en arithmétique et en algèbre, augmentée de contributions personnelles importantes.

Stifel consacre le chapitre IIII du Livre Trois de son ouvrage à l'étude des équations quadratiques[1] à trois termes, dans les registres numérique et géométrique.

Calculant avec les nombres négatifs et ayant le souci d'élaborer des règles générales, il présente, pour leur résolution algébrique, la fameuse « règle AMASIAS » ; c'est un algorithme positionnel en cinq étapes que nous allons examiner.

Mais Stifel n'est pas seulement un algébriste habile ; c'est un mathématicien qui explore la correspondance entre les figures et les nombres. Il ne lui suffit pas de donner les incontournables validations géométriques des résolutions numériques ; il montre aussi comment on peut, à partir de figures, fabriquer des équations dont on connaît d'abord les solutions. Réglant un jeu entre les figures et les nombres, il revitalise l'outil géométrique au sein de l'algèbre qui s'élabore à la Renaissance.

I. La règle AMASIAS

Stifel a adopté l'usage des nombres négatifs et mis en place un système de notations pour l'inconnue et ses puissances, 1X pour l'inconnue, 1ʒ pour son carré, 1℘ pour son cube. Il utilise les signes + et − mais écrit « égale » en toutes lettres que nous abrégeons en « eg » dans notre transcription. Il s'intéresse à la recherche des racines positives exclusivement.

Au chapitre I du Livre Trois, Stifel a énoncé « la règle de l'Algèbre » pour la résolution des problèmes : poser que la chose inconnue est « la coss » notée 1X, traduire le problème par une équation et réduire cette équation, en isoler le « signe cossique majeur » (le terme de plus haut degré) dont on a rendu par division le coefficient égal à un, et extraire la racine correspondante du « reste de l'équation » (le second membre de l'égalité).

Le chapitre IIII auquel nous nous intéressons a pour titre « L'extraction des racines des nombres cossiques ». Il traite de la résolution des équations quadratiques à trois termes, présentée comme extraction de la racine <carrée> d'expressions contenant l'inconnue (nos actuels binômes du premier degré).

Stifel résout par la règle AMASIAS les trois équations quadratiques

1ʒ eg 84−8X **(I)**, 1ʒ eg 8X+48 **(II)** et 1ʒ eg 18X−72 **(III)**,

lesquelles diffèrent par les places dans le second membre des coefficients précédés ou non d'un signe −. Ce sont les équations, qu'en termes actuels nous pouvons écrire

$$x^2 + 8x = 84 \quad , \quad x^2 = 8x + 48 \quad \text{et} \quad x^2 + 72 = 18x$$

pour lesquelles d'autres mathématiciens, contemporains de Stifel mais n'admettant pas l'usage des coefficients négatifs, développent trois algorithmes différents.

Voici l'exposé de la règle[2] :

---

[1] celles dont le terme de plus haut degré est le terme « quarré de l'inconnue ». C'est l'appellation que nous choisissons de privilégier pour lire un auteur qui n'a pas adopté une notation numérotée des puissances de l'inconnue.

Suit la méthode d'extraction.

Premièrement. D'Abord prends le nombre des racines, et l'ayant divisé par deux, à sa place, pose sa moitié, qui restera à sa place jusqu'à ce que l'opération entière soit achevée.

Deuxièmement. Multiplie au carré le nombre moitié que tu as posé.

Troisièmement. Ajoute ou Soustrais selon l'exigence du signe d'addition ou du signe de soustraction.

Quatrièmement. Il faut chercher la racine carrée de la somme de ton addition ou du reste de ta soustraction.

Cinquièmement. Ajoute ou Soustrais selon l'exigence du signe ou de ton exemple.

Cette méthode d'extraction, je l'ai façonnée pour toi, mon bon Lecteur, de façon qu'elle puisse s'attacher solidement à ta mémoire au moyen du mot A M A S I A S. *Ainsi* A *signifie premier point (on commence par* A*) et enseigne la position de la moitié du nombre des racines. La lettre* M *représente le second point, qui commande la multiplication.* A & S *représentent le troisième point qui requiert soit une addition soit une soustraction selon l'exigence du cas (ainsi que les exemples le rendront clair). La lettre* I *signifie que c'est l'invention de la racine carrée qui est requise.* A & S *désignent le dernier point de cette règle qui à nouveau fait mention de l'addition ou de la soustraction de quelque chose*[3].

Sequitur modus iste extrahendi.

Primo. A numero radicum incipe, cumq; dimidiatum, loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.

Secūdo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.

Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorū, aut signi subtractorum, exigentiam.

Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additionis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.

Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam.

Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis huius A M A S I A S. Significat autem A primum membrum (ab A incipiens) docēs positionem dimidij numeri radicum. M litera secundum membrum repræsentat, quod imperat multiplicationem. A & S tertium membrum repræsentant, quod uel additionem uel subtractionem, iuxta rei exigentiam (ut exempla clare dabunt) requirit. I litera, inuētionem radicis quadratæ requiri significat. A & S notant ultimū regulæ illius membrum, quod iterum additionis aut subtractionis alicuius mentionem facit.

---

[2] Traduction des extraits par O. Kouteynikoff, avec la collaboration initiale de M. Defradas. La confrontation avec le texte original permet d'apprécier la légère adaptation qui a été nécessaire pour garder la suite des lettres A, M, A, S, I, A, S.

[3] STIFEL M., *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544, p. 241, gauche.

Ainsi, les résultats successifs s'inscrivent de façon réglée dans l'une ou l'autre des deux colonnes que définissent les termes du binôme du premier degré égalé au carré.

(I)	(II)	(III)
1 ʒ eg 84 − 8 x	1 ʒ eg 8 x + 48	1 ʒ eg 18 x − 72
A : − 4	**A :** 4	**A :** 9
M : (−4)(−4)	**M :** (4)(4)	**M** (9)(9)
A&S :84 + 16	**A&S :**16 + 48	**A&S :**81 − 72
100	64	9
I : 10	**I :** 8	**I :** 3
A&S :10 − 4	**A&S :**4 + 8	**A&S :**9 ± 3
6	12	12
		6

II. Les démonstrations géométriques des résolutions numériques

Le progrès algébrique important que constitue la règle AMASIAS, tant parce qu'elle repose sur l'audace de calculer avec des nombres négatifs que parce qu'elle énonce presque[4] une règle générale, n'est pas le signe d'une distance que Stifel aurait prise avec la géométrie euclidienne. Au contraire, il propose pour ses algorithmes numériques tout neufs des validations géométriques de type traditionnel. Voici la démonstration géométrique qu'il donne pour une équation du deuxième type :

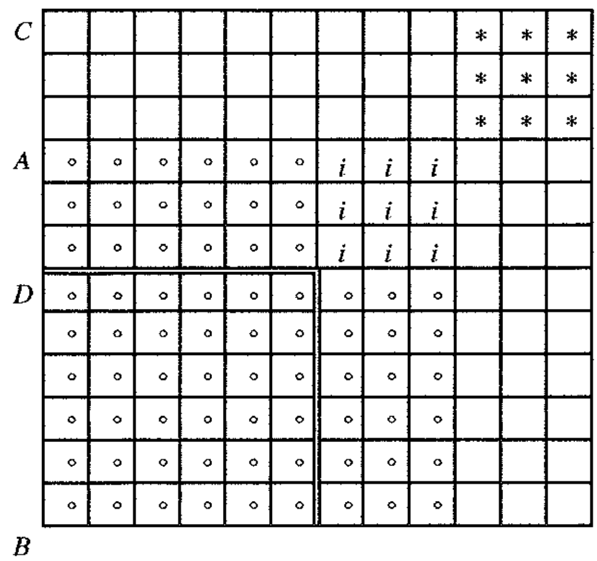
De même soit 1ʒ égal à 6X+72.

Premièrement (pour le démontrer géométriquement) je pose la racine du carré signalé par des lettres, i, sur la figure suivante : c'est la moitié du nombre des racines, évidemment 3. Cette racine je la multiplie par elle-même, ce qui fait le carré signalé par des lettres i. Et je lui ajoute 72, c'est à dire que j'ajoute ou pose autour le gnomon que tu vois signalé par des zéros. Et ainsi tu obtiens une figure carrée.

C'est pourquoi j'en extrais la racine carrée, c'est-à-dire AB, faisant 9 par sa longueur. Enfin j'ajoute à la racine trouvée, la moitié du nombre des racines, évidemment 3. C'est-à-dire que (à cause du signe de l'addition) j'ajoute à la racine la petite ligne AC, pour constituer un carré dont la racine est 12. Ce carré était figuration pour le nombre cossique 6X+72, tout comme pour 1ʒ. Or cette figure précisément est un exemple de la sixième proposition du second <livre d'Euclide>[5].

[4] Simon Stevin (1548-1620), parce qu'il osera poser un coefficient négatif au début d'une expression algébrique, formulera une règle unique au chapitre LXVIII de son *Arithmétique* (Leyde, 1585).

[5] STIFEL M., *op. cité*, p. 243, gauche. La proposition VI du Livre II des *Eléments* d'Euclide est présentée dans la première partie de l'article central de cette brochure.



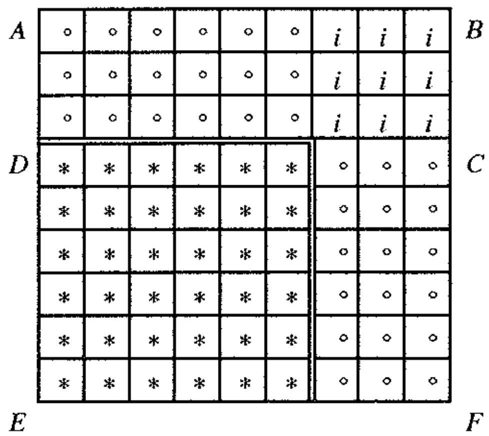
Le point A étant le milieu du segment DC, la	1 ʒ	eg	6	X	+ 72	
proposition (II, VI) des *Eléments* d'Euclide énonce que	A :		3			(DA)
le carré du segment DA, marqué par des i, avec le	M :		(3)(3)			(DA^2)
rectangle BD.BC égal au gnomon $\mathfrak{G}$ marqué par des	A & S :		9	(DA^2)	+ 72	($\mathfrak{G}$)
zéros, fait autant que le carré du segment BA. Le côté					81	(BA^2)
cherché est BC = BA+AC parce que le carré de côté	I :				9	(BA)
BC contient exactement le gnomon $\mathfrak{G}$ marqué par des	A & S :		3	(AC)	+ 9	(BA)
zéros, et deux fois le rectangle AC.BC, soit deux fois				12		(BC)
3.BC, ce qui visualise l'égalité 1ʒ eg 6X+72.	BC^2	eg	2.AC.	BC	+ $\mathfrak{G}$	

III. La fabrication des équations dont on connaît les racines

Cette démonstration concernant une équation du deuxième type est suivie d'une validation géométrique pour la résolution de l'équation 1ʒ eg 18X−72, conduite dans le même esprit, mais présentant des embarras sensibles à la lecture, évidemment liés à l'existence de deux racines positives. La difficulté rencontrée provoque alors un rebondissement heureux. Après avoir détaillé le cas particulier de la racine double sans toutefois traiter le cas impossible, et après avoir lourdement récapitulé les résultats obtenus pour les trois types d'équations, Stifel réaborde les équations du troisième type sous un autre angle.

Sur une figure choisie présentant trois carrés solidaires de côtés 3, 6 et 9 respectivement, et permettant la lecture des propositions III ou IV du Livre II des *Eléments* d'Euclide, Stifel nous fait voir que l'équation 1ʒ eg 9X−18 admet les deux racines 3 et 6. Mais prolongeant son geste, il montre aussi les autres équations liées à la même figure et ayant pour racine 3, 6 ou 9. Or dès le début du chapitre II de son Livre III, Stifel explique comment trouver des équations sur une figure rectangulaire, en utilisant la proposition I du Livre II des *Eléments* d'Euclide ; au chapitre IIII, avant de traiter plusieurs exemples d'application de la règle AMASIAS, il dit comment former des équations quadratiques grâce aux propositions I et II du même Livre II des *Eléments*. Ainsi il explicite de façon répétée l'intérêt des propositions du Livre II des *Eléments* d'Euclide pour fabriquer des équations se déduisant les unes des autres. Le texte qui suit est exemplaire de cette démarche :

Il faut maintenant ajouter la démonstration, par laquelle tu puisses voir et comprendre, que les équations de cette sorte (où c'est le signe de la soustraction qui sépare, le nombre absolu étant posé à côté de ce signe) ont naturellement deux racines (or aucune équation n'en aura plus de deux). A cet effet reprenons la seconde figure de ce chapitre, évidemment celle-ci :



Telle qu'elle figure ici, elle est un exemple de la troisième proposition, du second livre d'Euclide, comme elle peut également en être un de la quatrième <proposition> du second <livre>.
Vois donc. Quand je dis que 1ȝ égale 9X–18. Bien sûr, d'après cette figure précisément, tu vois comment cette équation convient ainsi au rectangle ABCD et au rectangle CDEF. En effet le carré le plus petit, celui évidemment qui est signalé par des lettres i, tu vois qu'il est égal à 9X–18. A savoir que le rectangle entier ABCD contient 9X, racines qui sont celles précisément du carré le plus petit, signalé par des lettres i. Par conséquent, si de ces racines on soustrait le nombre 18, c'est-à-dire la partie du rectangle qui est signalée par des zéros, alors il reste 1ȝ, c'est-à-dire précisément le carré signalé par des lettres i.
Elle convient aussi absolument au rectangle CDEF : en effet, le carré le plus grand qui est signalé par des points, tu vois qu'il est égal de la même façon à 9X–18. A savoir, le rectangle entier CDEF contient 9X, racines qui sont celles précisément du carré le plus grand signalé par les points. Par conséquent, si de ces 9X tu soustrais le nombre 18, c'est-à-dire cette partie du rectangle qui est signalée par des zéros, alors il reste 1ȝ, c'est-à-dire précisément le carré signalé par des points.
Tu vois de façon certaine qu'une seule et même équation, celle-ci, 1ȝ égale 9X–18, a deux racines, étant donné qu'elle convient à l'un et l'autre rectangles. D'une part 3 en est la racine la plus petite ; d'autre part 6 en est la racine la plus grande. Comme tu vois très bien que BC est le côté du carré le plus petit, et DE le côté du carré le plus grand.
Or quand je dis, soit 1ȝ égal à 27–6X, tu vois de façon certaine que cette équation convient seulement au rectangle le plus petit, évidemment ABCD.

De même quand je dis que 1ʒ est égal à 54−3X, tu vois que l'équation convient seulement au rectangle le plus grand.

Et quand je dis que 1ʒ égale 6X+27, ou que 1ʒ égale 3X+54, tu vois que ces équations conviennent seulement au carré contenant l'un et l'autre rectangles, évidemment ABFE[6]*.*

Présentés dans un tableau, les résultats expliqués par Stifel, dans une formalisation utilisant des caractères gras et des caractères soulignés pour tracer le chemin de la racine à l'équation :

dans le rectangle ABCD :				dans le rectangle CDEF :				dans le carré ABFE :			
3×9	= 3×3	+	3×6	6×9	= 6×6	+	6×3	81	= 3×9	+	6×9
$\underline{\mathbf{3}}^2$	= **3**×9	−	$\underline{3}$×6	$\underline{\mathbf{6}}^2$	= **6**×9	−	$\underline{6}$×3	$\underline{\mathbf{9}}^2$	= 3×**9**	+	6×$\underline{9}$
1 ʒ	= 9 **x**	−	18	1 ʒ	= 9 **x**	−	18	1 ʒ	= 3 **x**	+	54
1 $\underline{ʒ}$	= 27	−	6 $\underline{X}$	1 $\underline{ʒ}$	= 54	−	3 $\underline{X}$	1 $\underline{ʒ}$	= 27	+	6 $\underline{X}$

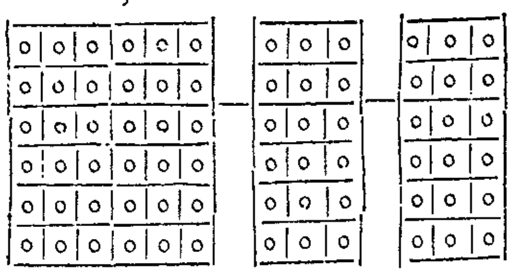
L'équation de type III, 1ʒ = 9**x**−18, admet les deux racines 3 et 6.

1$\underline{ʒ}$ = 27−6$\underline{X}$ est une équation de type I qui admet la racine 3 ; 1$\underline{ʒ}$ = 54−3$\underline{X}$ en est une qui admet la racine 6.

Les deux équations de type II, 1ʒ = 3**x**+54 et 1$\underline{ʒ}$ = 27+6$\underline{X}$, admettent l'une et l'autre la racine 9.

Nous voyons Stifel jongler avec les figures et les nombres. Son originalité, à son époque, telle qu'elle se présente dans le cadre du chapitre étudié, réside donc à la fois dans sa tentative presque réussie de mise en place d'un algorithme unique pour la résolution des équations quadratiques, et dans l'usage nouveau qu'il propose de figures jugées, jusque là, uniquement illustratives.

¶Sed ut facile possis producere æquationes huiusmodi, rationales radices habentes, uolo repetere figuram præcedentis capitis quadrangularem, diuisam iuxta propositionem primam secundi, ipsius Euclidis, hoc modo.



Scilicet 1 ʒ + 6 ℞, æquantur 72.
Item 1 ʒ + 8 ℞ — 12, æquantur 72.
Item 1 ʒ + 3 ℞ + 18, æquantur 72. Et sic de alijs.
Harum æquationem mediam pro exemplo accipiamus: sci-
pp licet

STIFEL M., *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544, p. 241, droite.

[6] *Ibid.*, p. 245, gauche & droite.

26 POINTS A PRÉCISER

A André Masson.

Ma vie finira par a

Je suis $b - a$

Je demande $cb - a$

je pèse les jours de fête $\dfrac{d}{cb - a}$

Mes prévisions d'avenir $\dfrac{de}{cb - a}$

Mon suicide heureux $\dfrac{de}{(cb - a)\, f}$

Ma volonté $\sqrt[g]{\dfrac{de}{(cb - a)\, f}}$

Ma force physique $\sqrt[g]{\dfrac{de}{(cb - a)\, f}} + h$

Mes instincts sanguinaires $\sqrt[g]{\dfrac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i$

Les cartes ont mis dans ma poche

$$\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j$$

Elles ont retiré $\left(\sqrt[g]{\dfrac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + k$

Il reste $\left(\sqrt[g]{\dfrac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl$

Avec mon nez je sens

$$m\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl$$

Avec ma langue je dis

$$\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl$$

Avec ma bouche je mange

$$\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o$$

Avec mes yeux je vois

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{p}$$

Avec mes oreilles j'entends

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{pq}$$

Avec mes mains je gifle

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{pq + r}$$

Avec mes pieds j'écrase

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{(pq + r)\, s}$$

Avec mon sexe je fais l'amour

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}}$$

La longueur de mes cheveux

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}} - u$$

Mon travail du matin

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}} - u\, v$$

Mon travail de l'après-midi

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}} - uv - w$$

Mon sommeil

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}} - uv - w\right)^x$$

Ma fortune

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}} - uv - w\right)^x - y$$

Ma date de naissance

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\, f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\, s}} - uv - w\right)^x - \frac{y}{z}$$