

**C A H I E R D E D I D I R E M**

**DIAGNOSTIC DES CONNAISSANCES DE  
MATHÉMATIQUES DES ÉTUDIANTS DE CAPES,  
VERS UNE INTERPRÉTATION COGNITIVE DES  
APPRENTISSAGES INDIVIDUELS**

**PAR J. PIAN**

**DIDACTIQUE DES MATHÉMATIQUES  
UNIVERSITÉ PARIS 7 - DENIS DIDEROT**



**DIAGNOSTIC DES CONNAISSANCES DE  
MATHÉMATIQUES DES ÉTUDIANTS DE CAPES,  
VERS UNE INTERPRÉTATION COGNITIVE DES  
APPRENTISSAGES INDIVIDUELS**

**PAR J. PIAN**



## — Introduction —

Nous proposons ici d'une part un diagnostic de connaissances mathématiques d'étudiants préparant le CAPES et d'autre part une analyse de ce diagnostic grâce à une interprétation cognitive des apprentissages au niveau individuel.

Au départ, nous nous sommes intéressés aux étudiants préparant le CAPES dans le but d'obtenir des informations utiles à terme dans la formation des enseignants de mathématiques de lycées et collèges. Nous pensons que notre façon d'enseigner - choix d'activités, façon de présenter certaines notions .. - dépend étroitement de nos connaissances, des liens que nous avons pu établir entre les différentes notions et concepts. Les mathématiques que ces futurs enseignants transmettront seront fortement colorées par leur rapport à cette discipline. C'est pourquoi nous cherchions à obtenir des informations d'ordre qualitatif sur les connaissances mathématiques de ces étudiants. Notre intention n'était pas de dresser un inventaire des notions et des méthodes qu'ils connaissent mais de mieux cerner la nature de leurs connaissances mathématiques : quel sens donnent-ils à tel ou tel concept ? De quelle manière utilisent-ils leurs connaissances pour résoudre des exercices ? Comment abordent-ils de nouvelles situations mathématiques ?

Notre démarche a été de proposer à une centaine d'étudiants en préparation CAPES à Versailles et à Lille, deux tests : l'un début trimestre (test 1), l'autre (test 2) fin janvier-début février. Les questions posées dans ces tests sont de deux sortes : certaines sont des applications directes de définitions ou théorèmes classiques, d'autres demandent plus de réflexion. Cependant toutes les questions ne font appel qu'à des connaissances du premier cycle universitaire. L'analyse des résultats de ces tests nous donnera donc l'occasion d'avoir un retour sur notre enseignement en premier cycle universitaire. Les étudiants à qui nous avons proposé les tests ont tous au moins une licence. Nous pouvons donc supposer qu'ils sont plus mûrs mathématiquement qu'à la sortie du DEUG. D'autre part, il s'agit d'étudiants qui ont privilégié les mathématiques par rapport aux autres disciplines scientifiques étudiées en DEUG : ils représentent donc à priori une population non "réfractaire" aux mathématiques. Autrement dit, à travers l'analyse des productions de nos étudiants, nous aurons une vision plutôt optimiste de la situation.

Le deuxième test - celui qui a été proposé fin janvier - comporte des questions similaires à celles posées dans le test du début de l'année universitaire. Nous voulions regarder de quelle manière, sur quels domaines, les étudiants avaient progressé, et, par comparaison avec le test 1, voir si des facteurs de progrès individuel potentiels pouvaient être mis en relief.

Dans la première partie de cet exposé, nous allons prendre connaissance du test 1 et nous ferons une première analyse globale des résultats.

Nous étudierons, ensuite, plus en détail quelques questions d'analyse, en terme de connaissances mises en jeu, organisation requise des connaissances et erreurs type rencontrées.

La deuxième partie sera consacrée à la comparaison des résultats obtenus aux tests 1 et 2 en analyse par 50 étudiants. Pour cela nous aurons besoin de classer les questions suivant leur difficulté.

Nous avons choisi pour cette classification de nous référer aux trois niveaux de mise en fonctionnement introduits par A. Robert et al (1998) (technique, mobilisable et disponible) que nous rappellerons.

Puis nous définirons un "indice de mise en fonctionnement" qui nous permettra d'associer à chaque question un niveau de mise en fonctionnement.

Nous montrerons alors que le progrès individuel des étudiants, évalué à l'aide des résultats des tests 1 et 2 , est fortement corrélé au nombre de leurs réponses justes du test 1 aux questions relevant des niveaux mobilisable et disponible.

Nous concluerons la partie diagnostic de notre travail en dressant un "état des connaissances mathématiques de Deug" d'un étudiant CAPES tel qu'il nous apparaît à travers nos analyses.

Dans la troisième partie, la deuxième composante de ce travail, nous proposerons une interprétation cognitive des apprentissages au niveau individuel.

Nous connaissons très peu de choses sur les mécanismes d'apprentissage au niveau individuel. La didactique des mathématiques a fait le choix de laisser les processus cognitifs au niveau individuel hors de son champ d'investigation. Dans les modélisations des processus d'apprentissage des mathématiques, modélisations issues des théories cognitives de Piaget, Vygotski, Vergnaud..., l'apprenant est en quelque sorte assimilé à une "boîte noire" qui, soumise à des stimuli adéquats, réagira conformément à des lois. Les phénomènes d'ordre cognitif sont considérés dans leur globalité et en tant que système. Pour modéliser des processus cognitifs au niveau individuel, nous serons amenés à différencier différents modes de fonctionnement du penser. Nous tenterons donc une entrée dans "la boîte noire". Nous avons conscience de prendre là un pari très risqué. Cependant, nous mettrons en évidence des liens entre nos idées et celles d'autres chercheurs. Notre modèle nous permettra d'interpréter au niveau cognitif individuel les résultats mis en évidence dans la première partie de ce travail. Enfin nous esquisserons les conséquences de la prise en considération de notre modélisation sur l'enseignement des mathématiques.

## — Partie 1 —

Nous commençons donc par analyser rapidement le premier test.

Le test 1 d'une durée de 4h comportant 24 questions (cf annexe 1) a été proposé à une centaine d'étudiants de Versailles (mi-octobre) et Lille (fin septembre).

### 1 Première analyse des résultats

Sur 104 copies :

Moyenne : 26/100

Note supérieure à 50/100 : 9 copies

Note comprise entre 30/100 et 50/100 : 22 copies

Note comprise entre 20/100 et 30/100 : 23 copies

Note inférieure à 20/100 : 50 copies

En annexe 2, nous avons ordonné les questions suivant le taux de réussite.

#### 1.1 Questions dont le pourcentage de réussite est $\geq 50\%$ .

##### Q.15 :

Cette question porte sur les équations paramétriques de droites; on notera cependant le relativement faible taux "réussite/abordée" dû à l'erreur fréquente consistant à garder le même paramètre  $t$  pour les deux droites. Cette erreur n'empêche pas d'obtenir le bon résultat car l'origine du paramétrage est le point d'intersection des deux droites.

##### Q.11 :

Le thème est "Aire d'un parallélogramme"; il manquait une donnée et du coup 40% des étudiants qui ont abordé cette question ont donné comme réponse  $15cm^2$ .

On notera que les exercices dont le pourcentage de réussite est  $\geq 50\%$  sont des applications directes de propriétés ou définitions élémentaires et ne posent à priori aucune difficulté.

#### 1.2 Questions dont le pourcentage de réussite est compris entre 40 et 20 % .

##### Q.6.1

Abordée par 75% des étudiants, cette question requiert une connaissance assez fine de la convergence uniforme. 33% de réussite semble encourageant. Nous y reviendrons plus tard.

##### Q.16

Seulement 49% des étudiants abordent cette question. Ceci peut s'expliquer par le fait que "les nombres" est un thème peu abordé en Deug. Les connaissances requises pour cette question sont le lien entre développement décimal illimité et série et la périodicité du développement décimal d'un rationnel.

##### Q.21

C'est une question d'arithmétique. On demandait une condition nécessaire et suffisante, cela n'a pas toujours été vu.

### **Q.23**

Les connaissances nécessaires portent sur la symétrie et sont du niveau lycée. Il s'agissait de savoir retrouver la composée de deux symétries. Aucune indication n'était donnée.

### **Q.10.1**

Cette question a été perçue comme une question facile ; en effet un grand nombre d'étudiants l'abandonnent : 80% mais Taux de réussite 26% !! (10.1 signifie que la réponse a été jugée correcte même si l'étudiant n'a pas distingué le cas  $\alpha \leq 0$ . Les erreurs sont principalement dues à la double occurrence de  $n$  et révèlent une connaissance très approximative de la notion de convergence d'une suite.

### **Question 9**

Nous y reviendrons plus en détail.

## **1.3 Questions dont le pourcentage de réussite est inférieur à 20 %**

Quatre questions ne sont pas des questions d'analyse : Q19 : géométrie, Q4 : décimaux, Q1 et Q17 : algèbre linéaire.

## **1.4 Première conclusion .**

Nous constatons que, globalement, les questions, autres que celles de géométrie et comportant plus d'une étape sont nettement moins bien réussies. Se retrouvent en haut de classement des questions très élémentaires, applications directes.

## **2 Etude détaillée de quelques questions d'analyse .**

Nous cherchons à mieux comprendre pourquoi certaines questions ont posé des problèmes aux étudiants : quels sont les concepts et les méthodes mis en jeu ? Quelle organisation des connaissances est nécessaire ? Notre intention est de ne pas limiter notre analyse à "cette question est difficile" ou "c'est normal, les étudiants ne réussissent pas ce type de question" ... mais d'essayer de comprendre cet état de fait.

Nos analyses nous permettront aussi dans la deuxième partie de notre exposé de classer ces questions suivant leur "ordre de difficulté" lors de l'étude des évolutions des acquisitions individuelles des étudiants.

L'annexe 3 regroupe les questions d'analyse du test 1 dans l'ordre décroissant de succès.

(Pour le moment ne pas tenir du quadruplet qui apparaît près du numéro de la question).

### **2.1 Analyse de la question 12 .**

*Enoncé :*

Soit pour  $p$  entier  $\geq 1$  et  $x \geq 0$ ,  $u_p(x) = xe^{-px}$ .

#### **12.1**



Montrer que  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge simplement si  $x \in [0, +\infty[$ . On note  $f(x)$  sa somme.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ? (justifier vos réponses)

**12.2** :  $\forall a > 0, \sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

**12.3**  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge uniformément sur l'intervalle  $]0, +\infty[$

### Analyse de la question 12.1

Niveau Deug 2.

Cette question est une application directe de la définition de la convergence simple d'une suite de fonctions. La grande majorité des étudiants identifie la suite à une suite géométrique.

### Analyse de la question 12.2

Niveau Deug 2 .

Corrigé succinct :

$u'_n(x) = 0$  pour  $x = 1/n$  et pour  $n \geq N_0, \forall x \in [a, +\infty[, 0 < u_n(x) < ae^{-na}$ . La série converge donc normalement sur  $[a, +\infty[$ .

Cette question est une question ouverte, sans indication, et requiert plusieurs étapes.

Le taux de succès n'est que de 8% et seulement 19% des étudiants qui abordent cette question la réussissent. Cependant à la lecture des copies il apparaît que les étudiants connaissent la définition et la caractérisation de la convergence normale. Les erreurs les plus fréquentes sont :

- Erreur de majoration de  $u_n(x)$  sur  $[a, +\infty[$ .

Il s'agit d'étudiants qui n'ont pas l'idée d'étudier la fonction  $u_n$  pour rechercher son maximum. Il est possible que ces étudiants n'aient qu'une approche "statique" d'un problème de majoration, problème auquel ils n'associent pas une idée de variation. On retrouve souvent ce même phénomène dans des problèmes d'encadrement dont la solution peut s'obtenir facilement par l'étude de fonctions.

- Oubli de  $x$

Ces étudiants affirment que la convergence normale de la série de terme général  $e^{-nx}$  entraîne celle de  $\sum u_n(x)$ .

Il peut sembler naturel de vouloir isoler le facteur  $e^{-nx}$  qui, de toute évidence, ne posera pas de problème. Cependant, les étudiants ne s'aperçoivent pas que de cette manière, ils ne pourront pas obtenir une majoration indépendante de  $x$ . Est-ce que cela illustre une confusion de nature conceptuelle entre convergence simple et convergence normale ? Pour ces étudiants, il semblerait que "convergence normale" n'est associée qu'à la phrase "majorer par une série numérique à termes positifs", phrase sur laquelle ils ne mettent aucun sens.

- Faire dépendre  $a$  de  $n$ .

Erreur la plus fréquente. Ces étudiants affirment que la convergence dépend de l'ordre entre  $a$  et  $1/n$  ! Quel sens ces étudiants donnent-ils à la notion de limite ? Il est possible aussi que cette affirmation résulte de la non compréhension de la phrase : " $\forall a > 0, \dots$  converge normalement sur  $[a, +\infty[$ ". La propriété demandée devant être vérifiée pour tout " $a > 0$ ", ces étudiants font donc varier  $a$  avec  $n$ .

### Analyse de la question 12.3

Niveau deug 2

Il s'agit d'une question ouverte, sans indication. Ce n'est pas une application directe de la convergence uniforme d'une série.

*corrigé succinct :*

- *Solution 1 :  $\forall n, \sum_{p \geq n} u_p(1/n)$  ne tend pas vers 0 ; la série ne converge donc pas uniformément.*
- *Solution 2 :  $f(x) = \sum u_n(x)$  n'est pas continue sur  $[0, +\infty[$ .*

Le taux de réussite est très faible (4%). La deuxième solution a été utilisée dans la quasi-totalité des bonnes réponses.

L'erreur standard commise par plus de 80% des étudiants qui abordent cette question est : " La convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ ,  $\forall a > 0$  implique la convergence uniforme sur  $[0, +\infty[$ .

Revenons un instant sur la question 6.1. 33% des étudiants savent que la convergence uniforme est une condition suffisante pour que " $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$ ". Ce relativement bon pourcentage de réussite pourrait laisser à penser que les étudiants maîtrisent relativement bien la notion de convergence uniforme. Cependant le taux de réussite à la question 12.3 semble prouver le contraire.

Les étudiants connaissent parfaitement la définition de la convergence uniforme. Lors de la correction du test et lors de travaux dirigés, il est apparu clairement que les étudiants associent cette notion à une condition (plus souvent nécessaire que suffisante d'ailleurs) pour passer à la limite. Ici il n'est pas exclu qu'un grand nombre d'entre eux aient pris la limite quand  $a \rightarrow 0$ .

D'autre part, les étudiants ont beaucoup de difficulté en général à reconnaître le caractère local ou global d'une propriété. Par exemple la propriété : "si la suite des dérivées  $f'_n$  convergent uniformément sur tout  $[a, b]$ ,  $0 < a < b$ , alors la limite  $f$  de la suite  $(f_n)$  est continûment dérivable sur  $]0, +\infty[$ " est très mal comprise. Comme l'ont indiqué un grand nombre d'étudiants lors de la correction en classe, cette dernière propriété justifie pour eux, par analogie, que la convergence uniforme sur  $[a, +\infty[$ ,  $\forall a > 0$  suffise pour impliquer la convergence uniforme sur  $]0, +\infty[$ .

Notre analyse montre que les étudiants ne maîtrisent pas les concepts des différents modes de convergence d'une suite de fonctions, bien qu'ils en connaissent les définitions et les critères.

Il est vrai que ces concepts sont difficiles, que leurs définitions formelles sont peu parlantes. Leur interprétation fonctionnelle plus éclairante demande en contrepartie une plus grande maturité mathématique.

## 2.2 Analyse de la question 9 .

Question sans indication ; plusieurs étapes.

Taux de réussite : 20%.

*Enoncé :*

*Soit  $P$  une fonction polynomiale définie sur  $\mathbb{R}$ , à coefficients réels. On suppose que l'on a  $\int_0^1 P^2(t)dt = 0$ . Que peut-on dire de  $\int_{-1}^0 P^2(t)dt$  ? (justifier)*

C'est le premier exercice, dans l'ordre de réussite, où interviennent plusieurs étapes. Les étudiants doivent construire une démonstration faisant intervenir à la fois des connaissances d'analyse (propriétés élémentaires de l'intégrale de Riemann) et d'algèbre (zéros d'un polynôme).

*Corrigé succinct :*

$\int_0^1 P^2(t)dt = 0$  implique  $P^2 = 0$  sur  $[0, 1]$  car  $P^2$  est une fonction continue et positive. La fonction polynômiale  $P$  nulle sur  $[0, 1]$  est nulle sur  $\mathbb{R}$  et donc  $\int_{-1}^0 P^2(t)dt = 0$ .

La présence de  $\int_0^1$  et  $\int_{-1}^0$  dans l'énoncé a incité environ 1/3 des étudiants qui ont abordé cette question à utiliser le changement de variables  $t \rightarrow -t$ . Pour arriver au résultat, la plupart n'hésitent pas à affirmer que  $P^2$  est une fonction paire. D'autres, plus prudents, ne concluent que dans le cas où  $P$  est pair et affirment que "dans le cas où  $P$  est impair : "on ne peut rien dire " et non pas que leur approche est inadéquate.

Ne pas mentionner la continuité de  $P$  pour conclure que  $P^2 = 0$  sur  $[0, 1]$  a été l'erreur la plus fréquente. Interrogés lors de la correction, les étudiants qui n'avaient pas oublié cette condition se sont montrés incapables de démontrer ce résultat et de fournir un contre-exemple. Ceci illustre un manque de situations de références chez les étudiants. Tout se passe comme si ils avaient mémorisé une phrase (une propriété) dont ils se servent dans certaines situations. C'est une connaissance déconnectée, isolée, qui ne s'appuie sur rien. Dans ce cas précis, les étudiants ne voient pas quel phénomène ou irrégularité la continuité permet d'éliminer.

L'argument final " $P = 0$  sur  $[0, 1]$  donc  $P = 0$ " relève d'une certaine organisation des connaissances. L'étudiant est amené, en utilisant ses connaissances d'algèbre, à reconnaître ce qu'apporte le fait que la fonction continue  $P$  soit une fonction polynomiale.

## 2.3 Analyse de la question 8 .

*Enoncé :*

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue, telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge.

**8.1** Peut-on affirmer que la fonction  $f$  est bornée ?

**8.2** Justifier votre réponse.

Cette question a été abordée par les 2/3 des étudiants et son taux de réussite a été de 14% (**8.1**) et 7% (**8.2**).

La question **8.1** est une application directe (connaissance élémentaire sur les intégrales généralisées, Deug 2eme année) sans indication ; par contre, la question **8.2** demande de savoir construire un contre-exemple.

Les 3/4 des étudiants qui abordent cette question non seulement affirment que  $f$  est bornée mais le démontrent. L'erreur la plus fréquente consiste à écrire :  $f$  non bornée équivaut à :  $\forall M > 0, \exists x_0$  tel que  $f(x_0) > M$ , donc  $\int_{x_0}^x f(t) dt > M(x - x_0)$ .

Bien que leur caractérisation d'une fonction positive non bornée soit correcte, leur représentation du phénomène n'est pas adéquate au problème. Comme certains l'écrivent d'ailleurs, pour ces étudiants, une fonction positive non bornée tend vers  $+\infty$  en  $+\infty$ .

Les réponses données montrent que les étudiants n'ont pas spontanément des situations de référence illustrant des propriétés caractéristiques. Seulement 7% d'entre eux exhibent un contre-exemple du type fonction affine par morceaux.

Lorsqu'il s'agit d'appliquer des critères pour déterminer la nature d'une intégrale généralisée, ces mêmes étudiants se montrent raisonnablement performants. Il semble que de la théorie des intégrales généralisées, il ne leur reste que l'aspect technique d'applications de ces critères. D'ailleurs, lors de la correction en classe, très peu d'étudiants ont pu donner une définition de la convergence d'une intégrale.

## 2.4 Analyse de la question 14 .

*Enoncé :*

Déterminer la limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $I_n = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n dx$ .

Cette question n'est pas une application directe d'une propriété ou définition, aucune méthode n'est indiquée et la résolution demande plusieurs étapes.

Taux de réussite : 13%.

*Corrigé succinct :*

Sur tout intervalle  $[0, 1 - \epsilon]$  la suite de fonctions  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 et  $\int_0^{1-\epsilon} \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n dx \leq \epsilon$  ; donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$ .

Le résultat s'obtient aussi immédiatement en utilisant le théorème de convergence dominée de Lebesgue, théorème qui n'est pas au programme du Capes mais cependant vu et utilisé par la grande majorité des étudiants en licence .

Environ 1/3 des étudiants se sont lancés, sans succès, dans le calcul explicite de  $I_n$ . Bien que légitime, une telle approche, révèle néanmoins un manque de recul par rapport au problème. Majorer, encadrer font partie des méthodes sans cesse utilisées en analyse. Ici les calculs sont élémentaires. En général, face à un problème, la majorité des étudiants n'essaient pas de le placer dans un contexte plus général ; ils ne le reconnaissent pas comme cas particulier d'une situation plus générale. Ici, ils veulent exprimer  $I_n$  en fonction de  $n$  afin d'en calculer la limite.

Les étudiants ne cherchent pas non plus à s'aider par un dessin illustrant l'intégrale (l'aire) et le comportement de  $(f_n)$ .

Après avoir réalisé que le théorème d'interversion de limites ne s'applique pas, la difficulté principale de cet exercice, très classique, est d'opérer un découpage de l'intervalle et d'utiliser deux arguments différents pour conclure. Le théorème d'interversion de limites doit être adapté. D'ailleurs, pour pouvoir appliquer à tout prix ce théorème, un grand nombre d'étudiants affirment et prouvent à leur manière que la suite  $(f_n)$  converge uniformément vers 0 sur  $[0, 1]$ .

Les réponses données et les arguments utilisés montrent que les étudiants ont très peu d'autonomie, ont beaucoup de mal à prendre du recul face à un problème dès lors que celui-ci ne relève pas d'une application directe et demande d'utiliser plusieurs arguments.

## 1 Introduction .

Dans cette partie , nous évaluons plus objectivement les acquisitions individuelles des étudiants et leurs évolutions à travers la comparaison des résultats obtenus aux tests 1 et 2. Nous mettons en évidence que les différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances n'ont pas la même influence sur le progrès individuel des étudiants.

Fin janvier, nous avons proposé aux mêmes étudiants un deuxième test ( Test 2 cf Annexe 4) comportant des questions très similaires à celles du test 1.

Nous cherchions d'abord à évaluer de quelle manière les notions abordées au test 1 avaient été globalement assimilées et à savoir dans quels domaines les progrès étaient les plus significatifs. Globalement, les résultats du test 2 sont très similaires à ceux du test 1 ; ce sont toujours les mêmes types de questions qui sont le mieux réussies et si les taux de réussite sont en légère progression, nous n'avons pas noté de différence spectaculaire.

Nous nous sommes alors intéressés à une analyse individuelle des résultats cherchant à établir une relation entre le progrès individuel de l'étudiant et le type de questions qu'il avait réussies au test 1. Nous avons mené notre étude exclusivement sur les questions d'analyse. Nous avons donc été amené à choisir d'une part des critères pour classer les questions du test 1 et d'autre part une "mesure objective" du progrès individuel.

Pour différencier les questions, nous avons utilisé comme base les "trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves " introduits par A.Robert et al. Nous rappelons ici ces trois niveaux.

## 2 Les trois niveaux de mise en fonctionnement des connaissances par les élèves .

### 2.1 Niveau technique .

Ce niveau de mise en fonctionnement des connaissances se réfère à des mises en fonctionnement isolées mettant en jeu des applications directes de définitions, théorèmes et propriétés. Les notions mathématiques sont utilisées comme outil. L'habileté à mener des calculs standard ainsi que la maîtrise du langage formel relèvent aussi de ce niveau.

*Exemples niveau Deug :*

- *Valeurs propres : Calculer les valeurs propres d'une matrice. :*
- *Convergence de suites de fonctions : Montrer que la suite de fonctions  $f_n(x) = \left(\frac{1}{x+2}\right)^n$  converge uniformément sur  $[0, 1]$ .*

### 2.2 Niveau mobilisable .

Ce niveau de mise en fonctionnement correspond à des mises en fonctionnement plus larges ; il ne suffit plus d'appliquer immédiatement une propriété ou définition. Il peut être nécessaire d'adapter ses connaissances, de changer de point de vue. La solution peut requérir plusieurs étapes. Le savoir commence à être organisé.

*Exemples niveau Deug :*

- *Valeurs propres : Reconnaître lors d'un problème que la relation " $\int_a^x f(t) dt = \lambda f(x)$ " signifie que  $\lambda$  est valeur propre et  $f$  est vecteur propre de l'opérateur  $T$  qui à  $f$  associe la fonction  $T(f)$  définie par  $T(f)(x) = \int_a^x f(t) dt$ .*
- *Convergence de suites de fonctions : Question 12.2 du test 1*

## 2.3 Niveau disponible .

Ce niveau se réfère à la possibilité de savoir, d'une part résoudre ce qui est proposé sans indication, en allant rechercher seul dans ses connaissances ce qui peut intervenir, d'autre part de pouvoir construire des contre-exemples, appliquer des méthodes non prévues, changer de point de vue. Ce niveau est lié à une organisation des connaissances, à la possibilité de se servir de situations de référence. L'étudiant est autonome, découvre ou redécouvre seul un savoir nouveau.

*Exemples niveau Deug :*

- *Valeurs propres : Reconnaître en quoi l'existence d'une droite globalement invariante par une transformation affine est lié à un problème de valeurs propres.*
- *Convergence de suites de fonctions : Question 14 du test 1.*

Bien entendu, ces différents niveaux de mise en fonctionnement sont relatifs à un niveau de développement mathématique donné. De plus, suivant le contexte d'apprentissage, pour la même personne, une mise en fonctionnement d'un certain niveau à un instant donné peut devenir ultérieurement une mise en fonctionnement d'un autre niveau ; ceci est le cas par exemple lorsqu'il est nécessaire de s'assurer sans aide de la validité d'une propriété depuis longtemps non utilisée : l'application de cette propriété qui relevait du niveau technique ou mobilisable demande alors une disponibilité des connaissances. Inversement, la confrontation répétée à des situations similaires rend mobilisables ou techniques des mises en fonctionnement qui, au départ, pouvaient relever du niveau disponible.

## 3 Indice de mise en fonctionnement .

Pour classer les questions suivant les différents niveaux de mise en fonctionnement, nous avons attribué à chaque question un quadruplet  $(i, j, k, l) \in \{0, 1\}^4$ , l'indice de mise en fonctionnement, de la façon suivante :

- $i = 0$  si la méthode est indiquée,  $i = 1$  sinon.
- $j = 0$  s'il s'agit d'une application directe,  $j = 1$  sinon.
- $k = 0$  si aucun changement de point de vue n'est nécessaire,  $k = 1$  sinon.
- $l = 0$  si la question comporte une seule étape,  $l = 1$  si la résolution de la question comporte plusieurs étapes non indiquées.

La fonction qui, à chaque valeur de l'indice, noté IMF, attribue le niveau de mise en fonctionnement est alors définie de la façon suivante :

Niveau technique si :

$$\text{IMF} \in \{(0, 0, 0, 0), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)\}.$$

Niveau mobilisable si :

$IMF \in \{(0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1), (1, 1, 0, 0), (1, 0, 0, 1), (1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 0)\}$ .

Niveau disponible si :

$IMF \in \{(0, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1), (1, 0, 1, 1), (0, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}$ .

La valeur de l'indice de mise en fonctionnement attribuée à chaque question d'analyse du test 1 est le quadruplet qui apparaît près du numéro de la question dans l'annexe 3.

Ensuite, nous avons comptabilisé pour chaque étudiant d'une part, le nombre, noté  $t$ , des "questions de niveau technique" auxquelles il a répondu correctement et d'autre part, le nombre, noté  $m$ , de "questions de niveau mobilisable ou disponible" auxquelles il a répondu correctement. Vu le très faible taux de succès aux questions de "niveau disponible", nous avons préféré, pour obtenir des résultats exploitables statistiquement, ne pas dissocier pour notre analyse le "niveau mobilisable" du "niveau disponible".

Les notes  $t$  et  $m$  ont été remises à la même échelle : elles varient toutes les deux entre 0 et 12.

## 4 Corrélations entre les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et le progrès individuel .

### 4.1 Mesure du progrès individuel .

Nous avons ramené les notes d'analyse des tests 1 et 2 sur 100, notés respectivement  $N_1$  et  $N_2$ . Mesurer le progrès individuel d'un étudiant par la différence de ses notes obtenues aux deux tests,  $N_2 - N_1$ , n'est pas adéquat. En effet passer de 10% à 30% est beaucoup plus facile que de passer de 60% à 80%. Prendre la variation relative,  $\frac{N_2 - N_1}{N_1}$ , aurait pour inconvénient de favoriser les notes du test 1 les plus faibles. Pour mesurer le progrès individuel  $P$  d'un étudiant, nous avons donc choisi de pondérer sa différence  $N_2 - N_1$  par une fonction de la note  $N_1$  obtenue au test 1.

$$P = \left(\frac{N_1}{73}\right)^2 (N_2 - N_1)$$

( 73/100 est la meilleure note  $N_1$  ; l'exposant 2 ayant pour effet d'écraser les progrès des étudiants ayant obtenu une note  $N_1$  faible.)

### 4.2 Corrélations .

L'annexe 5 donne l'histogramme (progrès  $P$  - note niveau technique  $t$ ) ordonné suivant les valeurs décroissantes de  $P$ . "data 1" représente la note  $t$ , "data 2" le progrès  $P$ . L'histogramme ne fait apparaître aucune corrélation entre  $P$  et  $t$ .

Nous avons calculé le coefficient de corrélation linéaire,  $\rho(P, t)$  :

$$\rho(P, t) = 0,24$$

ainsi que l'équation de la droite de régression linéaire de  $P$  sur  $t$ ,  $D(P, t)$

$$D(P, t) : p = 0,22 + 0,31t.$$

L'annexe 6 donne l'histogramme ( progrès  $P$  - note niveau (disponible + mobilisable)  $m$ ) ordonné suivant les valeurs décroissantes de  $P$ . "data 1" représente la note  $m$ , "data 2" le progrès  $P$ .

Nous avons calculé le coefficient de corrélation linéaire,  $\rho(P, m)$  :

$$\rho(P, t) = 0,57$$

ainsi que l'équation de la droite de régression linéaire de  $P$  sur  $m$ ,  $D(P, m)$

$$D(P, t) : p = 0,002 + 1,34m.$$

Enfin  $P$  fonction de  $t$  et  $m$  donne :

$$P = -0,06 + 0,02t + 1,32m.$$

#### 4.3 Interprétation des résultats .

Ces résultats indiquent que le progrès individuel  $P$  est significativement mieux expliqué par la variable  $m$  que par la variable  $t$ . Ceci ne signifie pas que le "technique" n'a aucune influence sur le progrès mais il apparaît qu'un bon niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances ne garantit pas à lui seul une évolution des connaissances. Les étudiants qui progressent ont dans l'ensemble un meilleur niveau mobilisable-disponible de mise en fonctionnement des connaissances.

#### — Notre diagnostic —

De l'analyse de ces productions d'étudiants nous pouvons dégager deux enseignements : l'un concerne les connaissances des étudiants, l'autre nous renseigne sur l'acquisition des connaissances par les étudiants.

Précisons d'abord le premier point. Un trait essentiel qui ressort de nos analyses est que les étudiants ont peu de connaissances disponibles. En effet l'analyse des résultats globaux nous a révélé que les exercices relevant d'une mise en fonctionnement des connaissances de niveau autre que technique sont mal réussis dans l'ensemble. Les questions au taux de succès le plus élevé sont les applications directes de définitions ou théorèmes. Dès qu'une adaptation est nécessaire, le taux de succès chute considérablement. Nous avons vu aussi que les étudiants peuvent donner des réponses justes à des questions difficiles sans pouvoir avancer de justification. D'autre part, il ressort que, dans l'ensemble, leurs connaissances sont très atomisées. Elles ne sont pas organisées en un système cohérent. Enfin, nous avons constaté que les étudiants perçoivent principalement le côté "outil" des notions mathématiques. Ils ne semblent pas s'intéresser sur le côté "objet" des notions. C'est un peu comme si les étudiants avaient appris à construire un édifice sans utiliser de ciment ; ils se contentent de juxtaposer des briques, dans un ordre plus ou moins cohérent.

Le deuxième enseignement qui ressort de nos analyses est qu'un étudiant performant seulement dans des mises en fonctionnement de connaissances de niveau technique a peu de chances de progresser. En effet, nous venons de voir que, parmi les étudiants qui avaient de bonnes connaissances techniques, ceux qui avaient un peu de connaissances disponibles ou mobilisables ont le plus progressé au cours de l'année.

Enfin, nous pouvons dire que la notion "des différents niveaux de mise en fonctionnement de connaissances" a permis d'élaborer des outils pertinents d'analyse de productions d'étudiants. Ces outils ont joué un rôle important dans notre évaluation du degré d'organisation des connaissances



des étudiants. Nous avons pu aussi mieux apprécier le sens que les étudiants attachent à certaines notions de DEUG. Nous avons donc maintenant une perception plus fine de la façon dont ils abordent les mathématiques. Nous avons obtenu des informations sur "l'état de leurs connaissances mathématiques". Par contrecoup, c'est aussi notre enseignement en premier cycle qui est éclairé. Comment exploiter les informations que nous venons de recueillir pour approfondir nos connaissances des mécanismes d'apprentissage des mathématiques ? Quelles implications au niveau de l'enseignement ? C'est par un questionnement de cet ordre que nous abordons le deuxième volet de ce travail.

## 1 Introduction .

Les analyses précédentes mettent en évidence les limites de notre enseignement. Pour nous, l'un des objectifs principaux de l'enseignement des mathématiques est d'amener le plus grand nombre d'étudiants à pouvoir entrer dans des mises de fonctionnement de niveau mobilisable et disponible. En effet nous considérons que ces niveaux de mise en fonctionnement témoignent d'une certaine qualité de compréhension, proche par exemple du "deep understanding" de F.Marton et al (1997), du "Know to" de J.Mason (1996) . Or il apparaît que nos étudiants ont surtout acquis des connaissances essentiellement de type procédural qui ne seraient que très superficiellement insérées dans un système de connaissances conceptuelles. C'est sans doute pourquoi les mises en fonctionnement de connaissances autres que technique leur posent tant de difficultés. Les étudiants privilégient le côté "outil" des notions au détriment du côté "conceptuel". En fait, la plupart de nos étudiants ne s'interrogent pas sur la signification des notions utilisées. Une notion mathématique est avant tout un outil pour résoudre des exercices. Nous ne contestons pas ici que faire des mathématiques est essentiellement résoudre des questions d'ordre mathématique. Il est vrai que les mathématiciens développent des concepts qui sont d'autant plus importants qu'ils permettent, en tant qu'outil, de résoudre des problèmes. Cependant, la situation des étudiants diffère de celle des mathématiciens. Pour les étudiants aussi, les mathématiques consistent à résoudre des exercices, mais des exercices qui avant d'être perçus comme des questionnements d'ordre mathématique, sont des exercices posés par les enseignants qui doivent être résolus le plus rapidement possible. Ce qui compte avant tout c'est produire une solution qui sera reconnue comme bonne par l'enseignant. Nous montrerons plus tard l'impact d'une telle attitude dans la situation d'apprentissage des mathématiques.

Nous faisons donc le constat qu'un très grand nombre d'étudiants restent à un niveau de conceptualisation individuelle très en deçà du niveau de conceptualisation dans lequel s'insèrent les notions qu'ils manipulent.

Par niveau de conceptualisation , nous entendons ( A. Robert 1997) :

*il s'agit d'étiqueter un palier dans un champ de connaissances mathématiques (champ conceptuel) correspondant à une organisation cohérente d'une partie du champ, caractérisée par des objets mathématiques présentés d'une certaine façon, des théorèmes sur ces objets, des méthodes associées à ces théorèmes et des problèmes que les élèves peuvent résoudre avec les théorèmes du niveau considéré, et en utilisant ces méthodes.*

Nous parlons de niveau de conceptualisation individuelle d'un étudiant pour désigner l'entrée individuelle d'un étudiant dans des connaissances mathématiques données.

Tout se passe comme si l'étudiant n'entrait que très rarement dans le champ conceptuel auquel sont rattachées les tâches qui lui sont demandées. Ceci peut être parce qu'il n'a pas atteint un niveau de conceptualisation individuelle suffisant ou/et parce que les tâches qui lui sont proposées, bien que relevant d'un certain niveau de conceptualisation, peuvent être réalisées sans engendrer des activités mathématiques relevant du niveau de conceptualisation visé. Notre enseignement universitaire laisse la conceptualisation individuelle se faire au hasard. Il suppose qu'il suffit d'énoncer les concepts mathématiques , de proposer des problèmes et exercices d'application pour

que les étudiants qui travaillent les assimilent. Nous mettons ce point de vue en doute et nous nous posons les questions suivantes :

Comment sinon provoquer, du moins aider l'étudiant, par le travail en classe et à la maison, à accéder aux niveaux de mises en fonctionnement de connaissances de niveau mobilisable et disponible, reflète d'un autre niveau de compréhension ? Comment utiliser dans ce but ce que nous apprennent les différentes théories sur l'apprentissage (Vygotski, Piaget, Vergnaud..) ? Quels sont les liens entre les niveaux de mise en fonctionnement des connaissances et ces théories ? Est-ce que toutes les tâches proposées aux étudiants ont le même impact sur le développement de leur compréhension des mathématiques ? Est-ce qu'elles ont, par les activités qu'elles engendrent, la même incidence sur le développement conceptuel de l'étudiant ?

Ce questionnement s'inscrit tout naturellement dans une réflexion plus générale sur les rapports entre l'apprentissage et le développement conceptuel. Nous analyserons brièvement dans un premier temps comment ces rapports sont abordés et exploités par les didacticiens des mathématiques. Nous pensons que les différentes théories cognitives, que ce soit le constructivisme radical ou le constructivisme social, laissent de fait l'étudiant hors du champ d'investigation. Nous ne rejetons ni l'une, ni l'autre de ces théories. Toutes deux tentent de décrire le même phénomène, chacune en privilégiant des aspects différents. Cependant, il nous semble qu'une connaissance, même partielle des processus mentaux en cours lors d'une situation d'apprentissage, pourrait nous apporter beaucoup. Les théories classiques analysent aussi ces processus, (abstraction réfléchissante de Piaget, reification, ..) ; cependant elles le font de manière très globale. Elles n'entrent pas dans les mécanismes qui permettent de tels processus d'avoir lieu. D'un autre côté nous ne cherchons pas non plus à interpréter les processus mentaux comme peuvent le faire les neurosciences ou les théories de traitement de l'information sans négliger pour autant les informations qu'elles nous apportent. Notre intention est de recentrer l'étude sur l'apprenant, lieu où ces phénomènes s'actualisent. De façon très schématique nous nous intéressons à la question de savoir si l'on peut caractériser en termes de processus mentaux le moment où notre "compréhension de quelque chose" se développe. Nous qualifierons, faute de mieux, ce moment de "prise de conscience". Nous postulons que le développement de la compréhension est fortement corrélé à de rares moments de prise de conscience. Une caractéristique de cette prise de conscience serait qu'elle s'accompagne d'une pensée pouvant contenir simultanément pour la première fois plusieurs aspects d'une même chose, aspects qui auparavant n'étaient pas reliés. Mais alors quels sont les modes d'accès à cette prise de conscience ? Y-a-t-il des conditions favorables ? Nous indiquerons comment nous relierons notre approche des apprentissages au niveau individuel aux idées d'autres chercheurs et comment elle nous aide à interpréter nos résultats. Nous proposerons enfin quelques conséquences sur la conception de tâches ou d'un enseignement.

## 2 Apprentissage-développement en didactique des maths .

Nous nous intéressons ici au problème de l'appropriation par les étudiants d'un savoir mathématique constitué, savoir que nous supposons reconnu et partagé par une communauté. Nous abordons ici des questions liées à l'apprentissage des mathématiques sous l'angle cognitif. Par quels processus les étudiants développent-ils leur compréhension des mathématiques qui leur sont enseignées ? Nous ne prenons pas en compte ici la spécificité du contenu mathématique enseigné. Les principes généraux que nous allons développer s'appliquent à la plupart des situations d'apprentissage de mathématiques.

Nous adoptons donc un point de vue différent de celui de Bosch et Chevallard (99) lorsqu'ils écrivent : "Pour expliquer les faits d'enseignement auxquels elle se voit confrontée, la didactique postule que le "mystère" est dans les mathématiques, et non pas dans les sujets qui ont à apprendre et à enseigner les mathématiques". Pour nous le mystère est triple : il est dans les mathématiques, dans les sujets qui l'apprennent et dans les sujets qui l'enseignent. Nous abordons donc ici "le mystère" dans le sujet qui apprend les mathématiques. Le point que nous voulons expliciter ici est que les recherches actuelles sur ce thème ne sont pas ciblées en fait sur le sujet qui apprend.

Il n'existe ni de théorie générale sur l'apprentissage ni à fortiori de théorie générale sur l'apprentissage et le développement conceptuel en mathématiques. Nous pouvons schématiquement classer les travaux de recherche centrés autour du thème apprentissage-développement conceptuel en mathématiques en deux catégories :

- d'une part les recherches qui relèvent de la psychologie cognitive. Une partie de ces travaux s'appuient sur des théories cognitives, par exemple celles de Piaget, Vygotski, Vergnaud, théories qui s'intéressent à la dialectique apprentissage - développement. Elles tentent de modéliser les phénomènes d'acquisition de connaissances, d'apprentissage et de développement de la pensée conceptuelle. Des chercheurs, comme Dubinski et al., ont adapté les idées de Piaget à l'apprentissage des mathématiques ce qui leur a permis de proposer des ingénieries. Depuis quelques années la redécouverte de la théorie de Vygotski a quelque peu remis en cause certains aspects de la théorie de Piaget. Notre propos ici n'est pas d'analyser les différences et similitudes entre Piaget et Vygotski, entre le constructivisme radical et le constructivisme social. Pour de telles analyses nous renvoyons le lecteur à Pastre (94), Vergnaud (99) Brossard (99), Crawford (96)

D'autres travaux Kieren (94), Sfard (91),(94) proposent aussi des modèles de la compréhension en mathématiques mais ne se présentent pas comme des spécifications de grandes théories cognitives au domaine des mathématiques. La théorie des situations de Brousseau est aussi une modélisation des phénomènes d'apprentissage. Toutes ces approches s'inscrivent dans une démarche d'étude globale de ces phénomènes.. Elles tentent d'en dégager des principes généraux qui, d'une certaine manière, auront force de loi.

- Un autre courant de recherche est plus centré autour de l'analyse des productions d'étudiants.

Ces travaux s'appuient sur des diagnostics et cherchent à décrire les mathématiques des étudiants : les conceptions qu'ils ont de certaines notions, les erreurs type qu'ils font, les difficultés qu'ils rencontrent. Ces travaux prennent comme référence les façons qu'ont les experts de faire des maths et identifient les manques des étudiants par rapport à une situation idéale. Ils s'efforcent de mettre en évidence des remédiations nécessaires en s'appuyant à la fois sur une analyse des concepts mathématiques et sur les théories cognitives pour mettre au point des ingénieries et élaborer des enseignements. (Travaux des anglosaxons autour du concept de fonction, de M.Rogalski et al algèbre linéaire, A.Robert, et voir EA).

Ces recherches ont permis d'identifier un ensemble de caractéristiques d'un "penser mathématique" et un ensemble d'activités mentales qui entrent en jeu dans les mathématiques de niveau avancé. Par exemple Dreyfus et Eisenberg (1998) soulignent l'importance en mathématiques de raisonnement par analogie, de reconnaître les structures, de pouvoir utiliser plusieurs représentations en parallèle, de développer le penser à l'envers ( reversal thinking), de développer le raisonnement visuel, toutes ces qualités caractérisant ce que les auteurs appellent "flexibility of thought". Nous reconnaissons là que ces façons d'opérer avec et sur des connaissances relèvent de mises en fonctionnement de connaissances de niveau disponible. Dreyfus et al pensent que toutes ces manières de penser peuvent dans une certaine mesure s'apprendre par la pratique d'exercices de mathématiques appropriés. Nous tempérerons ce point de vue. En effet nous montrerons qu'il ne suffit pas de présenter aux étudiants de "bons exercices" pour que se développent chez eux un "penser mathématique".

Aucune de ces approches ne cherchent à prendre en compte les processus mentaux qui se déroulent en temps réel lorsque le sujet est engagé dans une activité mathématique. Les recherches relevant du premier groupe de notre classification considèrent le sujet comme une boîte noire qui soumise à des stimuli extérieurs et/ou intérieurs est supposée répondre conformément à des principes généraux. Notre propos n'est pas de rejeter ces principes qui modélisent la situation d'apprentissage-développement à un certain niveau. Nous disons seulement qu'ils décrivent un certain niveau de réalité. Les recherches qui s'appuient sur les diagnostics ou celles qui tentent de spécifier le "penser mathématique" considèrent aussi le sujet de manière très globale. Elles font implicitement ou explicitement le pari que les étudiants à qui on propose des tâches adéquates et un enseignement bien conçu vont à la fois acquérir des modes de penser plus proches de ceux des experts mathématiciens et développer leur compréhension des mathématiques. Le sujet en train de faire des mathématiques ne fait pas partie du champ de la recherche. Que se passe-t-il dans "la tête du sujet" lorsqu'il fait des mathématiques ? Que se passe-t-il dans sa tête lorsqu'il comprend ? Ce sont de toute évidence des questions auxquelles nous ne pouvons pas répondre. Malgré tout, nous pensons qu'identifier certains phénomènes pourrait contribuer à mieux cerner la problématique de l'apprentissage des mathématiques. C'est ce à quoi nous nous attachons maintenant.

### 3 Apprentissage-développement : notre approche

Nous nous devons de préciser les termes "apprentissage" et "développement" dans le contexte de l'enseignement des mathématiques.

Pour nous l'apprentissage est l'entrée dans les connaissances suscitée par l'enseignement. Nous rappelons que sous le terme "connaissance" d'une notion, nous regroupons les définitions, les savoir-faire, les méthodes, les procédures, mises en application liées à cette notion. Lors de l'apprentissage d'une nouvelle notion, l'étudiant se familiarise avec les définitions, les techniques de calcul, les procédures qui lui sont associées. A ce stade, les liens que peut avoir la nouvelle notion avec les connaissances antérieures, la place qu'elle occupe dans la théorie mathématique restent encore très flous. Pour Vygotski, le développement est celui de la pensée et porte sur les fonctions psychiques supérieures de l'homme, la formation des concepts en étant le noyau dur. Pour nous, le développement conceptuel en mathématiques réfère à l'appropriation ou assimilation du concept par l'apprenant et se rapproche de la formation de concepts scientifiques dans la théorie de Vygotski. Nous dirons que le développement a lieu lorsque la nouvelle notion, le nouveau concept a transformé qualitativement le savoir existant. La notion mathématique n'est

plus simplement une définition isolée. L'apprenant "l'expérialise" dans la théorie mathématique sous ses aspects duals outil-objet au sens de Douady ; la notion a été réifiée au sens de Sfard (91). Les modifications du savoir mathématique qui ont lieu lors de l'apprentissage sont essentiellement d'ordre quantitatif et procédural. Le sujet apprend de nouvelles informations, met des connaissances en relation . Il est confronté à de nouvelles situations, à de nouveaux problèmes dont il ne saisit pas encore l'importance dans la théorie mathématique. Par contre, le développement conceptuel s'accompagne d'une véritable transformation ; la nouvelle notion ou nouveau concept soit se sont intégrés dans la structure des connaissances antérieures, soit les ont restructurées <sup>(1)</sup>. Précisons : nous considérons que chacun a une expérience mathématique propre. Expérience est pris ici au sens large : toute rencontre avec les mathématiques, que ce soit dans une situation d'apprenant ou non. Au cours de ces innombrables expériences, un certain matériel mathématique s'est intériorisé. C'est à travers ce matériel intériorisé que l'apprenant appréhende les mathématiques et l'évolution de ce matériel va de pair avec la construction interne des mathématiques que se fait l'apprenant. Les concepts et leur organisation en systèmes lui permet de structurer sa "réalité mathématique". Le développement conceptuel mathématique individuel de l'apprenant concerne l'évolution de ce système de concepts qui va de fait transformer sa "réalité mathématique" <sup>(1)</sup>. Illustrons notre propos par un exemple : le mot "espace-vectoriel" évoque, si l'on s'arrête un instant, une multitude de choses différentes. Le mot "table" aussi. Pour le mathématicien "espace-vectoriel" est aussi concret que "table" bien que ces deux mots tirent leur signification d'expériences de nature très différente. "L'espace vectoriel" d'un mathématicien, "l'espace vectoriel" d'un étudiant de Deug, "l'espace vectoriel" d'un étudiant de maîtrise ne diffèrent pas seulement par la quantité d'informations que ceux-ci lui associent. L'expérience différente qu'ils ont non seulement de "l'espace vectoriel" mais aussi des mathématiques fait que leur "espace vectoriel" réifié n'est pas le même. Leur réalité mathématique est différente. Notre approche est de fait basée sur le postulat que la réalité mathématique de chacun est plus que la somme des connaissances qu'il a acquises sur le sujet. Tout se passe comme si, au fil des expériences et des rencontres d'ordre mathématique, s'est intériorisé tout un réseau de relations entre des données et des objets mathématiques et que ce tout cet ensemble est d'une certaine manière réifié en une seule entité, entité personnelle que nous avons désignée par réalité mathématique. Le développement de cette entité est largement tributaire de la conceptualisation. Il s'agit ici de conceptualisation mathématique individuelle permettant à la fois au sujet apprenant de différencier et de généraliser les situations mathématiques, de contextualiser et de décontextualiser des notions, d'entrer dans la dialectique outil-objet. De ces phénomènes résulte le développement individuel des connaissances. Conceptualisation individuelle et développement de la compréhension sont impliqués l'un par l'autre. A une évolution dans la conceptualisation correspond un développement de la compréhension et vice-versa. La conceptualisation participe de la compréhension dans le sens où elle permet de décrire des phénomènes. La compréhension serait comme l'inscription de quelque chose de nouveau dans la réalité mathématique intériorisée. Notre enseignement suppose, qu'au moment d'aborder une nouvelle notion, les étudiants aient atteint un niveau adéquat de conceptualisation individuelle. Prenons par exemple la notion de base hilbertienne. Cette notion renferme les concepts de fonctions, vecteurs, base, produit scalaire, densité. Avant d'aborder les espaces de Hilbert, il est raisonnable d'attendre que que ces concepts aient été au moins partiellement assimilés c'est-à-dire

---

(1). Nous tenons compte à la fois de la nature de la notion ou du concept en question et de leur place dans la théorie mathématique au niveau considéré.

(1). Nous n'excluons pas que cette transformation s'accompagne et/ou est accompagnée de phénomènes psychologiques ou psychiques dont l'étude n'est pas de notre compétence.

qu'ils soient devenus des éléments structurels de la réalité mathématique des étudiants. Mais une telle assimilation va-t-elle de soi ? le développement de la compréhension, la conceptualisation individuelle sont-ils indépendants des tâches proposées ? Peut-on distinguer différents modes de fonctionnement du penser ? Ces différents modes ont-ils le même impact sur le développement de la compréhension et sur le développement conceptuel en mathématiques ? Ce sont ces questions que nous abordons maintenant.

#### 4 Notre modélisation .

Nous tentons d'approcher l'acte de penser lorsque la pensée est engagée dans une tâche mathématique. Notre hypothèse est que le moment où la compréhension se développe, moment de prise de conscience de quelque chose de nouveau qui transforme la situation mathématique pour l'apprenant, le mode de fonctionnement du penser a changé.

Lorsque nous faisons des mathématiques, nous nous engageons dans de multiples activités mentales différentes : nous faisons des calculs méthodiquement, nous mettons en route des procédures maîtrisées, nous comparons, identifions, inférons, nous développons une argumentation logique. Puis parfois nous découvrons des relations ; la situation se dénoue, la compréhension de la situation se développe, de nouveaux liens s'établissent réorganisant parfois nos connaissances . Un changement a eu lieu, changement qui ne se réduit pas à des informations supplémentaires. Nous pouvons reconnaître sur l'instant ce moment comme un moment d'apparition de sens.

Nous proposons maintenant une analyse de ce phénomène. Tout se passe comme si dans la plupart des situations le penser fonctionne sur un mode associatif automatisé. Si nous sommes occupés à effectuer des calculs ou à appliquer des méthodes connues les savoir faire utiles s'enchainent dans un ordre cohérent résultant d'un apprentissage antérieur. La pensée est absorbée par l'exécution de procédures. En général les pensées s'enchainent les unes derrière les autres. L'organisation des connaissances en réseau fait qu'une information en appelle une autre. Certaines informations ne sont pas reconnues comme relevant de la situation et sont écartées. D'autres sont retenues. Malgré tout dans ce mode de fonctionnement, la pensée est occupée essentiellement à accomplir une tâche et n'est pas mobilisée vers une recherche de sens. Nous émettons l'hypothèse qu' une évolution de la conceptualisation individuelle, un approfondissement de la compréhension, une transformation de la réalité mathématique est un bref moment de prise de conscience où la pensée se désengage d'un mode de fonctionnement de type associatif et englobe simultanément plusieurs aspects de la situation. Se tient dans la pensée simultanément l'ancien savoir et les nouvelles informations et c'est dans cette simultanéité qu'émerge le nouveau savoir et que s'élaborent de nouvelles relations porteuses de sens. C'est comme si les liens durables ne s'établissaient que dans la simultanéité. Nous ne disons pas que la pensée devient inactive à ce moment là. L'associatif automatisé s'arrête, pas le penser. Il serait peut être plus juste de dire que le penser est d'une autre qualité rendant possible par exemple la variation simultanée de plusieurs facteurs et l'interprétation de leur effets. Dans le mode associatif automatisé, les nouvelles informations sont recues et interprétées par le savoir existant. Elles ne le transforment pas pour autant car elles ne sont pas perçues pour ce qu'elles sont. Cependant elles peuvent être plus ou moins confusément vues comme n'étant pas tout à fait conformes à la réalité mathématique intériorisée. De cette confrontation dialectique avec l'ancien va peut être émerger dans un instant de prise de conscience un nouveau savoir, un autre niveau de conceptualisation individuelle d'une notion mathématique. Cette confrontation

échappe à notre conscience et à notre contrôle. Cependant reconnaître les différents modes de penser liés à ces phénomènes nous semble important. Imaginons un instant que toutes les tâches proposées aux étudiants aient pour effet de les cantonner dans un mode de fonctionnement associatif automatisé du penser. Ces étudiants apprendraient et sauraient faire plein de choses. Ils apprendraient des procédures, seraient capables dans une certaine mesure de résoudre des exercices type. Ils resteraient essentiellement dans des mises en fonctionnement de connaissances de niveau technique et ne développeraient que très peu leur niveau de conceptualisation. En effet dans ce mode de fonctionnement, la pensée est concentrée ou focalisée sur un aspect très restreint du phénomène étudié. L'emprise de cet aspect particulier sur la pensée inhibe alors la possibilité d'expérientier la simultanéité de plusieurs aspects.

De telles affirmations invérifiables peuvent sembler très subjectives et dénuées de tout fondement scientifique. Nous ne contesterons pas un tel point de vue. Nous pensons cependant pouvoir trouver chez d'autres chercheurs de notre discipline et de disciplines différentes des éléments pouvant étayer notre thèse.

Dans le domaine de l'apprentissage des mathématiques de nombreux chercheurs auteurs ont, comme nous, reconnu la force du penser associatif automatisé.

Harel (1998) écrit

*"these students, we found, possessed a habit of mind - a way of thinking - of arriving at conclusions on the basis of associations alone, without examining their meaning and truth".*

Vinner (1997) décrit comment, sous l'influence du penser associatif, les étudiants développent des *"pseudo-conceptual and pseudo-analytical thought processes"* leur permettant néanmoins de faire des mathématiques. A ce sujet il écrit :

*"We cannot control our associations; they are the internal reaction to a given stimulus. But we can sometimes, control our behavior, the external reaction to the stimulus. A dominant feature of the pseudo-conceptual thought processes is the uncontrolled associations which fail to become a meaningful framework for further thought processes".*

Vinner reconnaît implicitement le caractère associatif automatisé de la pensée. Il en montre des effets pervers. En effet c'est comme si, sous l'influence de ce mode de penser, se développent naturellement des contre-façons conceptuelles. Dans de nombreuses situations, telles que résolutions d'exercices type, applications directes de définitions ou de propriétés, ces contre-façons peuvent être très efficaces et peuvent échapper à la fois à l'étudiant et à l'enseignant. Le contrôle auquel Vinner fait allusion nous semble être un contrôle a posteriori. Les associations se sont déroulées; avant l'action leurs contenus sont jugés adéquats ou non. Nous ne pensons pas que ce contrôle intervienne au moment du saut dans le développement conceptuel. Il est antérieur. Nous reviendrons sur ce point plus tard.

A Sfard et al (1994) développent une analyse similaire. Ces auteurs introduisent les notions de *"pseudo-structural conception"* et *"pseudo-structural thinking"*. Ces contre-façons développées par les étudiants leur permettent parfois de manipuler avec succès des objets mathématiques sans leur attribuer du sens.

Nous pensons aussi avoir trouvé chez Vygotski des idées qui seraient proches de notre point de vue. Lorsqu'il parle de la formation de concepts Vygotski ( Pensée et Langage : 1985) souligne à plusieurs reprises que le processus de formation des concepts n'est pas une activité purement associative :



*".. (que) le processus de formation des concepts, comme toute forme supérieure d'activité intellectuelle, n'est pas une forme inférieure qui serait devenue plus complexe quantitativement, (qu')il ne se distingue pas de l'activité purement associative par le nombre de liaisons mais (qu')il représente un type d'activité fondamentalement nouveau, dont la qualité est irréductible à n'importe quelles quantités de liaisons associatives et ce qui le différencie essentiellement est le passage des processus immédiats aux opérations médiatisées par les signes"*(page 159)

*"it Le concept apparaît dans le processus d'une opération intellectuelle; ce n'est pas le jeu des associations qui entraîne la construction d'un concept; à sa formation participent toutes les fonctions intellectuelles élémentaires en une combinaison spécifique, l'élément central de cet opération étant l'emploi fonctionnel du mot comme moyen de diriger volontairement l'attention..."*(page 204)

L'intention de Vygotski était sans doute ici de souligner l'importance du rôle joué par le "mot". Néanmoins ces citations posent de façon claire le rôle des associations dans la conceptualisation et du même coup introduisent le mystérieux "tout plus que les parties qui le composent". En effet le concept, une fois approprié, ne se réduit pas à la somme de ses différents aspects et des liens avec les autres concepts du système dans lequel il s'inscrit. Nous avons dit que le mode de fonctionnement associatif, qu'il soit automatisé ou non, ne peut qu'étudier successivement "les parties du tout" et ne peut pas amener à appréhender le tout dans la simultanéité. Nous voyons en cela une raison pour laquelle la formation de concepts ne peut pas se réduire à une activité associative.

*L'apprentissage n'est valable que s'il devance le développement. Il suscite alors, fait naître toute une série de fonctions qui se trouvent au stade de la maturation, qui sont dans la zone proximale de développement... C'est là ce qui différencie l'apprentissage qui a pour but le développement intérieur et harmonieux de l'enfant et l'apprentissage de savoir-faire techniques, spécialisés... qui n'exercent aucune influence essentielle sur le développement* (page 275).

Peut-on parler d'habiletés intellectuelles, de savoir-faire techniques spécialisés en mathématiques ? Savoir dérouler une méthode, s'assurer par application directe d'une définition qu'une propriété est vérifiée, savoir mener au bout un calcul standard d'un niveau donné en sont. Ces habiletés relèvent du niveau technique de mise en fonctionnement des connaissances; les analyses de nos tests sont en accord avec le fait que ces habiletés n'exercent aucune influence essentielle sur le développement conceptuel. Nous sommes en mesure maintenant d'en proposer une explication. Comme nous l'avons décrit précédemment, l'acquisition et le développement d'habiletés mathématiques correspondraient plus au mode de fonctionnement associatif automatisé du penser. C'est principalement dans ce mode de fonctionnement du penser que l'apprenant aborde une nouvelle notion et acquiert tous les savoir-faire liés à cette notion indispensables pour le développement futur des connaissances. Cependant pour que la conceptualisation se fasse ou plus exactement se finalise, un changement doit s'opérer. C'est ce que décrit Vygotski

*..la courbe du développement s'élève brusquement.. l'enfant a définitivement compris quelque chose, il a assimilé quelque chose d'essentiel, dans une "expérience déclic" un principe général est devenu clair*(page 266).

Nous attribuons donc ce changement à un changement de mode de fonctionnement du penser que nous avons décrit précédemment.

*"Ce qui existe simultanément dans la pensée se développe successivement dans le langage"* (page 379).

Cette citation met aussi en relief un aspect du phénomène que nous avons tenté de décrire. (1) En effet le moment de développement de la compréhension est un moment de prise de conscience de ce qui existe simultanément dans la pensée qui va ensuite se verbaliser intérieurement et/ou extérieurement. Dans notre contexte, le langage monosémique des mathématiques permet de d'identifier ce "simultané dans la pensée" comme l'élément de connaissance en jeu.

Nous pouvons explicitement retrouver chez d'autres auteurs des allusions à ce phénomène. Citons en particulier A Sfard (1991) qui lorsqu'elle parle de "réification" écrit : *"whereas interiorization and condensation are gradual, quantitative rather than qualitative changes, reification is an instantaneous quantum leap"*

Il est aussi possible que ce que nous disons soit apparenté au phénomène "d'insight" reconnu par les gestaltistes. Cependant ces chercheurs à notre connaissance n'étudient pas la formation de concepts mais des problèmes où la perception visuelle tient une grande place. Ils opposent un traitement de type holistique de la situation à un traitement de type analytique. Nous remarquons simplement qu'un traitement analytique correspond principalement à un mode de fonctionnement de type associatif du penser et qu'un traitement de type holistique demande de ne pas avoir la pensée focalisée sur un seul aspect de la situation.

Dans "Learning et Awareness" F. Marton et S. Booth argumentent la manière dont "learning" est lié à "experiencing". L'importance de la prise de conscience simultanée de plusieurs aspects d'une même situation est centrale dans leur thèse de "learning-experience-awareness" comme ils le rappellent dans leur conclusion :

*"Learning, as anything else, can be seen in a number of distinctively different ways. We suggest that an interesting and useful way of seeing it is as a change in someone's capability for experiencing in certain ways. ...what we can possibly know about something is contingent on what this something is for us, what meaning it has for us, how we can experience it.*

*.. Experience, capability for experiencing, differences in capability for experiencing , finding out about differences in capability for experiencing were described in terms of systems of variation throughout the book. We pointed to different kinds of variation, ranging from dimensions of variation being aspects of the individual's experience of something to variation between person on the same occasion and within persons on different occasions. ...variation in how a phenomenon is experienced reflects the simultaneous presence of different aspects of the phenomenon in focal awareness. Again, the presence of a certain aspect implies that there is a dimension of variation corresponding to that aspect as opposed to its being taken for granted. For an aspect of a phenomenon to be present in awareness it has to be discerned as an aspect, which implies awareness of of potential variation, and it has to be seen as being simultaneous with other aspects of the phenomenon. Therefore, the capability for experiencing a phenomenon in a certain way can be understood in terms of discernment of aspects, simultaneity of discerned aspects, and potential for variation (as contrasted with taken-for-grantedness) in discerned aspects of the phenomenon in question.*

*.. sometimes different aspects of a phenomenon are discerned but can not be handled simultaneously. Then they become separated due to split in awareness. They are dealt with one at a time instead of simultaneously."*

Les auteurs voient aussi une relation entre "simultaneity" et "deep understanding" (page 104).

---

(1) Nous ne prétendons pas que ce soit la seule interprétation possible de cette phrase

Nous nous sentons assez proches de ces auteurs qui semblent avoir une conception de la cognition assez proche de la nôtre. L'extrait ci-dessus nous donne l'occasion de préciser notre analyse sur plusieurs points. En premier lieu, nous ne bannissons pas le mode de penser associatif, mode de penser auquel, d'ailleurs, nous ne pouvons pas échapper. Le mode de penser associatif contrôlé, (référence à Vinner), joue certainement un rôle important en mathématiques; ce sont souvent des associations qui permettent de discerner des éléments d'une situation mathématique. C'est effectivement le cas dans un processus d'identification méthodique de relations entre des objets mathématiques, dans la mise en application de procédures. Un deuxième point que met en relief cet extrait est en quoi la prise de conscience simultanée de plusieurs aspects est importante. L'idée clef est l'idée de variation; la variation permet la différenciation. Nous ajoutons, suite à notre analyse, que seule, la différenciation mène à plus de détails, à la fragmentation, à la complexité aveugle. Nous mettons en avant que la vision simultanée et dynamique de plusieurs aspects et de leurs relations permet de réunifier le phénomène (et de le réifier pour reprendre la terminologie de A.Sfard). En extrapolant, la connaissance se nourrirait d'un double mouvement de différenciation et d'unification, mouvements antagonistes et ne relevant pas du même mode de fonctionnement du "penser". \*

Dans "A delicate shift of attention" et "Different forms of knowledge", J. Mason (1989), (1996) abordent des idées qui ont attiré notre attention. Ces idées sont assez voisines de celles de Marton et Booth. Malgré le risque de dénaturer leurs idées, nous les résumons ainsi : pour Marton et al "learning is awareness", pour Mason "knowledge is a form of attention". Nous pensons que le terme "attention" peut prêter à confusion. Il est presque associé en français à "tension intellectuelle" dirigée sur un point particulier. Or Mason (1996) distingue plusieurs formes d'attention, "*unifocal or multifocal attention, narrow or broad attention*" ce qui plaide en faveur d'une signification plus large du terme "attention". (1) Un étudiant non familiarisé avec un domaine des mathématiques ne sait pas ce qu'il est important d'examiner ou à quoi il faut prêter attention. La nature même des maths rend difficile à l'enseignant d'indiquer ce qui mérite de retenir l'attention. Dans J. Mason (1989), l'auteur illustre sur un exemple comment l'enseignant peut diriger l'attention des étudiants vers un questionnement d'ordre mathématique en exploitant et généralisant une situation.

En fait, nous voyons apparaître en filigrane dans les références que nous avons citées la "question de la conscience". Il nous semble intéressant ici de faire allusion ici aux recherches récentes sur la mémoire qui rejoignent ce même questionnement. Dans "la mémoire oubliée" Tiberghien (1997) conclut que "*le concept de mémoire est peut-être encore plus fondamental que celui de cognition*" car "un système cognitif ne peut émerger que du fonctionnement d'un système à mémoire." Or l'importance de la conscience dans la mémoire est de plus en plus reconnue

"ces dernières années de nouvelles données ont modifié les conceptions théoriques de la mémoire humaine ... rôle de la "conscience" dans la mémoire." (page 165)

Tout se passe comme si lors d'un mode de fonctionnement du penser non associatif, lors de "l'expérientiation simultanée de plusieurs aspects d'un phénomène", le stockage de l'information est alors lié à un "*degré de conscience plus élevé*" (page 169). Ceci expliquerait aussi pourquoi une notion mathématique nous reste plus longtemps accessible lorsqu'elle a été réifiée.

---

\* Dans ce contexte "penser" est trop restrictif. Le penser n'est qu'un moyen d'accès aux connaissances.

(1) A notre connaissance, "awareness" n'a pas vraiment d'équivalent en français. Maron et Booth précisent qu'ils emploient le mot "awareness" dans le sens "consciousness". Nous traduisons "to be aware" par "avoir conscience de".

Tout se passe comme si, lors du stockage de l'information, la présence d'un degré de conscience plus élevé permettait l'inscription de cette information dans la réalité mathématique intériorisée. Pour fonctionner, le penser associatif automatisé n'aurait pas besoin de la conscience.

## 5 Les implications au niveau de l'enseignement .

Nous allons maintenant proposer une analyse de ce que nous avons observé chez les étudiants de CAPES en tenant compte des différents rôles des modes de fonctionnement du penser dans le processus de conceptualisation et de l'enseignement que ces étudiants ont suivi. Nous esquisserons ensuite quelques conséquences sur la conception et l'organisation d'un enseignement des mathématiques au niveau du premier cycle universitaire.

Au début de notre travail, l'un des objectifs que nous nous étions fixés était de mieux cerner "l'état" des connaissances mathématiques de ces étudiants. Nous pouvons dire maintenant que nous essayons d'appréhender leur "réalité mathématique intériorisée". A l'issue de nos trois premières années d'enseignement universitaire, nous attendons que les étudiants d'une part sachent appliquer les connaissances relevant de notions fondamentales du premier cycle dans des mises en fonctionnement de niveau technique et qu'ils aient d'autre part conceptualisé ces mêmes notions. Or les résultats de nos tests nous indiquent que les étudiants ont dans leur ensemble atteint un niveau de conceptualisation individuelle bien en deça de ce que nous pouvions attendre suite à notre enseignement. Cette analyse est fortement confirmée par les résultats obtenus par la sociologue A. Filhon\*. Elle a longuement interviewé les étudiants de CAPES de Versailles à qui nous avons proposé les tests analysés dans la première partie de ce travail. Il ressort de ces interviews que dans leur ensemble ces étudiants ont une approche très procédurale des mathématiques. Ils soulignent le caractère trop abstrait des mathématiques universitaires ; mais en DEUG "on pouvait encore s'en sortir assez facilement, les mathématiques n'étant pas trop éloignées de celles du lycée ; en refaisant les exercices de TD, on avait facilement l'examen". A leurs yeux, la situation en licence est différente ; ils sont quasi unanimes à reconnaître ne pas pouvoir mettre de sens sur les mathématiques qu'ils y ont étudiées. Interrogés sur la différence algèbre - analyse, des étudiants donnent des réponses intéressantes pour notre propos : soit ils préfèrent l'analyse car "c'est plus concret ; on étudie des fonctions ; cela a des applications" soit ils préfèrent l'algèbre, non pas pour le contenu, mais parce qu'en algèbre c'est plus facile de faire les démonstrations ; les choses découlent les unes des autres ; "dans une démonstration d'algèbre, une propriété en entraîne une autre et lorsqu'on connaît son cours en général on y arrive". Certains disent explicitement que pour eux, les mathématiques sont les mathématiques qu'ils ont pratiquées au lycée à l'époque où ils appréciaient résoudre des exercices.

Pour progresser dans les mathématiques, l'étudiant a besoin de conceptualiser car ce sont les concepts qui structurent les mathématiques. Sans une appropriation de ces concepts, l'étudiant n'aura pas les outils adéquats pour appréhender les situations mathématiques futures qu'il va rencontrer ; tout au plus il pourra faire illusion en développant des pseudo-structures et des pseudo-conceptualisations. Une conclusion à laquelle nous sommes arrivés est que, selon toute vraisemblance, notre enseignement n'a pas favorisé un questionnement d'ordre conceptuel chez nos étudiants. Nous pouvons en suggérer de nombreuses raisons : par exemple sans être exhaustif, un aspect important de la rupture lycée - université qui n'est pas pris en compte, organisation

---

\* Mémoire de maîtrise de sociologie sous la direction de J.P Terrail

de l'enseignement avec une part trop importante aux amphis, une présentation inadéquate des contenus sans oublier le manque de motivation des étudiants. En fait nous pouvons retrouver dans les raisons que nous venons d'évoquer la trace de notre hypothèse au sujet des modes de fonctionnement du penser. Nous reformulons notre hypothèse ainsi :

*Le mode de fonctionnement habituel du penser est un mode de fonctionnement associatif ; ce mode de fonctionnement ne donne pas à lui seul la possibilité de conceptualiser. Un concept est plus que les informations et les relations qui lui sont attachées. Conceptualiser - c'est-à-dire réifier cet ensemble d'informations et de relations - demande de pouvoir réunifier dans la simultanéité ces différents aspects.*

*Nous n'avons aucun contrôle direct sur notre mode de fonctionnement du penser, ni sur nos associations. Dans le mode de fonctionnement associatif du penser, nous pouvons au mieux juger de la pertinence de nos associations en les confrontant logiquement aux connaissances que nous avons. Nous disons qu'il s'agit d'un contrôle à posteriori de nos associations. Lorsque le penser associatif se déroule sans cette confrontation nous disons qu'il est automatisé. Le mode de fonctionnement associatif du penser se composerait donc de périodes automatisées entrecoupées le cas échéant de périodes de contrôle.*

*Il existe un autre mode de fonctionnement du penser ; ce mode de fonctionnement permet de mettre en présence simultanément plusieurs aspects d'un même phénomène. Dans ces moments brefs il semble que le flux des associations s'interrompt et le phénomène est perçu de manière plus globale.*

Nous pensons que notre enseignement ne favorise pas le deuxième mode de fonctionnement du penser. Au contraire, il incite les étudiants à rester dans un mode de fonctionnement associatif automatisé. Pour faire des mathématiques au lycée, les élèves n'ont pas vraiment besoin de conceptualiser. Les tâches qui leur sont demandées peuvent s'automatiser très vite. En effet il est encore possible au lycée de passer en revue la quasi-totalité des situations possibles de mise en application d'une notion. L'élève peut alors essayer de mémoriser les différentes façons de traiter les situations ; mais dans son effort de mémorisation, ce n'est pas nécessairement la recherche de sens qui le guide. Comme le but est de produire une solution à une question qui lui est imposée par le professeur, le sens qu'il cherche est ce qui va lui permettre d'agir sur la situation. Il est alors clair que très rapidement, le mode de fonctionnement du penser sera le mode associatif automatisé. Il n'y a aucune raison d'en sortir d'autant plus que ce mode de fonctionnement lui permet de réussir. Arrivé à l'université, il va s'entendre dire qu'il doit changer de méthode de travail, apprendre à travailler autrement. Il assiste en amphi à de longs exposés linéaires de connaissances mathématiques ; sa façon de concevoir les mathématiques acquise par la pratique qu'il en a eu fait qu'il n'entre pas du tout dans la problématique mathématique qui lui est proposée ; il ne comprend pas ce qu'on lui demande ; il se désintéresse du cours et se concentre sur les travaux dirigés pour recommencer à apprendre à résoudre les exercices . ... Mais en même temps, paradoxalement l'enseignement qui lui est proposé peut le maintenir et le conforter dans cette façon d'étudier automatisée. D'une part, le morcellement du contenu à enseigner en un nombre croissant de modules - donc la fragmentation du savoir - réduit de fait l'ensemble des possibles liés aux notions étudiées ; d'autre part, en premier cycle universitaire, la plupart de nos textes d'examens sont tels que ceux qui ont retenu nos situations type en savent assez pour réussir. La même situation peut se reproduire en licence ; il semble que certains étudiants développent des pseudo-conceptions qui leur permettent néanmoins d'obtenir leur examen. Cette analyse, un peu provocatrice, est néanmoins confirmée par les interviews que nous avons mentionnées plus haut.

En mathématiques, l'étudiant lorsqu'il fait des exercices est de fait aussi engagé dans une tâche

extérieure de production ; avoir à produire une solution de l'exercice peut rendre secondaire la recherche d'une compréhension au delà de ce qui est demandé pour réussir la tâche. Il lui est très difficile de voir autre chose que les procédures. Le mode de fonctionnement de la pensée entraîne qu'elle soit entièrement absorbée par la réalisation de la tâche. La pensée n'est pas en général en mesure de conceptualiser en même temps.

Lorsque Vergnaud (1999) préconise que, pour engendrer le développement, il faille organiser des perturbations, il ne donne pas de raisons. Nous pensons qu'organiser des perturbations est entre autres choses nécessaire pour changer le cours des associations automatisées. Une perturbation, qui oblige l'apprenant à prendre conscience de l'inadéquation d'un point de vue, peut entraîner un bref instant un état de questionnement au delà d'un questionnement de type associatif. L'apprenant peut repartir dans un autre flot associatif mais si le terrain est propice alors il lui a été donné la possibilité de tenir simultanément dans la pensée l'ancien et le nouveau : les conditions pour un développement de la compréhension sont réunies.

Nous touchons là deux éléments centraux de la théorie cognitive de Vygotski : zone proximale de développement et rôle de la médiation. Pour que la perturbation soit efficace, tout doit être prêt. Supposons que l'effet de la perturbation soit de faire basculer un bref instant l'apprenant du mode associatif automatisé dans l'autre mode de fonctionnement du penser permettant la réunification d'aspects différents d'un phénomène mathématique ; alors cela sous entend que l'apprenant aie déjà eu une expérience de ces aspects ; seulement les choses n'étaient pas encore arrivées assez à maturation pour qu'elles puissent être réunifiées simultanément. Il est clair que dans cette perspective l'enseignant a un rôle très important de médiateur à jouer.

Alors quel enseignement proposer ? Notre hypothèse implique en fait que la conceptualisation est encore plus problématique que nous le pensions. Nous pouvons cependant nous efforcer de concevoir un enseignement qui offrirait le plus de conditions favorables. Pour cela, nous pouvons reprendre des idées largement partagées qui tournent autour de l'organisation des connaissances, autour de la disponibilité des connaissances, flexibilité de la pensée .. Seulement, en extrapolant un tout petit peu, notre analyse met en relief un point d'une extrême importance : le penser associatif automatisé interprète tout à partir de l'ancien et tend à réduire les choses en procédures automatisées. Ceci a pour conséquence que toute initiative en matière d'enseignement court le risque d'être dénaturée dès sa mise en oeuvre. Ce qui nous appelle à une très grande prudence.

Nous retiendrons que les différents niveaux de mises en fonctionnement des connaissances prennent maintenant une autre dimension. Le niveau technique serait l'expression d'un penser associatif automatisé. Il ne peut alors permettre à lui seul le développement de la conceptualisation. Les deux autres niveaux correspondent à des mises en application de connaissances où le penser associatif automatisé ne fait plus l'affaire. D'où leur importance dans le processus de conceptualisation. Concevoir des ingénieries pour faire sortir, presque malgré eux, les étudiants hors du technique, hors du penser associatif automatisé, est peut-être ce que nous devons essayer.

Enfin après ce détour par une tentative de modélisation des phénomènes cognitifs au niveau individuel, nous voilà revenus à nos préoccupations initiales, plus didactiques. Celles-ci mettent en jeu pour leur étude une approche plus épistémologique, partant des activités mathématiques scolaires, et prenant en compte les histoires des savoirs, et leurs interactions avec les institutions, dont la classe, sources de contraintes et de possibles. La gageure de notre position repose sur le pari qu'on arrivera à mieux articuler, au bénéfice des deux théorisations, le modèle interne et les conditions externes auxquelles sont soumis les sujets.

Nous tenons à remercier vivement M.Rogalski qui nous a apporté une aide précieuse à l'élaboration, au dépouillement et à l'analyse des tests.

### — Bibliographie —

- Asiala M., Brown A., Devries D.J., Dubinsky E., Mathews D., Thomas K (1996) *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education* CBMS Issues In Mathematics Education Volume 6.
- Bosch M., Chevallard Y. (1999) *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs* *Objet d'étude et Problématique* Recherches en didactique des mathématiques 19 (1) 77-124.
- Brossard m. (1999) *Apprentissage et Développement : tensions dans la zone proximale ..* dans Y. Rochex (ed.) *Avec Vygotski* La dispute.
- Crawford K. (1996) *Vygotskian approaches in human development ; the information era* Educational Studies in mathematics 31 43-62.
- Dorier J.I (1997) Ed. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* La pensée sauvage.
- Douady R. (1987) *Jeux de cadres et dialectique outil/objet* Recherches en didactique des mathématiques 7(2) 5-32.
- Dreyfus T and Eisenberg T. (1996) *On different facets of mathematical thinking* in Steinberg R. and Ben-zeev Ed. *The nature of mathematical thinking* Hissdale NYUSA, Lawrence Erlbaum Associates.
- Ernest P. (ed.) (1994) *Constructing Mathematical Knowledge Epistemology and Mathematical Education* Studies in Mathematical Education Series The Falmer Press.
- GLasersfeld E. von (1995) *Radical Constructivism A Way of Knowing an Learning* Studies in Mathematical Education Series The Falmer Press.
- Harel G. (1998) *Two dual assertions : the first on learning and the second on teaching (or vice versa)* The American Mathematical Monthly 105 6.
- Mason J (1989) *Mathematical abstraction as the result of a delicate shift of attention* For the Learning of Mathematics 9 (2) 2-8.
- Mason J (1996) *Forms of mathematical knowledge* ICME WG 20.
- Marton F. and Booth S. (1997) *Learning and Awareness* The Educational Psychology Series Sternberg R.J. series Editor Lawrence Erlbaum Associates.
- Pirie S. and Kieren T. (1994) *Growth in mathematical understanding How can we characterize it and how can we represent it ?* Educational Studies in Mathematics 26 165-190.
- Richard J.F (1990) *les activités mentales* Armand Colin.
- Robert A. (1997a) *Quelques outils d'analyse épistémologique et didactique des connaissances mathématiques à enseigner au lycée et à l'université.* Actes de la 9ème Ecole d'été de didactique des mathématiques ARDM et CA de Bruz.
- Robert A. (1997b) *Niveaux de conceptualisation* pp 149-157 in Dorier J.I (1997) Ed. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* La pensée sauvage.
- Robert A. (1998) *Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université* RDM vol.18,n°2,pp.139-190.
- Rogalski M. (1997) *L'enseignement de l'algèbre linéaire expérimenté à Lille* pp 159-184 in Dorier J.I (1997) Ed. *L'enseignement de l'algèbre linéaire en question* La pensée sauvage.

- Sfard A (1991) *On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational Studies in Mathematics 22 1-36.
- Sfard A et Linchevski L. (1994) *The gains and the pitfalls of reification the case of algebra* Educational Studies in Mathematics 26 191-228.
- Tall D.Ed. (1991) *Advanced mathematical thinking*. Kluwer Academic Press.
- Tiberghien G. (1997) *La Mémoire oubliée* Mardaga.
- Vergnaud G. (1999) *On n'a jamais fini de relire Vygotski et Piaget* dans Y. Rochex (ed.) *Avec Vygotski* La dispute.
- Vinner S. (1997) *The pseudo-conceptual and the pseudo-analytical thought processes in mathematics learning* Educational Studies in Mathematics 34 97-129
- Vygotski (édition 1985) *Pensée et langage* Messidor.
- Weil-Barais et al (1993) *L'homme cognitif* Puf.



## Test 1

UVSQ

Capes blanc

18/10/97

Durée 4h

**Exercice 1.**

Dans  $\mathbb{R}^7$  on se donne un sous-espace vectoriel  $E$  de dimension 5, et deux vecteurs  $u$  et  $v$  linéairement indépendants et qui n'appartiennent pas à  $E$ . Soit  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $u$  et  $v$ . Que peut-on dire de l'espace  $E + F$  ?

**Exercice 2.**

Donner un exemple de fonction numérique d'une variable réelle non continue en 0 (on ne demande pas de justifier).

**Exercice 3.**

La bissectrice intérieure issue du sommet A d'un triangle ABC coupe le côté BC en I. Montrer que l'on a  $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$  (utiliser une droite convenable passant par C, ou calculer de diverses façons des aires de triangles).

**Exercice 4.**

Le nombre  $a = \frac{10^{-23}}{1-10^{-23}}$  est-il décimal ? (justifier).

**Exercice 5.**

On vous présente ci-dessous six problèmes, qui ne sont peut-être pas tous résolubles. On vous demande, sans résoudre ces problèmes, de dire en une ligne pour chacun d'eux si vous pensez que vous sauriez le résoudre, ou si vous ne voyez pas comment le résoudre, en donnant une très brève raison de votre opinion, en une ligne. Voici ces problèmes :

- 1/ Trouver les polynômes  $P$  réels de degré au plus 5 vérifiant  $2P(X) - P(X+1) = 3X^5 - 5X^3 + 1$ .
- 2/ Trouver les fonctions  $f$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f' + f^2 = x$ .
- 3/ Déterminer les nombres réels  $x, y, z$  vérifiant :  $3x - y + z = 4, x + y + z = -1, 2x - y + 3z = 3$ .
- 4/ Trouver les vecteurs  $X$  de  $\mathbb{R}^3$  vérifiant  $U \wedge X = B$ , où  $U = (1, 1, -2)$  et  $B = (3, -1, 1)$ .
- 5/ Trouver les fonctions  $f$  définies et dérivables sur  $\mathbb{R}$  vérifiant  $f' + (\cos x - 1)f = \cos x + 1$ .
- 6/ Trouver les nombres réels  $x, y, z$  vérifiant :  $x^2 - y + z = 1, x + y^2 - z = 2, -x + y + z^2 = -3$ .

**Exercice 6.**

L'affirmation suivante : "Si la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  de  $C([0, 1], \mathbb{R})$  tend simplement vers une fonction  $f$  continue, et si la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de  $[0, 1]$  converge vers un point  $x$ , alors  $f_n(x_n)$  tend vers  $f(x)$  quand  $n$  tend vers l'infini" est-elle vraie ou fausse ? (justifier).

**Exercice 7.**

Soit  $O$  le centre du cercle circonscrit à un triangle ABC du plan euclidien. Montrer que le point  $H$  défini par  $\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$  est l'orthocentre du triangle.

**Exercice 8.**

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  continue,  $f \geq 0$ , telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x)dx$  converge. Peut-on affirmer que la fonction  $f$  est bornée ? [justifier votre réponse].

**Exercice 9.**

Soit  $P$  une fonction polynomiale définie sur  $\mathbb{R}$ , à coefficients réels. On suppose que l'on a  $\int_0^{-1} P(t)^2 dt = 0$ . Que peut-on dire de  $\int_{-1}^0 P(t)^2 dt$ ? (justifier).

**Exercice 10.**

Déterminer, selon les valeurs du nombre réel  $\alpha$ , le comportement de la suite définie par :  $u_n = (\alpha - \frac{1}{n})^n$ , pour  $n \geq 1$ .

**Exercice 11.**

On se donne dans le plan euclidien un parallélogramme dont les côtés mesurent 3 cm et 5 cm. Quelle est son aire?

**Exercice 12.**

Soit pour  $p$  entier  $\geq 1$  et  $x \geq 0$ ,  $u_p(x) = xe^{-px}$ .

1. Montrer que  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge simplement si  $x \in [0, +\infty[$ . On note  $f(x)$  sa somme.

2. Les assertions suivantes sont-elles vraies? [justifier vos réponses].

(a)  $\forall a > 0 \sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

(b)  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge uniformément sur  $]0, +\infty[$ .

**Exercice 13.**

Une association comporte  $k$  membres. Pour adhérer à l'association, une personne doit être présentée par deux membres de l'association, ses "parrains". On suppose que des personnes sont candidates à entrer dans l'association; mais les statuts de celle-ci imposent alors que deux candidats différents n'aient pas les mêmes deux parrains.

Combien de personnes au maximum peuvent-elles être candidates ensemble à l'association?

**Exercice 14.**

Déterminer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $I_n = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n dx$ .

**Exercice 15.**

Déterminer le point d'intersection des deux droites  $D$  et  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  données en représentation paramétrique par

$$D : x = 2t - 1, y = 3t - 2,$$

$$\Delta : x = 5t - 5, y = 10 - 6t.$$

**Exercice 16.**

On considère le nombre réel  $x = 1,8333333\dots$ . Calculer le nombre  $x^2$  et donner son développement décimal illimité.

**Exercice 17.**

**17.1** On considère un système de  $k$  équations linéaires et homogènes, à coefficients réels, à  $n$  inconnues réelles. Que peut-on dire de la dimension du sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}^n$  formé par les solutions de ce système? (ne pas donner de démonstration).

**17.2** Une matrice carrée  $n \times n$  (à  $n$  lignes et  $n$  colonnes), à coefficients réels, est dite 0-magique si les sommes des coefficients de chaque ligne, de chaque colonne, et des deux diagonales principales, sont toutes nulles. Par exemple, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

est une matrice 0-magique  $3 \times 3$ . Si on vous dit : " les matrices 0-magiques  $25 \times 25$  sont des combinaisons linéaires de 537 matrices 0-magiques  $25 \times 25$  particulières ", cette affirmation est-elle

certainement fausse ou bien plausible ? [on pourra considérer les matrices 0-magiques  $25 \times 25$  comme un sous-espace vectoriel d'un  $\mathbb{R}^N$  convenable].

**Exercice 18.**

Soit  $I$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue ; on suppose que  $I \subset f(I)$ . Montrer que  $f$  a nécessairement un point fixe  $a$  dans  $I$  [ $f(a) = a$ ].

**Exercice 19.**

Soit  $\Gamma$  un cercle du plan euclidien, et  $A$  un point extérieur à ce cercle. Une droite  $D$  variable passe par  $A$  et coupe  $\Gamma$  en  $M$  et  $P$ . Montrer que le produit  $AM \cdot AP$  est une constante indépendante de  $D$  (tant que  $D$  coupe  $\Gamma$ ). Combien vaut cette constante ?

**Exercice 20.**

On désigne par  $E$  l'ensemble des nombres irrationnels de  $[0, 1]$  dont le développement décimal illimité contient une infinité de 7 mais ne possède ni 3 ni 9. Déterminer la borne inférieure  $m$  et la borne supérieure  $M$  de l'ensemble  $E$ .

**Exercice 21.**

Pour quelles valeurs de l'entier  $n \geq 1$  l'entier  $n^n$  est-il divisible par 13 ?

**Exercice 22.**

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ .

**22.1** Montrer que si  $f'(x) \rightarrow m$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow m$  quand  $x \rightarrow +\infty$  [reconstituer  $f$  à partir de  $f'$  et de  $f(a)$  pour  $a$  assez grand].

**22.2** La réciproque de (a) est-elle vraie ? (justifier).

**Exercice 23..**

Soient  $S_I, S_J, S_K$  les symétries centrales par rapport à trois points  $I, J, K$  non alignés du plan euclidien. Déterminer les points fixes des transformations obtenues en composant ces trois symétries dans un ordre quelconque.

**Exercice 24.**

Montrer que, quel que soit l'entier  $n \geq 0$ , le nombre  $(22)^n + 10$  n'est pas divisible par 7.

## Resultats Test 1

| Question | Reussie/Total | Reussie/Abordee | Abordee/Total |
|----------|---------------|-----------------|---------------|
| 15       | 64            | 67              | 95            |
| 2        | 61            | 64              | 95            |
| 3        | 59            | 94              | 63            |
| 13       | 55            | 72              | 77            |
| 12,1     | 53            | 71              | 75            |
| 7        | 52            | 80              | 65            |
| 24       | 45            | 80              | 56            |
| 11       | 45            | 60              | 75            |
|          |               |                 |               |
| 6,1      | 33            | 44              | 75            |
| 16       | 24            | 48              | 49            |
| 21       | 23            | 42              | 55            |
| 23       | 22            | 54              | 40            |
| 10,1     | 21            | 27              | 79            |
| 9        | 20            | 24              | 82            |
| 19       | 19            | 41              | 46            |
|          |               |                 |               |
| 8,1      | 14            | 22              | 64            |
| 14       | 13            | 23              | 57            |
| 20,1     | 12            | 68              | 18            |
| 4        | 11            | 18              | 63            |
| 20,2     | 10            | 60              | 17            |
| 22       | 10            | 11              | 97            |
| 18       | 10            | 21              | 44            |
| 12,2     | 8             | 19              | 40            |
| 1        | 8             | 10              | 77            |
| 10,2     | 7             | 11              | 66            |
| 8,2      | 7             | 32              | 21            |
| 12,3     | 4             | 12              | 31            |
| 6,2      | 3             | 21              | 14            |
| 17       | 3             | 5               | 53            |

## Questions d'Analyse Test1 Capes

Les questions sont rangées dans l'ordre décroissant de réussite

### Question 2 (1, 0, 0, 0) : T

Donner un exemple de fonction numérique d'une variable réelle non continue en 0 (on ne demande pas de justifier).

### Question 12.1 (1, 0, 0, 0) : T

Soit pour  $p$  entier  $\geq 1$  et  $x \geq 0$ ,  $u_p(x) = xe^{-px}$ .

1. Montrer que  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge simplement si  $x \in [0, +\infty[$ .

### Question 6.1 (1, 0, 0, 0) : T

L'affirmation suivante : " Si la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  de  $C([0, 1])$  tend simplement vers une fonction continue, et si la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de  $[0, 1]$  converge vers un point  $x$ , alors  $f_n(x_n)$  vers  $f(x)$  quand  $n$  tend vers l'infini " est-elle vraie ou fausse ?

### Question 10.1 (1, 0, 0, 1) : M

Déterminer, selon les valeurs du nombre réel  $\alpha$ , le comportement de la suite définie par :  $u_n = (\alpha - \frac{1}{n})^n$ , pour  $n \geq 1$ .

### Question 9 (1, 0, 0, 1) : M

Soit  $P$  une fonction polynomiale définie sur  $\mathbb{R}$ , à coefficients réels. On suppose que l'on a  $\int_{-1}^1 P^2(t) dt = 0$ . Que peut-on dire de  $\int_{-1}^0 P^2(t) dt$  ? (justifier)

### Question 8

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ , continue,  $f \geq 0$ , telle que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  converge.

#### 8.1 (1, 0, 0, 0) : T

Peut-on affirmer que la fonction  $f$  est bornée ?

#### 8.2 (1, 1, 0, 1) : D

[justifier votre réponse].

### Question 14 (1, 1, 0, 1) : D

Déterminer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$  de  $I_n = \int_0^1 \left(\frac{2x}{x+1}\right)^n dx$

### Question 20 (1, 1, 1, 1) : D

On désigne par  $E$  l'ensemble des nombres irrationnels de  $[0, 1]$  dont le développement décimal illimité contient une infinité de 7 mais ne possède ni 3 ni 9. Déterminer la borne inférieure  $m$  et la borne supérieure  $M$  de l'ensemble  $E$ .

### Question 22 (1, 1, 0, 1) : D

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , de classe  $C^1$ .

(a) Montrer que si  $f'(x) \rightarrow m$  quand  $x \rightarrow +\infty$ , alors  $\frac{f(x)}{x} \rightarrow m$  quand  $x \rightarrow +\infty$  [reconstituer  $f$  à partir de  $f'$  et de  $f(a)$  pour  $a$  assez grand].

(b) La réciproque de (a) est-elle vraie ? (justifier).

### Question 18 (1, 1, 0, 1) : D

Soit  $I$  un intervalle fermé borné de  $\mathbb{R}$ , et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , continue ; On suppose que  $I \subset f(I)$ . Montrer que  $f$  a nécessairement un point fixe  $\alpha$  dans  $I$  ( $f(\alpha) = \alpha$ )

### Question 12.2 (1, 0, 0, 1) : M

Soit pour  $p$  entier  $\geq 1$  et  $x \geq 0$ ,  $u_p(x) = xe^{-px}$ .

1. Montrer que  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge simplement si  $x \in [0, +\infty[$ . On note  $f(x)$  sa somme.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ? (justifier vos réponses)

12.2  $\forall a > 0$ ,  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

### Question 12.3 (1, 0, 0, 1) : M

Soit pour  $p$  entier  $\geq 1$  et  $x \geq 0$ ,  $u_p(x) = xe^{-px}$ .

1. Montrer que  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge simplement si  $x \in [0, +\infty[$ . On note  $f(x)$  sa somme.

Les assertions suivantes sont-elles vraies ? (justifier vos réponses)

a)  $\forall a > 0$ ,  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge normalement sur l'intervalle  $[a, +\infty[$ .

12.3  $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$  converge uniformément sur l'intervalle  $[0, +\infty[$

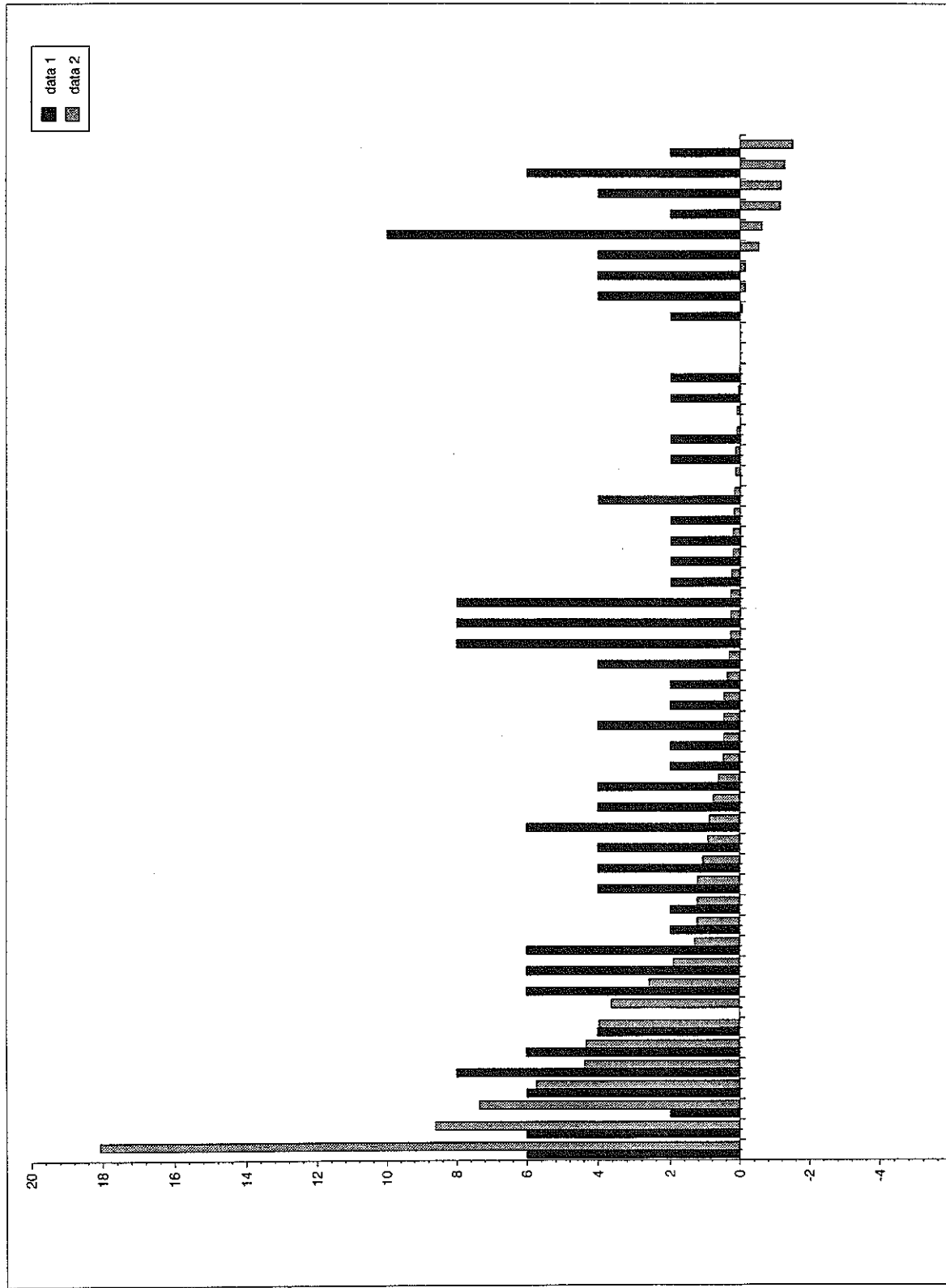
### Question 6.2 (1, 1, 0, 1) : D

L'affirmation suivante : " Si la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$  de  $C([0, \infty[)$  tend simplement vers une fonction continue, et si la suite  $(x_n)_{n \geq 1}$  de  $[0, 1]$  converge vers un point  $x$ , alors  $f_n(x_n)$  vers  $f(x)$  quand  $n$  tend vers l'infini " est-elle vraie ou fausse ? (justifier).

| Question | Reussie/total | Test 2 | Reussie/Abordee | Abordee/Total |
|----------|---------------|--------|-----------------|---------------|
| 2        | 61            |        | 64              | 95            |
| 12,1     | 53            | 66     | 71              | 75            |
| 6,1      | 33            |        | 44              | 75            |
| 10,1     | 21            |        | 27              | 79            |
| 9        | 20            | 27     | 24              | 82            |
| 8,1      | 14            |        | 22              | 64            |
| 14       | 13            | 17     | 23              | 57            |
| 20,1     | 12            |        | 68              | 18            |
| 20,2     | 10            |        | 60              | 17            |
| 22       | 10            | 27     | 11              | 97            |
| 18       | 10            | 13     | 21              | 44            |
| 12,2     | 8             |        | 19              | 40            |
| 10,2     | 7             |        | 11              | 66            |
| 8,2      | 7             |        | 32              | 21            |
| 12,3     | 4             | 15     | 12              | 31            |
| 6,2      | 3             |        | 21              | 14            |

- ANNEXE 5 -

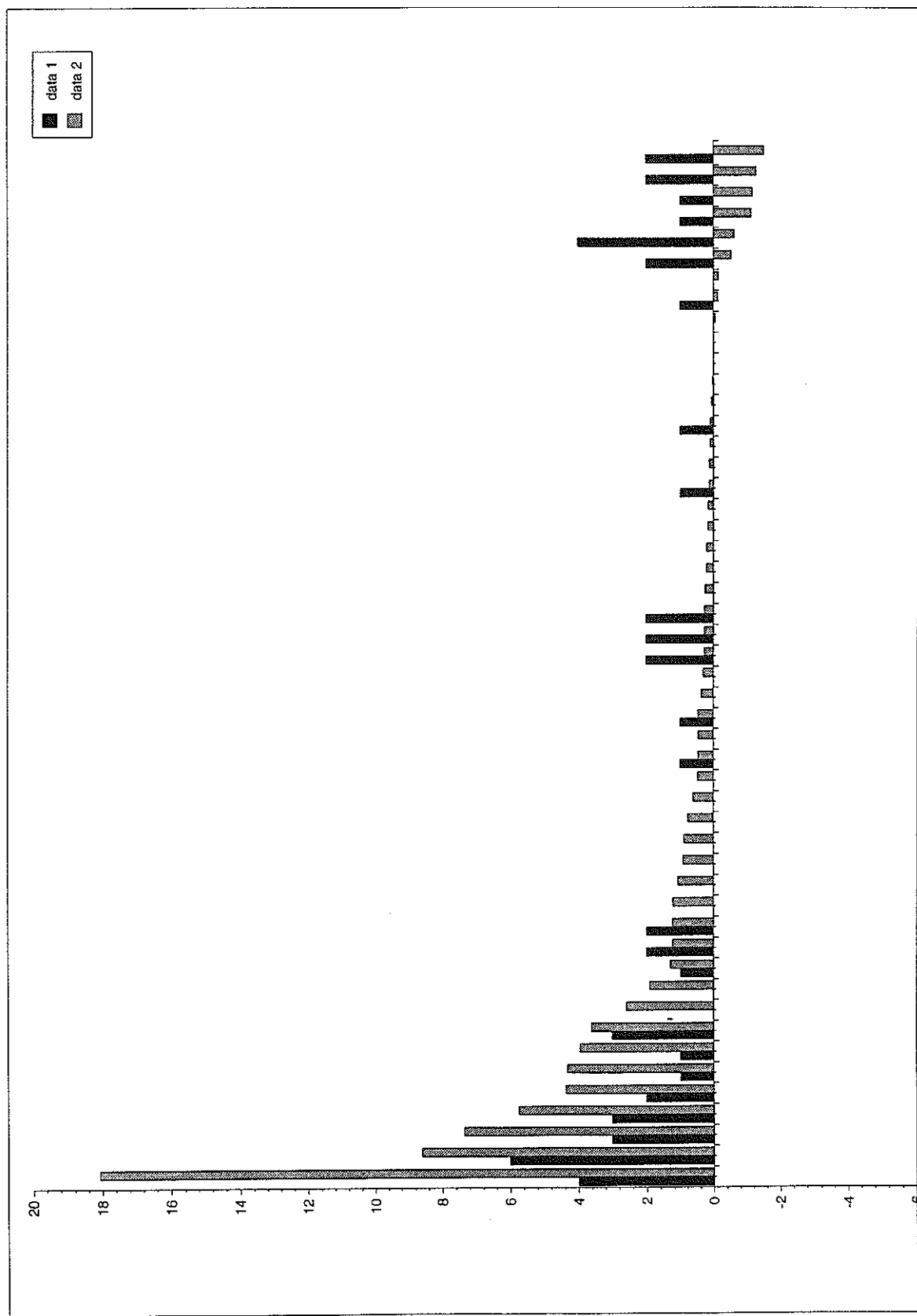
Data 1 : t (technique)  
data 2 : p (progres)



$$p = 0,22 + 0,31 t$$

Data 1 : m (mobilisable - disponible)  
Data2 : p (progres)

- Annexe 6 -



$p = 0,002 + 1,34 \text{ m}$



**Exercice 1.**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

Déterminer  $f([0, 2])$  et  $f^{-1}([1, 3])$ .

**Exercice 2.**

Le nombre  $a = \frac{1}{70^{70} - 1}$  est-il décimal ?

**Exercice 3.**

Si  $x$  est réel, on pose  $f(x) = ax^2 - x + c$ .

**3.1** Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le couple de réels  $(a, c)$  pour qu'on ait  $f \geq 0$  sur  $[1, +\infty[$ .

**3.2** Représenter graphiquement dans  $\mathbb{R}^2$  les couples  $(a, c)$  qui vérifient cette condition.

**Exercice 4.**

Soit  $E$  un espace vectoriel, et soient  $u, v, w$  trois vecteurs linéairement indépendants dans  $E$ . Soient  $a, b$  deux autres vecteurs de  $E$ , linéairement indépendants, ni  $a$  ni  $b$  n'étant des combinaisons linéaires de  $u, v, w$ . La famille de vecteurs  $(u, v, w, a, b)$  est-elle libre ?

**Exercice 5.**

La bissectrice intérieure issue du sommet  $A$  d'un triangle  $ABC$  coupe le côté  $BC$  en  $I$ .

**5.1** Montrer que l'on a  $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$

**5.2** Si  $a, b, c$  désignent les longueurs des côtés  $BC, CA, AB$ , montrer que le centre  $O$  du cercle inscrit au triangle  $ABC$  est le barycentre des points  $A, B, C$  affectés des coefficients  $a, b, c$ .

**Exercice 6.**

On considère le nombre réel  $x = 4,44444\dots$ . Calculer le nombre  $x^2$  et déterminer son développement décimal illimité.

**Exercice 7.**

Déterminer le point d'intersection des deux droites  $D$  et  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^2$  données en représentation paramétrique par :

$$D : x = 3t + 1, y = t + 2 \quad \Delta : x = 4t + 2, y = 2t + 3$$

**Exercice 8.**

Soient  $P$  et  $Q$  deux fonctions polynomiales à coefficients réels. On suppose que  $\int_0^1 P^2(t)Q^2(t) dt = 0$ . Que peut-on dire du produit  $\int_{-1}^0 P(t) dt \int_{-1}^0 Q(t) dt$  ?

**Exercice 9.**

Déterminer la limite, quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , de  $\int_0^1 \left(\frac{3x}{x+2}\right)^n dx$ .

**Exercice 10.**

On pose  $f_n(x) = \sin^n(x)$ , pour  $x \in [0, \pi/2]$  et  $n \geq 0$ .

**10.1** Soit  $a \in ]0, \pi/2[$ . La suite  $f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, a]$  ?

**10.2** La suite  $f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, \pi/2[$  ?

**10.3** La suite  $f_n$  converge-t-elle uniformément sur  $[0, \pi/2]$  ?

**Exercice 11.**

Soient  $a, b, c$  trois nombres réels non nuls. On considère la droite  $D$  dans le plan euclidien  $\mathbb{R}^2$ , d'équation  $ax + by + c = 0$ .  $\mathbb{R}^2 \setminus D$  est alors formé de deux parties convexes disjointes.

Montrer soigneusement l'assertion suivante : " Si  $M_1$  est dans l'une de ces parties et  $M_2$  dans l'autre, le segment  $M_1M_2$  coupe la droite  $D$  ".

**Exercice 12.**

Soit  $f$  une fonction numérique continue positive sur  $[0, +\infty[$  vérifiant  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ .

Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt = 0$ .

**Exercice 13.**

Montrer que si l'entier  $n$  est  $\geq 1$ , le nombre  $4^n - (3n + 1)$  est divisible par 9.

***Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM***

***Vous pouvez soit :***

***- Consulter notre site WEB :***

***<http://iremp7.math.jussieu.fr>***

***- Demander notre catalogue en écrivant à***

***IREM Université Paris 7***

***Case 7018***

***2 place Jussieu***

***75251 Paris cedex 05***

Editeur : IREM  
Directeur Responsable de la publication : R. DOUADY  
Dépôt légal : Juin 1999  
ISBN : 2-86612-183-X  
Tour 56/55 - 3ème étage, Case 7018  
2 place Jussieu 75251 Paris Cedex 05