

**COMMENT ELABORER DES ENONCES EN
MATHEMATIQUES ?
L'EXEMPLE D'UN ENSEIGNEMENT DE LICENCE DE
MATHEMATIQUES SUR CE THEME**

J. PIAN ET A. ROBERT

UNIVERSITE PARIS 7 – DENIS DIDEROT

**COMMENT ELABORER DES ENONCES EN
MATHEMATIQUES ?
L'EXEMPLE D'UN ENSEIGNEMENT DE LICENCE DE
MATHEMATIQUES SUR CE THEME**

J. PIAN ET A. ROBERT

Comment élaborer des énoncés en mathématiques ?
L'exemple d'un enseignement de licence de mathématiques sur ce thème
(J. Pian et A. Robert)

I Les objectifs, les modalités, le programme

II Une double chronique

1) L'introduction

A) Le cours d'algèbre

1) Contenus et forme de l'enseignement

2) Les quaternions,

3) Les décimaux, rationnels et développements décimaux

B) Le cours d'analyse

a) le plan

b) les documents distribués

III Conclusion

1) Le projet

2) Conclusion et éléments de bilan

I Objectifs, modalités, programmes

M8 (licence 99) :

A propos de problèmes dans l'enseignement des mathématiques : compléments mathématiques à partir de problèmes sur quelques notions "transversales", introduction au travail de construction de problèmes.

A) Les objectifs

1) Côté enseignement des mathématiques

Il est banal d'envisager **plusieurs composantes** qui sont impliquées dans l'apprentissage des étudiants (ou des élèves) : affectives, sociales, cognitives, par exemple¹. Il est aussi admis que ces composantes ne sont pas indépendantes², et des recherches récentes ont illustré magistralement ce propos sur la scolarité des "nouveaux lycéens", en montrant les relations individuelles, variables mais toujours présentes, entre le social (et le culturel) et le cognitif.

L'enseignant, lui, fait le **pari** qu'en **agissant essentiellement**³ sur une des composantes (la cognitive), il peut obtenir des résultats en termes d'apprentissage des élèves (de suffisamment d'élèves au moins). Les choix correspondants concernent aussi bien les contenus présentés aux élèves, cours, activités, problèmes, que les modalités de travail qui leur sont proposées. En effet, dans une description d'un enseignement en relation avec des apprentissages possibles, nous pensons que les stricts contenus sont **indissociables** de la manière dont les différents moments mathématiques correspondants sont organisés pour les élèves : cours magistral, exercices cherchés en classe, à la maison, à plusieurs, notés ou non, avant le cours ou après etc.

Dans ce module, nous plaçant dans cette perspective, nous voulons nous **restreindre** à approfondir une partie de la question des choix de contenus : quels sont les choix mathématiques d'un enseignant lorsqu'il décide de proposer aux élèves (aux étudiants) un problème ? Plus précisément, nous voulons travailler la question de la marge de manoeuvre **mathématique** dont l'enseignant dispose pour cette construction de problèmes, en relation avec certaines raisons de faire tel ou tel choix. Une élaboration de problèmes sous-entend ici un travail qui va de la situation mathématique proposée, au découpage d'un énoncé en questions (aussi bien du point de vue de l'ouverture de celles-ci que des étapes à prévoir), en passant par les "outils"⁴ à utiliser (aussi bien pour les choisir que pour décider de les indiquer ou non).

Plusieurs variables, plus ou moins objectives, influencent le choix, le moment du cours (introduction ou contrôle de fin de parcours par exemple), ce qui a déjà été fait dans la classe ou antérieurement, mais aussi le niveau de la classe, les habitudes de la classe avec ce professeur, par exemple. Mais nous n'en tiendrons pas compte ici : nous nous limiterons ici à dégager des variables "internes" aux contenus envisagés : nous voulons travailler sur ce qui peut changer un énoncé

¹On pourrait ajouter culturelles et psychiques.

² Par exemple si un étudiant "va mal" sur le plan personnel, il y a de fortes chances qu'il ait plus de mal à se concentrer et il aura plus de difficultés à apprendre, sauf si au contraire il se mobilise entièrement sur son apprentissage pour échapper au reste !

³ Même s'il essaie aussi de faire jouer par exemple la motivation, c'est plus subjectif, et partiel...

⁴Raisonnements ou propriétés ou définitions, dans un cadre ou un registre donnés.

mathématique attaché à une situation fixée, en fonction des conséquences éventuelles sur les apprentissages. Ce travail participe donc de la composante cognitive que nous évoquions ci-dessus comme un des leviers potentiels à la disposition de l'enseignant en vue des apprentissages des élèves. Nous développerons un certain nombre de caractéristiques permettant d'analyser les contenus à enseigner dans l'objectif de faire des choix de problèmes répondant à des conditions, ou à des contraintes imposées.

Nous laissons aux formations ultérieures le soin à la fois d'introduire les variables liées à la gestion de la classe et de discuter des choix effectifs, compte tenu de variables "externes" comme celles que nous citons ci-dessus. Cependant apprentissage, gestion et contenus sont tellement liés que nous serons obligés de faire quelques empiétements dans les deux premiers domaines pour introduire certains choix strictement liés aux contenus.

2) Côté compléments de mathématiques

Nous avons d'autre part choisi de revenir à cette occasion et pour développer nos analyses, sur des points délicats du DEUG, notamment ceux qui peuvent avoir une position transversale dans le découpage en modules⁵. Nous estimons en effet qu'une telle réflexion, "après-coup", participe d'une formation à l'enseignement des mathématiques. Toutefois, nous abordons ces compléments grâce à des problèmes, ce qui permet de compléter les réflexions précédentes.

C'est donc à partir de quelques notions délicates abordées en partie en DEUG que nous construisons cette double réflexion sur les problèmes. Pour résumer, nos objectifs sont d'une part de mettre au point des analyses des contenus facilitant la construction de problèmes : il s'agit de contribuer à mieux préciser certaines marges de manoeuvre mathématique des enseignants lorsqu'ils ont à élaborer un texte de problème répondant à des conditions données. D'autre part nous voulons travailler à ce que les étudiants élaborent en même temps, et grâce aux mêmes réflexions, une vue plus globale sur certains contenus de DEUG, habituellement sources de difficultés, et souvent dispersés dans les enseignements précédents.

⁵Qui sont abordés de plusieurs points de vue, sans recollement.

B) Les modalités

Ce module comprend 8 semaines de cours (6 heures), un stage en lycée (en binômes), moitié "filé" (une demi-journée pendant 4 semaines et une semaine, avec suivi d'une classe de lycée) et un projet (qui peut être en partie commun à deux étudiants).

Pendant les séances de cours, on travaillera à partir de problèmes très divers, à résoudre et à commenter aux différents niveaux qu'on va introduire (types de notions mathématiques en jeu, niveaux de fonctionnement des notions, entrées dans le problème, variables des énoncés, etc.).

Un certain travail sera demandé en dehors des séances, synthèses de questions déjà rencontrées, résolutions et analyses d'exercices faisant suite aux cours, élaboration d'un problème.

L'évaluation se fait sur trois notes : une note d'écrit (trois heures à la fin de l'année) - 60% de la note finale, un projet (moins de 10 pages, tapé), en partie basé sur le stage, et permettant de faire fonctionner les analyses de problèmes effectuées pendant les cours et une soutenance orale du stage.

L'examen comportera d'une part une analyse d'exercice et d'autre part des exercices portant sur les mathématiques ayant été approfondies pendant le cours.

Un projet classique consiste plus précisément en une description globale des contenus observés pendant le stage, puis une analyse des exercices et problèmes proposés aux élèves observés pendant deux séances choisies du stage, avec analyse des exercices proposés dans le manuel correspondant, en mettant en oeuvre les catégories introduites dans le cours de licence.

C) Programme

Contenus mathématiques :

- * les quaternions, un exemple d'un corps non commutatif.

Révisions sur les différentes structures algébriques, les exemples élémentaires, et les théories qui s'y rattachent.

- * convergence uniforme - un exemple de notion où il y a deux points de vue pour l'introduction, révision des deux points de vue local/global en analyse

- * nombres réels (et complexes) - des points de vue d'analyse, d'algèbre et de géométrie, révisions des principales définitions des sous-ensembles importants de $\mathbb{R}$ (décimaux, rationnels, etc.)

Notions introduites pour l'analyse et l'élaboration de problèmes :

- * types de notion, types de raisonnements ;

- * les cadres, registres et jeux de cadres et registres ;

- * les niveaux de fonctionnement (technique, mobilisable, disponible) ;

- * le travail de l'énoncé (découpage en questions, indications, application ou adaptation ou transformation d'un théorème, moyens de contrôle, type de production, etc.) ;

- * l'élaboration de problèmes à partir de documents existants (exploration d'une situation, exploitation d'une situation, synthèse d'énoncés disponibles, avec mise en évidence et déclinaison de paramètres, adaptation d'un théorème de niveau n à un niveau $n-1$).

II Une double chronique

Introduction

Le cours d'algèbre

Le cours d'analyse

Conclusion

Introduction : présentation des objectifs, des modalités et du programme ; éléments de justification des choix.

1) Présentation des objectifs : une expérience "en vraie grandeur" sur le rapport entre énoncé et activité mathématique enclenchée.

Pour expliquer les objectifs du module, une expérience préliminaire est proposée : cinq énoncés différents d'un même exercice sont présentés aux étudiants, qui les cherchent, en groupes de quatre, et expliquent ensuite les activités mathématiques enclenchées chez eux par ces énoncés. Voici ces énoncés :

- a) Montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers.*
- b) Est-ce que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers ?*
- c) En utilisant les nombres complexes, montrer que le produit de deux nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est encore une somme de deux carrés d'entiers.*
- d) Soient m , n , p et q des entiers. Est-ce que le produit $(m^2 + n^2)(p^2 + q^2)$ peut toujours s'écrire sous la forme $r^2 + s^2$, où r et s entiers ?*
- e) L'ensemble des nombres qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers est stable par produit.*

Une liste des mots clefs des activités mathématiques est établie à partir des dires des étudiants et complétée (puis distribuée).

Mots clefs des activités mathématiques

Appliquer (calculer, appliquer des formules, un théorème, une définition, une propriété, une méthode)

Adapter

Chercher

(Re)formuler (modéliser, changer de domaine, d'écriture)

Reconnaître

Se poser des questions

Faire des expériences (numériques, graphiques ...)

Rapprocher, mettre en relation, interpréter

Transformer

Vérifier

Rédiger

Démontrer

Expliquer

2) Éléments de justification des choix

a) Énoncés de problèmes et activités mathématiques de résolution du problème sont liés de manière spécifique, par delà la situation mathématique étudiée.

L'énoncé d'un exercice ou d'un problème constitue un enjeu pour l'enseignant dans la mesure où il est relié de manière variable à l'activité mathématique déclenchée chez les élèves à partir d'une situation mathématique donnée. Un énoncé algébrisé enclenche davantage un travail algébrique qu'un énoncé en français, un énoncé "ouvert" entraîne plus un travail de questionnement, etc.

Par delà le "facile/difficile", c'est cette variabilité des énoncés, et les possibilités de choix des enseignants que nous vous proposons d'explorer en partie dans cet enseignement.

Donnons des exemples plus précis.

* Entre l'énoncé a) et b) ci-dessus, la différence des énoncés fait que l'étudiant se centre sur la démonstration ou sur le résultat à montrer (*question fermée ou non*). Cette deuxième position peut amener à reformuler la question ou à faire des expériences numériques pour se donner une idée, et d'une certaine façon à mieux cerner le problème, qui est en quelque sorte ainsi retravaillé, reformulé, plus approprié.

De manière générale les questions qui amènent à reformuler, donc à décrire avec d'autres mots, ou à centrer sur une propriété qui peut alors être généralisée, permettent des mises en relation, ou des rapprochements entre différents points de vue, ou différentes propriétés, ou différents domaines des mathématiques. De même les changements de domaines, les interprétations forcent à ce travail.

* Entre l'énoncé a) et l'énoncé c) une méthode est indiquée ou non (*indication de méthodes ou non*).

Là encore le travail est de ce fait autre, le questionnement sur une méthode permet encore une reformulation, une prise de distance, pour rapprocher de quelque chose de connu. Cependant l'application d'une méthode indiquée n'est pas toujours immédiate.

* L'énoncé e) est général, et pourrait amener à une recherche sur des propriétés d'ensembles, alors que les autres amènent à des solutions locales, sur les éléments.

* La différence entre les énoncés d) et les autres tient à l'écriture : l'exercice est déjà formalisé, ce qui peut modifier le travail des étudiants, encore plus entraînés à adopter le registre algébrique.

* Plus généralement, plus un énoncé est découpé, moins les questions présentent d'étapes, plus le travail qui reste à faire risque d'être *technique*, travail d'applications d'une propriété à la fois, (définitions, méthodes etc). De même si l'énoncé porte sur un seul domaine, un seul registre (écriture). Cependant même *la mise en oeuvre d'une propriété* peut différer selon les questions : selon le cas traité (particulier, générique), selon le nombre de choses à faire successivement (appliquer deux fois de suite, adapter, transformer), selon qu'il y a ou non des choix à faire.

Dans l'utilisation des identités remarquables, il fallait par exemple ici bien regrouper les deux carrés choisis pour retrouver le début d'un carré, et le faire deux fois.

b) Pourquoi attacher de l'importance à ces facteurs ?

Nous faisons donc l'hypothèse que l'enseignant a une marge de manoeuvre en ce qui concerne ces énoncés, et que selon la manière dont il utilise cette marge de manoeuvre en classe, dans les exercices qu'il propose, les effets en termes d'apprentissage peuvent différer pour un certain nombre d'élèves.

De plus nous admettons qu'un certain nombre d'activités mathématiques sont intéressantes à déclencher. Par exemple, il y a une différence selon nous entre appliquer une propriété parce que l'énoncé le suggère, adapter les données pour appliquer une propriété indiquée, et décider d'appliquer une propriété alors que l'énoncé n'y fait aucune allusion (a) avec les complexes). En effet le travail mathématique qui conduit à ce dernier niveau peut contribuer à dégager du sens, ou à organiser les connaissances correspondantes, parce qu'il y a eu des mises en relation faites par l'étudiant. Or un tel travail ne peut avoir lieu sur n'importe quel énoncé : tout énoncé peut même devenir une suite de demandes d'applications techniques...

Certes la variable "énoncé", relative à une situation mathématique donnée, n'est pas une variable isolée : par exemple un énoncé qui permet aux élèves de se questionner, avec un enseignant qui ne laisse pas suffisamment de temps pour chercher, ou qui intervient sans arrêt, n'enclenche peut-être pas de questionnement réel. Mais ceci n'est pas notre histoire actuelle.

Plus en amont, *dans notre théorie cognitive des apprentissages mathématiques*, issue de théories comme celle de Piaget, mais spécifiée aux mathématiques (cf. didactique) très schématiquement, il y a deux types d'activités fondamentales : les activités qui permettent de passer des énoncés généraux à des applications variées, et réciproquement (si possible), et les activités qui permettent de mettre en relation, d'organiser des connaissances (entre elles). Activités sous-entend ici qu'il y a engagement des élèves dans le travail, et pas seulement une mise en oeuvre automatisée, ou une mémorisation ou une imitation totale, cela sous-entend également un questionnement à certains moments, par exemple, voire des initiatives.

Il s'agit donc de pouvoir proposer des questions qui peuvent enclencher ces activités variées, plus riches que les seules applications isolées (qui sont aussi indispensables !). Ce peut être parce que les questions sont ouvertes (et amènent des questionnements de type conjectures, ou recherches de méthodes), ou parce que les résolutions ne sont pas immédiates, et font fonctionner plusieurs domaines, plusieurs écritures, ou plusieurs outils, ou un outil à transformer.

Ainsi, les constructions de problèmes peuvent faire intervenir trois types de facteurs

- * Des éléments permettant de catégoriser a priori les mathématiques à enseigner (selon les programmes), type de notions, types de raisonnements, cadres, registres...

- * Des éléments permettant de caractériser les mises en oeuvre demandées, et en particulier la part d'initiative laissée aux étudiants :

- différents niveaux de fonctionnement (technique, type "gammes", ou plus complexe) en ce qui concerne les mises en application de propriétés,

- différents types d'entrées dans un problème (conjectures à élucider par analogie, ou expérimentalement, interprétations pour retrouver du connu, changements de domaines, modélisations...).

- différents types de productions (écrites, orales, graphiques, numériques, générales)

- * Une liste des variables sur lesquelles jouer dans un énoncé de problème : ouvertures des questions, découpages et enchaînements, indications, choix du domaine d'application d'une propriété, changements de domaine ou de registre, application d'une propriété isolée, reconnaissance de propriétés, adaptation ou transformation de propriétés, travail sur cas particulier ou sur cas général, travail sur exemples, moyens de contrôles internes à l'énoncé, etc.

3) Présentation des modalités et du programme du module (cf. introduction générale ci-dessus).

Cette introduction est exposée aux étudiants.

Sont alors distribués aux étudiants la liste des notions qui vont intervenir dans l'analyse d'énoncés (cf. ci-dessus) et les trois types de facteurs cités dans le paragraphe précédent comme variables de la construction de problèmes.

A) Le cours d'algèbre

Formes et contenus de l'enseignement (généralités)

I Les quaternions : séance par séance, documents joints : énoncés sur les quaternions, éléments pour l'analyse d'énoncés, résumés de cours et texte de l'exercice à remettre, élaborations d'énoncés non strictement "techniques"

II Décimaux, rationnels et développements décimaux : énoncés et éléments de corrigés.

Le cours d'algèbre

Gestion des séances

Le travail de résolution de problèmes et d'analyses d'énoncés, pendant les séances, s'effectue en petits groupes de 4, il y a souvent un petit travail à la maison à préparer (corrigé en début de séance).

Documents joints (au fur et à mesure de la description des séances)

- * Le problème sur les quaternions et les trois autres énoncés.
- * Rappels sur les structures algébriques (un distribué avant la résolution du problème, l'autre après).
- * Les documents sur les analyses d'énoncés et les comparaisons.
- * Les documents distribués pendant les moments d'exposition des connaissances.
- * Le texte du problème à la maison.
- * Les textes sur rationnels et développements décimaux.

Les contenus mathématiques : quaternions et développements décimaux

I Quaternions

Un travail sur les quaternions est prévu sur 6 séances : il est fondé sur la résolution d'un "grand" problème (synthèse sur les quaternions) et sur des analyses (comparatives) d'énoncés issus de ce problème.

Nous allons décrire successivement le problème initial et le travail de chaque séance.

1) Le problème sur les quaternions

Ce problème comporte cinq parties (*le texte est joint ci-après*).

Il s'agit de présenter le corps des quaternions dans diverses présentations isomorphes (couples de complexes, matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes, matrices engendrées par 4 matrices particulières, couples {scalaire, vecteur de $\mathbb{R}^3$ }) et de montrer, en utilisant les quaternions, le morphisme de $SU(2)$ - isomorphe aux quaternions dits unitaires - dans $SO(3)$.

La première partie consiste à (faire) démontrer que l'ensemble des quaternions, défini des 4 manières envisagées, est un corps non commutatif et une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, les 4 définitions correspondant à des ensembles isomorphes.

Cette partie permet de réviser plusieurs structures algébriques (espace vectoriel, groupe, anneau, corps, algèbre) et de mettre en fonctionnement certaines propriétés algébriques (notamment sur les bases, l'inversibilité des matrices, le transport de structures). *Un document de rappel de ces structures, distribué aux étudiants, est joint.*

La deuxième partie permet de travailler sur des sous-ensembles remarquables du corps des quaternions, les quaternions purs et les quaternions unitaires.

La possibilité de choisir une présentation des quaternions parmi les 4 qui ont été données ouvre un certain éventail de démonstrations, qui restent cependant assez techniques.

La troisième partie, du même style que la précédente, est une étude plus détaillée des quaternions unitaires (dont l'ensemble est isomorphe à $SU(2)$).

C'est dans la quatrième partie qu'on fait établir le morphisme entre $SU(2)$ et $SO(3)$, en faisant intervenir les quaternions unitaires et purs. La démonstration est découpée et guidée, et reste assez difficile à concevoir globalement lors de la résolution des différentes étapes.

La cinquième partie est une petite application à l'arithmétique.

Les quaternions - corps non commutatif, algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$...

I Définitions et premières propriétés

1) *Le point de vue sous-ensemble de $\mathbb{C}^2$.*

a) Montrer que $\mathbb{C}^2$ muni de l'addition naturelle est un groupe commutatif.

b) Est-ce que la loi interne définie par, pour tout (z_1, w_1) de $\mathbb{C}^2$

$$(z_1, w_1) (z_2, w_2) = (z_1 z_2, w_1 w_2)$$

est telle que $\mathbb{C}^2 - \{0,0\}$, muni de cette loi, soit un groupe ?

c) On définit une autre deuxième loi par, pour tout (z_i, w_i) de $\mathbb{C}^2$:

$$(z_1, w_1) (z_2, w_2) = (z_1 z_2 - w_1 \overline{w_2}, z_1 w_2 + w_1 \overline{z_2}).$$

Montrer que $\mathbb{C}^2$ muni de l'addition "naturelle" et de cette deuxième loi est un corps non commutatif, noté H .

d) Montrer que l'application de C dans H qui à z associe $(z,0)$ est un morphisme injectif de corps.

Montrer que, si λ appartient à $\mathbb{R}$, $(\lambda, 0) (z, w) = (\lambda z, \lambda w) = (z, w) (\lambda, 0)$.

e) On appelle $N(z,w)$ le réel $(|z|^2 + |w|^2)$, identifié à l'élément $(|z|^2 + |w|^2, 0)$.

Montrer que, si un élément (z,w) est donné, non nul, l'équation

$$(z, w) (z', w') = N(z,w)$$

admet une solution unique, notée $(z,w)^*$, que l'on explicitera en fonction de z et w .

Montrer les égalités suivantes, pour tous $(z, w), (z', w') \dots$

$$N(z, w) = (z, w) (z, w)^* = (z, w)^* (z, w)$$

$$[(z, w) (z', w')]^* = (z', w')^* (z, w)^*$$

$$N[(z, w) (z', w')] = N(z, w) N(z', w').$$

f) En déduire que le produit de deux sommes de 4 carrés d'entiers est encore une somme de 4 carrés d'entiers.

g) Montrer que si on veut démontrer que tout nombre entier positif s'écrit comme la somme de 4 carrés d'entiers (théorème des 4 carrés), il suffit de le démontrer pour les nombres premiers.

Examiner les entiers 2, 3, 5, 7 et 11. Pourrait-on envisager un théorème des 3 carrés ?

2) *Un point de vue matriciel*

On définit l'ensemble H des matrices carrées d'ordre 2 de la forme

$M = a_0 I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$, où les a_i sont des réels, I est la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Pour simplifier les notations, on remplacera éventuellement I par E_0 .

De quelle algèbre de matrices H est-il sous-ensemble ?

Donner la forme générale des matrices de H .

a) Montrer que H est un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

b) Démontrer les égalités suivantes, pour $k = 1, 2, 3$:

$$E_0 E_k = E_k E_0 = E_k$$

$E_1 E_2 = -E_2 E_1 = E_3$, et les 2 égalités obtenues par permutation circulaire des indices

$$E_k^2 = -E_0$$

A quoi peuvent servir ces égalités ?

c) Montrer que le sous-ensemble de $\mathbf{H}$ formé des 8 éléments $(E_i, -E_i)$ pour $i \in \{0,1,2,3\}$ est un sous-groupe non commutatif dont tous les éléments sauf $\pm E_0$ sont d'ordre 4.

d) Montrer que $\mathbf{H}$ est une algèbre sur $\mathbb{R}$. $\mathbf{H}$ est-il un corps ?

e) Pour tout M de $\mathbf{H}$, on définit $M^* = a_0 I - a_1 E_1 - a_2 E_2 - a_3 E_3$ et $N(M) = \sum_{i=0}^3 a_i^2$.

Montrer que $M^* = {}^t\overline{M}$

Montrer que $MM^* = M^*M = N(M)E_0$.

Calculer $N(AB)$ en fonction de $N(A)$ et $N(B)$.

Montrer que toute matrice M non nulle de $\mathbf{H}$ est inversible.

En déduire que $\mathbf{H}$ est un corps non commutatif.

f) Comparer les deux démonstrations du fait que $\mathbf{H}$ est un corps.

g) Y a-t-il des questions que l'on peut enlever dans cette partie II (et avec quelles conséquences) ?

3) Le recollement des points de vue

Montrer que H et $\mathbf{H}$ sont des corps isomorphes.

On appelle quaternion un élément de H ou $\mathbf{H}$.

Montrer que, si (z,w) et M se correspondent dans l'isomorphisme entre H et $\mathbf{H}$, on a

$$N(M) = N(z, w) = \det M \quad (\text{norme du quaternion})$$

$$\text{et } M^* = (z,w)^* = {}^t\overline{M} \quad (\text{conjugué du quaternion}).$$

Cet isomorphisme est-il aussi un isomorphisme d'algèbres (sur quel corps) ?

Pourquoi le mot norme est-il utilisé ?

4) Un dernier point de vue, géométrique.

On appelle E l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$ (muni du produit scalaire usuel, et d'une base orthonormée directe). On considère l'ensemble H de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ muni de l'addition canonique et de la multiplication suivante : pour tous (t_i, V_i) de H , ($i = 1,2$), on pose

$$(t_1, V_1)(t_2, V_2) = (t_1 t_2 - V_1 \cdot V_2, t_1 V_2 + t_2 V_1 + V_1 \wedge V_2)$$

Retrouver les structures de H .

La définition des lois sur H est-elle "intrinsèque" ?

Est-ce que H est isomorphe à $\mathbf{H}$ et H ?

Comment s'expriment la norme, le conjugué, et l'inverse de (t, V) , supposé non nul ?

5) Un bilan

a) Combien faut-il se donner de nombres (réels, ou complexes) pour déterminer un quaternion ?

Exprimer un même quaternion de 4 façons différentes, en précisant à chaque fois ce qui est donné au départ.

Dorénavant, il y a lieu de choisir un point de vue pour résoudre les questions posées.

b) On appelle e le quaternion élément neutre pour la multiplication, et on note q un quaternion quelconque.

Résoudre $q^2 = e$, $q^2 = -e$.

c) Trouver le centre de H .

II Quaternions unitaires, quaternions purs et $SU(2)$.

Pour tout quaternion A , on pose $S(A) = (A + A^*)/2$.

On appelle quaternion unitaire un quaternion A tel que $N(A) = 1$.

On appelle quaternion pur un quaternion A tel que $a_0 = 0$.

Donner des exemples numériques de quaternions pur, unitaire, pur et unitaire : dans chaque cas, on indiquera plusieurs formes (matricielle, développée sur la base E_i , etc.), la trace du quaternion, sa norme, son conjugué et, s'il y a lieu, son inverse.

1) Vérifier que $S(A) = (1/2) \operatorname{tr}(A)I$.

2) a) Montrer qu'un quaternion A est pur si et seulement si $S(A) = 0$, ou encore si et seulement si $A = -A^*$. Calculer A^2 .

b) Démontrer que l'ensemble H_0 des quaternions purs est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$. On appelle ϕ l'isomorphisme canonique de H_0 sur $\mathbb{R}^3$.

3) Montrer que l'ensemble des quaternions unitaires peut être muni d'une structure de groupe multiplicatif.

4) On définit $SU(2)$ comme l'ensemble des matrices U de $M_2(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^t\bar{U}U = I$ (on dit aussi unitaires) et de déterminant 1. Donner la forme générale d'une matrice de $SU(2)$.

Est-ce gênant d'avoir utilisé le même mot (unitaire) pour deux objets a priori différents ?

5) Montrer qu'il y a équivalence, pour un quaternion pur U , entre

i) U est unitaire

ii) $U^2 = -I$

iii) $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1$.

6) Montrer que tout quaternion pur peut s'écrire $X = \delta U$ où U est un quaternion pur et unitaire et δ est un réel tel que $\delta^2 = \det X$.

7) Soient U et V deux quaternions purs ; on pose $\phi(U) = u$ et $\phi(V) = v$.

Montrer qu'il y a équivalence entre

i) $UV + VU = 0$ et ii) $u \cdot v = 0$

Comment s'interprète cette condition ii) dans $\mathbb{R}^3$?

Montrer que si U et V vérifient l'une des conditions ci-dessus, et sont unitaires, si $W = UV$, alors W est pur et unitaire et u, v, w forment une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Donner un exemple numérique de tels quaternions.

8) La question 5) est-elle bien posée ?

III Structure des quaternions unitaires

1) Montrer que si A est unitaire, il existe un réel α tel que

$A = \cos\alpha I + \sin\alpha U$, où U est pur et unitaire.

Est-ce que cette représentation dépend d'une base de $\mathbf{H}$?

Montrer alors que $A^n = \cos(n\alpha) I + \sin(n\alpha) U$

$$\text{et } A^{-1} = \cos\alpha I - \sin\alpha U$$

Déterminer α et U dans le cas du quaternion $B = 1/2(E_0 + E_1 + E_2 + E_3)$ (vérifier d'abord qu'il est unitaire).

2) Montrer que tout quaternion unitaire est le produit de deux quaternions purs et unitaires : on utilisera la décomposition précédente et la question 7) II.

Faire le calcul pour le quaternion B de la question précédente.

3) Trouver tous les éléments de $\mathbf{H}$ qui commutent avec tous les quaternions purs. Trouver tous les quaternions unitaires qui commutent avec tous les quaternions purs.

IV Morphisme de $SU(2)$ sur $SO(3)$

0) Montrer que pour deux matrices M et N de $M_2(\mathbb{C})$ on a $\text{tr}(MN) = \text{tr}(NM)$.

On rappelle que les éléments de $SO(3)$ sont les matrices carrées d'ordre 3 réelles telles que ${}^t\overline{M}M = I$ et $\det(M) = 1$ (matrices orthogonales directes, associées aux rotations de $\mathbb{R}^3$ dans lui-même).

Donner la forme réduite d'une matrice de $SO(3)$.

1) On se donne A quaternion unitaire et on considère l'application

$$\begin{aligned} \gamma: H_0 &\longrightarrow \mathbf{H} \\ X &\longmapsto AXA^{-1} \end{aligned}$$

a) Montrer que H_0 est stable par γ .

b) On pose $\phi(\gamma(X)) = x' = \rho(x)$.

Montrer que ρ est une isométrie de $\mathbb{R}^3$.

c) Déterminer ρ si A est de la forme $x_0 I$.

d) Sinon, on pose $A = \cos\theta I + \sin\theta U$, où U est pur et unitaire.

Déterminer $\gamma(U)$ puis l'image u' de $\gamma(U)$ par ϕ , soit $\rho(u)$.

On appelle v un vecteur orthogonal à u de norme 1, et V son antécédent (par ϕ). Et on définit W par $W = UV$.

Montrer que, si on pose $W = \phi(w)$, la base (u, v, w) est une base orthonormale directe.

Déterminer V' , image de V par γ , en fonction de V et de W .

En déduire que v' se déduit de v par une rotation ρ , fonction de A , notée ρ_A , dont on précisera l'angle.

3) Pour le quaternion B introduit en III, trouver $\gamma(B)$, b , $\rho(b)$ et ρ_B .

4) On définit donc une application ρ de $SU(2)$ dans $SO(3)$ en associant à A unitaire la rotation ρ_A précédente.

Montrer que ρ est un morphisme de groupes, surjectif et déterminer son noyau. Conclure.

5) Montrer que si A est pur et unitaire, ρ_A est un demi-tour. Retrouver un résultat précédent.

6) On note $R(w, \theta)$ la rotation de $\mathbb{R}^3$, d'angle θ , et d'axe w .

Trouver $R(e_3, \theta) \circ R(e_2, \theta) \circ R(e_1, \theta)$. Traiter le cas particulier où $\theta = \pi/2$.

7) Peut-on enlever ou ajouter des questions ?

V Application à l'arithmétique

On appelle quaternion entier un quaternion qui s'écrit $a_0 I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$ avec a_i tous de la forme p ($p \in \mathbb{Z}$) ou $1/2(2n+1)$ ($n \in \mathbb{Z}$).

On rappelle qu'on a posé $B = 1/2(E_0 + E_1 + E_2 + E_3)$.

1) Montrer que si q est entier, $N(q)$ est dans $\mathbb{N}$.

Montrer que la somme de deux quaternions entiers est un quaternion entier.

2) Montrer qu'il y a 24 quaternions unitaires entiers.

3) Montrer qu'un quaternion de la forme $k_0 b + \sum k_i E_i$ ($1 \leq i \leq 3$), où k_0 et k_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$, est entier.

Réciproquement montrer que tout quaternion entier peut s'écrire sous la forme $k_0 b + \sum k_i E_i$ ($1 \leq i \leq 3$) où les k_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$.

En déduire que le produit de deux quaternions entiers est entier.

Questions sur le problème

Chercher toutes les questions où intervient la notion de "groupe".

Est-ce seulement à des fins d'étiquetage, de reconnaissance, y a-t-il seulement à appliquer la définition ou des propriétés (technique) ou y a-t-il une autre mise en fonctionnement ?

Citer une connaissance qui a l'air "disponible" dans cet énoncé, c'est à dire qui doit être utilisée sans avoir été citée explicitement.

Comparer divers énoncés de problèmes sur quaternions.

Groupe

Loi interne, associative, élément neutre, tout élément admet un symétrique

Commutatif ou non

Possibilité de résoudre $a \cdot x = b$

Sous-groupe, morphisme

Exemples

Anneau

groupe commutatif, deuxième loi interne, associative, distributive par rapport à la première (élément neutre). Commutatif ou non.

Possibilité de travailler sur $ax^n + \dots + g$

Caractéristique d'un anneau : le plus petit entier tel que $p \cdot 1 = 0$

(entier premier si l'anneau est intègre).

Arithmétique (anneau euclidien, principal, factoriel)

Sous-anneau, idéal, morphisme

Exemples

Corps

anneau unitaire, tout élément non nul admet un symétrique pour la deuxième loi.

Commutatif ou non.

Possibilité de résoudre $ax + b = 0$

Caractéristique d'un corps (même définition) - si la caractéristique est nulle, l'équation $rx=b$, où r entier ou rationnel, a une seule solution.

Extensions de corps (résolutions d'équations)

Sous-corps, morphisme

Exemples

Espace vectoriel sur un corps K

Groupe commutatif, loi externe telle que $1 \cdot x = x$, $u(x + y) = ux + uy$, $(u + v)x = ux + vx$, $(uv)x = u(vx)$.

Possibilité de travailler sur des combinaisons linéaires.

Modules

Sous-espace vectoriel, morphisme (application linéaire)

Exemples

Algèbre sur un corps K

Espace vectoriel, et deuxième loi interne, et distributive sur la première, avec de plus

$(uv)(xy) = (ux)(vy)$

Si la deuxième loi est associative, anneau.

Si la deuxième loi admet un élément neutre (resp est commutative), l'algèbre est unitaire (resp. commutative).

Si l'espace vectoriel est de dimension finie, l'algèbre aussi (même dimension).

Sous-algèbre, morphisme

Exemples

Structures abstraites

1- Groupe

a- Axiomes

Un groupe est un ensemble G muni d'une loi de composition interne notée ici $\times$ (i.e. une application $G \times G \rightarrow G$, $(x, y) \mapsto x \times y$) vérifiant :

- $\times$ est associative (i.e. $(x \times y) \times z = x \times (y \times z)$ pour tous x, y, z de G ; on note $x \times y \times z$ ce produit) ;
- G possède un élément neutre e pour $\times$ (i.e. $x \times e = e \times x = x$ pour tout $x \in G$) ;
- tout élément de G possède un symétrique pour $\times$ (i.e. pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x \times y = y \times x = e$; on note souvent $y = x^{-1}$).

Si en outre $\times$ est commutative (i.e. $x \times y = y \times x$ pour tous x et y de G), le groupe est dit *commutatif* ou *abélien*.

b- Sous-groupe, homomorphisme de groupes

Un sous-groupe d'un groupe G est une partie de G qui soit un groupe pour la loi de G .

Proposition. $H \subseteq G$ est un sous-groupe de G si, et seulement si

- H est stable pour la loi de G ;
- le symétrique (pour la loi de G) de tout élément de H est dans H .

Une application f d'un groupe G dans un groupe H est un homomorphisme de groupes si, et seulement si elle préserve les lois de G et de H , c'est-à-dire si, et seulement si $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x et y de G .

c- Exemples fondamentaux

L'addition usuelle dans $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})$ où $m \in \mathbb{Z}^*$, et dans leurs puissances.

La multiplication usuelle dans $\mathbb{Q}^*, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{C}^*$, dans l'ensemble des nombres complexes de module un, dans l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité ($n \geq 1$).

La composition dans S_A (groupe symétrique de l'ensemble A) ; dans $GL(E)$ (groupe linéaire de l'espace vectoriel E) et dans ses sous-groupes $SL(E), O(E), SO(E), U(E), SU(E)$; dans l'ensemble des similitudes (resp. des similitudes directes) planes, etc...

Le produit matriciel dans $GL_n(k)$ (matrices carrées $n \times n$ inversibles ($n \in \mathbb{N}^*$) à coefficients dans le corps k), $SL_n(k), O_n(\mathbb{R}), SO_n(\mathbb{R}), U_n(\mathbb{C}), SU_n(\mathbb{C})$; dans l'ensemble des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures), etc...

2- Anneau

a- Axiomes

Un anneau (unitaire) est un ensemble A muni de deux lois de composition interne notées ici $+$ (addition) et $\times$ (multiplication) vérifiant :

- $(A, +)$ est un groupe abélien ; on note souvent son élément neutre 0 et $-a$ le symétrique de $a \in A$ pour $+$ (on parle de l'opposé de a) ;
- $\times$ est associative et admet un élément neutre souvent noté 1 ;
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition (i.e. $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ et $(a + b) \times c = a \times c + b \times c$ pour tous a, b et c de A).

Si en outre la multiplication est commutative, l'anneau est dit *commutatif*.

Les règles de calcul dans un anneau commutatif sont celles de $\mathbb{Z}$; en particulier, la formule du binôme de Newton est vraie dans un anneau commutatif (ou dans un anneau général entre deux éléments qui commutent).

b- Sous-anneau, idéal, homomorphisme d'anneaux

Un sous-anneau d'un anneau A est une partie de A qui soit un anneau pour les lois de A . Une partie B d'un anneau $(A, +, \times)$ est un sous-anneau de A si, et seulement si $(B, +)$ est un sous-groupe de $(A, +)$ contenant 1, et B est stable pour la multiplication de A .

Un idéal d'un anneau commutatif A est une partie I de A telle $(I, +)$ soit un sous-groupe de $(A, +)$ et $ia \in I$ pour tous $i \in I$ et $a \in A$.

Une application f d'un anneau A dans un anneau B est un homomorphisme d'anneaux si, et seulement si elle préserve les unités et les lois de A et B , c'est-à-dire si, et seulement si $f(1) = 1$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous x et y de A .

c- Exemples fondamentaux

$\mathbb{Z}$, et les corps de nombres $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ pour leurs lois usuelles.

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel (la multiplication est la composition) ; l'ensemble des matrices carrées à coefficients dans un corps (la multiplication est le produit matriciel usuel).

L'ensemble des applications d'un ensemble E dans un anneau A (pour les lois usuelles $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(fg)(x) = f(x)g(x)$).

L'ensemble des applications polynomiales sur un corps k (i.e. les applications $k \rightarrow k$ de la forme $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_dx^d$ où les a_i sont dans k).

Les anneaux des polynômes à coefficients dans un anneau A .

3- Corps

a- Axiomes

Un corps est un anneau A dans lequel tout élément non nul x admette un symétrique (dit alors l'inverse de x , souvent noté x^{-1}) pour la multiplication. Cela revient à demander que $A \setminus \{0\}$ soit un groupe pour la multiplication.

b- Sous-corps

Un sous-corps d'un corps L est une partie K de L qui soit un corps pour les lois de L . Cela revient à demander que $(K, +)$ soit un sous-groupe de $(L, +)$ et que $(K^*, \times)$ soit un sous-groupe de $(L^*, \times)$.

c- Exemples fondamentaux

$\mathbf{Q}, \mathbf{R}$ et $\mathbf{C}$ pour leurs lois usuelles.

Le corps des nombres algébriques.

Les corps de nombres algébriques.

Les corps finis $\mathbf{F}_{p^n}$.

L'ensemble des fractions rationnelles sur un corps.

$\mathbf{k}[X]/(P)$ si $\mathbf{k}$ est un corps et si P est un polynôme irréductible de $\mathbf{k}[X]$.

L'ensemble des fonctions méromorphes sur un ouvert de $\mathbf{C}$.

Le corps des quaternions (non commutatif).

4- Espace vectoriel

a- Axiomes

Un espace vectoriel sur le corps $\mathbf{k}$ est un ensemble E muni d'une loi de composition interne ("addition") notée $+$ et d'une loi externe sur $\mathbf{k}$ notée $\cdot$ (i.e. une application $\mathbf{k} \times E \rightarrow E, (a, x) \mapsto a \cdot x$; "multiplication par les scalaires") vérifiant :

i) $(E, +)$ est un groupe abélien ;

ii) pour tous $(a, b) \in \mathbf{k}^2$ et $(x, y) \in E^2$,

- $1 \cdot x = x$;
- $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;
- $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$;
- $a \cdot (b \cdot x) = (ab) \cdot x$.

b- Sous-espace vectoriel, application linéaire

Un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une partie de E qui soit un espace vectoriel pour les lois de E . Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel de E si, et seulement si F est non vide et stable pour les lois de E , i.e. $x + y \in F$ et $a \cdot x \in F$ pour tous $(x, y) \in F^2$ et $a \in \mathbf{k}$.

Une application f d'un espace vectoriel E sur $\mathbf{k}$ dans un espace vectoriel F sur $\mathbf{k}$ est une application linéaire (ou homomorphisme d'espaces vectoriels) si, et seulement si elle préserve les lois de E et F , c'est-à-dire si, et seulement si $f(x + y) = f(x) + f(y)$ et $f(a \cdot x) = a \cdot f(x)$ pour tous $(x, y) \in E^2$ et $a \in \mathbf{k}$.

c- Exemples fondamentaux

k^n où $n \in \mathbf{N}^*$, pour les lois $(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n)$ et $a \cdot (x_1, \dots, x_n) = (ax_1, \dots, ax_n)$; prototype d'espace vectoriel de dimension finie égale à n .

L'ensemble des applications linéaires d'un espace vectoriel dans un autre (pour les lois $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x)$).

L'ensemble des suites à coefficient dans $\mathbf{k}$ (dimension dénombrable), pour les lois $(x_n)_n + (y_n)_n = (x_n + y_n)_n$ et $a \cdot ((x_n)_n) = (ax_n)_n$.

L'ensemble des applications d'un ensemble X dans le corps $\mathbf{k}$ pour les lois usuelles.

Si K est un anneau, extension d'un corps k , alors K est un espace vectoriel sur k .

5- Algèbre sur un corps

a- Axiomes

Une algèbre (unifère) A sur le corps $\mathbf{k}$ est un ensemble muni de deux lois de composition interne notées $+$ (addition) et $\times$ (multiplication) et d'une loi externe sur $\mathbf{k}$ notée $\cdot$ vérifiant :

i) $(A, +, \times)$ est un anneau ;

ii) $(A, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbf{k}$;

iii) $(a \cdot x) \times y = x \times (a \cdot y) = a \cdot (x \times y)$ pour tous $(x, y) \in A$ et $a \in \mathbf{k}$; on note ce produit $a \cdot x \times y$.

L'axiome iii) revient à demander que l'application $A \times A \rightarrow A, (x, y) \mapsto x \times y$ soit bilinéaire pour la structure d'espace vectoriel d' A .

b- Sous-algèbre, homomorphisme d'algèbres

Une partie d'une algèbre en est une sous-algèbre si, et seulement si elle en est à la fois un sous-anneau et un sous-espace vectoriel. Les sous-algèbres sont les sous-anneaux stables pour la loi externe.

Une application d'une $\mathbf{k}$ -algèbre dans une autre est un homomorphisme de $\mathbf{k}$ -algèbres si, et seulement si elle est à la fois une application linéaire et un homomorphisme d'anneaux.

c- Exemples fondamentaux

L'ensemble des endomorphismes d'un espace vectoriel (la multiplication est la composition).

L'ensemble des matrices carrées à coefficients dans un corps (la multiplication est le produit matriciel).

L'ensemble des polynômes à coefficients dans un corps.

L'ensemble des applications d'un ensemble dans un corps.

2) Le travail de chaque séance

a) A chaque séance on propose aux étudiants de résoudre une partie du problème : la première partie est abordée dans les deux premières séances, la troisième et la quatrième dans les trois séances suivantes. Une ou deux questions sont préparées (à la maison) d'une séance sur l'autre.

b) Dans le même temps, à chaque séance, est proposée une réflexion sur ce qui a été résolu par les étudiants, à partir d'analyses d'énoncés de questions du problème. On distribue en particulier trois autres énoncés (niveau deug ou capes) sur les quaternions (*documents ci-joints*) et on les compare.

Soit R le corps des nombres réels et C celui des nombres complexes.

On note $\mathcal{M}_{2,2}(C)$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients complexes.

α étant un complexe, on note $\bar{\alpha}$ son conjugué.

On désigne par E l'espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3, rapporté à une base orthonormale directe

$$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3).$$

On note $\|\vec{v}\|$ la norme euclidienne d'un vecteur $\vec{v}$ de E .

Partie I

On considère le sous ensemble $\mathcal{M}$ de $\mathcal{M}_{2,2}(C)$ constitué des matrices M qui s'écrivent sous la forme :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \text{ où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont deux nombres complexes arbitraires.}$$

I.1. Structure d'anneau.

I.1.a. Montrer que les restrictions à $\mathcal{M}$ de l'addition et de la multiplication matricielles confèrent à $\mathcal{M}$ une structure d'anneau.

I.1.b. A tout $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}$, on associe $\tilde{M} = \begin{pmatrix} \bar{\alpha} & -\beta \\ +\bar{\beta} & \alpha \end{pmatrix}$.

Montrer que $\tilde{M} \in \mathcal{M}$.

Calculer $\tilde{\tilde{M}}$, M et $M \cdot \tilde{M}$.

I.1.c. Soient M_1 et M_2 deux éléments de $\mathcal{M}$. Exprimer $\widetilde{M_1 \cdot M_2}$ en fonction de $\tilde{M}_1$ et $\tilde{M}_2$.

I.2. Structure d'espace vectoriel.

I.2.a. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,2}(C)$ considéré comme espace vectoriel réel.

I.2.b. Soit une matrice $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, élément de $\mathcal{M}$, où $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, (a, b, c, d réels).

Montrer que l'on peut écrire M sous la forme $M = aB_1 + bB_2 + cB_3 + dB_4$ où B_1, B_2, B_3 et B_4 sont quatre matrices de $\mathcal{M}$ que l'on précisera.

I.2.c. Trouver une base de cet espace vectoriel réel.

I.3. Structure de corps.

On désigne par $\mathcal{M}^*$ l'ensemble $\mathcal{M}$ privé de l'élément nul de $\mathcal{M}_{2,2}(C)$.

I.3.a. Montrer que tout élément M de $\mathcal{M}^*$ admet un inverse M^{-1} dans $\mathcal{M}^*$ pour la multiplication matricielle.

I.3.b. Exprimer M^{-1} à l'aide de $\tilde{M}$.

I.4. Morphismes et sous-algèbres.

I.4.a. Soit l'application Φ de C dans $\mathcal{M}$ qui associe à tout nombre complexe α la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\forall (\lambda, \alpha, \alpha_1, \alpha_2) \in R \times C^3 \begin{cases} \Phi(\alpha_1 + \alpha_2) = \Phi(\alpha_1) + \Phi(\alpha_2) \\ \Phi(\alpha_1 \cdot \alpha_2) = \Phi(\alpha_1) \cdot \Phi(\alpha_2) \\ \Phi(\lambda \cdot \alpha) = \lambda \cdot \Phi(\alpha) \end{cases}$$

I.4.b. Soit l'application φ de R dans $\mathcal{M}$ qui associe à tout nombre réel a la matrice $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Montrer les propriétés suivantes :

$$\forall (\lambda, a, a_1, a_2) \in R^4 \begin{cases} \varphi(a_1 + a_2) = \varphi(a_1) + \varphi(a_2) \\ \varphi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \\ \varphi(\lambda \cdot a) = \lambda \cdot \varphi(a) \end{cases}$$

Partie II

Dans l'ensemble produit $\Gamma = R \times E$ où les éléments q sont notés $(t, \vec{v})$, on définit les opérations suivantes :
 L'addition de 2 éléments de Γ :

$$q_1 + q_2 = (t_1, \vec{v}_1) + (t_2, \vec{v}_2) = (t_1 + t_2, \vec{v}_1 + \vec{v}_2).$$

La multiplication d'un élément de Γ par un réel λ :

$$\lambda \cdot q = \lambda \cdot (t, \vec{v}) = (\lambda t, \lambda \vec{v}).$$

La multiplication de deux éléments de Γ :

$$q_1 * q_2 = (t_1, \vec{v}_1) * (t_2, \vec{v}_2) = (t_1 \cdot t_2 - \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2, t_2 \vec{v}_1 + t_1 \vec{v}_2 + \vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2)$$

où $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$ (respectivement $\vec{v}_1 \wedge \vec{v}_2$) désigne le produit scalaire (respectivement le produit vectoriel) des vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$.

II.1. Structure d'espace vectoriel.

Montrer que Γ muni des deux premières opérations ci-dessus est un espace vectoriel sur R .

II.2. Structure d'anneau.

II.2.a. A la matrice $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$, dans laquelle $\alpha = a + ib$ et $\beta = c + id$, on fait correspondre le couple de

$$\Gamma : (a, b\vec{e}_1 + c\vec{e}_2 + d\vec{e}_3).$$

Montrer que l'on définit ainsi une application Ψ de $\mathcal{M}$ dans Γ possédant les propriétés suivantes :

Ψ est une bijection de $\mathcal{M}$ sur Γ
 pour tout couple (M_1, M_2) d'éléments de $\mathcal{M}$, on a : $\Psi(M_1 \cdot M_2) = \Psi(M_1) \times \Psi(M_2)$.

II.2.b. Dédurre de ce qui précède que Γ , muni des opérations d'addition et de multiplication, est un anneau dont on précisera l'élément unité.

II.2.c. Cet anneau est-il commutatif ?

II.3. Structure de groupe multiplicatif.

Soit Γ^* l'ensemble Γ privé de l'élément nul $(0, \vec{0})$.

II.3.a. Soit $q = (i, \vec{V})$ un élément de Γ , on pose $\hat{q} = (i, -\vec{V})$. Montrer que $\hat{q} \times q$ est un élément de $R \times \{\vec{0}\}$.

II.3.b. En déduire que tout élément de Γ^* admet un inverse relativement à la multiplication de Γ .

II.3.c. Prouver que Γ^* , muni de la multiplication de Γ , est un groupe.

Partie III

On note S l'ensemble des éléments de Γ qui vérifient $i^2 \times \|\vec{V}\|^2 = 1$, et S l'ensemble des vecteurs $\vec{V}$ qui vérifient $\|\vec{V}\| = 1$.

III.1. Montrer que S est un sous groupe du groupe multiplicatif $(\Gamma^*, \times)$.

III.2. Montrer que $\forall q \in S, \exists \theta \in R$ et $\exists \vec{W} \in S$ tels que $q = (\cos \theta, \sin \theta \vec{W})$.

III.3. Soit q un élément de S , on lui associe l'application ρ définie par :

$$\Gamma \xrightarrow{\rho} \Gamma \\ r \rightarrow q \times r \times q^{-1}$$

Montrer que ρ est stable dans $\{0\} \times E$. On définit $\hat{\rho}$: application de E dans lui-même, par

$$\rho((0, \vec{V})) = (0, \hat{\rho}(\vec{V})).$$

III.4. Soit q un élément de S défini par $q = (\cos \theta, \sin \theta \vec{W})$ où $\|\vec{W}\| = 1$ auquel on associe $\hat{\rho}$ comme il a été dit précédemment.

III.4.a. Montrer que $\vec{W}$ est un invariant de $\hat{\rho}$.

III.4.b. Soit $\vec{V}$ un vecteur orthogonal à $\vec{W}$, exprimer $\hat{\rho}(\vec{V})$ à l'aide de $\vec{V}$ et de $\vec{W} \wedge \vec{V}$.

III.4.c. En déduire que $\hat{\rho}$ est la rotation d'axe $\vec{W}$ et d'angle 2θ .

III.5. On note $\mathcal{R}(\vec{W}, \theta)$ la rotation d'axe $\vec{W}$ et d'angle θ . Utiliser les résultats précédents pour déterminer le

produit $\mathcal{R}(\vec{e}_3, \theta) \circ \mathcal{R}(\vec{e}_1, \theta) \circ \mathcal{R}(\vec{e}_1, \theta)$.

33. On appelle *quaternion* une matrice de la forme :

$$(1) \quad A = a_0 E_0 + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$$

où les a_i sont des nombres réels arbitraires et où :

$$E_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix},$$

i étant le nombre complexe habituel tel que $i^2 = -1$.

1° Montrer que l'ensemble $\mathbb{H}$ des quaternions constitue un espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

2° Démontrer les formules :

$$\begin{cases} E_0 E_k = E_k E_0 = E_k, & k = 0, 1, 2, 3 \\ (2) \quad \begin{cases} E_1 E_2 = -E_2 E_1 = E_3, & E_2 E_3 = -E_3 E_2 = E_1, & E_3 E_1 = -E_1 E_3 = E_2 \\ E_k^2 = -E_0, & k = 1, 2, 3 \end{cases} \end{cases}$$

3° On appelle quaternion conjugué de A le quaternion :

$$\bar{A} = a_0 E_0 - a_1 E_1 - a_2 E_2 - a_3 E_3,$$

et on pose $N(A) = a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$

Montrer que $A\bar{A} = \bar{A}A = N(A)E_0$.

Montrer que, si $A \neq 0$, il existe un quaternion A^{-1} tel que

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E_0.$$

En déduire que $\mathbb{H}$ est un corps (non commutatif).

Montrer que $A\bar{B} = \overline{B\bar{A}}$ et que $N(AB) = N(A)N(B)$.

4° Un quaternion A est dit *unitaire* si $N(A) = 1$. Il est dit *pur* si $a_0 = 0$. Nous poserons $S(A) = \frac{1}{2}(A + \bar{A})$, $\mathcal{U}(A) = \frac{1}{2}(A - \bar{A})$; $S(A)$ sera dit la partie scalaire de A et le quaternion pur $\mathcal{U}(A)$ sa partie vectorielle.

Démontrer que l'ensemble $\mathbb{H}_0$ des quaternions purs est un espace vectoriel de dimension 3 sur $\mathbb{R}$ et que, si A est un quaternion pur unitaire, $A^2 = -E_0$.

Montrer que les quaternions unitaires constituent un groupe multiplicatif.

II

1° Soit B un quaternion pur et A un quaternion quelconque; on pose :

$$Y = 2\mathcal{U}(A)\mathcal{U}(B) = \mathcal{U}(A)B - B\mathcal{U}(A)$$

Montrer que $\mathcal{U}(A)Y + Y\mathcal{U}(A) = 0$. En déduire que, pour tout quaternion A , il existe un quaternion unitaire η tel que $A\eta = \eta\bar{A}$.

2° Soit A et B deux quaternions tels que $N(A) = N(B)$, $S(A) = S(B)$ et $B \neq A$. Démontrer que :

$$A(AB - N(B)E_0) = (AB - N(A)E_0)B$$

En déduire que, si A et B sont deux quaternions ayant la même norme et la même partie scalaire, il existe un quaternion unitaire η tel que $A\eta = \eta B$.

3° Montrer que, si A est un quaternion unitaire, on peut l'écrire sous la forme $A = \cos \alpha E_0 + \sin \alpha U$, où U est un quaternion pur unitaire. Montrer que, si n est un entier positif, on a $A^n = \cos n\alpha E_0 + \sin n\alpha U$.

III

Soit $\mathcal{E}$ un espace vectoriel euclidien de dimension 3 rapporté à la base ortho-normée (e_1, e_2, e_3) et g l'isomorphisme de $\mathbb{H}_0$ sur $\mathcal{E}$ défini par $g(E_k) = e_k$, $k = 1, 2, 3$. On notera plus généralement x le vecteur $x = g(X)$ image de $X \in \mathbb{H}_0$ par l'isomorphisme g .

1° Soit $X = x_1 E_1 + x_2 E_2 + x_3 E_3$, $Y = y_1 E_1 + y_2 E_2 + y_3 E_3$.

Montrer que $XY = -(x \wedge y)E_0 + g^{-1}(x \wedge y)$ où $x \wedge y$ désigne le produit scalaire des vecteurs x et y de $\mathcal{E}$ et $x \wedge y$ leur produit vectoriel.

Démontrer que pour que x et y soient orthogonaux, il faut et il suffit que $XY + YX = 0$ et que si y est unitaire, cette condition s'écrit $X = YXY$.

2° On suppose $N(Y) = 1$ et $Y \in \mathbb{H}_0$ et on considère la transformation de $\mathbb{H}_0$ définie par $X \mapsto X' = YXY$; démontrer que le vecteur x' se déduit de x par la symétrie par rapport à une droite.

3° On considère les deux symétries représentées par les transformations de $\mathbb{H}_0$ définies par $X \mapsto YXY$, $X \mapsto ZXZ$, où Y et Z sont purs et $N(Y) = N(Z) = 1$.

Montrer que la rotation produite de ces deux symétries a son axe défini par le vecteur $y \wedge z$ et que son angle φ est donné par $\cos \frac{\varphi}{2} = -y \cdot z$.

4° En déduire que la transformation de $\mathbb{H}_0$ définie par $X \mapsto AX\bar{A}$, où A est unitaire, correspond à la rotation d'angle φ tel que $\cos \frac{\varphi}{2} = S(A)$, autour de l'axe défini par $\mathcal{U}(A)$ et que, inversement, la rotation d'angle φ autour du vecteur $p_1 e_1 + p_2 e_2 + p_3 e_3$ de $\mathcal{E}$ est représentée par $X \mapsto AX\bar{A}$, où

$$A = \cos \frac{\varphi}{2} E_0 + \sin \frac{\varphi}{2} (p_1 E_1 + p_2 E_2 + p_3 E_3)$$

5° Montrer que $SO(3)$ est homomorphe au groupe multiplicatif des quaternions unitaires. Combien de quaternions unitaires correspondent-ils par cet homomorphisme à une rotation de $\mathcal{E}$?

Deuxième épreuve 84

Soit $\mathcal{V}$ un espace vectoriel euclidien orienté de dimension 3. On considère l'espace vectoriel produit $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$, de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, dont les éléments sont les couples $(x, \vec{U})$.

On définit sur $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ une multiplication par : $(x, \vec{U})(y, \vec{V}) = (xy - \vec{U} \cdot \vec{V}, x\vec{V} + y\vec{U} + \vec{U} \wedge \vec{V})$ où $\vec{U} \cdot \vec{V}$ est le produit scalaire et $\vec{U} \wedge \vec{V}$ le produit vectoriel des vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$.

Cette multiplication a pour élément neutre $e = (1, \vec{0})$. L'espace vectoriel de $\mathbb{R} \times \mathcal{V}$ muni de la multiplication est noté $\mathcal{H}$ et ses éléments sont appelés les *quaternions*.

Partie I

1. Déterminer les quaternions $q = (x, \vec{U})$ tels que $q^2 = e$ puis ceux tels que $q^2 = -e$.
2. Soit $\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}$ trois vecteurs de $\mathcal{V}$.
 - a) Montrer que $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ est une base orthonormale directe de $\mathcal{V}$ si, et seulement si, les trois quaternions $i = (0, \vec{I}), j = (0, \vec{J}), k = (0, \vec{K})$ vérifient : $i^2 = j^2 = -e$ et $ij = k$.
 - b) Lorsqu'il en est ainsi, vérifier que $ji = -k$ et calculer k^2, jk, kj, ki, ik . Vérifier les 5 égalités $i^2i = ii^2, i^2j = i(ij), (ij)i = i(ji), (ij)j = ij^2, (ij)k = i(jk)$.
 - c) En déduire sans autre calcul que la multiplication de $\mathcal{H}$ est associative. (On pourra utiliser le fait (évident) que la multiplication est une application bilinéaire de $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.)
3. Etant donné un quaternion $q = (x, \vec{U})$, déterminer les quaternions $r = (y, \vec{V})$ tels que $rq = qr$. En déduire les quaternions q tels que $rq = qr$ pour tout quaternion r ; ces quaternions sont dits réels.
4. Montrer que l'addition et la multiplication de $\mathcal{H}$ lui confèrent la structure de corps (non commutatif).
5. A tout quaternion $q = (x, \vec{U})$ on associe son conjugué $\bar{q} = (x, -\vec{U})$ et le réel $N(q) = x^2 + \vec{U} \cdot \vec{U}$. Ainsi les quaternions égaux à leur conjugué sont les quaternions réels. Les quaternions opposés à leur conjugué, c'est à dire de la forme $(0, \vec{U})$ sont dits *purs*.
 - a) Exprimer les produits $q\bar{q}$ et $\bar{q}q$ en fonction de $N(q)$.
 - b) Exprimer le conjugué $\overline{qr}$ du produit qr de 2 quaternions q et r quelconques en fonction des conjugués $\bar{q}$ et $\bar{r}$. En déduire $N(qr)$ en fonction de $N(q)$ et $N(r)$.
 - c) Montrer que les quaternions q tels que $N(q) = 1$ forment un groupe pour la multiplication des quaternions. Ce groupe est noté S dans toute la suite.
 - d) Montrer que pour tout quaternion q non nul il existe un unique (ρ, u) où $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ et $u \in S$ tel que $q = \rho u$.
6. L'application $q \mapsto \sqrt{N(q)}$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathbb{R}$ est une norme euclidienne. Ceci permet de considérer aussi dorénavant $\mathcal{H}$ comme un espace euclidien pour cette norme. Soit $q = (0, \vec{U})$ et $r = (0, \vec{V})$ deux quaternions purs. Exprimer le produit scalaire de q et r (pour la structure euclidienne ci-dessus de $\mathcal{H}$) en fonction de $\vec{U}$ et $\vec{V}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
 - (i) q et r sont orthogonaux.
 - (ii) qr est un quaternion pur.
 - (iii) $qr + rq = 0$.

Partie II

1. a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $\vec{T}$ un vecteur unitaire de $\mathcal{V}$. On considère le quaternion $s = (\cos \theta, \sin \theta \vec{T})$ de S et l'application $\Phi_s : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}, q \mapsto sqs^{-1}$.
Montrer que si $q = (x, \vec{U})$, et si $\Phi_s(q) = (x', \vec{U}')$, alors $x = x'$ et $\vec{U}' = R_s(\vec{U})$ où R_s est une rotation de $\mathcal{V}$, ne dépendant que de q , laissant $\vec{T}$ fixe, et dont on précisera l'angle.

- b) Vérifier que par $s \mapsto R_s$, on établit un morphisme surjectif du groupe S sur le groupe O^+ des rotations de $\mathcal{V}$. Quel est le noyau de ce morphisme ? En déduire un isomorphisme faisant intervenir les groupes S et O^+ .
2. a) Montrer que si p et q sont des quaternions purs de S , alors il existe un quaternion s de S tel que $q = sps^{-1}$. Le quaternion s peut-il être choisi pur ?
 b) Démontrer que tout quaternion pur de S est produit de 2 quaternions purs de S .
3. On se propose de démontrer qu'il existe un seul morphisme de O^+ dans S . Pour cela on considère la partie Σ de O^+ formée des rotations d'angle π .
 a) Soit ψ un morphisme de O^+ dans S . Montrer que : $\forall \sigma \in \Sigma, \psi(\sigma) = e$ ou $\psi(\sigma) = -e$.
 b) Montrer que : $\forall (\sigma, \sigma') \in \Sigma^2, \exists \sigma'' \in \Sigma, \sigma' = \sigma'' \sigma \sigma''$. En déduire que : $\psi(\sigma) = \psi(\sigma')$.
 c) Montrer que $\psi(O^+) = \{e\}$.
4. Soit G un sous-groupe distingué de S . On suppose que G contient un élément distinct de e et de $-e$. On se propose de démontrer que $G = S$. On pourra utiliser qu'un sous-groupe G de S est distingué si, et seulement si, $\phi_S(G) \subset G$ pour tout s de S .
 a) Montrer à l'aide de II.2. que si G contient un quaternion pur, alors $G = S$.
 b) On considère deux quaternions purs i et j de S orthogonaux (selon la définition donnée en I.6.) et $k = ij = -ji$. On suppose que G contient un quaternion $ae + bi$, où a et b sont deux réels non nuls (avec $a^2 + b^2 = 1$). Montrer que G contient $ae + bj$, puis $a^2e + ci$, avec $c = b\sqrt{1+a^2}$. En déduire que G contient un quaternion $s = \alpha e + \beta i$ où α et β sont deux réels tels que $0 < \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Montrer que G contient un quaternion pur. (On le cherchera sous la forme $sqs^{-1}q^{-1}$, où $q = xe + yj$, avec x, y réels, est un élément de S).
 c) Montrer que $G = S$. En déduire que O^+ n'a pas de sous-groupes distingués non triviaux.

Partie III

1. Vérifier que l'application $\phi_s : q \mapsto sqs^{-1}$ est un automorphisme du corps et de l'espace vectoriel $\mathcal{H}$.
2. Soit τ un morphisme du corps des réels dans lui-même (en particulier, on a $\tau(1) = 1$).
 a) Montrer que $\tau(r) = r$ pour tout rationnel.
 b) Montrer que si $x \in \mathbb{R}_+^*$, il en est de même de $\tau(x)$. En déduire que τ est croissant.
 c) Montrer que τ est l'identité.
3. Soit μ un automorphisme du corps $\mathcal{H}$ des quaternions.
 a) Montrer que μ laisse stable l'ensemble des quaternions réels, puis, qu'il laisse fixe tout quaternion réel. En déduire que μ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{R}$.
 b) Soit q et r deux quaternions purs et orthogonaux de S . Montrer que $\mu(q)$ et $\mu(r)$ sont encore purs, orthogonaux et dans S .
 Soit q' et r' deux quaternions purs et orthogonaux de S . Montrer qu'il existe un unique automorphisme du corps $\mathcal{H}$ transformant q en q' et r en r' .
 c) Montrer qu'il existe un s de S tel que $\mu = \phi_s$.

Partie IV

1. On considère une base orthonormale (e, i, j, ij) de $\mathcal{H}$.
 a) Soit $r = ae + bi$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que l'application δ_r de $\mathcal{H}$ dans lui-même définie par $\delta_r(q) = rq$ pour tout quaternion q est une transformation orthogonale directe de l'espace euclidien $\mathcal{H}$ en donnant sa matrice dans la base (e, i, j, ij) .
 Montrer plus généralement qu'il en est de même pour l'application $\delta_{r,s}$ de $\mathcal{H}$ dans lui-même définie pour tous r et s de S par $\delta_{r,s}(q) = rqs^{-1}$ pour tout quaternion q .

- b) Vérifier que par $(r, s) \mapsto \delta_{r,s}$ on établit un morphisme surjectif du groupe produit $S \times S$ sur le groupe Ω des transformations orthogonales directes de l'espace euclidien $\mathcal{H}$ (on pourra utiliser le fait que, d'après le II.1.b), les éléments de Ω qui laissent e fixe sont les ϕ_S)
 Quel est le noyau de ce morphisme ?
 En déduire un isomorphisme faisant intervenir $S \times S$ et Ω .
2. a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les quaternions r et s pour que $\delta_{r,s}$ soit une involution distincte de $Id_{\mathcal{H}}$ (identité de $\mathcal{H}$) et de $-Id_{\mathcal{H}}$.
 b) Montrer que tout élément de Ω est produit de deux symétries orthogonales de $\mathcal{H}$ par rapport à des plans vectoriels.
 c) En déduire les morphismes de Ω dans $S \times S$.
3. a) Donner un exemple de groupe produit $G \times G$ possédant un sous-groupe distingué qui n'est pas le produit $H_1 \times H_2$ de deux sous-groupes distingués H_1 et H_2 de G .
 b) Dans toute la suite K est un sous-groupe distingué du groupe produit $S \times S$. On note K_1 et K_2 les images respectives de K par les applications $(r, s) \mapsto r$ et $(r, s) \mapsto s$ de $S \times S$ dans S . Vérifier que K_1 et K_2 sont deux sous-groupes distingués de S et que K est un sous-groupe distingué de $K_1 \times K_2$.
 c) Déterminer K lorsque $K_1 = \{e\}$, puis lorsque $K_1 = K_2 = \{e, -e\}$.
 d) montrer les résultats suivants :
 (i) S'il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit un élément de K , alors $\{e\} \times S$ est inclus dans K . En déduire qu'alors $K = K_1 \times K_2$.
 (ii) S'il existe un quaternion pur p tel que $(-e, p)$ soit un élément de K , alors il existe un quaternion pur p' tel que $(\bar{e}, p')$ soit dans K .
 (iii) S'il existe un quaternion non réel s tel que $(-e, s)$ soit un élément de K , alors il existe un quaternion pur p tel que (e, p) soit dans K .
 (iv) Si $K_1 = K_2 = S$, alors il existe un quaternion non réel s tel que $(-e, s)$ soit dans K (on pourra considérer le carré d'un élément (p, r) de K , avec p pur.)
 e) Donner le nombre et la liste des sous-groupes distingués de $S \times S$, puis de Ω .

i) La première séance permet ainsi d'introduire **différents niveaux de mises en fonctionnement** de certaines notions : ainsi pour montrer une structure de groupe, on a le choix entre dérouler les axiomes de groupe ou montrer qu'on a un sous-groupe, ce qui est plus économique. Comme l'énoncé ne précise rien, ce choix doit être pensé par les étudiants, ce qui correspond à une connaissance supposée mobilisable, ou peut-être rendue mobilisable par cette expérience, commentée par l'enseignant.

Peu d'étudiants pensent seuls à la structure de sous-groupe.

De même l'existence d'un inverse pour la loi multiplicative amène à résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Mais les étudiants peuvent ne pas reconnaître qu'il y a un système et résoudre de manière élémentaire et longue (substitution). Là encore, si la reconnaissance d'un tel système n'est pas disponible, cette résolution (choix maladroit puis explicitation du meilleur choix) peut contribuer à l'apprentissage de cette reconnaissance, c'est du moins ce que nous analysons avec les étudiants.

ii) Aux deuxième et troisième séances, on aborde **les descriptions globales** d'un problème ("portrait" du problème) et on donne des éléments de vocabulaire pour décrire des énoncés (*documents joints*).

On analyse aussi quelques questions de manière détaillée, en faisant intervenir les niveaux de fonctionnement déjà introduits, et on compare deux énoncés sur la même situation mathématique (structure de corps des quaternions).

Voici la grille générale et un exemple de ces analyses et comparaisons sur le problème en cours.

Quelques interrogations "techniques" qu'on peut utiliser systématiquement devant un énoncé

Globalement est-ce que les objectifs du problème apparaissent ?

Pour chaque question on peut s'interroger sur :

- * Ouverture/fermeture (aussi bien sur la question posée que sur les méthodes)
- * Découpage : peut-on supprimer des questions, faut-il en ajouter ?
- * Mises en fonctionnement des notions visées : sont-elles techniques ou non ? Sinon quel degré de transformation est nécessaire ? Certaines notions doivent-elles être disponibles ?
- * Moyens de contrôle (internes) : y en a-t-il ? indiqués ou non ?
- * Quelles initiatives pour les ceux qui résolvent ? y a-t-il des choix à faire ?

Rédaction du problème * est-ce que tout ce qui est introduit est bien défini ?

- * est-ce que les notations sont introduites au bon moment ?
- * est-ce qu'on ne suppose pas implicitement des existences, des unicités etc. ?
- * y a-t-il des ambiguïtés (loi non précisée par exemple) ?

Pour comparer plusieurs énoncés sur la même situation mathématique

1) Lisibilité "superficielle" : est-ce qu'à la simple lecture on comprend l'objet (les objets) du problème les objectifs sont-ils annoncés ? A la simple lecture y a-t-il des différences de "facilité" ? Pourquoi ?

Dans les énoncés, y a-t-il des commentaires, un titre, une "morale" ?

Y a-t-il des questions qui sont utilisées pour déboucher sur "autre chose" ? Quelles sont les questions "terminus" ?

2) Est-ce que les contenus mathématiques abordés sont les mêmes (préciser les différences) ?

Pour cela, "raconter" pour chaque problème ce qui est démontré, et comparer (on pourra faire un "graphe" de l'enchaînement des questions).

Déterminer des parties analogues (arrivant au même résultat mathématique), des questions analogues.

3) Sur des parties analogues, le découpage, la taille des étapes, et l'ordre des questions sont-ils les mêmes ?

4) Pour des questions analogues, comparer l'énoncé de la question : entrée dans la question et ouverture, indications (même implicites), production attendue, nature des mises en fonctionnement attendues, du raisonnement attendu. En particulier, y a-t-il des changements (de cadres, de registres, de points de vue) - et à la charge de qui sont-ils ? Y a-t-il des exemples, des cas particuliers ?

5) Les notations sont-elles équivalentes ?

6) Y a-t-il des différences dans les prérequis supposés ?

7) Prendre une ou deux notions qui sont sollicitées dans les différents problèmes et comparer dans toutes les questions les mises en fonctionnement attendues.

8) Globalement, dans chaque texte, quelles initiatives sont nécessaires, sont possibles ? Dans quelles questions y a-t-il possibilité d'utiliser plusieurs méthodes ? Quels moyens de contrôle possibles ? Pouvez-vous détecter des connaissances supposées disponibles ? y a-t-il des ambiguïtés, des implicites dans les énoncés ?

9) Attribuer à chaque énoncé quelques objectifs possibles (globalement) et comparer les différents textes. Revenir sur l'impression de facilité du début, à quoi pouvez-vous l'associer ?

Quelques éléments de vocabulaire spécifique pour analyser un problème : l'exemple des quaternions

A propos de notions mathématiques

Le problème porte sur un exemple de structure (groupe) et non sur un théorème ou une propriété.

Degré de généralisation de ce qui est travaillé par rapport à ce qui est connu :

Par exemple dans le problème sur les quaternions, on généralise des exemples de corps déjà rencontrés.

En revanche les structures à mobiliser sont connues, il n'y a pas de recours à une quelconque unification d'éléments antérieurs.

Formalisme : dans le problème sur les quaternions, rien de nouveau (sauf le nom)

Conséquence didactique : c'est un cas où on peut proposer un problème pour introduire l'exemple, sans toutefois faire découvrir la deuxième loi.

Pourquoi ces questions : à cause de l'importance de la manière d'introduire le nouveau, du lien avec ce qui est connu, pour donner du sens aux notions, grâce au travail de résolution.

Registres

Ce sont des modes de représentation symbolique (des modes d'écriture) d'une même notion.

Ici on a deux registres algébriques : $C \times C$ et $M_2(C)$, et un registre géométrique ($(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3)$).

Pourquoi s'intéresser à ce caractère :

Parce que le travail de passage de l'un à l'autre, si on arrive à l'organiser, permet souvent de donner plus de sens. Cela permet des mises en relation.

Cadres

Ce sont des domaines d'intervention différents pour une même notion.

Ici on a affaire aux cadres algébrique et géométrique.

Pourquoi s'intéresser à ce caractère

Parce que là encore le travail de passage de l'un à l'autre, si on arrive à l'organiser, permet souvent de donner plus de sens (mises en relation).

De plus, c'est souvent un moyen de travail de l'expert.

Niveaux de mise en fonctionnement

* *technique* : mise en fonctionnement isolée, indiquée, sans adaptation (type "gamme")

* *mobilisable* : il y a une adaptation, mais indiquée, ce peut être une double utilisation, ou une utilisation non isolée, etc.

* *disponible* : il faut penser tout seul à utiliser ce qui est en cause.

Dans le problème, par exemple, dans la question de la stabilité des sommes de 4 carrés par produit, on devait interpréter cette somme en terme de $N(z, w)$: cette reconnaissance induit un fonctionnement de type mobilisable de la définition de $N(z, w)$.

La notion de groupe est à utiliser de manière technique dans "montrer que...", en revanche la mise en fonctionnement en est supposée disponible dans la résolution de $ax = b$.

La reconnaissance d'un système linéaire est supposée disponible, la définition du produit vectoriel est supposée mobilisable.

Mots clefs : Explorer / exploiter une situation

Qu'est-ce qui fonctionne ? Pourquoi faire ? Comment ?

Portrait du problème sur les quaternions (première partie)

* On présente l'ensemble des quaternions et ses structures de trois manières différentes et on les met en relation. *Il s'agit donc d'un exemple généralisant des ensembles de nombres déjà connus.* Ni formalisme, ni théorie nouvelle.

* Plus précisément, on commence par présenter les quaternions comme $C \times C$ muni des deux lois qui en font un corps non commutatif.

On introduit pour chaque quaternion la norme et le conjugué (sans les nommer) et cela permet d'exprimer l'inverse.

On déduit la stabilité des sommes de 4 carrés d'entiers, et on prépare le théorème des 4 carrés... (conséquence).

- Puis on définit les quaternions comme sous-ensemble de $M_2(C)$ de deux manières différentes, en faisant retrouver la structure de corps et en rajoutant celle d'algèbre de dimension 4 sur R .

On introduit *dans ce nouveau registre* norme et conjugué.

Mais on ne fait pas communiquer les deux registres.

- Enfin on introduit les quaternions comme $(R \times R^3)$, *dans un cadre géométrique* donc.

On fait retrouver la structure de corps et on introduit norme et conjugué.

- La dernière partie de ce bloc permet de se poser la question de la communication entre ces définitions, on annonce que ce sont des isomorphismes.

On fait *travailler cette pluralité de représentation* en posant deux questions où l'étudiant doit choisir un registre pour travailler.

* **Question par question** : on en choisit certaines.

I 1) le point de vue $C \times C$

a) On utilise la structure de groupe additif de C pour passer aux couples (prérequis supposé disponible).

b) On adapte les propriétés de groupe pour trouver que ce n'en est pas un.

c) mise en fonctionnement technique (fastidieux) des définitions d'un corps.

Pour trouver l'existence d'un inverse, utilisation de résolution de système (supposée disponible)

d) mise en fonctionnement technique des définitions de morphisme et d'injectif.

e) Résolution d'une équation $ax = b$ dans un groupe (supposée disponible)

Calculs (mise en fonctionnement technique des nouvelles opérations définies plus haut).

f) interprétation de la définition de $N(z, z')$, avec adaptation au cas des seuls entiers (mobilisable).

g) adaptation d'une propriété qui vient d'être démontrée. Décomposition en facteurs premiers supposée disponible.

expérience numérique. disponibilité du questionnement sur l'unicité.

2) a) Connaissance du fait que $M_2(C)$ est une algèbre supposée disponible.

Travail technique sur matrices (somme, produit, multiplication par scalaire supposés connus)...

Adaptation à l'ensemble de la caractérisation de sous-espace vectoriel et de dimension (il faut ajouter la liberté du système générateur, à reconnaître).

b) Travail technique sur matrices.

Questionnement : est-ce que la notion d'anneau va être mobilisée ?

c) Technique : sous-groupe, ordre d'un élément.

d) Technique sur algèbre et corps, mais très ennuyeux pour l'inverse...

e) premiers calculs techniques sur matrices, reconnaissance de l'inversibilité (mobilisable).

4) Mises en fonctionnement techniques de produit scalaire et produit vectoriel, à adapter pour trouver l'inverse.

On peut s'inspirer de ce qui précède pour deviner.

Réflexion sur le rôle d'une base.

3) 4) fin, Mises en fonctionnement de la notion d'isomorphisme.: adapter pour proposer un candidat.

Une question de réflexion : sur le mot norme (prérequis à adapter).

5) a) Réflexion sur ce qui vient d'être fait (interprétation, perte d'information, bilan).

b) c) choix de registre... indispensable.

Comparaison de deux énoncés : le problème initial (pb1) et le problème "TA 95" (pb2).

I Global

* Dans les deux énoncés, on présente l'ensemble des quaternions de plusieurs manières (deux ou trois) et on fait démontrer qu'il s'agit d'un corps non commutatif et d'une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.
Le premier énoncé utilise un peu plus la structure (préparation du théorème des 4 carrés) et présente un point de vue de plus (registre).

Les titres sont différents : strictement liés aux résultats à montrer dans le 2), liés aux différents registres dans le pb 1.

Il y a plus de rappels préliminaires dans le pb2 (prérequis supposés disponibles dans le pb 1).

Plus généralement, il y a plus de questions ouvertes, voire de réflexion dans le pb 1).

* Sont comparables les parties 2) du pb1 et I du pb 2, 4) du pb1 et II du pb 2.

II Parties comparables

*** 2) du pb1 et I du pb 2**

Pour montrer qu'on a un anneau : laissé à un questionnement dans le 1), demandé explicitement dans le 2).

Mêmes mises en fonctionnement techniques.

Ce qui diffère, est l'initiative des étudiants pour trouver la structure à utiliser, et pour traduire un terme de loi interne un calcul.

Pour espace vectoriel, au lieu de donner précisément un système générateur, on le fait deviner en l'écrivant formellement. *Au lieu de demander la dimension, on demande une base* (connaissance à mobiliser sinon).

Même démarche pour trouver l'inverse - on a fait calculer MM^* , mais on n'indique pas de s'en servir.

*** 4) du pb1 et II du pb 2**

La structure d'anneau est explicitement déduite de ce qui a déjà été fait dans le pb2). dans le pb 1) c'est plus flou - on a intérêt à s'en inspirer pour l'inverse.

En revanche cet inverse est indiqué dans le pb 2).

iii) Aux quatrième et cinquième séances, on ajoute une autre expérience : on fait un moment de "cours" (exposition de connaissances). *Les documents correspondants, distribués aux étudiants, sont joints.*

Mais deux modalités sont pratiquées : d'une part, sont exposés deux théorèmes (1 et 1') qui reprennent ce qui a été cherché dans le problème par les étudiants, d'autre part on expose un nouveau théorème (2). On illustre ainsi "en vraie grandeur" **la différence entre une exposition de connaissances suivant une recherche, ou la précédant.**

La sixième séance permet de terminer le problème, et de reprendre certaines comparaisons.

3) Le cours

Pour introduire les quaternions, discussion : par quel ensemble commencer ? quel ordre adopter ? quelles étapes reconstituer ?

Avantages des matrices : sous-structures, pas nouvelles lois. Le mieux : $M = a_0 I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$, où les a_i sont des réels (on a sous-algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, il ne manque que l'existence de l'inverse).

Ceci suppose un **prérequis**, l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 sur $\mathbb{C}$ forme une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{C}$, de dimension 8 sur $\mathbb{R}$, pour les lois usuelles sur les matrices (addition, multiplication interne, multiplication par un scalaire complexe ou réel.

Théorème 1

On considère l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui s'écrivent $M = a_0 I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$, où les a_i sont des réels.

Cet ensemble est une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, et un corps non commutatif.

On introduit en même temps **conjugué et norme d'un quaternion** (définitions annexes).

Théorème 1'

Ce corps est isomorphe à l'ensemble $\mathbb{C}^2$ muni de deux lois adéquates et à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, muni de deux lois adéquates. L'isomorphisme est aussi un isomorphisme d'algèbre.

Tableau récapitulatif.

Démonstration du théorème 1

a) Espace vectoriel de dimension 4 sur $\mathbb{R}$, comme sev engendré par 4 matrices libres.

b) Anneau et algèbre, grâce aux calculs des produits des E_i .

c) Corps grâce à l'introduction de q^* , $N(q)$ et à l'égalité $qq^* = N(q) I$.

Démonstration du théorème 1'

a) Pour chacun des deux ensembles, on introduit l'ensemble et les deux lois.

Pour la première loi, on sait déjà dans les deux cas qu'on a un groupe commutatif.

b) On exhibe ensuite explicitement une application bijective qui transporte la structure multiplicative de H sur le nouvel ensemble. Ceci permet de conclure (pour la structure de corps). On introduit conjugué et norme.

c) On vérifie le caractère d'isomorphisme pour la structure d'algèbre.

Tableau récapitulatif

Quaternion q 4 nombres réels a_i	$(z, w), z=a_0+i a_1$ $w=a_2 + i a_3$	$(a_0, \mathbf{V})$ $\mathbf{V}=(a_1, a_2, a_3)$	$\begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix}$	$a_0 I + a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$
$N(q)$ $qq^* = N(q)e$	$ z ^2 + w ^2$	$a_0^2 + \ \mathbf{V}\ ^2$	$\det(Q)$	$\sum_{i=0}^3 a_i^2$
$\text{tr}(q)$			$2a_0$	
q^* (conjugué)	$(\bar{z}, -w)$	$(a_0, -\mathbf{V})$	$\begin{pmatrix} \bar{z} & -w \\ \bar{w} & z \end{pmatrix}$	$a_0 I - a_1 E_1 - a_2 E_2 - a_3 E_3$
q^{-1} (inverse) $q^{-1} = q^*/N(q)$	$(z, -w)/[z ^2 + w ^2]$	$(a_0, -\mathbf{V})/[a_0^2 + \ \mathbf{V}\ ^2]$	$Q/\det(Q)$	$[a_0 I - a_1 E_1 - a_2 E_2 - a_3 E_3]/N(Q)$
pur $A = -A^*$	$a_0 = 0$	$(0, \mathbf{V})$ $\ \mathbf{V}\ ^2 = N(q)$	$\begin{pmatrix} ia_1 & w \\ -\bar{w} & -ia_1 \end{pmatrix} \text{ trace } = 0$	$a_1 E_1 + a_2 E_2 + a_3 E_3$
unitaire : $N(q) = 1$ il s'écrit $\cos\theta I + \sin\theta U$, où U est pur et unitaire. $A^{-1} = \cos\theta I - \sin\theta U$	$ z ^2 + w ^2 = 1$	$a_0^2 + \ \mathbf{V}\ ^2 = 1$ $(\cos\theta, \sin\theta \mathbf{U})$	$\det(Q) = 1$	$\sum_{i=0}^3 a_i^2 = 1$
pur et unitaire : $U^2 = -I$ ou $U^* = -U = U^{-1}$		$(0, \mathbf{U}) \quad \ \mathbf{U}\ ^2 = 1$		$\sum_{i=1}^3 a_i^2 = 1$
centre	$(\lambda, 0), \lambda \text{ réel}$	$(t, \mathbf{0})$	I	$tI + 0E_i$

Exemples $(0, 1, 1, 1)$: pur, norme 3, conjugué $(0, -1, -1, -1)$. $(1/2, \sqrt{3}/2, 0, 0)$: unitaire, conjugué $(1/2, -\sqrt{3}/2, 0, 0)$.**Théorème 1**L'ensemble des quaternions est un corps non commutatif, et une algèbre de dimension 4 sur $\mathbb{R}$.

Prérequis : rappels sur SU(2) (en bijection avec les quaternions unitaires)

Matrices unitaires, vérifiant ${}^t U U = I$.

On traduit et on trouve $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$

rappels sur SO(3) (rotations vectorielles)

Rotation vectorielle

matrice réduite $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$

isométrie directe (conserve les normes, déterminant +1)

Les quaternions permettent de trouver un morphisme surjectif de SU(2) sur SO(3).

Théorème 2

Il existe un morphisme surjectif de SU(2) sur SO(3), de noyau $\{-I, I\}$.

Démonstration.

A chaque quaternion unitaire il faut faire correspondre une isométrie directe. Puis montrer qu'on a un morphisme, et trouver le noyau.

a) Construction des images des quaternions unitaires et de p.

i) Soit A un quaternion unitaire.

A ce quaternion, on associe l'application de H_0 dans H_0 qui à X, quaternion pur, associe AXA^{-1} (on vérifie que ce nouveau quaternion est encore pur, grâce à la caractérisation par les traces).

A cette application est associée canoniquement une application ρ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, grâce à l'isomorphisme canonique de H_0 sur $\mathbb{R}^3$.

On vérifie que cette application ρ est une isométrie (conservation des normes, grâce au caractère multiplicatif de N).

ii) Plus précisément, déterminons l'isométrie ρ selon les valeurs de A.

* Si $A = \pm I$, ρ aussi.

* Si $A = \cos \theta I + \sin \theta U$, où U est pur et unitaire, on détermine l'application ρ en cherchant les images de trois vecteurs formant une base orthonormée.

premier vecteur : $\vec{U}$

On trouve qu'il est invariant (on fait le calcul sur les matrices).

deuxième vecteur : $\vec{V}$ orthogonal à $\vec{U}$, où V est pur et unitaire. On introduit W pur et unitaire, défini par $W = UV$.

On trouve que son image est $\cos 2\theta \vec{V} + \sin 2\theta \vec{W}$ (où $\vec{W} = \vec{U} \wedge \vec{V}$).

On peut faire le calcul sur les matrices ou sur la forme $(t, \vec{V})$.

troisième vecteur : $\vec{W}$ orthogonal à $\vec{U}$ et $\vec{V}$

On trouve que son image est $\cos 2\theta \vec{W} - \sin 2\theta \vec{V}$

On reconnaît la matrice d'une rotation vectorielle d'axe $\vec{U}$ et d'angle 2θ .

b) ρ est un morphisme

Cela se montre sur la forme matricielle.

c) noyau et antécédent d'une rotation.

Le noyau est le sous-ensemble des quaternions ^{unitaires} qui commutent avec les quaternions purs : c'est I et -I.

Les antécédents d'une rotation $(\vec{U}, \theta)$ sont les deux quaternions $\cos \theta/2 I + \sin \theta/2 U$ (deux valeurs pour $\theta/2$).

3) Travail personnel d'élaboration d'énoncés à partir des quaternions

Un problème à rédiger par écrit (en groupes) a été proposé à l'issue de ces séances (*texte joint*).

Les énoncés proposés ont été en général corrects mais aucune question n'a permis de faire fonctionner une notion de manière disponible, et très peu ont engagés des connaissances supposées mobilisables.

Cela nous a amené à ajouter une séance (paragraphe 4).

Énoncé proposé aux étudiants

A partir des quatre énoncés sur les quaternions qui ont été distribués, choisir un thème d'exercice (exploration d'un point de vue, une question transversale, exploitation d'un point de vue, une application, etc.). Choisir un niveau (deug 1, 2, licence) (à titre indicatif).

Rédiger un exercice consistant (5 questions au moins), qui pourrait figurer dans un recueil d'exercices. Précisez dans quel contexte vous proposez cet exercice (avant ou après un (des) cours à indiquer, etc.)

Rédiger une solution qui pourrait être proposée à des étudiants.

Ecrire l'analyse de l'énoncé : présenter d'abord un "portrait" global, se référant à votre choix initial (une ou deux phrases) ; puis pour chaque question, indiquer ce qui fonctionne, pour quoi faire, et comment (en distinguant en particulier les mises en fonctionnement des connaissances ou raisonnements aux niveaux technique, mobilisable, disponible).

Si vous avez fait des choix d'énoncés, vous pouvez les exposer en justifiant votre décision finale.

4) Construction d'énoncés de problèmes répondant à des contraintes données.

Une séance est ainsi consacrée aux énoncés de problèmes où on veut faire fonctionner des connaissances de manière non technique (niveau de fonctionnement mobilisable ou disponible).

a) On propose aux étudiants d'analyser un problème de terminale.

Il s'agit d'étudier le polynôme $p(z) = z + z^2 \dots + z^{(n-1)} + 1 - (z - \omega)(z - \omega^2) \dots (z - \omega^{(n-1)})$, où ω est la racine nième de l'unité $\exp(2i\pi/n)$.

Il faut montrer que le polynôme est de degré inférieur ou égal à $(n-2)$, qu'il a $(n-1)$ racines citées ($\omega, \omega^2, \dots, \omega^{(n-1)}$), qu'il est donc nul. Puis d'en déduire, en "faisant" $z = 1$, une égalité numérique (obtenue par un petit calcul sur les complexes).

Les étudiants résolvent le problème, analysent l'énoncé et proposent un autre énoncé comportant des mises en fonctionnement moins strictement techniques.

On reprend plus systématiquement ces analyses et propositions.

b) Pour modifier les activités des élèves provoquées par un énoncé sur une même question mathématique.

On peut jouer sur

- * le découpage en questions (laisser des questions avec plus d'une étape ou non)

- * l'ouverture des questions - sur ce qu'il y a à montrer

 - sur les méthodes (formule, théorème, propriété, raisonnement ...) à utiliser

- * le niveau de mise en fonctionnement des outils : technique (application simple) ou non (adaptation, changement de cadre, interprétation, etc.).

Exemples d'énoncés différents sur une même question :

On donne un polynôme par une formule un peu compliquée (non ordonnée selon les puissances de x).

On peut demander (par exemple) :

- * Montrer que P est un polynôme de degré n en calculant le terme de plus haut degré.

 - question fermée, avec indication, application de calcul algébrique.*

- * Quel est le degré du polynôme P ?

 - question semi ouverte, sans indication de méthode (mais il y a peu de choix, on ne prend pas un grand risque !)*

- * Que peut-on dire de P ?

 - question ouverte, sans indication, mais ce qui doit fonctionner est un calcul algébrique qui correspond à une application directe.*

Pour faire fonctionner autre chose qu'un calcul algébrique simple, il faudrait changer la donnée du polynôme.

Ce polynôme s'annule pour $(n+1)$ valeurs distinctes de x , soit a_i .

On peut demander

- * Montrer que P est le polynôme nul [en calculant $P(a_i)$].

selon qu'on ajoute ou non l'indication entre crochets, les élèves vont se poser ou non les questions de savoir comment démontrer qu'un polynôme est nul, puis de chercher s'il y a des valeurs de x qui annulent P . Si on met l'indication, ils vont avoir à faire un calcul algébrique d'application.

En déduire une égalité...

on peut ou non expliciter d'où vient la déduction, ce qui prive ou non les élèves de la question du lien entre les deux (prendre une valeur particulière de x et appliquer la nullité du polynôme).

c) Types d'exercices où les mises en fonctionnement ne sont pas seulement techniques.

L'analyse de l'activité provoquée par un énoncé ne peut pas se faire indépendamment de la connaissance de l'insertion de l'exercice dans l'ensemble de ce qui est proposé aux élèves.

Cependant certaines généralités peuvent être données sur l'élaboration de cinq types d'exercices, moins fréquents que les exercices d'application (où on joue surtout sur les valeurs des paramètres numériques et les juxtapositions), et qui peuvent provoquer chez les élèves des activités plus complexes que l'application isolée, précédée éventuellement d'une reconnaissance.

* *Applications non directes* : mélanger deux domaines, généraliser ou particulariser, jouer sur un paramètre.

- trouver le centre du corps (non commutatif) H , reconnaître si une matrice est ou non un quaternion.
- montrer que l'ensemble des nombres qui sont somme de quatre carrés d'entiers est stable par produit.
- suites récurrentes : pour quelle valeur du premier terme ...

* *Changements de cadres, jeux de cadres* : transporter et interpréter.

- construction d'un triangle, d'un quadrilatère, dont on connaît les milieux des côtés : passer à la géométrie analytique.
- dans certaines questions sur les quaternions (trouver le centre), choix d'un registre.

* *Exercices comportant des moyens de contrôle internes* : figures (constructions), calculs. Il faut avoir deux moyens d'arriver au même résultat et comparer.

- l'agrandissement du puzzle
- tout triangle est isocèle...
- construction d'un triangle, d'un quadrilatère, dont on connaît les milieux des côtés

* *Exercices où certaines connaissances doivent être disponibles* : une ouverture est nécessaire.

- Résolution d'une équation $(z,w)(z',w') = (t,u)$ (pour une loi multiplicative donnée) en reconnaissant qu'on est ramené à la résolution d'un système de deux équations linéaires, ou, si on sait déjà qu'on est dans un groupe multiplicatif, en utilisant l'existence de l'inverse.

- Vrai ou faux $0,99999... = 1$?

reconnaître dans le premier membre la limite d'une série géométrique, qu'on sait calculer.

Enfin, la modélisation et d'autre part la recherche de paramètres dans un énoncé standard sont de bonnes occasions pour construire des problèmes avec des mises en fonctionnement disponibles, soit à partir de situations non mathématiques, soit à partir d'énoncés standard.

II Décimaux, rationnels (deux séances).

Il s'agit de compléter d'un point de vue plus algébrique des notions sur les réels rencontrées dans l'autre volet du cours. On s'intéresse aux développements décimaux des réels (décimaux, rationnels, irrationnels).

Une discussion s'engage sur la définition d'un développement terminé par ...

On résout très rapidement à la fin de la première séance un autre texte sur le même sujet, en comparant les énoncés.

Sont joints les textes de problèmes, et des éléments de corrigé.

Entiers décimaux, rationnels, réels.

Préliminaires

Quels sont tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{Z}$?

Donner la définition des nombres décimaux, des nombres rationnels

1) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2) Trouver deux irrationnels dont la somme est rationnelle, deux autres dont le produit soit rationnel. Montrer qu'il existe deux irrationnels positifs r et s tels que r^s soit rationnel.

Qu'en est-il des rationnels ?

3) Montrer que si x est racine de l'équation suivante, où les coefficients c_i appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors x est soit entier, soit irrationnel :

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

4) Dédire que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel, en considérant l'équation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

5) Comparer $0,457999\dots$ et $0,458$.

6) Est-ce que le nombre dont le développement décimal est $171,17403403403\dots$ est rationnel ?

7) On considère l'écriture $0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots(*)$ où les a_i sont des entiers vérifiant $0 \leq a_i \leq 9$.

Montrer que cette écriture a toujours un sens.

Caractériser les nombres décimaux et traduire la propriété " x est un nombre décimal" en terme de développement décimal.

8) On pose $x = 0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots$, avec x non décimal.

Donner une expression de $a_1, a_2, a_i\dots$ en fonction de x , par récurrence en faisant intervenir les parties entières de $10x, 100x$, etc.

Est-ce que, réciproquement, tout nombre réel a un développement décimal de la forme $(*)$?

On montrera que la suite précédente vérifie, pour tout n , $|x - \sum_{i=1}^n (a_i / 10^i)| \leq 1/10^n$

9) Montrer que si un nombre n'est pas décimal, il a un seul développement décimal (illimité).

On se restreint à partir de cette question aux rationnels positifs et strictement inférieurs à 1, écrits sous la forme de fractions irréductibles p/q .

10) Ecrire le développement décimal illimité de $2/13$, puis de $1/17$, puis de $1/12$.

En s'inspirant du calcul précédent, écrire l'expression des entiers a_i qui interviennent dans le développement décimal d'un rationnel p/q (compris entre 0 et 1) en fonction de p et q .

On introduira les restes r_i des divisions successives utilisées.

11) Montrer que le développement décimal d'un nombre rationnel est périodique.

Montrer que, si un nombre a un développement décimal périodique, il est rationnel.

12) On pose $p/q = 0,a_1a_2a_3\dots a_nb_1b_2\dots b_kb_1b_2\dots b_k\dots$

Le nombre k s'appelle période du développement, et on a noté n le dernier cran avant la partie périodique du développement.

Montrer que, en écrivant $q = 2^p 5^r q'$, où q' et 10 sont premiers entre eux, la période du développement décimal de r divise le plus petit entier positif h tel que 10^h soit congru à 1 modulo q' , c'est à dire aussi l'ordre de 10 dans $[\mathbb{Z}/q'\mathbb{Z}]^*$.

13) Soit x un réel non décimal, et y un décimal tels que

$$x = 0,a_1a_2a_3\dots a_n\dots,$$

$$y = 0,b_1b_2\dots b_n,$$

$$x > y \text{ et } |x - y| \leq 10^{-n}.$$

Montrer que $b_1 = a_1, \dots, b_n = a_n$.

Traduire cette propriété par une phrase en langage courant.

14) Pour quelles questions peut-on utiliser une calculatrice ?

II Irrationnels

1) Comment montrer que π et e sont irrationnels ?

Donner d'abord une définition de ces nombres.

Voici deux plans de ces démonstrations (jointes en annexe), les lire et les expliquer.

2) Montrer que si y est un nombre rationnel non nul, alors e^y est irrationnel.

3) Rappeler ce que veut dire que l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Est-ce vrai de l'ensemble des irrationnels ?

4) Montrer qu'entre deux réels il existe une infinité de rationnels, une infinité d'irrationnels.

5) Démontrer le théorème de Dirichlet suivant :

Soit a un irrationnel ; étant donné un entier positif n , il existe deux entiers p, q tels que $p < q \leq n$, et tels que

$$|a - p/q| < 1/qn \leq 1/q^2.$$

6) Quels sont tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$?

Soit a un irrationnel. On pose $\{a\} = a - E(a)$. Montrer que l'ensemble des $\{na\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $[0,1]$. Montrer que si θ n'est pas commensurable avec π , l'ensemble $\{\cos n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1,1]$.

Introduction aux nombres réels

Ex 1. Les nombres suivants sont-ils des rationnels ? des décimaux ?

$a = 1/3$, $b = 1/15$, $c = 1/25$, $d = 1/125$, $e, f = 0,333\cdots 3\cdots$, $g = \sqrt{2}$, $h = 0,123456789123456789123\cdots$, $i = 0,1234567891011121314\cdots$, $j = \pi$, $k = 13/7$, $l = 27/17$.

Ex 2. Vrai ou faux : $1 = 0,99999999\cdots 9\cdots$?

Ex 3. Connaissez-vous une propriété caractéristique du développement décimal des nombres rationnels ? Démontrez cette propriété. Réciproquement si un développement possède cette propriété, comment calculer le rationnel associé à ce développement décimal ?

Donnez le développement décimal de $13/7$, $27/17$.

Mettre sous forme de fraction $1,12615384615384\cdots$.

Ex 4. Un nombre peut-il avoir plusieurs développements décimaux ? Si oui, caractérisez les nombres qui ont plusieurs développements décimaux.

Ex 5. A propos de $\sqrt{2}$.

- 1) Prouvez qu'il n'existe pas de nombre rationnel dont la carré soit égal à 2.
- 2) Pouvez-vous proposer des méthodes pour approcher $\sqrt{2}$ par des nombres rationnels, ou par des nombres décimaux.
- 3) Que connaissez-vous du développement décimal de $\sqrt{2}$. Ce développement s'arrête-il ou est-il illimité ? Ce développement est-il périodique ?

Ex 6. Un procédé géométrique d'approximation de $\sqrt{2}$:

Dans le plan xOy , on porte sur Ox une suite de points $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ et sur Oy une suite de points $b_1, b_1, \dots, b_n, \dots$, construites de la manière suivante :

a) $a_1 = 2$ et $b_1 = 1$,

b) $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$,

c) $a_n b_n = 2$ (le rectangle de côtés a_n et b_n a pour aire 2).

- 1) Représentez cette suite de rectangles de côtés a_n et b_n .
- 2) Démontrez successivement que : $(\forall n) b_n < a_n$; $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ décroissante ; $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante.
- 3) Calculez $a_n - b_n$ en fonction de $a_{n-1} - b_{n-1}$ et a_n . Montrez que l'on a l'inégalité :

$$a_n - b_n < \frac{(a_{n-1} - b_{n-1})^2}{4}$$

- 4) Calculez les premiers termes de la suite $a_1, a_2, \dots, a_6$. Combien de décimales exactes de $\sqrt{2}$ obtenez-vous à chaque pas ? Utilisez l'inégalité précédente pour montrer que le nombre de décimales exactes obtenues double *grossa modo* à chaque pas.

Propriétés algébriques élémentaires de $\mathbb{N}$

- 1) $\mathbb{N}$ est archimédien
- 2) Toute partie majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément
- 3) Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément

Propriétés algébriques élémentaires de $\mathbb{Z}$

Anneau euclidien (division euclidienne), principal (tout idéal est engendré par un seul élément), factoriel (tout élément admet une décomposition en facteurs premiers).

Propriétés algébriques élémentaires de $\mathbb{D}$

Anneau commutatif unitaire.

Propriétés algébriques élémentaires de $\mathbb{Q}$

Corps commutatif.

Questions de cardinal

$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{Q}$ sont dénombrables.

Éléments de corrigé

- ① tout nombre décimal a 2 déb. déc. illimités (et 2 seules) :
- un déb. déc. tel qu'à partir d'un certain rang tous les chiffres sont nuls
 - un déb. déc. " " " " " "
- valent 9.

- ② tout réel non décimal a 1 seul déb. déc. illimité

- ③ les rationnels ont un déb. déc. périodique et réciproquement

- ① * $0, a_1 \dots a_n 0 a_n \dots$ est décimal

* $0, b_1 \dots b_n 99 \dots = 0, b_1 \dots (b_n + 1) 0 \dots$: c'est décimal
($b_n \leq 8$)

* Si $0, x_1 \dots x_n \dots$ vérifie

$$\forall n, \exists p > n, x_p \neq 0 \text{ et } \exists q > n, x_q \neq 9$$

alors la limite n'est pas décimale. Ou se ramène à montrer que la limite serait alors égale à 0 ou 1, 0 est impossible car si ce fore $u_n = 0, x_1 \dots x_n$, $\exists p, u_p > 0$ donc $x \geq u_p > 0$, 1 est impossible car $\forall n, u_n \leq 0, \underbrace{9 \dots 9}_9 < 1$ où x_q est le q^{e} chiffre ≤ 8

$$u_q = 0, \dots 8$$

$$u_{q+1} = 0, \dots 8 x_{q+1} \leq 0,9989 \leq 0, \dots 89 \dots 9 \leq 0,9 \dots 9$$

- ② Soit x tel que $0 < x < 1$

$$\text{ou fore } a_1 = E(10x), \dots, a_n = E(10^n x) - 10^{n-1} a_{n-1} - \dots - 10 a_1$$

alors $0 \leq a_i \leq 9$, et $\left| x - \sum_{i=1}^n a_i 10^{-i} \right| \leq \frac{1}{10^n}$

Si x a 2 déc^l déc^x : $x = 0, a_1 \dots a_n \dots = 0, b_1 \dots b_n \dots$

Supposons qu'il existe n tel que $a_n \neq b_n$ ($a_n < b_n$) (le premier)

$$\text{Alors } a_n + 1 \leq b_n$$

On compare $a_n, a_{n+1} \dots$ et $b_n, b_{n+1} \dots$

$$a_n, a_{n+1} \leq a_n, 9$$

$$a_n, a_{n+1} \dots \leq a_n, 9 \dots 9$$

A la limite :

$$a_n, a_{n+1} \dots \leq a_n + 1$$

mais $a_n + 1$ ~~est pas~~ décimal $\Rightarrow$ l'inégalité est stricte.

$$a_n, a_{n+1} \dots < a_{n+1} \leq b_n \leq b_n, b_{n+1} \dots$$

on aurait $x < x$ impossible.

③ Si le déc^l déc^l est périodique la limite est rationnelle

$$\text{Récip^t } x = \frac{p}{q} \quad p < q \quad 10p < 10q \Rightarrow 0 \leq a_1 < 10$$

$$10p = a_1 q + r_1 \quad 0 \leq r_1 < q$$

$$\text{alors } a_1 = E(10x)$$

$$\frac{p}{q} = \frac{a_1}{10} + \frac{r_1}{10q}$$

$$10r_1 = a_2 q + r_2 \quad 0 \leq r_2 < q \quad \frac{r_1}{10q} = \frac{a_2}{100} + \frac{r_2}{100q}$$

les a_i sont les quotients de $10r_i$ par q : les restes ne peuvent que q valeurs, il existe j tel que $r_i = r_j \Rightarrow$ alors les mêmes $a_i \Rightarrow$ périodique.

B) Le cours d'analyse

Formes et contenus de l'enseignement : prévisions et déroulement

Documens distribués.

Le cours d'analyse

Comme annoncé dans l'introduction, nous avons tenté dans le cours d'analyse de mener de front la consolidation d'acquis mathématiques en privilégiant une approche transversale et une réflexion sur la construction d'énoncés d'exercices.

Lors des séances, nous avons aussi souhaité que les étudiants tirent profit de leur expérience de mise en situation de recherche pour expérimenter sur eux-mêmes comment différentes formulations de question, comment différents énoncés sur un même thème peuvent amener des éclairages différents sur les notions en jeu.

Les contenus mathématiques

Les contenus mathématiques étudiés ont été organisés de la manière suivante :

-1 Réorganisation des connaissances des étudiants autour de la notion de la convergence uniforme de suites et séries de fonctions.

Il s'agit de présenter aux étudiants plusieurs façons d'aborder et de reconstruire leurs connaissances sur ce sujet en essayant de privilégier la recherche du sens.

Nous avons proposé pour cela deux types d'activités complémentaires : une étude des différents modes de convergence de suites de fonctions à travers leur représentation graphique et trois exercices.

Deux exercices permettent de revoir les critères de convergence et de mettre l'accent sur le caractère global de la convergence uniforme. Le troisième exercice requiert une compréhension plus fine du concept de convergence uniforme car il ne peut pas être résolu par l'application de méthodes standard.

Un bilan des situations mathématiques rencontrées en Deug où la convergence uniforme intervient de façon essentielle est élaboré par les étudiants.

Après ce travail sur la convergence uniforme, il est espéré que les étudiants évaluent de manière plus claire les difficultés conceptuelles liées à cette notion.

Nous leur proposons alors une étude épistémologique du concept de convergence uniforme à travers deux textes :

L'uniformité, un concept implicite efficace chez Cauchy. Henri Lombardi repères Irem n5 Octobre 91 et Histoire de la convergence uniforme Jacqueline Robinet Irem Paris VII cahier de didactique n9.

L'utilisation dans ce cours de ces deux articles a comme but de

- sensibiliser les étudiants sur le développement de la discipline mathématique, discipline qui a évolué au cours du temps non seulement par son contenu mais aussi par ses méthodes et son discours,
- d'étudier plus précisément "l'erreur de Cauchy" (opposition local-global, dépendance de n et ϵ),
- de montrer que le Critère de Cauchy uniforme pour les séries ne peut pas être "démonstré" sans une axiomatisation ou construction des réels.

Le deuxième thème abordé sera précisément la construction de $\mathbb{R}$, en parallèle avec le cours d'algèbre autour des développements décimaux.

-2 Construction des réels.

Les objectifs sont de

- présenter dans les grandes lignes deux constructions de $\mathbb{R}$: les coupures de Dedekind et les suites de Cauchy

- faire découvrir l'équivalence entre l'axiome de la borne supérieure et la complétude.

Cette étude est complétée par la classification des sous groupes de $\mathbb{R}$.

- 3 **Suites récurrentes, points fixes.**

Cette dernière partie a pour but principal d'illustrer comment réinvestir des connaissances niveau n au niveau $n - k$.

Les séances : déroulement et analyse

Pendant toutes les séances les étudiants travaillent en groupe (4 étudiants par groupe).

Séance 1

Cette séance est une adaptation de la séance présentée par J. Robinet dans *Le pourquoi et le comment d'une ingénierie (la convergence uniforme) J.Robinet Cahier Didirem n12 PVII.*

Les documents distribués aux étudiants sont : Les représentations graphiques des suites et la liste 1 .

Dans la première partie de la séance l'accent est mis sur l'interprétation graphique de la convergence.

Elle est consacrée à la classification des suites, tâche qui s'avère être très difficile pour les étudiants. Il apparait que les étudiants ne visualisent pas du tout graphiquement la convergence uniforme d'une suite de fonctions.

La deuxième partie est consacrée au thème 2 de la liste 1.

Elle débute par une étude détaillée des concepts nécessaires à la formulation de la définition de la limite d'une suite de fonctions. En particulier il est mis en évidence que cette définition nécessite la maîtrise du concept "fonction" et du concept "limite de suite numérique".

Ceci a pour but de sensibiliser les étudiants à la complexité conceptuelle de certaines notions mathématiques, complexité qui doit être prise en compte lors de l'enseignement de la notion.

Séance 2

Cette séance est consacrée à la résolution des exercices 1, 2 et 3. Il est explicitement demandé aux étudiants d'avoir un regard critique sur leur propre démarche , d étudier l'influence de l'énoncé sur leur démarche. Il leur est aussi demandé d'analyser les raisons de leurs erreurs, en particulier les conceptions erronées qui les soutendent.

Il apparait que les étudiants en général décèlent difficilement les erreurs relevant de la dépendance implicite qu'ils font de " n et ϵ ". Ils ont aussi des difficultés à reconnaître le caractère global ou local d'une propriété.

Cette séance est aussi l'occasion de faire le bilan des différentes méthodes et critères de convergence uniforme et convergence normale.

La difficulté à résoudre l'exercice 3 illustre pour un grand nombre d'étudiants la différence entre savoir appliquer une méthode ou un critère pour démontrer une propriété et mettre du sens sur cette propriété. Cet énoncé (extrait d'un problème de concours ENSI) avait pour but de mettre l'accent sur l'importance du choix d'énoncés : tous les exercices ne jouent pas le même rôle dans l'apprentissage d'une notion et ceci en partie parce qu' ils mettent en jeu différents niveaux de mise en fonctionnement des connaissances.

Travail à faire : proposer des modifications d'énoncés pour les exercices 1 et 2 en les analysant du point de vue des mises en fonctionnement des connaissances.

Séance 3

La séance commence par une mise en commun des modifications d'énoncés, puis se poursuit par un bilan sur la convergence uniforme :

Voir document joint : polycopié "suites et séries de fonctions" qui sera distribué en fin de séance.

La démonstration du critère de Cauchy fait l'objet d'un exercice.

Il est ensuite demandé aux étudiants de rechercher des situations mathématiques rencontrées en Deug faisant intervenir de manière essentielle la convergence uniforme. Cette recherche a pour but de provoquer chez les étudiants un début de synthèse et d'organisation des connaissances sur ce thème.

Un élément commun aux situations de convergence uniforme est la question d'interversion de limites.

Historiquement comment et pourquoi est apparu le concept de convergence uniforme ? précisément pour répondre à cette question d'interversion de limites dans un cas particulier : continuité de la limite d'une suite de fonctions continues.

Travail à faire pour la prochaine séance : lire dans l'article de H. Lombardi les écrits de Cauchy concernant limite d'une fonction, théorème erroné et ce qui deviendra le "critère de Cauchy".

Séance 4

L'étude des textes de Cauchy fait prendre conscience aux étudiants que le discours mathématique des contemporains de Cauchy est très éloigné du discours formel actuel.

Dans les séances précédentes, il avait été mis en avant les limites du langage mathématique formel pour la transmission du sens de concepts mathématiques. Par contre ici, l'utilité et la force d'un tel langage sont mises en évidence.

Une première phase est consacrée à reconnaître, dans le théorème sur la continuité de la limite d'une suite de fonctions continues, "l'erreur mathématique" de Cauchy.

L'accent est ensuite mis sur l'énoncé de Cauchy du "critère de Cauchy". Pourquoi Cauchy ne le démontre pas ?

Les étudiants se rendent compte que Cauchy ne "savait pas que $\mathbb{R}$ était complet !"

Pour clore la séance le concept de convergence uniforme est présenté comme étant aussi une généralisation (ou extension) de la convergence simple dans un ensemble de fonctions muni de la distance associée à la norme sup.

Cela permet de sensibiliser les étudiants sur le fait que toutes les notions mathématiques n'ont pas toutes le même statut : extensions de notions déjà introduites, réponses à de nouveaux problèmes, notions généralisatrices et unificatrices. Les façons que nous avons de présenter une notion dépendent fortement de son statut dans la théorie mathématique.

Séance 5

L'étude des écrits de Cauchy nous a amenés à poser le problème de "la construction" de $\mathbb{R}$.

Cette séance sera consacrée à la construction des réels par les coupures de Dedekind et les suites de Cauchy de rationnels.

Nous nous inspirons pour ces études des présentations qui en sont faites par K. Mainzer dans *Les Nombres* ed Vuibert 1998.

Les objectifs sont

- de faire sentir aux étudiants la complexité conceptuelle d'un réel,
- de montrer l'équivalence de l'axiome de la borne supérieure et de la complétude de $\mathbb{R}$.

A cette occasion il est demandé aux étudiants de lire les démonstrations très formelles qui leur sont proposées. Après qu'ils les aient lues, les étudiants doivent les exposer dans les grandes lignes sans utiliser de langage formel ni de quantificateur. Ils s'aperçoivent alors que très souvent, ils

n'arrivent pas à mettre du sens sur ce qu'ils lisent et comprennent formellement. Par exemple, reconnaître dans un exposé de type formel que : " On a extrait une sous suite convergente d'une suite de Cauchy, donc la suite de Cauchy converge " leur pose de grandes difficultés.

Ils sont confrontés à la différence qu'il peut y avoir entre manipuler correctement un formalisme et mettre du sens sur ce qu'on manipule.

Séance 6

Il s'agit de résoudre un problème visant à déterminer les sous groupes de $\mathbb{R}$.

Séance 7

Il s'agit de réinvestir des connaissances universitaires sur les suites au niveau lycée.

Dans un premier temps, les étudiants étudient les suites récurrentes proposées $u_{n+1} = \sqrt{au_n + 3}$, $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \exp(au_n)$ suivant les valeurs de a . Ils doivent ensuite construire des énoncés visant à étudier ces suites.

L'objectif est ici de montrer sur un exemple

- comment investir des connaissances niveau n (Théorème du point fixe..) au niveau $n - k$,
- comment exploiter une situation mathématique pour construire des énoncés. On peut ici dans un premier temps choisir des valeurs de a pour illustrer certains phénomènes et ensuite amener l'élève à étudier le comportement de ces suites dans le cas général.

Expérimentation autour de la convergence de suites de fonctions

1 Etude graphique de la convergence de suites de fonctions .

On se donne les suites de fonctions suivantes :

$$(S_1) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{n}$$

$$(S_2) : \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

$$(S_3) : \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$$

$$(S_4) : \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = 0, \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = x, \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = \frac{1}{n} \forall x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$(S_5) : \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

$$(S_6) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \begin{cases} f_n(x) = f_n(-x), \forall x \in]-\infty, +\infty[\\ f_n(x) = nx, \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = 1 \forall x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$(S_7) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \quad \begin{cases} f_n(x) = 0, \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \forall x \in [0, 1] \\ f_n(x) = \frac{n^2 - x}{n(n^2 - 1)} \forall x \in]1, n^2[\\ f_n(x) = 0, \forall x \geq n^2 \end{cases}$$

$$(S_8) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \begin{cases} f_n(x) = 0, \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = nx, \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -nx + 2 \forall x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ f_n(x) = 0 \forall x \in]\frac{2}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$(S_9) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \quad \begin{cases} f_n(x) = f_n(-x) \forall x \in]-\infty, +\infty[\\ f_n(x) = n^2 x \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = n \forall x \in]\frac{1}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$(S_{10}) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = n^2 x \quad \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -n^2 x + 2n \quad \forall x \in]\frac{1}{n}, \frac{2}{n}[\\ f_n(x) = 0 \quad \forall x \in]\frac{2}{n}, +\infty[\end{cases}$$

$$(S_{11}) : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

$$(S_{12}) : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1 + nx^2}$$

- Tracer les graphes des fonctions $f_1, f_2, \dots, f_4$ pour les suites de fonctions données ci-dessous. Faites tous les graphes correspondants à une suite sur un même graphique et faites un graphique par suite.
 - Classer les suites de fonctions par groupe en vous référant à leur représentation graphique.
- On s'efforcera d'effectuer le minimum de calculs. (On vous demandera de décrire votre démarche : comment avez vous opéré ?)

2 Etude mathématique .

- Définir la convergence simple et la convergence uniforme d'une suite de fonctions .
- Vérifier que votre regroupement des suites selon leur mode de convergence est correct.
- Quelles connaissances avez vous utilisées ?
- "Comment" avez vous utilisé les définitions ? Comparer avec l'approche graphique.

3 Approfondissement -

Résoudre les trois exercices suivants.

Exercice 1.

On pose $f_n(x) = \cos^n(x)$ pour $x \in [0, \pi/2]$ et $n \geq 0$.

- 1.1 Montrer que la suite converge simplement sur $[0, \pi/2]$.
- 1.2 Soit $a \in]0, \pi/2[$; montrer que la suite (f_n) converge uniformément sur $[a, \pi/2]$?
- 1.3 La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $]0, \pi/2[$?
- 1.4 La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $[0, \pi/2]$?

Exercice 2.

Soit pour p entier ≥ 1 et $x \geq 0$, $u_p(x) = xe^{-px}$.

- 2.1 Montrer que $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$ converge simplement si $x \in [0, +\infty[$. On note $f(x)$ sa somme.
- 2.2 Montrer que $\forall a > 0$, $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$ converge normalement sur l'intervalle $[a, +\infty[$.
- 2.3 Est-ce-que $\sum_{p \geq 1} u_p(x)$ converge uniformément sur l'intervalle $]0, +\infty[$?

Exercice 3.

Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite réelle telle que $\forall n, a_n \neq 0$. Soit $(f_k)_{k \geq 1}$ la suite de fonctions définie par $f_k(x) = a_k$ si $k-1 \leq x < k$, $f_k(x) = 0$ sinon.

La série de fonctions de terme général f_n

- 3.1 converge-t-elle simplement sur $\mathbb{R}$?
- 3.2 uniformément sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$?
- 3.3 normalement sur tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$?

3.4 Les assertions suivantes sont-elles vraies ? Justifier vos réponses.

- **1)** Pour toute suite (a_n) , la série de terme général f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
- **2)** Il existe des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ pour lesquelles la série de terme général f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
- **3)** Il n'existe pas de suite $(a_n)_{n \geq 1}$ pour laquelle la série de terme général f_n converge uniformément sur $\mathbb{R}$.
- **4)** Il existe des suites $(a_n)_{n \geq 1}$ pour lesquelles la série de terme général f_n converge normalement sur $\mathbb{R}$.

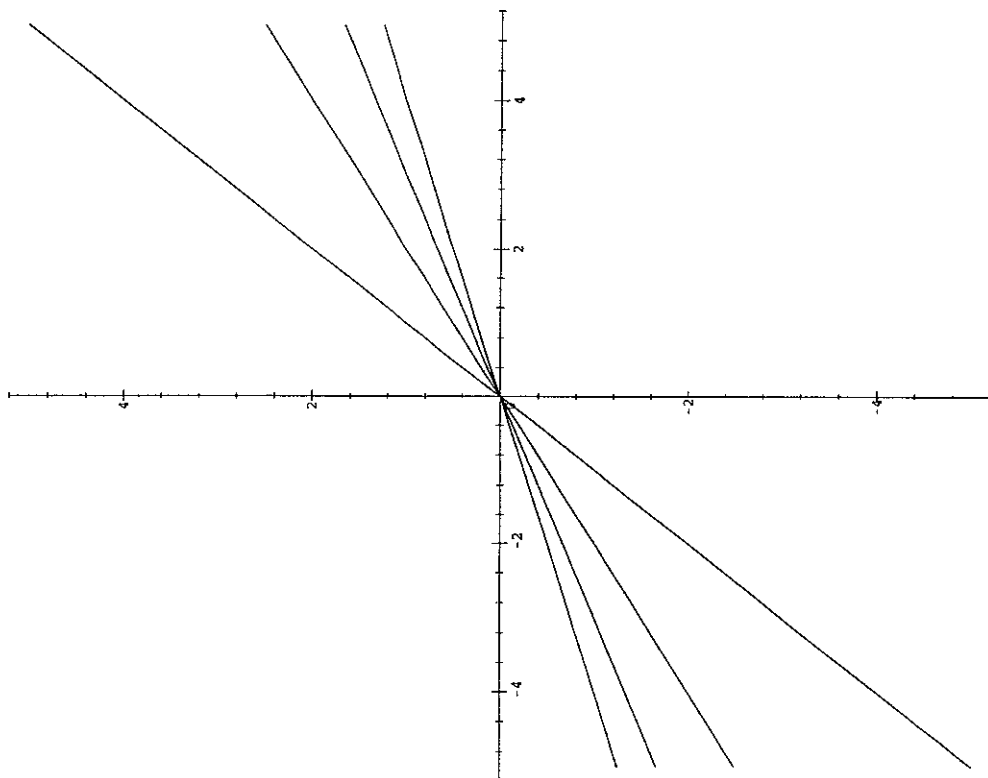
- Quelles difficultés d'ordre mathématique avez vous rencontrées ?
- Proposer des modifications d'énoncés.
- Comparer les énoncés en mettant l'accent sur les différentes mises en fonctionnement des connaissances requises.

4 Pourquoi la convergence uniforme ? -

Rechercher des situations (niveau deug) faisant intervenir la convergence uniforme.

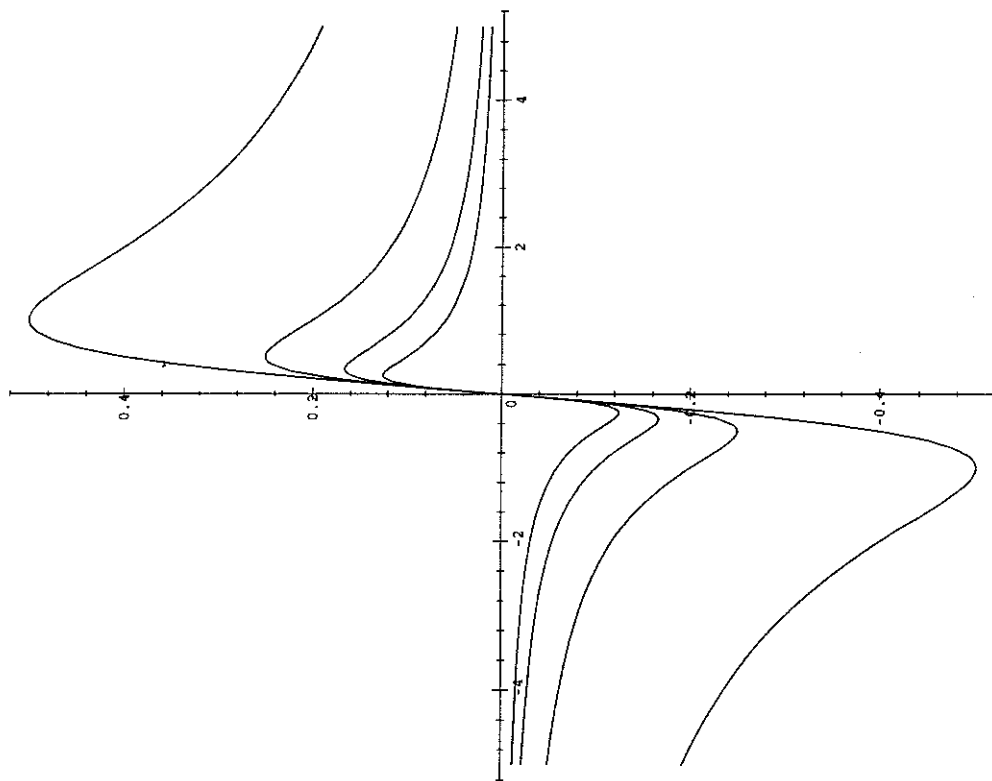
$S_4:$

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$



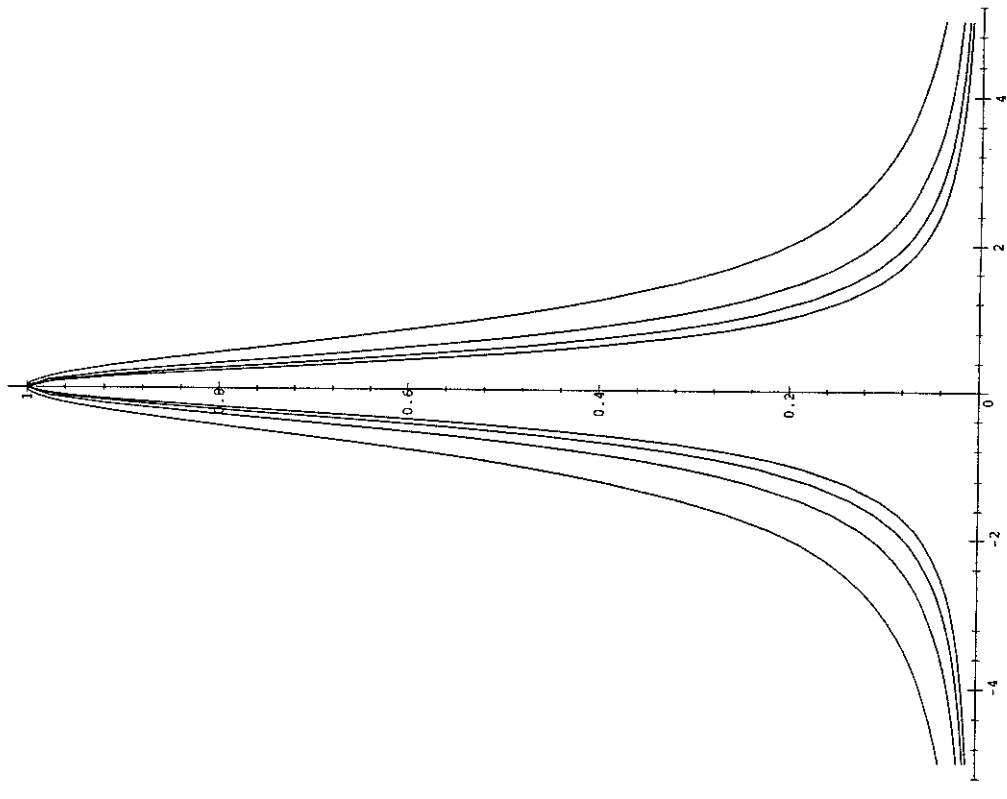
$S_2:$

$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2}$$

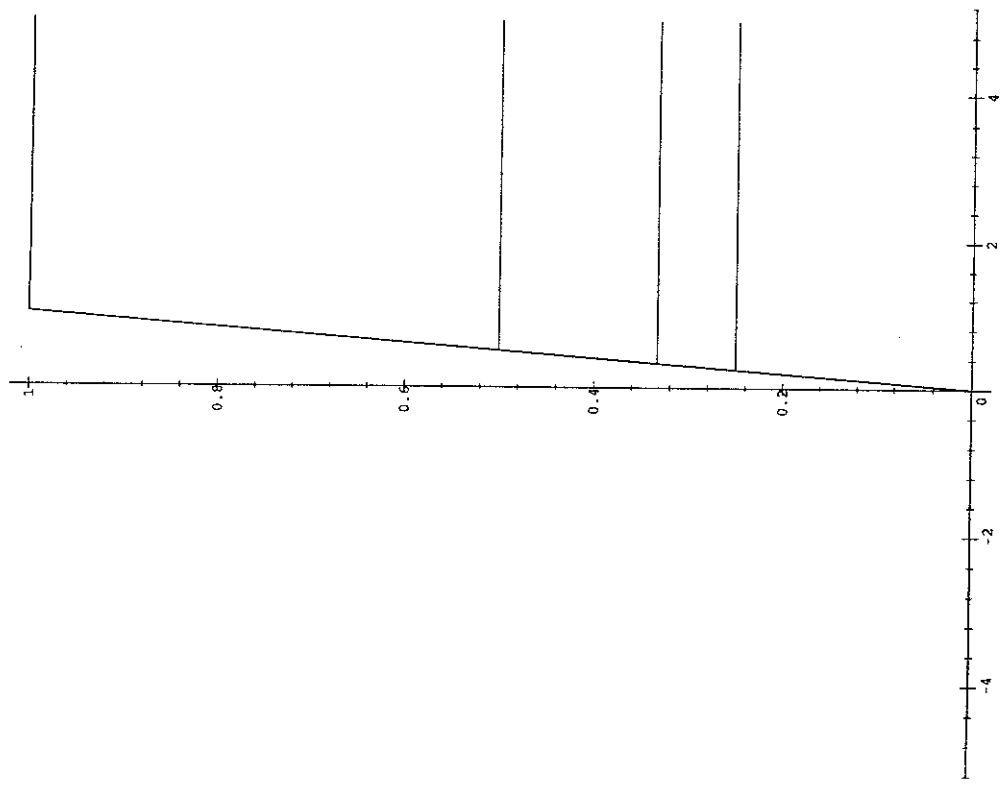


$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}$$

S_3

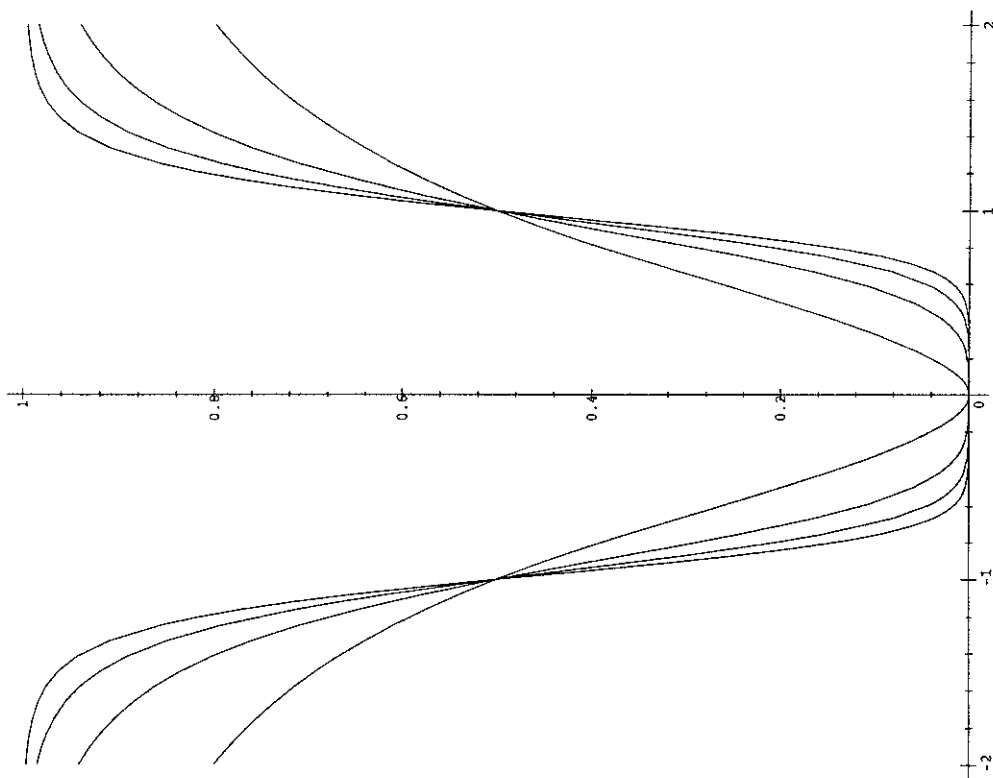


$$S_4 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = 0, \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = x, \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = \frac{1}{n}, \forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[\end{array} \right.$$

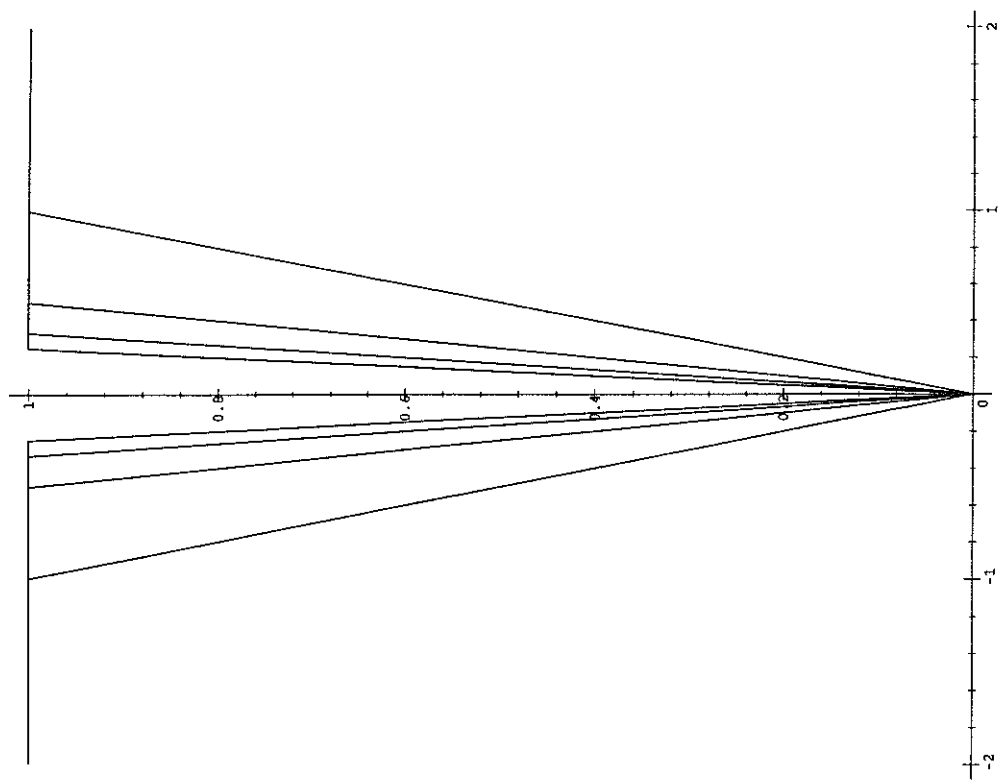


$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}}$$

S_5



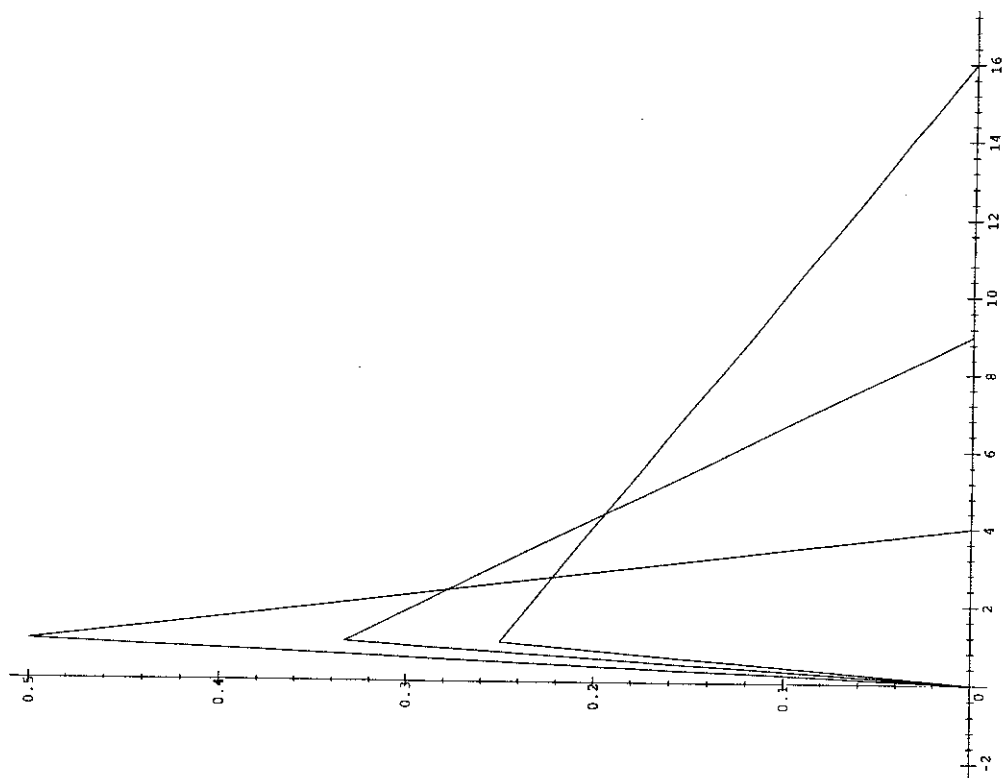
$$S_6 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = f_n(-x), \forall x \in]-\infty, +\infty[\\ f_n(x) = nx, \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = 1 \quad \forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty[\end{array} \right.$$



$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = 0, \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = \frac{x}{n}, \forall x \in [0, 1] \\ f_n(x) = \frac{n^2 - x}{n(n^2 - 1)} \quad \forall x \in [1, n^2[\\ f_n(x) = 0, \quad \forall x \geq n^2 \end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$$

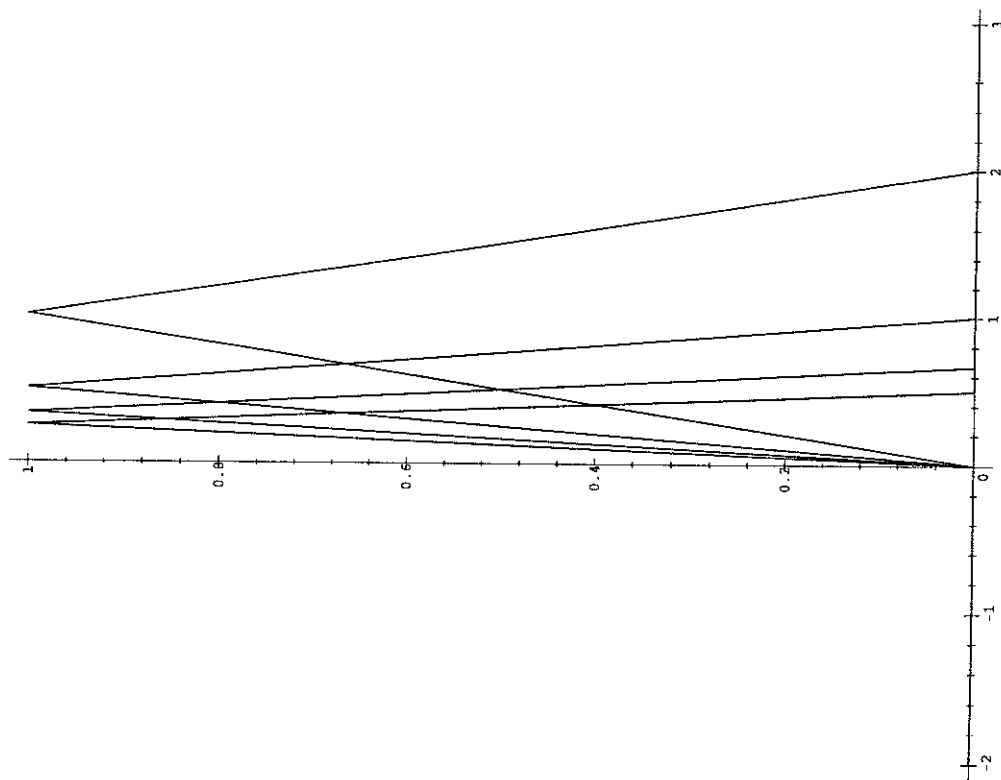
S₇



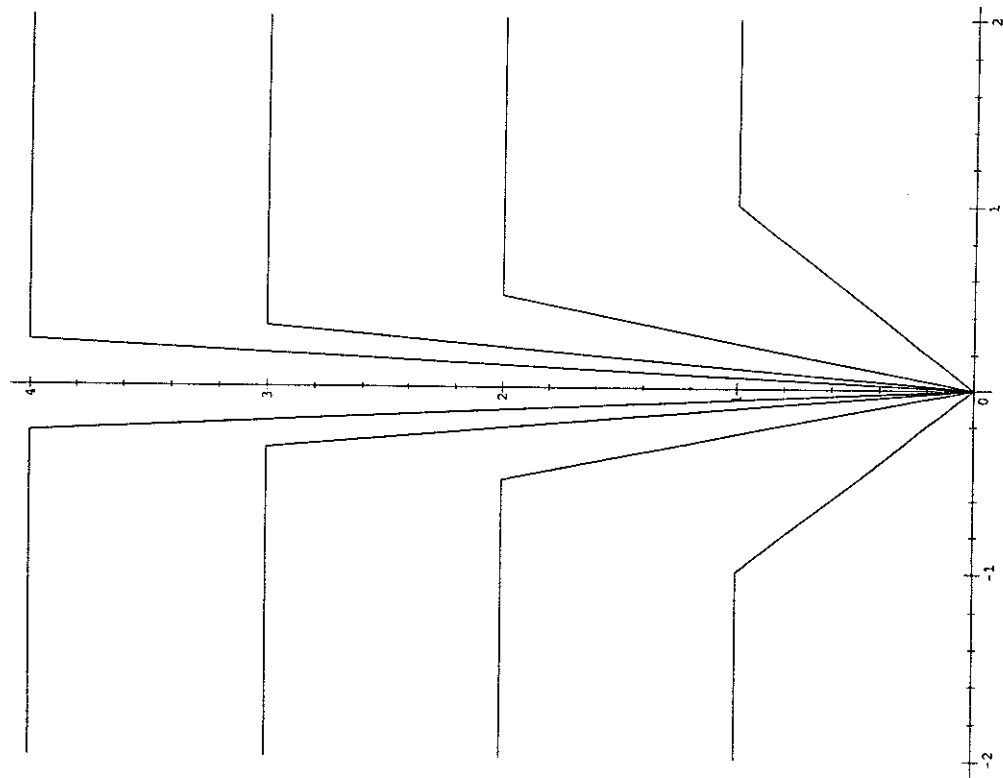
$$\left\{ \begin{array}{l} f_n(x) = 0, \forall x \in]-\infty, 0[\\ f_n(x) = nx, \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -nx + 2 \quad \forall x \in [\frac{1}{n}, +\frac{2}{n}[\\ f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [\frac{2}{n}, +\infty[\end{array} \right.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}$$

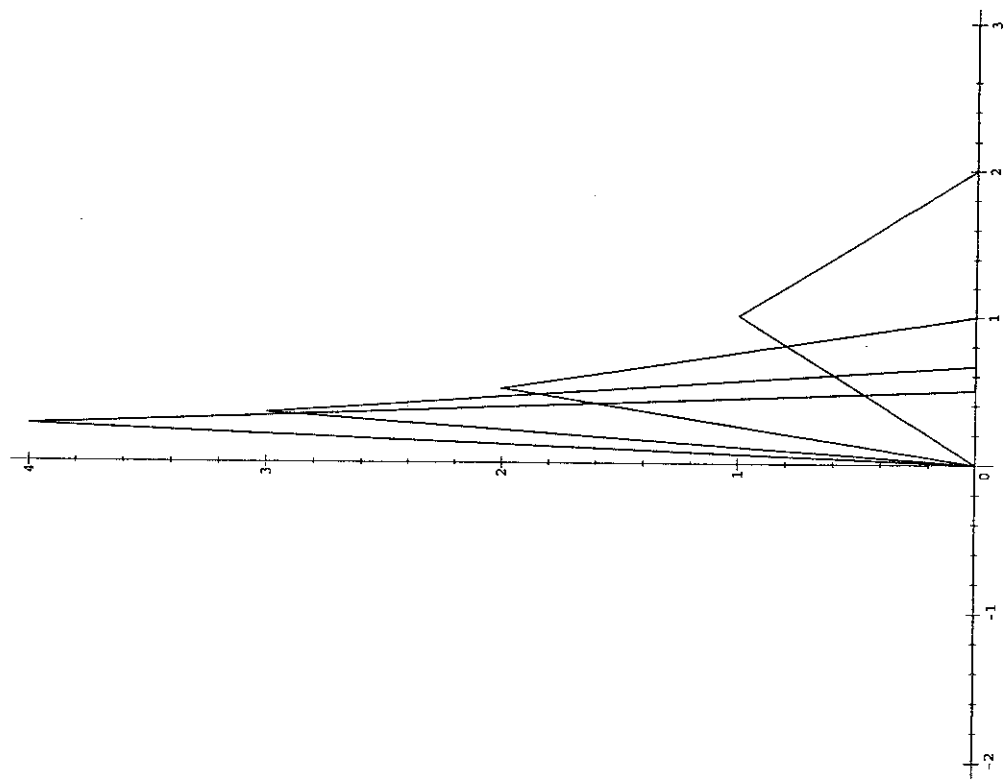
S₈



$$S_9: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = f_n(-x) \quad \forall x \in [-\infty, +\infty] \\ f_n(x) = n^2 x \quad \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = n \quad \forall x \in [\frac{1}{n}, +\infty] \end{cases}$$

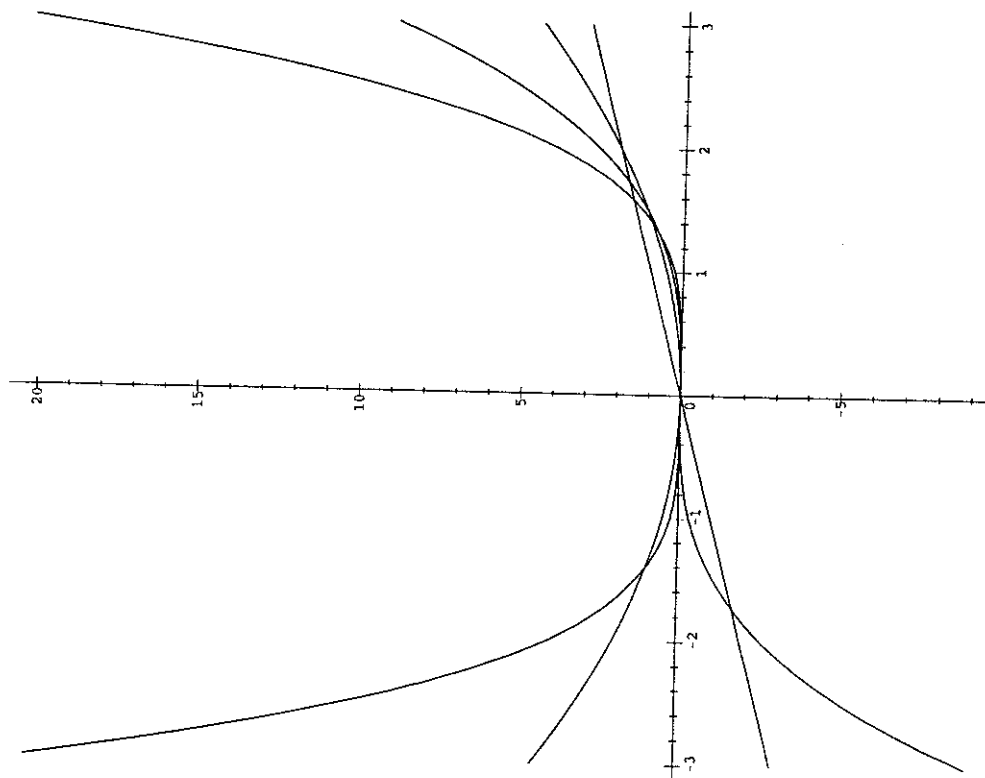


$$S_{10}: \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{cases} f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [-\infty, 0] \\ f_n(x) = n^2 x \quad \forall x \in [0, \frac{1}{n}] \\ f_n(x) = -n^2 x + 2n \quad \forall x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ f_n(x) = 0 \quad \forall x \in [\frac{2}{n}, +\infty] \end{cases}$$



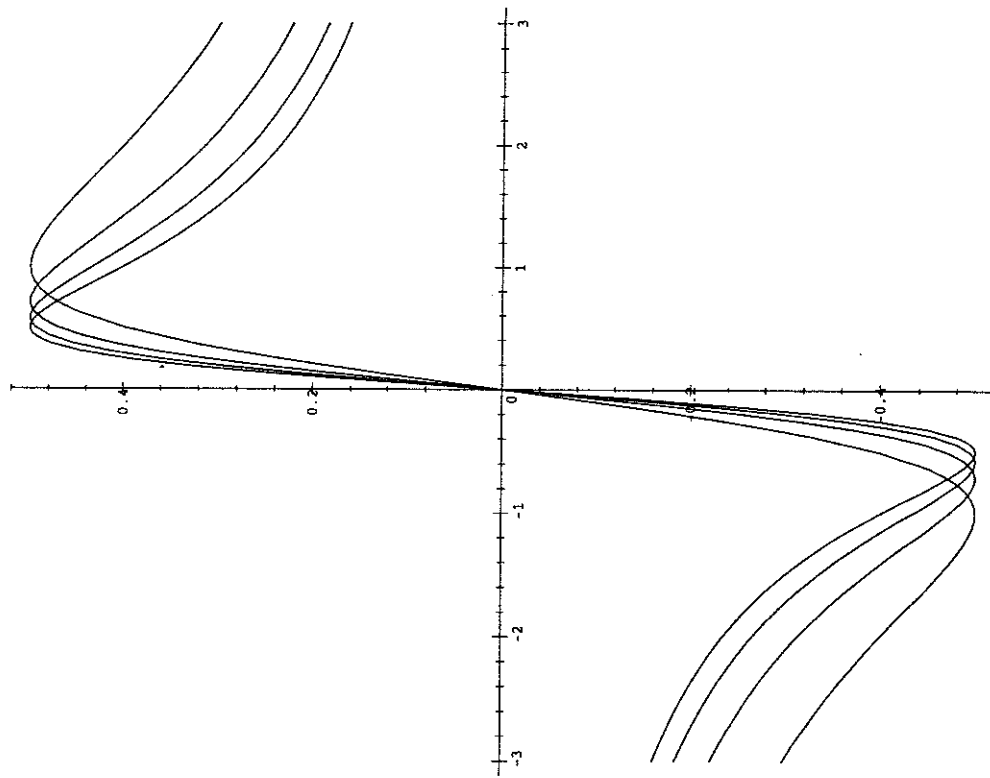
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1, \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}$$

S_{M1}



$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{x\sqrt{n}}{1+nx^2}$$

S_{12}



2. Convergence uniforme d'une suite ou d'une série de fonctions

2.1.

Définition 2.1.1 La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si, et seulement si la suite de nombres réels $(\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)|)_n$ converge vers zéro, i.e. si, et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in A} |f(x) - f_n(x)| \right) = 0.$$

La série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur A si, et seulement si la suite des sommes partielles $(\sum_{k=0}^n f_k)_n$ converge uniformément vers S sur A , c'est-à-dire si, et seulement si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{x \in A} \left| S(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x) \right| \right) = 0.$$

Exercices. i) Etudier la convergence uniforme de la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$ sur $A = [0, \frac{1}{2}]$, puis sur $A = [0, 1]$.

ii) On note $D(0, r) \subset \mathbb{C}$ le disque ouvert de centre 0 et de rayon $r > 0$. Etudier la convergence uniforme de la série de fonctions $\sum x^n$ sur $D(0, \frac{1}{2})$, puis sur $D(0, 1)$.

iii) Montrer que la suite de fonctions $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers $x \mapsto |x|$.

Remarque. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $A \rightarrow \mathbb{C}$, et $f : A \rightarrow \mathbb{C}$. $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall x \in A, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

$(f_n)_n$ converge simplement vers f sur A si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x \in A, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon.$$

Le N de la convergence simple dépend de x ; celui de la convergence uniforme sur A doit être valable pour tous les x de A .

Proposition 2.1.1

i) Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur A , alors elle converge simplement vers f en tout point de A .

ii) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers f sur A , alors elle converge simplement vers f en tout point de A .

Proposition 2.1.2

Soit $\sum f_n$ une série de fonctions $A \rightarrow \mathbb{C}$ qui converge simplement vers S en tout point de A . Pour tout $x \in A$, on note $R_n(x) = S(x) - \sum_{k=0}^n f_k(x)$ le reste de la série $\sum f_k(x)$. Alors, la série $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si la suite de fonctions $(R_n)_n$ converge uniformément sur A vers la fonction nulle.

Exemple : soit D le disque ouvert de centre 0 et de rayon 1 du plan complexe. Pour tout $x \in D$, la série $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge absolument (règle de d'Alembert), donc converge, et $|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|x|^k}{k!} = e^{|x|}$. Ainsi, $\sup_D |R_n| \leq \frac{1}{n!}$, qui est le terme général d'une suite qui converge vers zéro. Donc la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge uniformément sur D (elle converge uniformément en fait sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$). Voir aussi l'exemple iii) ci-dessus.

Remarque. Dans la pratique, on utilise cette proposition sous la forme suivante (exercice : c'est équivalent) : $\sum f_n$ converge uniformément sur A si, et seulement si il existe une suite $(a_n)_n$ de réels positifs ou nuls convergant vers zéro, telle que pour tout $x \in A$ et pour tout $n \geq 0$, on ait $|R_n(x)| \leq a_n$.

Suites et séries de fonctions

1. Convergence simple, fonction définie par une limite ou une somme

1.1.

Définition 1.1.1

Soit A une partie de $\mathbb{C}$, et $(f_n)_n$ une suite d'applications $A \rightarrow \mathbb{C}$. Si la suite de nombres complexes $(f_n(x))_n$ converge pour tout $x \in A$, on dit que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en tout point de A . Dans ces conditions, l'application $f : A \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$ est la limite simple de la suite de fonctions $(f_n)_n$. On note $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$.

De même, si pour tout $x \in A$ la série numérique $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge, on dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement en tout point de A . Dans ces conditions, l'application $S : A \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ est la limite simple (ou somme simple) de la série de fonctions $\sum f_n$. On note

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f_n.$$

Exercice : la limite simple d'une suite de fonctions croissantes est croissante.

1.2.

Des questions se posent quant aux propriétés des fonctions définies ainsi comme limites de suites ou de séries de fonctions : si les f_n sont continues, dérivables ou intégrables, en est-il de même de la limite simple ? Dans l'affirmative, a-t-on des résultats d'inversion du type $\lim_{n \rightarrow \infty} (\lim_{x \rightarrow a} f_n(x)) = \lim_{x \rightarrow a} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$, ou $\lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) = \frac{d}{dx} (\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x))$, ou encore $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(t) dt = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$ (mêmes questions concernant les séries) ?

Exemples. i) $f_n(x) = (1 - x^2)^n$ sur $A = [-1, 1]$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en tout point de A vers la fonction f valant 1 en 0 et nulle ailleurs, et les f_n sont toutes continues sur A . La limite simple f est continue en tout point de $A \setminus \{0\}$, mais discontinue en 0.

ii) $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$ définit une application dérivable en tout point de $A = \mathbb{R}$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement en tout point de A vers la fonction f valant 1 en 1 et nulle ailleurs. Les applications f et f_n sont intégrables sur A ; en outre, $\int_0^1 f(t) dt = 0$, et $\int_0^1 f_n(t) dt = \frac{1}{n+1}$. En particulier, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt$.

iv) Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ valant 0 sur $[\frac{2}{n}, 1]$ et en zéro, valant n en $\frac{1}{n}$, affine sur $[0, \frac{1}{n}]$ et sur $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ (c'est un pic de hauteur n s'écrasant sur l'axe des ordonnées). La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction nulle sur $[0, 1]$ (car $f_n(0) = 0$ et si $x > 0$, $f_n(x) = 0$ pour tout $n \geq \frac{2}{x}$). Pour chaque n , $\int_0^1 f_n(t) dt = 1$; pourtant, $\int_0^1 \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) dt = 0$. On ne peut pas ici intervertir les signes d'intégrale et de limite.

Proposition 2.1.3

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions $A \rightarrow \mathbb{C}$.

- i) On suppose que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f en tout point de A . S'il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A telle que $|f(x_n) - f_n(x_n)|$ ne tende pas vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$, alors la convergence n'est pas uniforme.
- ii) On suppose que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement en tout point de A . S'il existe une suite $(x_n)_n$ de points de A telle que $|R_n(x_n)|$ ne tende pas vers zéro lorsque n tend vers $+\infty$, alors la convergence n'est pas uniforme.

Exemples. i) $f_n(x) = \frac{\sin^2 nx}{n^2}$ sur $A = \mathbb{R}_+^*$. La suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers zéro en tout point de $\mathbb{R}_+^*$. Mais la convergence n'est pas uniforme puisque $f(\frac{\pi}{2n}) = \frac{1}{4n^2} \rightarrow 0$.
 ii) La série de fonctions $\sum \frac{\sin nx}{n^2}$ converge simplement en tout point de $\mathbb{R}$ (théorème d'Abel). Mais si $x_n = \frac{\pi}{2n}$, $\frac{\sin nx_n}{n^2} = \frac{1}{n^2}$ est le terme général d'une série divergente. Donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$ (elle ne l'est sur aucun intervalle contenant un multiple de 2π).

Théorème 2.1.1 Théorème (Cauchy uniforme)

Une suite de fonctions $(u_n)_n$ est uniformément convergente sur A si, et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \forall m \geq n, \sup_{x \in A} |u_n(x) - u_m(x)| \leq \varepsilon.$$

Attacher de l'importance à la preuve de ce théorème. Il peut servir à prouver qu'une convergence n'est pas uniforme. Ecrire un énoncé semblable (vrai) pour les séries ; il peut servir à prouver l'uniformité de certaines convergences non normales (paragraphe suivant) à l'aide d'une transformation d'Abel.

3. Convergence normale d'une série de fonctions**Définition 3.0.1**

la série $\sum f_n$ de fonctions $A \rightarrow \mathbb{C}$ converge **normalement** sur A si, et seulement si la série numérique $\sum \sup_A |f_n|$ converge.

Proposition 3.0.1

La série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur A si, et seulement s'il existe une suite $(a_n)_n$ de nombres réels telle que :

- i) la série $\sum a_n$ converge ;
 ii) $|f_n(x)| \leq a_n$ pour tout $x \in A$ et pour tout n .

Théorème 3.0.1

Si une série de fonctions converge normalement sur $A \subseteq \mathbb{C}$, elle converge uniformément sur A .

Exemple : la série $\sum \frac{\cos nx}{n^2}$ converge normalement donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, car $|\frac{\cos nx}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^2}$ converge.

Exercices. i) La série $\sum \frac{x^n}{n^2}$ converge normalement sur toute partie bornée de $\mathbb{C}$.

ii) la série de fonctions $\sum \frac{n! (x+1)^n}{n! n! n^n}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

iii) La série de fonctions $\sum \frac{\sin nx}{n}$ est-elle normalement convergente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$? Même question sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

4. Propriétés des limites uniformes

Continuité, intégrabilité et dérivabilité ne sont pas héritées par les limites ou les sommes simples. La convergence uniforme fournit des résultats positifs en ce sens.

4.1. Limite uniforme et continuité**Théorème 4.1.1**

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $(f_n)_n$ une suite d'applications $I \rightarrow \mathbb{C}$, continues en a .

- i) Si la suite d'applications $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f , alors f est continue en a ;
 ii) si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers S , alors S est continue en a .

Remarque. Ce théorème est encore vrai si I est un disque de $\mathbb{C}$.

Corollaire. Soit A une partie de $\mathbb{C}$, et $(f_n)_n$ une suite d'applications $A \rightarrow \mathbb{C}$ continues sur A .

- i) Si la suite d'applications $(f_n)_n$ converge uniformément sur A vers f , alors f est continue sur A ;
 ii) si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur A vers S , alors S est continue sur A .

Exemple : la fonction $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos nx}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$. En effet, cette série de fonctions converge normalement donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$, et les fonctions $x \mapsto \frac{\cos nx}{2^n}$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Exercice : montrer que le corollaire est encore vrai si l'on remplace "converge uniformément sur A " par "converge uniformément sur tout compact contenu dans A " (caractère local de la continuité). Trouver un exemple qui illustre cela.

Théorème 4.1.2 Théorème de la double limite

Soient $I = [a, b]$ (éventuellement $b = +\infty$) un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbb{C}$.

On suppose que $\lim_{x \rightarrow b} f_n(x)$ existe et vaut l_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- i) Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f , alors la suite $(l_n)_n$ converge, f admet un limite à gauche de b , et $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \lim_{x \rightarrow b} f(x)$;
 ii) si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers S , alors la série numérique $\sum l_n$ converge, S admet un limite à gauche de b , et $\sum_{n=0}^{+\infty} l_n = \lim_{x \rightarrow b} S(x)$.

Remarque. Sous ces hypothèses, les conclusions s'écrivent

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f_n(x) \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) \right).$$

Exemple : soit $f_n : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^n}{(1+x)(1+2x) \cdots (1+nx)} = \sum_{k=1}^n \frac{x}{1+kx}$ pour tout $n \geq 0$.

1- Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \geq 0$, $|f_n(x)| \leq \frac{x^n}{x \cdot 2x \cdots nx} = \frac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc converge uniformément sur $\mathbb{R}$. Soit S sa somme.

2- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \frac{1}{1+x}$ car $f_n(x)$ est une fraction rationnelle en n . Donc, par le

théorème de double limite, $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(1+x)(1+2x) \cdots (1+nx)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Exercice : calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + x^2 + 1}$.

4.2. Limite uniforme et intégrabilité

Théorème 4.2.1

Soient $I = [a, b]$ un intervalle de $\mathbf{R}$ et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbf{C}$ intégrables sur I .
 i) Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur I vers f , alors f est intégrable sur I , la suite $(\int_I f_n)$ converge, et $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} (\int_I f_n)$.
 ii) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur I vers S , alors S est intégrable sur I , la série numérique $\sum \int_I f_n$ converge et $\int_I S = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n$.

Remarques. i) Sous ces hypothèses, les conclusions s'écrivent

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\int_I f_n \right) = \int_I \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right) \text{ et } \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n \right).$$

ii) L'énoncé est encore vrai si I est une partie bornée de $\mathbf{R}^n$.

Exemple : soit $x \in]0, 1[$; pour tous $t \in [0, x]$ et $n \in \mathbf{N}$, $|(-t)^n| \leq x^n$ et la série géométrique $\sum x^n$ converge. Donc la série de fonctions $\sum (-t)^n$ converge normalement donc converge uniformément vers $t \mapsto \frac{1}{1+t}$ sur $[0, x]$. Ainsi, $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^x (-t)^n dt \right)$. On a ainsi obtenu, par intégration terme à terme, la formule :

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} \text{ pour tout } x \in]0, 1[.$$

4.3. Convergence uniforme et dérivation

Théorème 4.3.1

Soient I un intervalle de $\mathbf{R}$, et $(f_n)_n$ une suite de fonctions $I \rightarrow \mathbf{C}$ dérivables sur I .

- i) Si la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge simplement vers f en tout point de I , et si la suite de fonctions $(f'_n)_n$ converge uniformément sur I , alors :
- 1- f est continue et dérivable sur I , et $f' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n$;
 - 2- la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur tout intervalle de longueur finie inclus dans I .
- ii) Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S en tout point de I , et si la série de fonctions $\sum f'_n$ converge uniformément sur I , alors :
- 1- S est continue et dérivable sur I , et $S' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n$;
 - 2- la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout intervalle de longueur finie inclus dans I .

Remarques. i) Sous ces hypothèses, les conclusions s'écrivent :

$$\left(\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n \right)' = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n \text{ et } \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n.$$

ii) Le théorème est encore vrai si on remplace "converge simplement en tout point de I " par "converge simplement en un point de I ".

Exemple : la série de fonctions $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge simplement en tout point de $\mathbf{R}$. On note $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ sa somme. Pour tout $M > 0$, la fonction $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{n!}$ est dérivable sur $] -M, M[$, et sa dérivée est $x \mapsto \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ si $n \geq 1$. Or, pour tout $x \in] -M, M[$, $|f'_n(x)| \leq \frac{M^{n-1}}{(n-1)!}$ qui est le terme général d'une série convergente (règle de d'Alembert). Donc la série de fonctions $\sum f'_n$ converge normalement donc converge uniformément sur $] -M, M[$. On en déduit que f est dérivable sur $] -M, M[$, et que $f'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = f(x)$. Cela étant vrai pour tout $M > 0$, la formule $f' = f$ est vraie sur $\mathbf{R}$ tout entier. Ainsi, f est l'unique solution du problème $f' = f$ et $f(0) = 1$: c'est l'exponentielle.

5. Séries trigonométriques et théorème d'Abel

Par une transformation d'Abel, on montre que si $(a_n)_n$ est une suite de nombres réels décroissante à partir d'un certain rang et convergente vers zéro, la série de fonctions $\sum a_n e^{inx}$ converge simplement en tout point de $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$ (exercice). On étudie ici les propriétés de cette somme (cf la partie sur les séries de Fourier).

Théorème 5.0.1

Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels telle que :

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$;
- ii) $(a_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.

Alors, la série de fonctions $\sum a_n e^{inx}$ converge uniformément sur tout intervalle fermé contenu dans $]0, 2\pi[$.

Corollaire. Soit $(a_n)_n$ une suite de nombres réels décroissante à partir d'un certain rang et convergente vers zéro. Soit $f : \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{C}$, $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{inx}$. Alors,

- i) f est 2π -périodique et continue ;
- ii) f est intégrable sur tout intervalle $[a, b] \subset]0, 2\pi[$, et $\int_a^b f(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{in} (e^{inb} - e^{ina})$.

Exercice : Montrer que $\left(\sum_{n \geq 1} \frac{\cos nx}{n^2} \right)' = \sum_{n \geq 1} \frac{\sin nx}{n}$ sur $\mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Z}$.

L'UNIFORMITE, UN CONCEPT IMPLICITE EFFICACE CHEZ CAUCHY

Henri LOMBARDI
Irem de Besançon

Résumé : Nous analysons plusieurs définitions et preuves du cours d'Analyse de Cauchy, en relation avec la notion d'uniformité (fonction uniformément continue sur un intervalle, uniformément dérivable sur un intervalle, suite uniformément convergente de fonctions).

Les preuves de Cauchy sont réputées fautives, mais elles sont parfaitement correctes si on utilise l'interprétation «uniforme» des définitions. En outre, les preuves sont particulièrement simples et claires. Enfin, les définitions uniformes ont, contrairement aux définitions «ponctuelles», un réel caractère opératoire, constructif.

Le problème épistémologique suivant se pose donc :

pourquoi a-t-on, à un certain moment, décidé de faire compliqué quand on pouvait faire simple ?

En d'autres termes : pourquoi a-t-on choisi comme concepts de référence des concepts qui d'une part sont non opératoires et, d'autre part, rendent les preuves inutilement subtiles et compliquées ?

Introduction

Le but de cet article n'est pas de «réhabiliter» les preuves de Cauchy, ni de soutenir la thèse selon laquelle Cauchy «pensait uniforme», au sens moderne de la chose. Les preuves de Cauchy peuvent aussi bien être rendues correctes par une lecture «non-standard» que par notre lecture «uniforme»⁽¹⁾. Mais la thèse selon laquelle Cauchy aurait pensé ceci ou cela est futile et de peu d'intérêt. L'état des mathématiques à son époque, avant toute définition claire des nombres réels, avant l'introduction des quantificateurs et bien

(1) Au sujet de l'intérêt et des abus d'une lecture non-standard de Cauchy, on lira : Imre LAKATOS : Cauchy and the Continuum, the Significance of Non-Standard Analysis for the History and Philosophy of Mathematics - in Math. Intelligencer, 1978, vol 1, n°3, p 151-161.

résultats considérés par les uns comme évidents et par les autres comme parfaitement obscurs. Bien que certains de ses théorèmes «souffraient» des exceptions, au moins des preuves relativement précises étaient-elles en place⁽²⁾, qu'il suffirait d'examiner à la loupe pour faire évoluer définitions, énoncés des théorèmes, et interprétations sémantiques des résultats obtenus.

La thèse que nous défendons est que la manière la plus simple de rétablir les preuves de Cauchy dans les canons de la rigueur contemporaine est de n'y pas toucher et de procéder au contraire à une lecture «uniforme» systématique des définitions qu'il donne.

Les infimum petits comme «manière de parler» d'autre chose

Nous commençons par examiner un premier passage où Cauchy introduit la notion d'infimum petit. Comme on peut le constater, il ne s'agit pas d'un infimum petit en acte, d'une quantité infinitésimale, mais bien d'une «manière de parler» d'une quantité variable tendant vers 0. Il s'agit donc plutôt d'une notion dynamique, où la variable varie effectivement. Notons à ce sujet que cette notion si intuitive de variable n'a pas de contrepartie théorique dans les différents modèles mathématiques abstraits ayant cours aujourd'hui. Variable, inconnue, paramètre, sont trois dénominations pour «une lettre désignant un nombre réel», et c'est seulement depuis l'extérieur de la théorie que l'utilisateur opte pour l'un des trois termes, conformément à ses besoins et à son intuition.

(2) «souffraient... pour les formalisées à qui ça tenait plaisir.

(3) On consultera Lakatos «Preuves et Réfutations» (chez Hermann) au sujet de la place centrale des preuves, plutôt que les théorèmes, dans l'activité mathématique, ainsi que sur le sujet plus précis des «théorèmes prouvés mais souffrant des exceptions» chez Cauchy.

Encadré 1 : La notion d'infimum petit vue comme «manière de parler» d'une suite, (ou plus généralement d'une quantité variable), convergeant vers zéro.
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (1ère partie, chap. II. Œuvres complètes, sér. II, t. 3)

§ I. — Des quantités infiniment petites et infiniment grandes.

On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite, lorsque sa valeur numérique décroît indéfiniment de manière à converger vers la limite zéro. Il est bon de remarquer à ce sujet qu'on ne doit pas confondre un décroissement constant avec un décroissement indéfini. La surface d'un polygone régulier circonscrit à un cercle donné décroît constamment à mesure que le nombre des côtés augmente, mais non pas indéfiniment, puisqu'elle a pour limite la surface du cercle. De même encore, une variable qui n'admettrait pour valeurs successives que les différents termes de la

$$\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$$

prolongée à l'infini, décroîtrait constamment, mais non pas indéfiniment, puisque ses valeurs successives convergeraient vers la limite 1. Au contraire, une variable qui n'aurait pour valeurs successives que les différents termes de la suite

$$\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{8}, \frac{1}{7}, \dots$$

prolongée à l'infini, ne décroîtrait pas constamment, puisque la différence entre deux termes consécutifs de cette suite est alternativement positive et négative ; et, néanmoins, elle décroîtrait indéfiniment, puisque sa valeur finirait par s'abaisser au-dessous de tout nombre donné.

Continuité, le global et le local

Nous entrons maintenant dans le vif de notre sujet, en examinant en détail le paragraphe un peu ambigu où sont proposées plusieurs définitions pour la notion de continuité d'une fonction (d'une variable réelle) définie sur un intervalle.

Dans ce que nous appelons la "définition 1", Cauchy s'attaque pour commencer à la définition pour la continuité d'une fonction sur un intervalle $[x_0, x_1]$, c.-à-d. selon ses termes, « entre deux limites assignées de la variable x » :

Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x , fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

décroît indéfiniment avec celle de α .

Pour comprendre cet énoncé, il faut d'abord rappeler que "valeur numérique" signifie à l'époque ce que nous désignons aujourd'hui par "valeur absolue" (1).

Si nous cherchons quelle serait la traduction contemporaine la plus fidèle de cette "définition 1", nous aboutissons à la définition actuelle de : *fonction continue en*

(4) En 1870, on n'osa pas encore vraiment affirmer que -3 est un nombre à part entière. Par contre la révolution des mathématiques modernes a imposé à des élèves très jeunes que -3 est un nombre entier (ou entier relatif), et 3 un nombre entier positif (ou naturel, ça dépend de la mode). Cela a semblé à nos légionnaires bouabakistes beaucoup plus intelligent que l'ancienne conception selon laquelle 3 est un nombre entier "tout court" et -3 un nombre entier "algébrique".

tout point de l'intervalle, c.-à-d. avec les quantificateurs :

$$\forall x \in [x_0, x_1], \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$$

$$\forall \alpha, |\alpha| < \eta \Rightarrow |f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon. (*)$$

Il y a évidemment un effort considérable à faire pour obtenir cette traduction. Et elle nous laisse comme un goût amer dans la bouche. Car si Cauchy avait eu clairement cela en tête, pourquoi n'aurait-il pas commenté par définir la continuité en un point ? (*)

Résumant sa pensée, soulignant la mise en forme définitive par un passage en italique, Cauchy énonce ensuite ce que nous appelons la "définition 1bis", 1bis parce qu'elle est simplement censée répéter plus clairement la définition 1 :

En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

Mais là, la traduction la plus fidèle de cette phrase en langage moderne est celle de "fonction uniformément continue sur l'intervalle". C.-à-d. avec les quantificateurs :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [x_0, x_1]$$

$$\forall \alpha, |\alpha| < \eta \Rightarrow |f(x+\alpha) - f(x)| < \varepsilon.$$

(5) Pour ne pas alourdir encore cet énoncé, ni non plus l'éloigner trop de la formulation de Cauchy, nous n'insisterons pas plus que lui sur le fait que $x + \alpha$ doit encore être sur l'intervalle.

(6) Comme nous le faisons aujourd'hui sans jamais nous poser le moindre problème à cet égard (à cause de notre désinvolture concernant l'histoire du concept ? ou de notre non-formation à un réel esprit "scientifique", c.-à-d. critique ? ou à cause de la nécessité de "terminer le programme" lequel comporte 95% de technique et 1% de réflexion ?)

Encadré 2 : Définitions concernant la continuité des fonctions d'une seule variable. Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (1ère partie, chap. II. Œuvres complètes, sér. II, t. I.

De la continuité des fonctions.

Parmi les objets qui se rattachent à la considération des infiniment petits, on doit placer les notions relatives à la continuité ou à la discontinuité des fonctions. Examinons d'abord sous ce point de vue les fonctions d'une seule variable.

Soit $f(x)$ une fonction de la variable x , et supposons que, pour chaque valeur de x intermédiaire entre deux limites données, cette fonction admette constamment une valeur unique et finie. Si, en parlant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α , la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

qui dépendra en même temps de la nouvelle variable α et de la valeur de x . Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x , fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence

$$f(x + \alpha) - f(x),$$

décroît indéfiniment avec celle de α . En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x , même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x , on dit qu'elle devient alors discontinue et qu'il y a pour cette valeur particulière solution de continuité.

Vient ensuite ce que nous appelons la **définition 2**, qui est une définition locale de la continuité. Cette définition venant après la **définition 1** (ou **1bis**) indique bien que cette première n'avait pas un caractère local, au moins dans l'esprit de Cauchy :

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable, toutes les fois qu'elle est continue entre deux limites de x , même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit.

La traduction la plus fidèle en langage moderne semble ici être : la fonction sera dite continue au voisinage de x si on peut trouver un intervalle contenant x sur laquelle la fonction est "globalement" continue (c.-à-d. *uniformément continue* si on accepte la traduction proposée de la définition 1bis).

Insistons sur le fait que cette définition serait parfaitement inutile si on avait *a priori* une conception purement locale de la continuité au départ. Par contre, elle devient indispensable si la première forme de continuité envisagée est globale, car il faut quand même pouvoir parler de la continuité d'une fonction comme $f(x) = 1/x$ sur l'intervalle $]0, 1]$ par exemple.

Notons aussi que n'apparaît jamais dans ce texte la notion de continuité en un point, au sens où nous l'entendons aujourd'hui.

Ce que nous appelons la *définition 3*, enfin, concerne la *discontinuité* (la solution de continuité) en un point. La phrase est particulièrement malaisée à interpréter :

Enfin, lorsqu'une fonction $f(x)$ cesse d'être continue dans le voisinage d'une valeur particulière de la variable x , on dit qu'elle devient alors *discontinue* et qu'il y a pour cette valeur particulière *solution de continuité*.

Un point de rupture de continuité semble donc être un point au voisinage duquel la fonction n'est plus continue, alors qu'elle est continue en tout point voisin distinct, comme par exemple le point 0 pour

la fonction $f(x) = 1/x$. Des exemples opposés fournis par des fonctions tarabiscotées comme : $f(x) = x$ si x est rationnel, $f(x) = 0$ sinon, ne sont tout bonnement pas envisagés. Et il semble peu probable que l'on puisse admettre dans le cadre fixé par Cauchy qu'une telle fonction soit continue au point 0. Bien au contraire, les points où la fonction est "continue" semblent nécessairement former un ouvert.

Pour nous résumer, disons que les notions modernes de continuité qui nous semblent traduire le mieux les notions relativement floues de Cauchy sont celles de *continuité uniforme* pour le cas d'un *intervalle fermé borné*, et celle de *continuité localement uniforme* pour un *intervalle arbitraire*.⁽⁷⁾

On peut se demander si l'interprétation «uniforme» que nous proposons pour la définition 1bis se trouve plutôt renforcée ou plutôt infirmée dans la suite du texte.

Les preuves de continuité qui sont données pour les fonctions usuelles, et que nous ne reproduisons pas ici, peuvent en fait être lues comme rigoureuses, aussi bien du point de vue de la continuité en tout point que de celui de la continuité uniforme ou localement uniforme.

C'est plutôt à l'occasion de la preuve d'un théorème réputé faux que nous pouvons constater à quel point l'uniformité semble présente en filigrane, c'est le théorème suivant : *une fonction de plusieurs variables qui est séparément continue par rapport à chaque variable est continue par rapport à l'ensemble des variables* (le texte de Cauchy est à la page suivante).

(7) Ces notions sont en fait très voisines de celles données en mathématiques constructives ou algorithmiques, à savoir la continuité uniforme pour un intervalle fermé borné et la continuité «uniforme sur tout sous-intervalle fermé borné» pour un intervalle arbitraire.

Encadré 3 : Continuité des fonctions de plusieurs variables, un théorème surprenant.

Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (1ère partie, chap. II. Œuvres complètes, sér. II, t. 3)

Soit maintenant

$$f(x, y, z, \dots)$$

une fonction de plusieurs variables $x, y, z, \dots$ et supposons que, dans le voisinage de valeurs particulières $X, Y, Z, \dots$ attribuées à ces variables, $f(x, y, z, \dots)$ soit à la fois fonction continue de x , fonction continue de y , fonction continue de $z, \dots$ On prouvera aisément que, si l'on désigne par $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ des quantités infiniment petites, et si l'on attribue à $x, y, z, \dots$ les valeurs $X, Y, Z, \dots$ ou des valeurs très voisines, la différence

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

sera elle-même infiniment petite. En effet, il est clair que, dans l'hypothèse précédente, les valeurs numériques des différences

$$f(x+\alpha, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots),$$

$$f(x+\alpha, y+\beta, z, \dots) - f(x+\alpha, y, z, \dots),$$

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots) - f(x+\alpha, y+\beta, z, \dots),$$

décroîtront indéfiniment avec celles des quantités variables $\alpha, \beta, \gamma, \dots$, savoir, la valeur numérique de la première différence avec la valeur numérique de x , celle de la seconde différence avec la valeur numérique de β , celle de la troisième avec la valeur numérique de γ , et ainsi de suite. On doit en conclure que la somme de toutes ces différences, savoir

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots) - f(x, y, z, \dots),$$

convergera vers la limite zéro, si $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ convergent vers cette même limite. En d'autres termes,

$$f(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma, \dots),$$

aura pour limite

$$f(x, y, z, \dots).$$

THEOREME I — Si les variables $x, y, z, \dots$ ont pour limites respectives les quantités fixes et déterminées $X, Y, Z, \dots$, et que la fonction $f(x, y, z, \dots)$ soit continue par rapport à chacune des variables $x, y, z, \dots$ dans le voisinage du système des valeurs particulières

$$x = X, y = Y, z = Z, \dots$$

$f(x, y, z, \dots)$ aura pour limite $f(X, Y, Z, \dots)$.

Nous faisons deux remarques concernant la preuve fournie par Cauchy.

D'abord, ce qui est en vue est la *continuité locale* et non pas la *continuité ponctuelle*. La preuve n'est pas écrite pour fonctionner en un point $(X, Y, Z, \dots)$, au contraire il est explicitement dit que tout se passe de la même manière pour un $(x, y, z, \dots)$ suffisamment voisin de $(X, Y, Z, \dots)$. Ce fait n'apparaît d'ailleurs clairement que dans la preuve et non dans l'énoncé du théorème.

La deuxième remarque est que la preuve fonctionne si on comprend la continuité par rapport à chaque variable *séparément*, $x, y, z, \dots$ comme devant être chaque fois une *continuité uniforme* par rapport à l'ensemble des variables. C.-à-d. avec les quantificateurs, et pour l'exemple de la continuité par rapport à la variable x :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \\ \forall x, y, z, \dots, \forall \alpha \mid \alpha < \eta \mid \Rightarrow \\ \mid f(x + \alpha, y, z, \dots) - f(x, y, z, \dots) \mid < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci en langage savant s'appellerait l'*uniforme équi-continuité*⁽⁸⁾ de la fonction par rapport à chacune des variables séparément, les autres variables étant considérées comme les paramètres pour une famille de fonctions d'une seule variable (la variable isolée).

Nous terminons ici nos commentaires concernant les questions de continuité. Il est néanmoins intéressant de rappeler qu'un autre fameux théorème «faux» de Cauchy :

toute série convergente de fonctions continues converge vers une fonction continue est rétabli «juste» par une définition uniforme pour la notion de suite convergente de fonctions.

(8) Sans doute la notion qu'il s'agit d'adapter le mieux à la preuve de Cauchy est celle d'*uniforme équi-continuité locale* (au voisinage de tout point).

Fonction dérivée et théorème des accroissements finis

Commençons par lire la définition de la notion de fonction dérivée. (Cours d'Analyse Ec. Polytech. Œuvres compl., sér. II, t. 4)

Lorsque la fonction $y = f(x)$ reste continue entre deux limites données de la variable x , et que l'on assigne à cette variable une valeur comprise entre les deux limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit, attribué à la variable, produit un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même. Par conséquent, si l'on pose alors $\Delta x = i$, les deux termes du *rapport aux différences*

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

seront des quantités infiniment petites. Mais, tandis que ces deux termes s'approcheront indéfiniment et simultanément de la limite zéro, le rapport lui-même pourra converger vers une autre limite, soit positive, soit négative. Cette limite, lorsqu'elle existe, a une valeur déterminée pour chaque valeur particulière de x ; mais elle varie avec x . Ainsi, par exemple, si l'on prend $f(x) = x^m$, m désignant un nombre entier, le rapport entre les différences infiniment petites sera :

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = x^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} i + \dots + i^{m-1}$$

et il aura pour limite la quantité mx^{m-1} c'est-à-dire une nouvelle fonction de la

variable x . Il en sera de même en général ; seulement la forme de la fonction nouvelle qui servira de limite au rapport

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

dépendra de la forme de la fonction proposée $y = f(x)$.

Pour indiquer cette dépendance, on donne à la nouvelle fonction le nom de *fonction dérivée*, et on la désigne, à l'aide d'un accent, par la notation :

$$y' \text{ ou } f'(x).$$

Remarquons que la valeur de la dérivée en un point n'intéresse pas vraiment Cauchy, mais que c'est plutôt la notion de fonction dérivée qu'il cherche à définir. *A priori*, il y a donc au moins deux lectures modernes de cette définition, selon que l'on demande une convergence en tout point ou une convergence uniforme du taux d'accroissement moyen vers la fonction dérivée. Avec les quantificateurs, la définition ponctuelle s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall x, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall \alpha \mid \alpha < \eta \mid \\ \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est la définition habituellement donnée aujourd'hui. La définition «uniforme» s'écrit :

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in [x_0, x_1], \forall \alpha \mid \alpha < \eta \mid \\ \Rightarrow \left| \frac{f(x+\alpha) - f(x)}{\alpha} - f'(x) \right| < \varepsilon. \end{aligned}$$

C'est la définition que l'on donne en mathématique constructive. Elle implique que la fonction dérivée est elle-même continue.

Remarquez que la preuve donnée ci-dessus par Cauchy concernant la dérivée de la fonction puissance fonctionne parfaitement dans le cadre de la définition «uniforme» (sur un intervalle fermé borné).

Examinons maintenant la preuve du théorème des accroissements finis donnée par Cauchy (encadré 4). Elle a l'immense mérite d'être simple et *naturelle*, contrairement aux preuves actuellement en vigueur dans les cours élémentaires de calcul différentiel.

On constate sans difficulté que la définition «uniforme» pour la notion de fonction dérivée rend la preuve élémentaire de Cauchy parfaitement rigoureuse (alors qu'elle est souvent considérée comme incorrecte, parce qu'on se réfère à la définition «ponctuelle»).

En outre on constate également que les théorèmes usuels concernant la dérivée de fonctions élémentaires, ou sur la dérivée d'un produit, d'une somme, d'un quotient (sur un intervalle où le dénominateur reste de signe constant et en valeur absolue $> h > 0$ donné), sont de démonstration aussi facile en version «uniforme» (dérivabilité uniforme sur tout intervalle fermé borné contenu dans l'intervalle de définition) qu'en version «ponctuelle».

Terminons ce paragraphe par un commentaire sur une deuxième version du théorème des accroissements finis (Cours d'Analyse à l'École Polytechnique 1ère partie, Œuvres complètes, série II, tome 4) :

Corollaire. – Si la fonction dérivée $f'(x)$ est elle-même continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, en passant d'une limite à l'autre, cette fonction variera de manière à rester toujours

Nous allons maintenant faire connaître une relation digne de remarque⁽¹⁾ qui existe entre la dérivée $f'(x)$ d'une fonction quelconque $f(x)$ et le rapport aux différences finies

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si dans ce rapport on attribue à x une valeur particulière x_0 , et si l'on fait, en outre, $x_0 + h = X$, il prendra la forme $\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$. Cela posé, on établira sans peine la proposition suivante :

THEOREME. — Si, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = X$, on désigne par A la plus petite, et par B la plus grande des valeurs que la fonction dérivée $f'(x)$ reçoit dans cet intervalle, le rapport aux différences finies

$$(4) \quad \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

sera nécessairement compris entre A et B .

Démonstration. — Désignons par δ , ε deux nombres très petits, le premier étant choisi de telle sorte que, pour des valeurs numériques de x inférieures à δ , et pour une valeur quelconque de x comprise entre les limites x_0 , X , le rapport

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

reste toujours supérieur à $f'(x) - \varepsilon$ et inférieur à $f'(x) + \varepsilon$. Si, entre les limites x_0 , X , on interpose $n - 1$ valeurs nouvelles de la variable x , savoir : $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, de manière à diviser la différence $X - x_0$ en éléments

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1},$$

qui étant tous de même signe, aient des valeurs numériques inférieures à δ , les fractions

$$(5) \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \dots, \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}}$$

se trouvant comprises, la première entre les limites $f'(x_0) - \varepsilon$, $f'(x_0) + \varepsilon$, la seconde entre les limites $f'(x_1) - \varepsilon$, $f'(x_1) + \varepsilon$, ... seront toutes supérieures à la quantité $A - \varepsilon$, et inférieures à la quantité $B + \varepsilon$. D'ailleurs, les fractions (5) ayant des dénominateurs de même signe, si l'on divise la somme de leurs numérateurs par la somme de leurs dénominateurs, on obtiendra une fraction moyenne, c'est-à-dire comprise entre la plus petite et la plus grande de celles que l'on considère (voir l'Analyse algébrique, Note II, théorème XII). L'expression (4), avec laquelle cette moyenne coïncide, sera donc elle-même renfermée entre les limites $A - \varepsilon$, $B + \varepsilon$, et, comme cette conclusion subsiste quelque petit que soit le nombre ε , on peut affirmer que l'expression (4) sera comprise entre A et B .

⁽¹⁾ On peut consulter sur ce sujet un mémoire de M. Ampère, inséré dans le X^{lle} Cahier du Journal de l'Ecole Polytechnique.

comprise entre les deux valeurs A et B , et à prendre successivement toutes les valeurs intermédiaires. Donc alors toute quantité moyenne entre A et B sera une valeur de $f'(x)$ correspondante à une valeur de x renfermée entre les limites x_0 et $X = x_0 + h$ ou, ce qui revient au même, à une valeur de x de la forme :

$$x_0 + \theta h = x_0 + \theta(X - x_0),$$

θ désignant un nombre inférieur à l'unité. En appliquant cette remarque à l'expression (4), on en conclura qu'il existe entre les limites 0 et 1 une valeur de θ propre à vérifier l'équation

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'(x_0 + \theta(X - x_0)).$$

Chez Cauchy, cette deuxième forme est prouvée en utilisant la continuité de la fonction dérivée. Comme nous l'avons déjà signalé, cette continuité est nécessaire lorsqu'on adopte la définition uniforme.

Il est bien connu que la première forme du théorème des accroissements finis se généralise aisément en plusieurs variables, ce qui n'est pas le cas de la seconde forme.

La démarche la plus courante aujourd'hui utilise la deuxième forme pour prouver la première forme. La deuxième forme est prouvée à partir du théorème de Rolle. Mais le théorème de Rolle est lui-même prouvé en utilisant une technique «non opératoire» : chercher un point sur l'intervalle où la fonction atteint son maximum. Or il n'y a pas d'algorithme général pour cette recherche, même si la dérivée est donnée comme fonction uniformément

(9) La référence pour l'analyse constructive est : Bishop, Bridges «Constructive Analysis», chez Springer (1985) (réédition, améliorée, d'un livre datant de 1967). Aucun éditeur français n'accepte aujourd'hui de publier une traduction de cet ouvrage fondamental.

continue sur l'intervalle. Le théorème de Rolle ne peut être réalisé par un algorithme qu'en imposant des restrictions sévères à la fonction étudiée, et le point obtenu est un extrémum local, mais non nécessairement global de la fonction⁽⁹⁾.

Conclusion

Notre sentiment est donc que la démarche générale de Cauchy concernant la question centrale des accroissements finis présente de nombreux avantages, essentiellement la simplicité des preuves et leur caractère opératoire.

Le problème épistémologique suivant se pose donc :

pourquoi a-t-on, à un certain moment, décidé de faire compliqué quand on pouvait faire simple ?

En d'autres termes : pourquoi a-t-on choisi comme concepts de référence des concepts qui d'une part sont non opératoires et, d'autre part, rendent les preuves inutilement subtiles et compliquées ?

Des avantages de même nature s'appliquent aussi au traitement de la continuité en version «uniforme».

Néanmoins, il serait abusif de prétendre que tout est toujours plus simple en version uniforme. Les trois notions : «continuité en tout point», «continuité uniforme sur tout intervalle fermé borné», «continuité localement uniforme», ne sont pas équivalentes du point de vue algorithmique.

Il faut dire que leurs «conseillers scientifiques» sont tous des bouabistes. La traduction de «Preuves et Réfutations» de Lakatos avait de la même manière été bloquée pendant plus de vingt ans... La désinformation ne s'applique pas seulement à la guerre du Golfe !

Encadré 5 : Le célèbre critère de Cauchy
Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique, 1ère Partie, chap. VI (Œuvres complètes, série II, tome 3)

D'après les principes ci-dessus établis, pour que la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

soit convergente, il est nécessaire et il suffit que des valeurs croissantes de n fassent converger indéfiniment la somme

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

vers une limite fixe s ; en d'autres termes, il est nécessaire et il suffit que, pour des valeurs infiniment grandes du nombre n , les sommes

$$S_n, S_{n+1}, S_{n+2}, \dots$$

diffèrent de la limite s , et par conséquent entre elles, de quantités infiniment petites. D'ailleurs, les différences successives entre la première somme S_n et chacune des suivantes sont respectivement déterminées par les équations

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= u_n \\ S_{n+2} - S_n &= u_n + u_{n+1} \\ S_{n+3} - S_n &= u_n + u_{n+1} + u_{n+2} \end{aligned}$$

Donc, pour que la série (1) soit convergente, il est d'abord nécessaire que le terme général u_n décroisse indéfiniment, tandis que n augmente : mais cette condition ne suffit pas, et il faut encore que, pour des valeurs croissantes de n , les différentes sommes

$$\begin{aligned} u_n + u_{n+1}, \\ u_n + u_{n+1} + u_{n+2}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire que les sommes des quantités $u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$, prises, à partir de la première, en tel nombre que l'on voudra, finissent par obtenir constamment des valeurs numériques inférieures à toute limite assignable. Réciproquement, lorsque ces diverses conditions sont remplies, la convergence de la série est assurée.

On notera que Cauchy n'éprouve absolument pas le besoin de donner une preuve. Et pour cause ! Aucune définition précise de la notion de nombre réel n'était encore clarifiée. Nous voyons par contre aujourd'hui dans cet énoncé la base sur laquelle peuvent être définis les nombres réels. C'est d'ailleurs à Cantor que revient la mérite d'avoir construit une définition des nombres réels à partir des «suites de Cauchy de nombres rationnels».

tions généralisées» pour les distributions. Cette même «rigueur» devrait en bonne logique bourbakiste frapper d'oukase la terminologie de «fonction de carré sommable» puisqu'une telle fonction, n'étant définie que «presque partout» n'est en fait définie nulle part (quoique en un sens moins fort que pour les distributions).

Il nous semble quant à nous que la vraie rigueur devrait se préoccuper des questions de fond plus que des questions de forme. Une terminologie intuitive nous semble toujours préférable à une terminologie abstraite. Une preuve qui se termine par «et ainsi de suite ...» est tout aussi rigoureuse qu'une preuve formalisée par récurrence. Seul le degré de formalisation est en cause, non le fond de la démonstration. Par contre la différence entre théorèmes «opérateurs» et théorèmes «non opérateurs» en analyse est une réelle question de fond qui n'est pratiquement jamais prise en compte par les théoriciens. Enfin, la nécessité d'avoir des preuves simples pour les théorèmes intuitivement vrais et fondamentaux, comme le théorème des accroissements finis, devrait être un critère de discrimination décisif quant au choix du modèle mathématique et de l'exposé pédagogique.

mique (opérateur), mais certaines preuves ne fonctionnent que dans le premier cadre, tandis que d'autres sont plus simples dans le deuxième cadre.

En outre des fonctions tarabiscotées de toutes sortes se sont imposées dans la pratique (fonctions intégrables au sens de Lebesgue, espace de Hilbert des fonctions de carré sommable ...) sans qu'on se soit d'emblée rendu compte que ces objets n'avaient pas leur statut le plus naturel en tant que fonctions, mais en tant qu'éléments d'espaces fonctionnels. De même qu'un nombre réel est un objet idéal nécessaire pour comprendre des calculs dont les entrées-sorties sont des nombres rationnels, de même, il est nécessaire d'utiliser des fonctions de carré sommable abstraites, limites «en un sens bien précisé» de fractions rationnelles à coefficients rationnels, pour comprendre des calculs dont les entrées-sorties sont des objets de cette dernière sorte.

Dans une généralisation ultérieure, les distributions, ces nouvelles «fonctions» ne sont plus définies nulle part (au moins une fonction de carré sommable est-elle réputée définie presque partout). Et la «rigueur française» rejette la terminologie de «fonc-

Encadré 6 : La somme d'une série convergente de fonctions continues est une fonction continue (avec une preuve « délicate »). Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique (Œuvres complètes, série II, tome 4)

De cette dernière équation, il résulte que les quantités

$$u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \dots$$

formeront une nouvelle série convergente dont la somme sera équivalente à $s - s_n$. Si l'on représente cette même somme par r_n , on aura $s = s_n + r_n$; et r_n sera ce qu'on appelle le reste de la série (1) à partir du $n^{\text{ième}}$ terme.

Lorsque, les termes de la série (1) renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différents termes fonctions continues de x , dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à cette variable, s_n, r_n et s sont encore trois fonctions de la variable x , dont la première est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé, considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions, lorsqu'on fait croître x d'une quantité infiniment petite α . L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n , une quantité infiniment petite; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n , si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite, l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite. De cette remarque on déduit immédiatement la proposition suivante :

THEOREME 1. — Lorsque les différents termes de la série (1) sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .

Encadré 7 : Continuité de la fonction obtenue en composant deux fonctions continues.

Cours d'Analyse à l'Ecole Polytechnique 1ère Partie, chap. II (Œuvres complètes, série II, tome 3)

THEOREME II. — Désignons par

$$x, y, z, \dots$$

plusieurs fonctions de la variable t , qui soient continues par rapport à cette variable dans le voisinage de la valeur particulière $t = T$. Soient, de plus,

$$X, Y, Z, \dots$$

les valeurs particulières de $x, y, z, \dots$ correspondantes à $t = T$; et supposons que, dans le voisinage de ces valeurs particulières, la fonction

$$u = f(x, y, z, \dots)$$

soit en même temps continue par rapport à x ; continue par rapport à y , continue par rapport à $z, \dots$; u , considérée comme une fonction de t , sera encore continue par rapport à t dans le voisinage de la valeur particulière $t = T$.

Encadré 8 : La somme d'une série convergente de fonctions est une fonction continue. Compte rendu de l'Académie des Sciences 14 mars 1853 (Œuvres complètes, série I, tome 12)

ANALYSE MATHÉMATIQUE — Note sur les séries convergentes dont les divers termes sont des fonctions continues d'une variable réelle ou imaginaire, entre des limites données.

En établissant, dans mon Analyse Algébrique, les règles générales relatives à la convergence des séries, j'ai, de plus, énoncé le théorème suivant :

Lorsque les différents termes de la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

sont des fonctions d'une même variable x , continues par rapport à cette variable, dans le voisinage d'une valeur particulière; pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi, dans le voisinage de cette valeur particulière, fonction continue de x .

Comme l'ont remarqué MM. Bouquet et Briot, ce théorème se vérifie pour les séries ordonnées suivant les puissances ascendantes d'une variable. Mais, pour d'autres séries, il ne saurait être admis sans restriction. Ainsi, par exemple, il est bien vrai que la série

$$(2) \quad \sin x, \frac{\sin 2x}{2}, \frac{\sin 3x}{3}, \dots,$$

toujours convergente pour des valeurs réelles de x , a pour somme une fonction de x qui reste continue, tandis que x , supposée réelle, varie, dans le voisinage d'une valeur distincte d'un multiple $\pm 2n\pi$ de la circonférence 2π , et qui se réduit, en particulier, à $\frac{\pi - x}{2}$, entre les limites $x = 0, x = 2\pi$. Mais, à ces limites mêmes, la somme s de la série (2) devient discontinue, et cette somme, considérée comme fonction de la variable réelle x , acquiert à la place de la valeur

$$+ \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad - \frac{\pi}{2},$$

donnée par la formule

$$s = \frac{\pi - x}{2},$$

la valeur singulière $s = 0$, qui reparaît encore quand on suppose

$$x = \pm 2n\pi,$$

n étant un nombre entier quelconque.

Au reste, il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception. C'est ce que je vais expliquer en peu de mots.

D'après la définition proposée dans mon Analyse algébrique, et généralement adoptée aujourd'hui, une fonction u de la variable réelle x sera continue entre deux limites données de x , si, cette fonction admettant pour chaque valeur intermédiaire de x une valeur unique et finie, un accroissement infiniment petit attribué à la variable produit toujours, entre les limites dont il s'agit, un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même.

Publiée par les Instituts universitaires de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques sous le patronage de l'ABIREM (Assemblée des Directeurs d'Irem), la revue « Repères - IREM » est un bulletin trimestriel s'adressant à tous les professeurs, et plus particulièrement aux enseignants des Collèges, des Lycées, des Lycées Professionnels, ou des Universités. Son but est de tenir chacun informé des questions actuelles, qu'elles aient trait aux grands débats du moment ou plus simplement aux applications concrètes, pour les classes, de la réflexion menée en commun entre praticiens et chercheurs. Elle est donc destinée à devenir un outil indispensable aussi bien aux professeurs de mathématiques qu'aux formateurs spécialisés ; ainsi qu'à tous ceux qui sont concernés par la pédagogie ou les Sciences de l'Education.

Elle se doit de figurer dans tout Centre de Documentation et d'Information ...

☐ **prix du numéro** : 70 F (+ frais d'expédition si envoi par avion)

☐ **abonnements** (quatre numéros par an)

— Etablissements : 250 F — Particuliers : 200 F

Envoi par avion (*Don - Tom ou Etranger*)

— Etablissements : 330 F — Particuliers : 280 F

Bulletin d'abonnement à renvoyer à :

TOPIQUES éditions, 24 rue du 26^e B.C.P., 54700 PONT-À-MOUSSON
accompagné du règlement par chèque ou d'un bon de commande officiel.

Nom : _____

et copier sur
Adresse : _____

Code postal et Ville : _____

Ci-joint la somme de : _____

Mode de règlement :

☐ Chèque bancaire ☐ Chèque postal

☐ Virement administratif sur facture

Numéro souhaité pour

débuter l'abonnement : _____

(en cas d'impossibilité, l'abonnement
débutera au dernier numéro disponible)

Cela posé, concevons que la série (1) reste convergente, et que ses divers termes soient fonctions continues d'une variable réelle x , pour toutes les valeurs de x renfermées entre certaines limites.

Soyent alors

s la somme de la série ;

s_n la somme de ses n premiers termes ;

$r_n = s - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots$ le reste de la série indéfiniment prolongée à partir du terme général u_n .

Si l'on nomme n' un nombre entier supérieur à n , le reste r_n ne sera autre chose que la limite vers laquelle convergera, pour des valeurs croissantes de n' , la différence

$$(3) \quad s_{n'} - s_n = u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}$$

Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande on puisse rendre, pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression (3) (quel que soit n), et, par suite, le module de r_n , inférieurs à un nombre aussi petit que l'on voudra. Comme un accroissement attribué à x pourra encore être supposé assez rapproché de zéro pour que l'accroissement correspondant de s_n offre un module inférieur à un nombre aussi petit que l'on voudra, il est clair qu'il suffira d'attribuer au nombre n une valeur infiniment grande, et à l'accroissement de x une valeur infiniment petite, pour démontrer, entre les limites données, la continuité de la fonction

$$s = s_n + r_n$$

Mais cette démonstration suppose évidemment que l'expression (3) remplit la condition ci-dessus énoncée, c'est-à-dire que cette expression devient infiniment petite pour une valeur infiniment grande attribuée au nombre entier n . D'ailleurs, si cette condition est remplie, la série (1) sera évidemment convergente. En conséquence, on peut énoncer le théorème suivant :

THEOREME I. — Si les différents termes de la série

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, u_{n+1}, \dots$$

sont des fonctions de la variable réelle x , continues, par rapport à cette variable, entre les limites données ; si, d'ailleurs, la somme

$$(3) \quad u_n + u_{n+1} + \dots + u_{n'-1}$$

devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des nombres entiers n et $n' > n$, la série (1) sera convergente, et la somme s de la série (1) sera, entre les limites données, fonction continue de la variable x .

HISTOIRE DE LA CONVERGENCE UNIFORME

(naissance d'un concept)

Notre propos en étudiant la genèse de la notion de convergence uniforme est, d'une part, de cerner l'état de la science au moment de son apparition, d'autre part, d'essayer de déterminer les problèmes où le concept s'est révélé et se révèle nécessaire.

Ensuite, en analysant ces problèmes qui ont présidé à l'introduction du concept, et surtout ceux pour lesquels la notion intervient obligatoirement, puis en faisant le point sur les connaissances réelles des étudiants dans le champ conceptuel contenant la convergence uniforme, nous essaierons de construire des situations où la convergence uniforme sera le concept nécessaire pour résoudre des problèmes qui auront un sens pour les étudiants. Cette construction sera faite, bien entendu, en s'appuyant sur l'arsenal théorique exposé dans le chapitre I (voir annexes didactiques).

Première étape 1821-1826.

1°) Analyse d'un théorème erroné.

En fait, on peut dire que la convergence uniforme apparaît pour la première fois parce qu'elle serait nécessaire à la démonstration de deux théorèmes et qu'elle n'existe pas encore. En effet, on peut faire remonter son origine à deux théorèmes énoncés par Cauchy en 1821 dans son "Cours d'Analyse" à l'Ecole Royale Polytechnique. L'un est vrai mais n'est pas démontré, l'autre est vrai seulement dans des cas particuliers :

Premier théorème.

"Lorsqu'une série ordonnée suivant les puissances ascendantes et entières d'une variable x sera convergente pour une valeur x différente de 0, elle restera convergente si l'on vient à diminuer cette valeur numérique ou même à la faire décroître indéfiniment".

Cauchy note pour les séries convergentes $s = s_n + r_n$.

Deuxième théorie.

"Lorsque, les termes de la série renfermant une même variable x , cette série est convergente, et ses différents termes des fonctions continues de x dans le voisinage d'une valeur particulière pour laquelle la série est convergente, la somme s de la série est aussi dans le voisinage de cette valeur particulière fonction continue de x ".

Notre première idée est qu'en étudiant la démonstration de Cauchy, on va trouver sans peine la raison de l'erreur. Voici cette démonstration :

"... $[s_n]$ est évidemment continue par rapport à x dans le voisinage de la valeur particulière dont il s'agit. Cela posé considérons les accroissements que reçoivent ces trois fonctions (s_n, s, r_n) , lorsque l'on fait croître x d'une quantité infiniment petite. L'accroissement de s_n sera, pour toutes les valeurs possibles de n , une quantité infiniment petite ; et celui de r_n deviendra insensible en même temps que r_n , si l'on attribue à n une valeur très considérable. Par suite l'accroissement de la fonction s ne pourra être qu'une quantité infiniment petite".

Soulignons les ambiguïtés de ces affirmations :

* $s_n(x+a) - s_n(x)$ est infiniment petit "pour toutes les valeurs possibles de n ", comme cette affirmation est faite avant que l'on ait précisé que $r_n(x)$ et $r_n(x+a)$ sont infiniment petits pour des valeurs considérables de n , cela laisserait supposer que la famille des s_n est implicitement considérée comme équicontinue. Cette hypothèse n'est bien sûr pas nécessaire, parce que, une fois n fixé assez grand pour que $r_n(x+a)$ et $r_n(x)$ soient petits, on peut utiliser la continuité d'une seule des fonctions s_n .

* $r_n(x+a) - r_n(x)$ "deviendra insensible en même temps que r_n "

Il y a ici un problème, et bien plus tard (en (1853)), Cauchy exhibera la série $\sum \frac{\sin(nx)}{n}$, et il montrera que dans un voisinage de 0 $r_n(x+a)$ ne peut pas être petit en même temps que $r_n(x)$ parce que $r_n(\frac{1}{n})$ ne tend pas

vers zéro. C'est donc le problème de contrôler r_n pour des valeurs voisines d'une valeur où il tend vers 0. Pour utiliser une terminologie actuelle, il se pose un problème de "contrôle uniforme". D'ailleurs cette question peut

être soulevée dans d'autres travaux de Cauchy. Faisons, par exemple, la définition de la continuité qu'il donne dans le chapitre II de son cours d'"Analyse algébrique" : "...] si, en partant d'une valeur de x comprise entre ces limites, on attribue à la variable x un accroissement infiniment petit α , la fonction elle-même recevra pour accroissement la différence $f(x+\alpha) - f(x)$, qui dépendra en même temps de la nouvelle variable x et de la valeur de x . Cela posé, la fonction $f(x)$ sera, entre les deux limites assignées à la variable x , fonction continue de cette variable, si, pour chaque valeur de x intermédiaire entre ces limites, la valeur numérique de la différence $f(x+\alpha) - f(x)$ décroît indéfiniment avec celle de α . En d'autres termes, la fonction $f(x)$ restera continue par rapport à x entre les limites données, si, entre ces limites, un accroissement infiniment petit de la variable produit toujours un accroissement infiniment petit de la fonction elle-même".

On dit encore que la fonction $f(x)$ est, dans le voisinage d'une valeur particulière attribuée à la variable x , fonction continue de cette variable, toutefois qu'elle est continue entre deux limites de x , même très rapprochées, qui renferment la valeur dont il s'agit".

Cette définition peut être interprétée, comme étant la définition de la continuité en un point, à cause de la phrase "entre deux limites de x , même très rapprochées", mais elle peut aussi être interprétée comme étant la définition de la continuité uniforme sur un intervalle, cet intervalle pouvant éventuellement être très petit autour d'une valeur déterminée.

Il y a un autre point qui permet de penser que Cauchy n'y voyait pas très clair dans les notions d'uniformité : il démontre la continuité d'une fonction de plusieurs variables en utilisant la continuité par rapport à chacune des variables.

La confusion entre continuité et continuité uniforme sur un intervalle fermé borné ne peut bien entendu pas amener de catastrophes ; les fonctions de plusieurs variables utilisées à l'époque étaient presque toujours différentiables et donc continues (la première contre-exemple est donné en 1870 par Thomae :

$$f(x,y) = \sin(4 \operatorname{Arctg} \frac{x}{y}) \text{ et } f(x,0) = f(0,0) = 0.$$

2°) Qu'est qui peut faire obstacle à la mise en place de la notion d'uniformité ?

a) La notion de fonction.

* C'est à dire pour $a < x < b$.

Une deuxième hypothèse : celle de Robinson et de Lakatos^{*}. Robinson suggère qu'il y avait deux théories rivales du "continuum". D'une part la théorie des nombres réels de Weierstrass, d'autre part la théorie de Leibniz du continu : le continu Archimédien étendu en un continu non Archimédien en ajoutant des nombres infinitésimaux petits et infiniment grands. La théorie de Weierstrass a finalement prévalu parce qu'elle permet de démontrer tous les théorèmes de l'analyse en utilisant seulement les nombres réels. Robinson pense que les "variables réelles" de Cauchy prenaient en compte les réels de Weierstrass, et ces nombres qui diffèrent des réels d'un nombre infiniment petit ou d'un nombre infiniment grand ; et donc, pour lui, continuif et limites pour Cauchy sont seulement définies pour des suites transfinies^{**}, ces suites prenant leurs valeurs dans un continu très dense. Voici l'interprétation de la démonstration de Cauchy que donne Robinson :

"Interpreted in terms of non standard analysis, the argument runs as follows. Let x_1 be a standard number, $a < x_1 < b$. In order to prove that $s(x)$ is continuous at x_1 we attempt to show that $s(x_1 + \alpha) - s(x_1)$ is infinitesimal for all infinitesimal α . Now

$$(1) \quad s(x_1 + \alpha) - s(x_1) = (s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)) + (r_n(x_1 + \alpha) - r_n(x_1))$$

Following Cauchy's argument we might be inclined to claim that the left hand side is infinitesimal since $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ is infinitesimal for all infinitesimal α . However this is erroneous, for although $r_n(x_1)$ is infinitesimal for all infinitesimal α , $r_n(x_1 + \alpha)$ has to be infinitesimal only for sufficiently high infinitesimal α ; while $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ is infinitesimal only for all finite α , and hence, by one of our basic lemmas for sufficiently small infinitesimal α .

In order to prove that the left hand side of (1) is infinitesimal we have to ensure that there exists an n for which $r_n(x_1 + \alpha)$ and $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ are infinitesimal simultaneously. No natural alternatives offer themselves, (i) to assume that $u_0(x) + u_1(x) + \dots$ is uniformly convergent in the interval $a < x < b$, so that $r_n(x_1 + \alpha)$ is infinitesimal for all infinitesimal α , or (ii) to assure that the family $\{s_n(x)\}$ is equicontinuous in the interval, so that $s_n(x_1 + \alpha) - s_n(x_1)$ is infinitesimal for all infinitesimal α (Robinson (1966), p. 272)."

* Robinson (1966) Non Standard Analysis Amsterdam North-Holland.

Lakatos : "Cauchy and the continuum". Mathematical Intelligence 1 (1973).

** C'est à dire encore définies pour les entiers infiniment grands.

C'est, peut être, la notion de fonction de l'époque de Cauchy qui fait obstacle à cette mise en place.

Rappelons^{*} que c'est Leibniz qui introduisit le premier le mot "fonction", cela désignait pour lui des portions de droites dépendant d'un point d'une courbe (tangente, normale etc...). Jean Bernoulli reprend ce mot "fonction" pour désigner l'ordonnée du point d'une courbe. Euler définit variables et constantes, puis une fonction d'une variable comme "expression analytique composée d'une manière quelconque de cette quantité variable et de nombres ou de quantités constantes". Il introduira ensuite les "fonctions mécaniques" observées en traçant arbitrairement un graphe à main levée. On trouve donc deux notions en présence :

- celle d'expression analytique
- celle de correspondance arbitraire

A l'époque de Cauchy, Fourier commence à envisager des correspondances numériques arbitraires, mais le rapport entre les deux notions n'est encore pas complètement clair. Cauchy a bien dans l'idée d'énoncer des théorèmes vrais pour toutes les fonctions, et c'est pour cela qu'il introduit les concepts de continuif et de limite ; mais dans la pratique, il n'applique ses théorèmes qu'à une classe de fonctions, celle des fonctions analytiques. Il n'y a donc pour Cauchy, d'intéressantes, que les fonctions définies par des expressions analytiques sur des intervalles, donc s'intéresser au comportement d'une fonction en un point n'a pas de sens, sauf s'il s'agit d'un point singulier. Donc pour lui, si on contrôle bien une fonction en un point, elle est implicitement contrôlée de la même façon dans un voisinage de ce point, et il utilise sans le dire des propriétés d'analyticité

* Nous résumons brièvement une partie de l'article "fonction" de l'encyclopédie Universalis.

Lakatos pense, lui, que l'interprétation de Robinson dans laquelle le continu de Cauchy est statique, c'est à dire fait de nombres standards ou non standards, n'est pas la meilleure. Il rappelle que Cauchy a pris comme contre exemple de son théorème la série $\sum \frac{\sin nx}{n}$, et qu'il a démontré que $\sum \frac{1}{n}$ ne tend pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini, et il en conclut :

"Now this is a curious argument. It shows that our Robinsonian interpretation of the Cauchy continuum was not quite correct. Cauchy's continuum (perhaps unlike Leibniz's) is not a set of actual points but a set of moving points. His "variables" are not Heisterstrassian "variables"; the latter can be eliminated without loss, since the Heisterstrass theory of motion explains motion, change, variables in terms of an infinitesimal algebra of actual quantities : this is one of its most important achievements. Not so Cauchy's theory, where "variable quantity" is not simply a manner of speech but a vital part of the theory. The "points" at which he shows that

$$\sin x + \frac{\sin 2x}{2} + \dots$$

does not converge is a moving point $x = (1/n)$ where $n = \infty$. The fact that the sequence does not converge at this moving point is in fact what later came to be known as the Gibbs-phenomenon and the corresponding conditionally that $\sum f_n(x)$ is uniformly convergent in I if for all (x_n) in I the corresponding remainders $r_n(x_n)$ tend to zero can be shown to be equivalent to Heisterstrassian uniform convergence. But then "everywhere" in Cauchy's theorem does not mean "at all points, whether standard or non standard" as Robinson would have it, but "at all standard and at all Cauchy-wise moving points". So Cauchy's continuum is a rather "dynamic" one". Lakatos [1978], p. 155.

En fin de compte, Robinson et Lakatos, mettent en cause non pas la conception de fonction de Cauchy, mais sa conception de l'ensemble des réels (qui n'étaient pas encore construits). On peut raisonnablement penser que c'est la conjugaison de ces deux conceptions encore confuses qui font "obstacle" (au sens de Bachelard) à la mise en place des condi-

tions d'uniformité.

2) Pourquoi Cauchy donne-t-il une démonstration du théorème ?

En effet on peut rappeler qu'il était habituel à cette époque d'appliquer le "principe de Leibniz" : dans l'exposition élémentaire des principes de calculs supérieurs de L'Huilier (1786), on trouve l'énoncé de ce principe : "si une quantité variable susceptible de limite jouit d'une certaine propriété, sa limite jouit de la même propriété". Les analyses avaient coutume d'admettre un certain nombre de résultats qui leur permettaient de progresser, par exemple :

En 1817 Bolzano introduit le critère de Cauchy pour les séries, il en admet la réciproque, et de cette réciproque il déduit : "tout ensemble majoré de nombre admet une borne supérieure". (Il s'agit des nombres réels dont l'existence est implicite).

En 1821 Cauchy utilise, sans démonstration, les passages à la limite dans les inégalités.

Ceci rappelés, on peut faire quelques conjectures sur les raisons qui ont poussé Cauchy à donner une démonstration du théorème sur la continuité :

- Cauchy enseignait, il énonçait donc ses résultats devant des étudiants, et il avait à cœur de prouver ce qui, pour les mathématiciens de l'époque, allait de soi.
- Cauchy venait de mettre au point des outils sophistiqués : Continuité et convergence, il était important pour lui de montrer leur puissance. Il nous semble d'ailleurs que son but était de montrer que le nouveau cadre théorique qu'il définissait, lui permettait de redémontrer les résultats d'Euler, et donc qu'il était efficace.
- Plus particulièrement, son cours de 1821 d'Analyse Algébrique vise la construction et l'étude des propriétés des fonctions transcendentes élémentaires, et il se sert explicitement du théorème sur la continuité, pour prouver que

$$(1+z)^{\alpha} = 1 + \alpha z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \dots$$

de cette égalité, il tire de nombreux résultats et en particulier la convergence de $1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots$ vers e^z .

3°) Les séries de Fourier.

En 1807, Fourier fait une communication orale à l'Académie des Sciences de Paris sur sa "théorie de la propagation de la chaleur dans les solides"^{*} donc en 1808 Poisson fait connaître les résultats essentiels ; Fourier énonce le résultat suivant :

"La série $\cos x - 1/3 \cos 3x + 1/5 \cos 5x - 1/7 \cos 7x + \dots$

converge vers une fonction limite qui "appartient à une ligne qui ... est composée de droites séparées, dont chacune est parallèle à l'axe des x et égale à la demi-circonférence. Les parallèles sont placées alternativement au-dessus et au-dessous de l'axe à la distance $\pi/4$, et jointes par des perpendiculaires qui font elles-mêmes partie de la ligne".

Des historiens comme Lakatos, dans "Proofs and Refutations" se posent la question de savoir si Cauchy était vraiment en mesure de reconnaître la série de Fourier comme un contre-exemple à son théorème sur la continuité. On peut effectivement se le demander quand on sait que Fourier décrivait :



comme étant le graphe de la

limite. Ce dessin n'est bien entendu pas le graphe d'une fonction, mais il est trompeur, car il paraît continu en un sens naïf (c'est à dire au sens d'Euler : "qui peut être tracé d'un seul trait"). Il faut donc pour l'analyser une conception très précise et très juste de ce qu'est une fonction et de ce qu'est la continuité. Cauchy avait certes dès 1821 une conception assez fine, mais lorsqu'il parle de fonction, il a vraisemblablement toujours dans l'idée ce que nous appelons les fonctions analytiques (c'est à dire les fonctions continues au sens d'Euler) et la fonction limite de Fourier peut paraître, dans un premier temps, appartenir à cette classe. Il est donc possible qu'en 1821 Cauchy n'ait pas accordé suffisamment d'attention à la série de Fourier, pour y reconnaître un contre-exemple à son théorème. La question reste ouverte.

DEUXIÈME ÉTAPE 1826-1853.

1°) Prise de conscience de l'erreur.

Cette deuxième étape est caractérisée par le fait que dans la communauté mathématique, tout le monde est maintenant persuadé que le théorème

* Fourier publie ses résultats en 1822 dans sa "Théorie analytique de la chaleur".

Il a écrit des fonctions analytiques par morceaux, sur des fonctions dont le graphe n'est pas continu.

de Cauchy est faux. Le 16 Janvier 1826, Abel

à son ami Holmboe, il attire son attention sur l'inexactitude du théorème de Cauchy, et il donne un contre-exemple (analogue à celui de Fourier) :

$$\sin x - \sin 2x/2 + \dots + (-1)^{n-1} \sin nx/n + \dots \text{ qui est égale à } \pi/2 \text{ si } 0 < x < \pi \text{ et à } 0 \text{ si } x = \pi. \text{ Il ajoute en plus : "on fait toute espèce d'opérations sur les séries infinies, comme si elles étaient finies ; mais est-ce permis ? Jamais de la vie. Où cela est-il démontré que l'on obtient la dérivée d'une série infinie en prenant la dérivée de chaque terme ? Il est facile de citer des exemples où cela n'est pas exact, par exemple :}$$

$$x/2 = \sin x - \sin 2x/2 + \sin 3x/3 + \dots, \text{ en prenant les dérivées on a : } 1/2 = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \dots \text{ Résultat absolument faux car cette série est divergente !"}.$$

Abel s'est posé le problème de la continuité des séries de fonctions, mais plucôt que d'essayer de trouver des conditions très générales de validité du théorème énoncé par Cauchy, il s'est placé dans le cadre plus restreint des séries entières (qui étaient d'ailleurs, rappelons le, les séries qui étaient visées par Cauchy) ; le théorème est vrai dans le cadre, mais la démonstration qu'en donne Abel comporte exactement la même erreur que celle de Cauchy. Il utilise implicitement la convergence uniforme. Cependant on peut constater qu'Abel reconnaît les mérites des concepts de limite et de continuité introduits par Cauchy en les utilisant lui-même.

Les fondements de son travail n'étant pas remis en cause, on peut penser que Cauchy va essayer de rectifier son théorème. Le fait qu'il donne en 1826 une preuve de la convergence de certaines séries introduites par Fourier permet peut être d'étayer cette hypothèse. Sa démonstration est d'ailleurs fautive, car il utilise le fait que deux séries à termes quelconques sont de même nature si leurs termes généraux sont équivalents. Cette erreur est dénoncée par Dirichlet^{*}, par contre, bien que Dirichlet démontre que des séries de fonctions continues convergent vers des fonctions discontinues, il ne mentionne pas que cela implique que le théorème de Cauchy est faux.

2°) Premières tentatives de rectification du théorème.

Fourier avait démontré de façon fort brillante ** que la série

$\sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\cos(2p-1)x}{2p+1}$ écart convergente ; il avait de plus remarqué qu'au voisinage des points de discontinuité de la limite, la convergence était extrêmement lente.

En 1847, Seidel a lui aussi très soigneusement étudié la vitesse de convergence des séries de Fourier dont les sommes étaient discontinues au voisinage des points de discontinuité, il s'est aperçu qu'au voisinage de ces points la convergence est très lente ; Seidel dit de ces séries qu'elles convergent "aussi lentement que l'on veut". De façon indépendante, Stokes chercha dans la même direction, et il arrive à la conclusion que ces séries convergent "infinitement lentement". Seidel et Stokes démontrèrent que si les séries ne sont pas à convergence infiniment lente, alors le théorème de Cauchy est vrai. Stokes en montra la réciproque, alors que Seidel en donne

un contre-exemple : $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$. La définition que Stokes donne de cette convergence infiniment lente lorsque x tend vers zéro est la suivante :

"On dirait que la convergence devient infiniment lente si n , étant le nombre de termes qu'on doit prendre de façon que la somme des termes négatifs soit en valeur absolue plus petite qu'une quantité ϵ donnée qu'on peut prendre aussi petite que l'on veut, n croît indéfiniment, lorsque x décroît indéfiniment". Stokes et Seidel ont bien raison où était l'erreur dans la démonstration de Cauchy ; mais les définitions qu'ils ont alors proposées ne sont pas assez opératoires pour permettre des calculs aisés, et leur découverte est passée complètement inaperçue à leur époque.

3°) Rectification par Cauchy lui-même.

Cauchy, en 1853, pour corriger son théorème, donne la première définition opératoire de la convergence uniforme. Il fait d'abord remarquer que le théorème qu'il avait énoncé en 1821, c'est à dire 32 ans auparavant, donnait "lieux à quelques exceptions", il ajoute alors : "il est facile de voir comment on doit modifier l'énoncé du théorème, pour qu'il n'y ait plus lieu à aucune exception".

Cauchy se donna une série de terme général u_n , il écrit $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$, τ_n est la resta de la série lorsqu'elle est convergente. $s_n - s = u_{n+1} + \dots + u_{n-1}$ (1), et il énonce :

"Concevons, maintenant, qu'en attribuant à n une valeur suffisamment grande, on puisse rendre, pour toute les valeurs de x comprises entre les limites données, le module de l'expression (1), quel que soit n ,

* Définition de Stokes citée par Grattan-Guinness.

et par suite le module de τ_n inférieurs à un nombre aussi petit que l'on voudra". On reconnaît énoncé ici le critère de Cauchy uniforme, mais Cauchy ne lui donne pas de nom spécifique, et il donne, après l'avoir énoncé le théorème I : "Si les différents termes de la série $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ sont des fonctions de la variable x , continues, par rapport à cette

variable entre des limites données ; si, d'ailleurs, la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ devient toujours infiniment petite pour des valeurs infiniment grandes des entiers n et $n' > n$, la série sera convergente et la somme de la série sera, entre les limites données, fonction continue, de la variable x ". Cauchy n'a pas trouvé nécessaire de caractériser par un nom cette sorte de convergence, cela tendrait à nous faire penser que la propriété $\sup_x |u_n(x) + \dots + u_{n'}(x)| < \epsilon$ n'est pas, pour Cauchy, une

propriété de l'ensemble des fonctions u_n , mais une propriété des valeurs prises par les u_n . Il semble que Cauchy ne puisse pas encore avoir l'idée d'étendre la notion de convergence des suites de nombres aux suites de fonctions ; en effet, sa notion des fonctions est très liée à leurs expressions algébriques et donc une fonction reste, pour lui, un nombre $f(x)$ (même si celui-ci varie lorsque x décrit l'ensemble de définition), il ne s'agit pour lui que de convergence de suites de nombres, même s'il est contraint de rajouter des conditions "qui portent sur l'ensemble des valeurs prises par les fonctions dans un intervalle. Il n'a d'ailleurs pas l'idée de revoir les autres théorèmes qu'il a énoncés, en tenant compte de la condition qu'il a trouvée pour la continuité. En particulier, il affirme que si les f_n sont continues sur $[a, b]$ et convergent vers f continue alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) dx \quad (1), \text{ sans ajouter de condition sur la conver-}$$

gence des f_n . Stokes répète cette erreur, et Riemann, lui-même, énonce le théorème faux dans un cours inédit (révisé par Hankel) sur la "théorie des fonctions complexes". Cela n'est pas tellement étonnant parce qu'on sait bien que la convergence uniforme est suffisante pour établir (1) mais qu'elle est loin d'être nécessaire ; et dans les domaines de fonctionnement habituels à l'époque de Cauchy, l'égalité (1) est valide sans qu'il y ait nécessairement convergence uniforme en effet pour exhiber une série (f_n) de fonctions numériques convergeant vers une fonction f intégrable et ne vérifiant pas (1), on va chercher une série telle que $\sum f_n$ converge uniformément sur tous les compacts de $[a, b]$, et telle que

- Il énonce et démontre correctement pour la première fois le théorème sur la dérivabilité de la somme de séries de fonctions dérivables, et fait remarquer que cela répond à l'objection faite par Abel en 1825.

- Pour ce qui est du théorème sur l'intégrabilité de la somme d'une série de fonctions intégrables, nous avons le témoignage de Heine qui écrit en 1869 que Weierstrass est le premier à avoir démontré que la somme d'une série de fonctions intégrables est elle-même intégrable et que

$$\int_a^b \sum_n f_n(x) dx = \sum_n \int_a^b f_n(x) dx \text{ si sa convergence est uniforme.}$$

QUATRIÈME ÉTAPE 1861-1906.

Il s'est passé quarante ans entre le moment où Cauchy énonce un théorème faux et celui où Weierstrass énonce et démontre de façon très moderne les théorèmes liés à la convergence uniforme. Il semble qu'à l'époque de Cauchy, il était difficile aux mathématiciens, d'envisager une fonction f indépendamment de son écriture explicite, c'est à dire de $f(x)$ (par exemple $\frac{1}{x^2+1}$ ou $1-x+x^2+\dots$) ; la seule limite envi-

sageable était donc $f = \lim_n f_n$ si et seulement si pour tout x $f(x) = \lim_n f_n(x)$. Ensuite, petit à petit, les fonctions commencent à être manipulées comme des objets mathématiques à part entière, c'est à dire sans faire référence explicitement à leur expression algébrique ou à leur comportement (variations, limites, etc...). On peut penser que cette évolution s'est faite grâce au développement de deux secteurs des mathématiques : d'une part le calcul des variations, d'autre part la théorie des ensembles.

Le calcul des variations est étudié dès le début du 18ème siècle par Euler et Lagrange. Euler cherche une fonction y qui rend extrême l'intégrale $I = \int_a^b F(x, y', \dots, y^{(n)}) dx$, il montre qu'elle vérifie nécessairement "l'équation d'Euler".

Lagrange a l'idée de remplacer $y(x)$ par $y(x,t)$, il obtient ainsi $I(t)$ et en écrivant $I'(t) = 0$, il retrouve l'équation d'Euler. A l'époque déjà, on sait bien qu'une solution y de l'équation d'Euler ne donne pas nécessairement un extremum relatif pour I . D'ailleurs la notion d'extremum relatif n'est pas claire, on se rend déjà compte que la notion de fonction

* P. Dugac rapporte dans sa monographie sur Weierstrass, qu'il a trouvé de propos dans "Über trigonometrische Reihen" de Heine. [Dug 1]

$$\sum_n \int_a^b |f_n(x)| dx \text{ diverge : } f_n(x) = e^{-nx} - 2e^{-2nx} \text{ sur } [0, +\infty[.$$

$$\sum_n f_n \text{ converge normalement sur tout compact de } [0, +\infty[\text{, } \int_0^{+\infty} f_n(x) dx = 0$$

$$\int_0^{+\infty} |f_n(x)| dx = \frac{1}{2n}, \sum_n \frac{1}{2n} = +\frac{\infty}{2} \text{ est une fonction strictement positive}$$

$$\text{donc } \int_0^{+\infty} \sum_n |f_n(x)| dx > 0 \text{ et par conséquent (1) n'est pas vérifié.}$$

Le concept de convergence uniforme est né, mais il n'a pas encore pris toute son importance, il n'a même pas de nom ; les mathématiciens n'ont pas encore pris conscience du fait qu'il s'agit d'une convergence essentiellement différente de la convergence point par point.

TROISIÈME ÉTAPE 1853-1861.

Gudermann avait introduit ce qu'il appelait convergence uniforme de certaines séries dans un de ses cours à Munster ; il voulait spécifier par là que cette convergence était indépendante de certains paramètres.

Weierstrass a été l'élève de Gudermann à Munster, et il n'est donc pas étonnant qu'en 1841, dans un article publié en 1894, il parle de séries entières qui "convergent uniformément", c'est à dire "quelque soit un nombre positif δ , on peut enlever de la série un nombre fini de termes de façon que le reste de la série, pour tous les x dans le domaine de convergence, soit plus petite en valeur absolue que δ ". Cet article n'étant pas publié avant 1894, il n'a aucune influence ; et c'est dans son cours de 1861 (cours rédigé par Schwartz) qu'on trouve pour la première fois les idées de Weierstrass sur la convergence uniforme** :

- Il commence par poser la question de savoir à quelle condition une série de fonction continues convergent vers une fonction continue. Il introduit alors la notion de convergence uniforme à l'aide du critère de Cauchy uniforme.

- Il donne la démonstration du théorème sur la continuité en "découvrant les ϵ en 3", exactement comme on le fait actuellement dans les cours de DEUG.

* Exemple fourni par J.L. Ovariet.

"voisine" d'une autre peut prendre plusieurs sens, le problème est donc déjà posé !

Durant tout le XIX^{ème} siècle, les analystes s'intéressent à l'étude des équations fonctionnelles : équations différentielles, aux dérivées partielles, intégrales, etc... Dès 1824 Cauchy, travaillant sur l'existence des solutions d'équations différentielles commence à entrevoir la distinction entre propriétés locales et propriétés globales des fonctions (cet aspect est mis en évidence dans l'introduction de G. Gillman au livre "Augustin-Louis Cauchy. Equations différentielles"). Les remarques de Cauchy sont améliorées par Lipschitz dans "sur la possibilité d'intégrer complètement un système donné d'équations différentielles", publié en 1876 en français (en 1868 en italien). C'est Picard qui met ces notions bien au point dans son traité d'analyse (tome II, paru en 1893).

Weierstrass n'est peut être pas très conscient de définir avec la convergence uniforme une convergence dans l'ensemble des fonctions, mais la condition qu'il introduit pour tout x avec $a < x < b$, montre qu'il envisage un comportement global sur $[a,b]$.

Vers la fin du XIX^{ème} siècle, la nécessité d'une nouvelle analyse commence à se faire sentir, une analyse qui traiterait les fonctions de fonctions. Dès 1887, Volterra, après Ascoli et Arzela, a l'idée d'appliquer les concepts du calcul infinitésimal aux "fonctions de lignes" (ce sont des $f(t)$ où f est une fonction définie sur un intervalle, donc dont le graphe est une ligne). Il propose des notions de voisinage de lignes, de limite de suites de lignes, et il essaye d'étendre les notions de continuité et de dérivabilité, il ne fait cela que dans des cas très particuliers, mais l'idée est lancée ! Cet essai paraît, a posteriori, bien audacieux quand on sait que les notions d'algèbre et de topologie, qui sont nécessaires à une telle construction, ne sont pas encore mises en place. Hadamard et Lévy continuent les travaux de Volterra, ce sont eux qui introduisent les termes de fonctionnelles et d'analyse fonctionnelle mais leurs découvertes restent sans développement ultérieur. L'ensemble des travaux de la fin du XIX^{ème} se caractérise par un manque de réussite dans la généralisation (l'état de l'analyse fonctionnelle à cette époque rassemble beaucoup à l'état de l'analyse classique juste avant Cauchy).

La théorie des ensembles, elle, est issue des travaux de Cantor et de Dedekind sur les ensembles de points, c'est à dire sur les parties de

*Hadamard (1865-1963)

Lévy (1886-1971)

* Dans ce domaine précis

$\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{R}^n$. On en trouve les prémisses dans le livre de Dedekind "Que sont et que doivent être les nombres ?" paru en 1888, et dans les six mémoires de Cantor "Sur les ensembles infinis et linéaires de points" parus de 1878 à 1884. Le concept général d'ensemble est introduit dans "Sur les fondements de la théorie des ensembles transfinis" publiés de 1895 à 1897 par Cantor.

Dans le paragraphe 2 de son livre, Dedekind reprend la définition de Dirichlet d'une application : "L'application f est une loi qui à tout élément déterminé s d'un ensemble S fait correspondre un élément bien déterminé $f(s)$, image de s ", et il montre pour la première fois l'utilité et l'importance de considérer les fonctions les plus générales.

C'est Fréchet qui va réussir la synthèse des différents courants précédents. Dans sa thèse publiée en 1906 et intitulée "Sur quelques points du calcul fonctionnel", il va éclaircir la notion, bien préoccupante pour les analystes, de fonctions voisines. Pour cela, Fréchet a l'idée de définir la proximité d'objets abstraits, cette définition pouvant ensuite s'appliquer à définir la proximité d'objets particuliers (points, fonctions, courbes, surfaces, etc...). Il considère un ensemble E , sur lequel est définie une distance, vérifiant trois propriétés dont jouit la distance euclidienne et dont Fréchet découvre qu'elles sont fondamentales :

$$**d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$**d(y,x) = d(x,y) \text{ pour tous les couples } (x,y).$$

$$**\text{Pour trois éléments quelconques } x,y,z \text{ de } E, d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

Le travail de Fréchet est remarquable, en effet, toutes les notions importantes d'analyse dans $\mathbb{R}^n$, telles que voisinages, limites, points d'accumulation, compacité, connexité etc..., peuvent être transférés dans ces espaces abstraits, qu'en langage moderne on appelle "espaces métriques".

Cela résout le problème de la proximité de deux fonctions, il suffit de définir des distances sur les ensembles de fonctions. Mais au contraire de $\mathbb{R}^n$ où toutes les distances amènent à la même notion de convergence (u_n converge vers u si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(u_n, u) = 0$) sur les ensembles

de fonctions des distances différentes donnent des notions de convergence différentes, par exemple :

les fonctions continues sont limites de leurs séries de Fourier avec la

$$\text{distance } d_2(f,g) = \left(\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 dt \right)^{1/2} \text{ et pas avec la distance } d(f,g) =$$

$$\sup_x |f(x)-g(x)| \text{ (qui est la distance liée à la convergence uniforme). Après,}$$

*Distances usuelles

(issues de normes)

les travaux de Fréchet, la convergence simple et la convergence uniforme apparaissant issues l'une d'une famille d'écarts et l'autre d'une distance définie sur l'ensemble des fonctions : l'une est très localisée, l'autre est au contraire très globale ; (f_n) converge simplement vers f sur I si et seulement si pour tout x de I $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n(x), f(x)) = 0$ (d distance sur R^n).

(f_n) converge uniformément vers f sur I si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} d(f_n, f) = 0$ où $d(f_n, f) = \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)|$.

Dès l'époque de Fréchet, on utilise de nombreuses distances sur les ensembles de fonctions, en particulier la distance d_2 que nous avons citée plus haut : c'est l'écart quadratique moyen, issu des travaux de Sturm et Liouville. La mise au point des espaces topologiques les plus généraux et des espaces normés sont des raffinements qui n'amènent plus aucun progrès sur la notion de convergence uniforme stricto sensu :

par exemple, "Soit X un ensemble quelconque, Y un espace métrique et soit $\mathcal{A}$ un ensemble de parties de X . Désignons par $f_1, \dots, f_n, \dots$ des applications de X dans Y . On dit que les f_n convergent vers f sur tout $A \in \mathcal{A}$, si pour tout $A \in \mathcal{A}$, la restriction des f_n à A convergent uniformément vers la restriction de f à A .

- si $\mathcal{A} = X$, c'est la convergence uniforme sur X .
- si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des parties de X réduites à un seul point, c'est la convergence simple.
- si $\mathcal{A}$ est l'ensemble des compacts de X , on obtient la convergence uniforme sur tout compact".

Avec la thèse de Fréchet, nous cernons au plus près la notion de convergence uniforme, elle permet de décrire une certaine proximité dans un ensemble de fonctions. Les problèmes, qui se posent dorénavant aux mathématiciens, sont les choix de distance, ou de structure uniforme, qui expriment au mieux la proximité des fonctions selon le problème envisagé.

En résumé.

L'étude de la genèse historique de la notion de convergence uniforme nous a permis de repérer un certain hiatus.

Cauchy voulait légitimer certaines opérations que l'on faisait sur les séries : intégration, dérivation, interversions de passage à la limite etc...

* G. Choquet "Cours d'Analyse, tome II, Topologie" Masson.

Mais la notion de convergence simple est insuffisante pour cela, l'absence d'une autre notion l'a conduit à énoncer un théorème faux. Cauchy n'avait pas, en 1821, les outils qui lui auraient permis d'inventer une autre notion : à savoir l'idée et les moyens d'appliquer les concepts de l'analyse classique aux ensembles de fonctions. Pourtant, une lente évolution des idées a permis d'abord de corriger la démonstration fautive, mais c'était encore des considérations peu précises et peu susceptibles d'être généralisées (par exemple pour démontrer les théorèmes sur la dérivation ou sur l'intégration).

Ensuite des progrès dans les notions de convergences et de fonction permettent à Weierstrass de légitimer toutes les opérations sur les séries grâce à une notion presque actuelle de la convergence uniforme.

Le dernier pas est franchi lorsque Fréchet invente la notion d'espace métrique, il est alors patent que la notion de convergence uniforme est liée à une certaine proximité entre les fonctions, celle-ci étant définie par la distance : $d(f, g) = \sup_{x \in I} |f(x) - g(x)|$.

BIBLIOGRAPHIE pour le Chapitre V

- BELEOSTE B. "Augustin Louis Cauchy" Pour la Science n°71, Paris (1955).
- BOURBAKI N. Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann Paris (1953).
- BROUSSEAU G. Petit panorama de la didactique des mathématiques. 2ème école d'été de didactique des mathématiques (1982).
- CAUCHEY A.L. Œuvres Gauthier-Villars Paris (1882-1974).
- CHEVALLARD Y. et JOSHUA M.A. Un exemple d'analyse de la transposition didactique : la notion de distance. Recherche en didactique des Mathématiques Vol 3 n°1 (1982).
- DHOMERES J. Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction. Université de Nantes (à paraître).
- DIEUDONNE J. et alii Abrégé d'histoire des mathématiques, Hermann Paris (1973).
- DIRICHLET P.G. Sur la convergence des séries trigonométriques qui servent à représenter une fonction arbitraire entre les limites données Werke tome I, Berlin Reinen 1889.
- DUGAC P. - Eléments d'analyse de Karl Weierstrass. Archive for history of exact sciences Vol 10 n°1-2 (1973).
- Sur les fondements de l'analyse de Cauchy à Baire. Thèse d'Etat Université Paris VI (1973).
- Sur les fondements de l'analyse au XIX^e s. Université de Louvain (1980).
- Richard Dedekind et les fondements des mathématiques Vrin Paris (1976).
- FOURIER J.B. Théorie analytique de la chaleur. Paris (Didot) (1822).
- GILAIN C. Equations différentielles ordinaires d'A.L.Cauchy. Collection Academic Press (1983)
- GRABNER J. L'âge de la rigueur MIT Press
- GRATHAN GUINNESS The development of foundations of mathematical analysis from Euler to Riemann. MIT Press (1970).
- HOUEL C., OVAERT J.L., RAYMOND F., SANSUC J.J. Philosophie et calcul de l'infini Maspéro Paris (1976).
- LAKATOS - Proof and refutations dans une traduction de N.Baïacheff et J.M.Laborda (à paraître).
- Cauchy and the Continuum, The mathematical intelligencer 1 (1978).

- REVUZ A. et REVUZ G. Eléments de topologie APM Paris (1955).
- ROBINSON A. Standard analysis - North-Holland (1970).
- YOUSKEVITCH Le concept de fonction jusqu'au milieu du XIX^e s. APMEP fragment d'histoire des mathématiques n° 41 Paris (1981).
- INTER-IREM Histoire des mathématiques et épistémologie n°13 IREM Lyon (1979).
- INTER-IREM Enseignement de l'analyse n°20 - IREM Lyon (1981).
- ENCYCLOPEDIA-UNIVERSALIS Tous les articles concernant l'analyse et les analyses du XVIII^e, XIX^e et début du XX^e s.

Le concept de nombre réel revint une fois que plus à la surface dans les discussions qu'eurent dans les années vingt HILBERT et BROUWER sur les fondements des mathématiques ; ces discussions intervinrent après que RUSSELL eut trouvé des contradictions dans la théorie soi-disant "naïve" des ensembles de CANTOR et FREGE, et avant que GÖDEL eut démontré que l'on ne pouvait établir par une démonstration finie la consistance d'aucun système axiomatique de théorie des ensembles. Les discussions qui s'ensuivirent en logique mathématique, et qui se poursuivent aujourd'hui ont donné le jour à des concepts plus limités tels que, par exemple, les *nombres calculables*, et les *nombres réels constructifs* (voir BISHOP [3], HERMES [16], LORENZEN [24]).

2. Les coupures de DEDEKIND

On peut pallier la non-complétude du corps $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels en effectuant des "coupures" dans $\mathbb{Q}$; c'est un procédé entièrement naturel qui permet d'obtenir un ensemble complet et totalement (= linéairement) ordonné. L'addition et la multiplication pour ces nouveaux objets sont définies de telle manière qu'ils forment un corps. Ces coupures possèdent les propriétés R1 à R3 suivantes, qui sont aujourd'hui souvent prises comme un ensemble d'axiomes définissant les nombres réels.

On dit qu'un ensemble $(K, +, \cdot, \leq)$ muni de deux lois de composition internes $+$ et $\cdot$, et d'une relation binaire $\leq$ est l'*ensemble des nombres réels* si et seulement s'il satisfait aux axiomes suivants :

- (R1) $(K, +, \cdot)$ est un corps.
- (R2) $\leq$ est une relation d'ordre total sur K , compatible avec l'addition et la multiplication.
- (R3) Complétude : toute partie non vide minorée M de K possède une borne inférieure dans K .

On dit qu'un minorant s d'une partie non vide M de K est la *borne inférieure* de M , et l'on note $s = \inf M$, si tous les minorants de M dans K sont inférieurs à s . On dit parfois que s est l'*infimum* de M . Ainsi, s est le plus grand des minorants de M .

1. L'ensemble $\mathbb{R}$ des coupures. Une *coupure de Dedekind* est une paire ordonnée (α, β) de deux parties de $\mathbb{Q}$, α (l'ensemble de "gauche" ou "inférieur") et β (l'ensemble de "droite" ou "supérieur") satisfaisant aux quatre conditions suivantes :

- (D1) $\alpha \cup \beta = \mathbb{Q}$
- (D2) Ni α ni β ne sont vides.
- (D3) Tout élément de α est inférieur à tout élément de β .
- (D4) β n'a pas de plus petit élément.

Chaque coupure est déterminée de manière unique soit par son ensemble de gauche soit par son ensemble de droite, chacun d'eux déterminant l'autre. Nous pouvons donc identifier une coupure avec son ensemble droit, ce qui revient à remplacer les quatre axiomes précédents par les trois suivants :

- (D'1) β et $\beta^c = \mathbb{Q} \setminus \beta$ sont non vides.
- (D'2) Si $r \in \beta$, $s \in \beta^c$ alors $s \in \beta$.
- (D'3) β n'a pas de plus petit élément.

Dans ce qui suit, nous emploierons les lettres grecques $\alpha, \beta, \dots$ pour représenter les ensembles de droite, et nous appellerons *nombre réel* toute coupure de Dedekind. L'ensemble des coupures de Dedekind est noté $\mathbb{R}$.

Tout nombre rationnel s définit la coupure : $\underline{s} := \{r : r \in \mathbb{Q}, s < r\}$, qui est dite *rationnelle*. Une coupure α est rationnelle, si et seulement si α' a un plus grand élément. L'application $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, s \mapsto \underline{s}$ est un plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Il y a des coupures qui ne sont pas rationnelles. Par exemple la coupure $\sqrt{2}$, définie par $\sqrt{2} := \alpha := \{r : r \in \mathbb{Q}, r^2 > 2\}$, n'est pas rationnelle. Il est facile de vérifier que α satisfait aux deux premiers axiomes de définition des coupures. Pour vérifier le troisième axiome, nous devons montrer que, pour tout $r \in \alpha$, il existe $s \in \alpha$ tel que $s < r$. Il suffit de choisir $s := \frac{2r+2}{r+2} \geq 0$. Comme $r - s = \frac{r^2 - 2}{r+2}$ et $r^2 > 2$, l'inégalité $r > 0$ entraîne $s < r$.

Puisque $s^2 - 2 = \frac{2(r^2 - 2)}{(r+2)^2}$ et $r^2 > 2$, on a $s^2 > 2$. La coupure α est irrationnelle parce que son complémentaire α' n'a pas de plus grand élément. En effet, si $r \in \alpha'$, avec $r > 0$, (et donc $r^2 < 2$) il suffit de choisir le même s que ci-dessus. Alors, comme $s^2 < 2$, on a $s \in \alpha'$ et $r < s$.

2. La relation d'ordre dans $\mathbb{R}$. La relation d'ordre est définie par l'inclusion : Si α et β sont deux coupures (des ensembles de droite), par définition, $\alpha \leq \beta$ si et seulement si $\beta \subset \alpha$. Il est facile d'établir la réflexivité, la transitivité et l'antisymétrie de cette relation. L'ordre défini par cette relation est total. En effet, supposons $\alpha \neq \beta$, et soit $r \in \alpha$, avec $r \notin \beta$. Alors $r \in \beta'$, et pour tout $s \in \beta$, on a $r < s$, et donc $s \in \alpha$. Autrement dit, $\beta \subset \alpha$. L'ordre est complet au sens de l'axiome (R3). Démontrons-le. Soit A un ensemble de coupures minoré inférieurement. Alors $\beta = \bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ est une coupure (comme A est borné inférieurement, il existe $c \in \mathbb{Q}$ avec $c \notin \beta$). On pourra facilement vérifier que le second et le troisième axiome de coupure sont vérifiés, et que β est la borne inférieure de A .

Si l'on effectue la construction des coupures encore une fois, en partant de $\mathbb{R}$, on n'obtient rien de nouveau. Pour toute coupure α de $\mathbb{R}$, il existe un réel γ tel que $\alpha = \{\alpha \in \mathbb{R} : \gamma < \alpha\}$; il suffit de prendre la borne inférieure $\gamma = \bigcup_{\alpha \in \alpha} \alpha$ de α .

La troisième citation en tête de ce chapitre exprime ceci. Les deux autres citations (d'ARISTOTE et LEIBNIZ) montrent l'ancienneté de l'idée fondamentale sous-jacente de continu connexe.

Le plongement de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (voir le paragraphe 1) est compatible avec la relation d'ordre. Les nombres rationnels sont denses dans $\mathbb{R}$: deux coupures distinctes α et β étant données (i.e. des nombres réels), il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $\alpha < r < \beta$.

3. L'addition dans $\mathbb{R}$. Si α et β sont deux coupures, on définit la somme $\alpha + \beta$ comme l'ensemble $\{r + s : r \in \alpha, s \in \beta\}$. Les trois propriétés caractéristiques d'une coupure sont vérifiées par $\alpha + \beta$, de sorte que $\alpha + \beta \in \mathbb{R}$. La restriction à $\mathbb{Q}$ de la somme ainsi définie coïncide avec l'addition habituelle des nombres rationnels. Elle est également compatible avec la relation d'ordre : si α et β sont deux coupures telles que $\alpha < \beta$, alors, pour tout $\gamma \in \mathbb{R}$, $\alpha + \gamma < \beta + \gamma$.

THÉORÈME — $(\mathbb{R}, +, \leq)$ est un groupe commutatif ordonné, et la coupure zéro est l'élément neutre de la loi $+$.

DÉMONSTRATION : L'associativité, la commutativité et la relation $\alpha + 0 = \alpha$ se déduisent immédiatement de la définition de l'addition. L'opposée d'une coupure $\alpha \in \mathbb{R}$ est définie par $-\alpha := \{-r : r \in \alpha, r \neq \max \alpha\}$. (On doit exclure $-\max \alpha$ pour assurer la condition (D'3).) Pour établir que $\alpha + (-\alpha) = \emptyset$, l'inclusion $\subset$ est aisément vérifiée. Inversement, supposons $r \in \emptyset$. On a donc $r > 0$, et l'on doit montrer que $r \in \alpha + (-\alpha)$. Puisque α' et α sont contigus, il existe $s \in \alpha'$ et $t \in \alpha$ tels que $0 < t - s < r$, $s \neq \max \alpha'$, et $-s \in -\alpha$. Ainsi, $t - s \in \alpha + (-\alpha)$, et comme $r > t - s$, on doit aussi avoir $r \in \alpha + (-\alpha)$. ■

4. La multiplication dans $\mathbb{R}$. Dans le cas où les coupures α et β sont toutes deux > 0 , le produit est défini de manière naturelle par $\alpha \cdot \beta = \{r \cdot s : r \in \alpha, s \in \beta\}$. Il est facile de vérifier que $\alpha \cdot \beta$ satisfait aux axiomes (D'1) à (D'3) des coupures, que cette multiplication est associative et commutative, que 1 est un élément neutre, que la loi $\cdot$ est distributive par rapport à l'addition, et que cette multiplication est compatible avec l'ordre. Les difficultés commencent avec l'existence de l'inverse multiplicatif d'un réel. Soit donc $\alpha > 0$ une coupure. On définit l'inverse α^{-1} de α par

$$\alpha^{-1} := \{r^{-1} : r \in \alpha', r > 0, r \neq \max \alpha'\}.$$

On vérifiera facilement que α^{-1} est bien une coupure, et que $\alpha \cdot \alpha^{-1} \subset \mathbb{1}$. Pour prouver que $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \mathbb{1}$, il reste seulement à montrer que $\mathbb{1} \subset \alpha \cdot \alpha^{-1}$. Soient donc $r \in \mathbb{1}$, et $q \in \alpha^{-1}$. Puisque $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe un entier naturel n tel que $q < n \cdot (r - 1)$. Suivons maintenant la même procédure que dans la preuve de la relation $\alpha + (-\alpha) = \emptyset$ (voir ci-dessus). Comme α et α' sont contigus, il existe $s \in \alpha'$ et $t \in \alpha$ tels que $0 < t - s < n^{-1}$, $s \neq \max \alpha'$, et $q^{-1} \in s^{-1}$. Alors $s^{-1} \in \alpha^{-1}$, en donc $t \cdot s^{-1} \in \alpha \cdot \alpha^{-1}$. On en déduit $t \cdot s^{-1} < (s + n^{-1})s^{-1} = 1 + n^{-1}s^{-1} < 1 + n^{-1}q < r$, et enfin $r \in \alpha \cdot \alpha^{-1}$.

Une difficulté supplémentaire vient de ce que la définition donnée ci-dessus, à savoir $\alpha \cdot \beta = \{r \cdot s : r \in \alpha, s \in \beta\}$, n'a de sens que lorsque $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$; sinon, cela ne définit pas une coupure. Afin de pouvoir multiplier aussi des coupures strictement négatives, suivons la démarche déjà utilisée pour définir la multiplication des entiers (voir chapitre 1, §3.2). Montrons pour commencer que toute coupure γ s'écrit comme la différence de deux coupures positives $\alpha \geq 0$ et $\beta \geq 0$, de sorte que $\gamma = \alpha - \beta$. Si $\gamma = \alpha - \beta$, et si $\gamma' = \alpha' - \beta'$, avec $\alpha' \geq 0$ et $\beta' \geq 0$, on définit le produit $\gamma \cdot \gamma'$ par

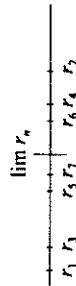
$$\gamma \cdot \gamma' = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha' - \beta') := \alpha \cdot \alpha' + \beta \cdot \beta' - \alpha \cdot \beta' - \beta \cdot \alpha'.$$

Il est facile de vérifier que la coupure ainsi définie ne dépend que de γ et γ' , et non des représentations particulières choisies. Quand γ et γ' sont tous deux ≥ 0 , la nouvelle définition coïncide avec l'ancienne. Il suffit en effet d'écrire $\gamma = \gamma - 0$, et $\gamma' = \gamma' - 0$. Il est toutefois fastidieux de vérifier la totalité des axiomes de corps. Dans [21], E. LANDAU s'est livré à cette vérification détaillée. Voici ce qu'il écrit dans son "Vorwort für den Kenner" [Avant-propos pour l'expert] : "Ein anderer hat sich meine zum Teil langweilige Mühe nicht gemacht." [... personne d'autre que moi n'a entrepris cette tâche plutôt ennuyeuse]. Par contre, voici ce qu'il dit dans son "Vorwort für den Lernenden" [Avant-propos pour l'étudiant] : "Bitte vergiß alles, was Du auf der Schule gelernt hast ; denn Du hast es nicht gelernt". [Oubliez s'il vous plaît tout ce que vous avez appris à l'école parce que vous n'avez jamais appris cela.]

Il est indubitable que lorsque nous nous efforçons de justifier rigoureusement toutes les manipulations numériques que nous effectuons couramment depuis l'école primaire, nous devons prendre grand soin de n'employer que ce qui a déjà été prouvé, sans supposer que des choses sont vraies simplement parce qu'elles nous sont familières.

3. Les suites fondamentales, ou de Cauchy

1. Remarques historiques. La définition des nombres réels au moyen des *suites fondamentales*, appelées également *suites de Cauchy*, remonte à CANTOR et MÉRAY [25] ; elle repose sur l'idée selon laquelle tout nombre réel est limite d'une suite de nombres rationnels, pour laquelle les différences entre les termes quelconques deviennent arbitrairement petites. Une telle suite était autrefois connue sous le nom de "suite fondamentale" ; l'une d'elles est illustrée ci-contre, les termes successifs $r_1, r_2, \dots$ étant indiqués par les indices.



La contribution de CANTOR à la théorie des nombres irrationnels prend place (§9) dans une œuvre plus importante, *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitsl* [Fondements d'une théorie générale des variétés (des ensembles dans la terminologie contemporaine)] publiée en 1883, dans laquelle il développe sa nouvelle théorie des ensembles. En plus de sa propre définition, CANTOR mentionne aussi l'approche prise par WEIERSTRASS et le travail de DEDEKIND.

pense que la clarté logique de la définition de DEDEKIND est contre-balancée par le "grand désavantage" que voici : en analyse les nombres ne se présentent jamais naturellement sous forme de coupures, et il faut donc faire appel à des artifices élaborés pour les y ramener. Par contre, CANTOR considère sans aucun doute que cette définition est "la plus simple et la plus naturelle". Il mentionne un livre de LIPSCHITZ [23], ainsi que l'un de ses propres articles, publié en 1871, comme ayant contribué au développement historique de cette approche (*Math. Ann.*, 5, p. 123).

Outre leur emploi dans la construction de CANTOR des nombres réels, les suites fondamentales se sont révélées être un concept très fructueux, qui peut aussi être employé pour la complétion des espaces métriques. C'est pourquoi on doit approuver CANTOR quand il affirme, en parlant de sa construction : "Man hat an ihr den Vorteil, daß sie sich dem analytischen Kalkül am unmittelbarsten anpaßt." [Elle présente l'avantage d'être celle qui se prête le mieux aux calculs analytiques.] Dans la section suivante on admettra les propriétés élémentaires des suites.

2. Le critère de convergence de CAUCHY. Conformément à l'idée fondamentale de CANTOR, les nombres réels peuvent être décrits à l'aide de suites convergentes de nombres rationnels. On dit que deux suites (r_n) et (s_n) de nombres rationnels ont la même limite (réelle), si et seulement si leur différence $(r_n - s_n)$ tend vers 0. Cela conduit donc naturellement à définir les nombres réels comme des classes d'équivalence de suites convergentes de nombres rationnels, deux suites étant dites *équivalentes* lorsque leur différence tend vers 0. Pour que cette définition soit cohérente, on doit pouvoir caractériser la convergence d'une suite sans faire appel à sa limite. Cela peut être fait grâce au critère de CAUCHY, qui sera employé pour définir les suites concernées.

On dit qu'une suite (r_n) de nombres rationnels est une *suite de Cauchy*, ou une *suite fondamentale*, si, pour tout nombre rationnel $\varepsilon > 0$, il existe un entier k tel que, pour tous m et $n > k$, on ait $|r_m - r_n| < \varepsilon$. Dans la suite, nous utiliserons l'expression *suite fondamentale* pour désigner les suites de nombres rationnels utilisées avant d'avoir construit $\mathbb{R}$, et nous n'utiliserons l'expression *suite de Cauchy* qu'une fois $\mathbb{R}$ construit. On dit que la suite (r_n) de nombres rationnels est *rationnellement convergente* s'il existe un nombre rationnel r , tel que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel k , tel que, pour tout $n > k$, on ait $|r_n - r| < \varepsilon$. Un tel r est unique, et l'on écrit $r = \lim r_n$. Toute suite rationnellement convergente est une suite fondamentale. Par contre il y a des suites fondamentales qui ne convergent pas rationnellement. C'est le cas de toute suite formée par un développement décimal non asymptotiquement périodique. Ainsi, pour $\sqrt{2}$:

$$r_0 = 1 : r_1 = 1,4 : r_2 = 1,41 : r_3 = 1,414 : r_4 = 1,4142 : \dots$$

Voici un autre exemple, où la loi de formation des termes de la suite est explicitement connue. Considérons le développement en fraction continue du nombre d'or $(1 + \sqrt{5})/2$. Cette fraction continue est définie ainsi par récurrence : $r_0 = 1$, $r_{n+1} = 1 + 1/(1 + r_n)$. Pour

établir qu'il s'agit bien d'une suite fondamentale, notons d'abord que $|r_{n+1} - r_n| \leq |r_n - r_{n-1}|/2$, car

$$r_{n+1} - r_n = 1 + \frac{1}{1 + r_n} - \left(1 + \frac{1}{1 + r_{n-1}}\right) = \frac{r_{n-1} - r_n}{(1 + r_n)(1 + r_{n-1})}$$

et $r_{n-1}, r_n \geq 1$. Par récurrence, on en déduit $|r_{n+1} - r_n| < 2^{-n} |r_1 - r_0| = 2^{-n-1}$, puis

$$|r_{n+k} - r_n| \leq |r_{n+k} - r_{n+k-1}| + |r_{n+k-1} - r_{n+k-2}| + \dots + |r_{n+1} - r_n| < 2^{-n-k} + 2^{-n-k-1} + \dots + 2^{-n-1} < 2^{-n}.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Soit ℓ tel que $2^{-\ell} \leq \varepsilon$. Alors, pour tout $n \geq \ell$, et tout $k \in \mathbb{N}$, on a $|r_{n+k} - r_n| < \varepsilon$, et cela achève de montrer que (r_n) est une suite fondamentale.

3. L'anneau des suites fondamentales. L'addition et la multiplication terme à terme confèrent à l'ensemble F de toutes les suites fondamentales une structure d'anneau :

$$(r_n) + (s_n) := (r_n + s_n); (r_n) \cdot (s_n) := (r_n \cdot s_n).$$

La somme de deux suites fondamentales est une suite fondamentale. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Il existe k tel que, pour tout n et tout $m \geq k$, on ait $|r_m - r_n| < \varepsilon/2$ et $|s_m - s_n| < \varepsilon/2$. Alors, $|r_m + s_m - r_n - s_n| \leq |r_m - r_n| + |s_m - s_n| < \varepsilon$. Le produit de deux suites fondamentales est une suite fondamentale. Notons d'abord qu'une suite fondamentale est bornée. Il existe donc $c \geq 1$ tel que, pour tout n , $|r_n| \leq c$ et $|s_n| \leq c$. Cela étant, soit $\varepsilon > 0$. Soit également k tel que, pour tous n et $m \geq k$, on ait $|r_m - r_n| < \varepsilon/(2c)$ et $|s_m - s_n| < \varepsilon/(2c)$. Alors,

$$\begin{aligned} |r_m s_m - r_n s_n| &= |r_m(s_m - s_n) + s_n(r_m - r_n)| \\ &\leq |r_m| \cdot |s_m - s_n| + |s_n| \cdot |r_m - r_n| \\ &< c \frac{\varepsilon}{2} + c \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

L'application qui, à tout nombre rationnel r associe la suite constante $(r, r, \dots)$ permet de plonger $\mathbb{Q}$ dans F , et d'identifier $\mathbb{Q}$ à un sous-anneau de F .

4. Le corps F/N des classes d'équivalence de suites fondamentales modulo les suites de limite nulle. On dit qu'une suite (r_n) de nombres rationnels est *asymptotiquement nulle*, ou de *limite nulle*, si elle tend vers 0. L'ensemble N des suites de limite nulle est un idéal de F ; autrement dit, (1) N est un sous-groupe additif de F , et (2) si (r_n) est une suite de limite nulle et si (s_n) est une suite fondamentale, alors $(r_n \cdot s_n)$ est une suite de limite nulle.

On dit que deux suites fondamentales sont *équivalentes* si leur différence est une suite de limite nulle. On pourra vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence. La classe d'équivalence représentée par (r_n) est $(r_n) + N := \{(r_n + h_n) : (h_n) \in N\}$. Elle est parfois appelée la *classe de résidu*, ou la *classe des restes* de (r_n) modulo N . Comme N est un idéal, l'ensemble quotient F/N est un anneau lorsqu'on le munit de l'addition et de la multiplication définies respectivement par $((r_n) + N) + ((s_n) + N) = (r_n + s_n) + N$ et

$(r_n) + N) \cdot ((s_n) + N) = (r_n \cdot s_n) + N$. Cet anneau est commutatif et unitaire. Lorsqu'on identifie chaque nombre rationnel r avec la classe d'équivalence modulo N de la suite constante $(r, r, \dots)$, on identifie $\mathbb{Q}$ à un sous-ensemble de F/N .

THÉORÈME — F/N est un corps.

DÉMONSTRATION : Soit $(r_n) + N$ une classe telle que $(r_n) \notin N$: on en cherche l'inverse multiplicatif. On serait tenté de dire directement que l'inverse de $(r_n) + N$ est $(1/r_n) + N$. Ceci n'est pas possible car la suite (r_n) peut avoir des termes nuls, bien qu'il s'agisse d'une suite fondamentale ne tendant pas vers 0. Nous allons donc chercher un représentant (s_n) de la classe $(r_n) + N$ dont tous les termes soient tous non nuls. Puisque (r_n) ne tend pas vers 0, il existe $\eta > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $p > n$ tel que $|r_p| > \eta$. Puisque (r_n) est une suite fondamentale, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n \geq q$ et tout $k \in \mathbb{N}$, on ait $|r_{n+k} - r_n| < \eta/2$. Soit $p \geq q$ tel que $|r_p| > \eta$. Alors, pour tout $n > p$, on a $|r_n| > \eta/2$. Ainsi, la suite (r_n) n'a qu'un nombre fini de termes nuls. Soit donc (s_n) la suite définie par $s_n = r_n$ si $r_n \neq 0$, $s_n = 1$ sinon. Alors $(r_n) + N = (s_n) + N$. En outre, (s_n) n'a aucun terme nul, ce qui permet de considérer la suite $(1/s_n)$.

Nous devons à présent montrer que $(1/r_n)$ est une suite fondamentale. Puisque (s_n) est une suite à termes non nuls qui ne tend pas vers 0, il existe $\delta > 0$ tel que $|s_n| > \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (s_n) est une suite fondamentale, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous n et $m \geq k$, $|s_m - s_n| < \varepsilon\delta$. Alors,

$$\left| \frac{1}{s_m} - \frac{1}{s_n} \right| = \frac{|s_m - s_n|}{|s_m s_n|} < \frac{\varepsilon\delta^2}{\delta\delta} = \varepsilon.$$

Suivant en cela CANTOR, on définit le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels par $\mathbb{R} := F/N$.

5. Le corps totalement ordonné F/N . On dit qu'une suite fondamentale (r_n) de nombres rationnels est *strictement positive* s'il existe un nombre rationnel $\varepsilon > 0$ tel que $r_n > \varepsilon$ pour à peu près tous les indices n (c'est-à-dire pour tous les indices sauf un nombre fini d'entre eux). Soit P l'ensemble des suites fondamentales strictement positives. Clairement $P + N \subset P$, $P \cdot P \subset P$ et $P \cdot P \subset P$. En outre, $F = P \cup N \cup P$ est une partition de l'ensemble F des suites fondamentales. On peut donc définir un ordre total sur F/N en posant

$$(r_n) + N \geq (s_n) + N \text{ si et seulement si } (r_n - s_n) \in P \cup N.$$

La somme et le produit de deux éléments strictement positifs de F/N sont aussi strictement positifs. Sur le sous-ensemble $\mathbb{Q}$ de F/N , la relation d'ordre coïncide avec l'ordre habituel de $\mathbb{Q}$.

Il résulte de la définition des suites fondamentales strictement positives de nombres rationnels que pour tout $p \in F/N$ vérifiant $p > 0$, il existe $r \in \mathbb{Q}$ tel que $0 < r < p$. Pour la définition de la convergence dans F/N , cela ne fait donc aucune différence de considérer tous les $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in F/N$, ou tous les $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \in \mathbb{Q}$. Il est vrai que, pour tout $\sigma \in F/N$, il

existe $s \in \mathbb{Q}$ tel que $s > \sigma$ (ce n'est pas trivial pour un $\sigma < 0$, et sinon l'on peut choisir un $r \in \mathbb{Q}$ de telle façon que l'on ait $0 < r < \sigma^{-1}$ puis prendre $s = r^{-1}$).

L'ordre de F/N est archimédien : autrement dit, si α et β sont deux éléments strictement positifs de F/N , il existe un entier naturel n tel que $n\alpha > \beta$. En effet, il suffit de prendre $a, b \in \mathbb{Q}$ tels que $0 < a < \alpha$ et $\beta < b$. Comme $\mathbb{Q}$ est archimédien, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n\alpha > b$, et donc que $n\alpha > n\alpha > b > \beta$.

Le corps F/N ainsi construit possède donc les deux propriétés suivantes :

- (1) Tout $p \in F/N$ est la limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{Q}$.
- (2) Toute suite fondamentale d'éléments de $\mathbb{Q}$ converge.

La propriété (2) peut être améliorée de la manière suivante :

THÉORÈME — Le critère de convergence de Cauchy est valide dans F/N .

Autrement dit, une suite (p_n) d'éléments de F/N converge si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq k, m \geq k$, on ait $|p_m - p_n| < \varepsilon$.

DÉMONSTRATION : D'après (1), pour tout $p_n \in \mathbb{Q}$ tel que $|p_n - r_n| < 1/n$. Alors (r_n) est une suite fondamentale. En effet, soit $\varepsilon > 0$, et $k \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{3}$ et que $|p_m - p_n| < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq k$. Alors

$$|r_m - r_n| \leq |r_m - p_m| + |p_m - p_n| + |p_n - r_n| < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

D'après (2) la suite (r_n) converge dans F/N vers une limite p . Soit encore $\varepsilon > 0$. Soit $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{\ell} < \frac{\varepsilon}{2}$ et que $|p - r_n| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq \ell$. Alors

$$|p - p_n| \leq |p - r_n| + |r_n - p_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n} \leq \varepsilon.$$

pour tout $n \geq \ell$, ce qui montre que (p_n) converge aussi vers p . ■

On verra dans la section 5.2 plusieurs formulations différentes de la complétude des corps totalement ordonnés. En les comparant, on verra entre autres choses que l'axiome de complétude (R3) est équivalent à l'assertion selon laquelle l'ordre est archimédien et le critère de Cauchy valide. Ainsi le corps de Cantor F/N satisfait-il à tous les axiomes pour les nombres réels. On montrera en 5.3 que deux corps satisfaisant à ces axiomes sont canoniquement isomorphes. En particulier F/N est isomorphe au corps des coupures de Dedekind.

4. Intervalles emboîtés

1. Remarques historiques. L'idée d'ajuster des intervalles les uns par rapport aux autres pour les emboîter est très ancienne, et on la trouve surtout en mathématiques appliquées dans le cadre du calcul de valeurs approchées. Au temps des Babyloniens, on trouve déjà des approximations de $\sqrt{2}$ sous forme de fractions sexagésimales, $1,25 = 1 + 25/60$ et $1,24,51,10 = 1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3$ (voir NEUGEBAUER et SACHS [26], p. 42). Voici un algorithme permettant de trouver des encadrements de plus en plus fins de la racine carrée de n importe quel nombre positif $a > 1$:

$$\begin{aligned} a &> \sqrt{a} > 1, \\ x_0 &= \frac{1}{2}(a+1) > \sqrt{a} > \frac{a}{x_0}, \\ x_1 &= \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right) > \sqrt{a} > \frac{a}{x_1}, \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(x_1 + \frac{a}{x_1}\right) > \sqrt{a} > \frac{a}{x_2}, \\ &\dots \end{aligned}$$

En fait, lorsque $a = 2$, on obtient $x_0 = 3/2 = 1,50$, $x_1 = 17/12 = 1,25$ et $x_2 = 577/408 = 1,24,51,10$. Le procédé général n est cependant pas explicitement donné comme tel dans les textes babyloniens, si bien que cette interprétation doit être considérée comme une simple supposition plausible. Ce processus peut être considéré comme un cas particulier ($b = 1$) de la proposition affirmant que la moyenne géométrique est encadrée par la moyenne harmonique et la moyenne arithmétique

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}.$$

Cette relation était déjà connue des pythagoriciens, comme le montrent certains extraits d'ARCHYTAS DE TARENTE (voir BECKER [2], p. 78 sqq.).

La détermination de la superficie d'un cercle à partir de l'encadrement tiré de l'utilisation d'un polygone inscrit et d'un polygone circonscrit fournit un autre exemple d'utilisation de la méthode des intervalles emboîtés. Ce fut STEVIN qui aux alentours de l'année 1594 employa cette technique pour effectuer des calculs avec des nombres décimaux et définir un nombre réel comme des intervalles emboîtés (voir 1.3). Au cours du XIX^e siècle les intervalles emboîtés furent employés pour prouver certains théorèmes centraux d'analyse. Ce fut BOLZANO qui effectua la première tentative pour définir les nombres réels par des suites d'intervalles afin de prouver le critère de convergence de CAUCHY [4]. WEIERSTRASS [24] employa des intervalles emboîtés pour prouver son théorème sur les valeurs d'adhérence (le théorème qui affirme que toute suite réelle bornée admet une sous-suite convergente). Enfin, dans son *Vorlesungen über die Theorie der Irrationalzahlen*

(Leipzig, 1892), BACHMANN introduisit les nombres réels en faisant systématiquement usage d'intervalles emboîtés.

2. Complétude et intervalles emboîtés. L'introduction des nombres réels au moyen d'intervalles emboîtés est motivée par la situation suivante. Considérons une suite décroissante $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ d'intervalles de l'axe réel dont la longueur tend vers 0. C'est le cas par exemple d'une suite (I_n) d'intervalles décimaux de longueurs $|I_n| = 10^{-n}$. On veut que toute suite de ce type possède une intersection qui soit un singleton.

On appelle *suite rationnelle d'intervalles emboîtés* ou plus simplement *emboîtement rationnel*, toute suite décroissante $([r_n, s_n])$ d'intervalles fermés à extrémités rationnelles dont la longueur tend vers 0. Si $I_n = [r_n, s_n]$, on a donc $I_{n+1} \subset I_n$ et $\lim(s_n - r_n) = 0$. On dit qu'un emboîtement (I_n) est *plus fin* que (J_n) ou que (J_n) est un *raffinement* de (I_n) si, pour tout n , $J_n \subset I_n$. On dit que deux emboîtements rationnels $(I_n) = ([r_n, s_n])$ et $(J_n) = ([r'_n, s'_n])$ sont *équivalents* s'ils admettent un raffinement commun (K_n) . C'est la cas si et seulement si, pour tout n , $v_n = \max\{r'_n, t_n\} \leq w_n = \min\{s'_n, u_n\}$. On appelle *nombre réel* toute classe d'équivalence d'emboîtements rationnels. Les rationnels se plongent de manière canonique dans les nombres réels, car tout nombre rationnel r s'identifie à l'emboîtement constant (I_n) défini pour tout n par $I_n = [r, r]$.

Voici un exemple d'emboîtement rationnel. Posons, pour tout n , $e_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ et

$$e'_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}. \text{ Alors l'emboîtement } ([e_n, e'_n]) \text{ définit le réel } e = 2,71828 \dots \text{ utilisé pour les fonctions exponentielles et logarithmes (voir chapitre 5).}$$

A ce stade, on pourrait définir l'addition, la multiplication et une relation d'ordre puis vérifier les axiomes (R1) à (R3). Ce n'est pas ainsi que nous allons procéder. Nous allons plutôt établir des correspondances directes entre les coupures de Dedekind (§2), les suites fondamentales (§3) et les classes d'emboîtements rationnels.

Soit $(I_n) = ([r_n, s_n])$ un emboîtement rationnel. Posons $\alpha := \{x : x \in \mathbb{Q} \text{ et pour tout } n, x \leq s_n\}$ et $\beta' := \{y : y \in \mathbb{Q} \text{ et pour tout } n, y > r_n\}$. Si β' possède un plus petit élément, posons $\beta := \beta' \setminus \{\min \beta'\}$. Sinon, posons $\beta := \beta'$. Alors (α, β) satisfait aux axiomes (D1) à (D4) de la définition des coupures de Dedekind. La coupure associée à un raffinement de (I_n) est la même.

Inversement, soit (α, β) une coupure de Dedekind. On va associer à cette coupure un emboîtement rationnel $(I_n) = ([r_n, s_n])$ satisfaisant pour tout n à $r_n \in \alpha$ et $s_n \in \beta$. On choisit d'abord $r_0 \in \alpha$ et $s_0 \in \beta$ quelconques. On procède ensuite par récurrence. Supposons

$I_n = [r_n, s_n]$ déjà construit. Soit $d_n = (r_n + s_n)/2$ le milieu de I_n . L'intervalle I_{n+1} sera la moitié gauche ou la moitié droite de I_n en accord avec la règle suivante :

$$[r_{n+1}, s_{n+1}] = \begin{cases} [d_n, s_n] & \text{si } d_n \in \alpha \\ [r_n, d_n] & \text{si } d_n \in \beta \end{cases}$$

Tous les emboîtements rationnels $(I_n) = \{(r_n, s_n)\}$ satisfaisant pour tout n à $r_n \in \alpha$ et $s_n \in \beta$ sont équivalents. On associe (α, β) à cette classe d'équivalence.

Les deux correspondances ainsi définies sont inverses l'une de l'autre. Si l'on interprète les nombres rationnels d'abord comme des classes d'emboîtements constants, puis comme des coupures rationnelles, alors ces correspondances permutent les deux interprétations.

Le lien direct entre les emboîtements rationnels et les suites fondamentales repose sur les faits suivants :

- (1) Toute suite monotone, bornée est une suite fondamentale.
- (2) À toute suite fondamentale rationnelle (r_n) on peut associer une suite rationnelle croissante (r_n) et une suite rationnelle décroissante (s_n) telles que $(r_n - a_n)$ et $(s_n - a_n)$ soient des suites de limite nulle.

Par ailleurs, si $(I_n) = \{(r_n, s_n)\}$ est un emboîtement rationnel, les deux suites (r_n) et (s_n) sont des suites fondamentales rationnelles, et $(r_n - s_n)$ est une suite de limite nulle. En outre, si $(I_n) = \{(r_n, s_n)\}$ est un raffinement de (I_n) , $(r_n - r_n)$ est une suite de limite nulle. La correspondance $\{(r_n, s_n)\} \rightarrow (r_n)$ induit donc une application de l'ensemble des classes d'équivalence des raffinements rationnels dans le corps de Cantor F/N des classes d'équivalence de suites fondamentales modulo la relation d'égalité à une suite de limite nulle près. Inversement, du fait de la remarque (2), à toute suite fondamentale (a_n) , on peut associer une suite croissante (r_n) et une suite décroissante (s_n) telle que $(I_n) = \{(r_n, s_n)\}$ soit un emboîtement rationnel. À toute suite fondamentale (b_n) équivalente à (a_n) modulo la relation d'égalité à une suite de limite nulle près est associée un emboîtement rationnel équivalent. Ainsi a-t-on une application de F/N sur l'ensemble des classes d'équivalence d'emboîtements rationnels. C'est une bijection, la bijection réciproque de l'application définie plus haut.

Voici les avantages pratiques des intervalles emboîtés sur les coupures ou les suites fondamentales. Le nombre réel x défini par un emboîtement rationnel (I_n) appartient à chacun des intervalles de I_n . Par contre avec une séquence fondamentale (r_n) , la connaissance d'un r_n ne fournit aucune information sur la position de x . De même, la définition d'un réel x à partir d'une coupure (α, β) peut résulter d'assertions définissant α sans fournir d'informations directes sur la localisation de x .

Le désavantage de l'approche par les intervalles emboîtés est d'ordre théorique : la vérification des propriétés de corps ordonné est relativement pénible.

5. Définition axiomatique des nombres réels

Les méthodes axiomatiques furent initialement employées seulement en géométrie (voir les *Eléments* d'EUCLIDE) ; ce ne fut qu'avec la publication de *Grundlagen der Geometrie* [17] [Fondements de la géométrie] de HILBERT qu'elles commencèrent à être utilisées pour les nombres réels. Le traitement axiomatique qui suit n'est cependant pas fondé sur le système d'axiomes proposé par HILBERT dans le §13 de [17], où il est appelé "la théorie des proportions" par respect avec la tradition amorcée par EUCLIDE dans ses *Eléments* ; nous allons utiliser les axiomes (R1) à (R3) de la section 2.

1. Les entiers naturels, les entiers et les rationnels vis-à-vis du corps des réels. Dans une définition axiomatique du corps des réels, on désire pouvoir reconnaître au sein du corps des réels les entiers naturels, les entiers et les nombres rationnels. Dans le système (R1)-(R3), les axiomes (R1) et (R2) suffisent à remplir cet objectif. En effet, soit K un corps totalement ordonné, c'est-à-dire un ensemble satisfaisant aux axiomes (R1) et (R2). On dit qu'un sous-ensemble M de K est *inductif*, si $0 \in M$ et si, pour tout $x \in M$, $x+1 \in M$. Par exemple, K lui-même et le sous-ensemble $K^+ = \{x : x \in K, x \geq 0\}$ sont tous les deux inductifs. L'intersection N de tous les sous-ensembles inductifs de K , est le plus petit sous-ensemble inductif de K . Muni de la fonction successeur S définie par $S(x) := x+1$, cet ensemble N satisfait aux axiomes (SI) à (S3) formulés en 1.2.1 et définissant les entiers naturels. D'après le théorème d'unicité 2.2 du chapitre 1, l'ensemble $N \subset K$ peut donc être identifié avec $\mathbb{N}$.

Soit $Z \subset K$ le plus petit sous-anneau de K contenant 1. Puisque N est inductif, d'après le principe de récurrence, on a $N \subset Z$. Ainsi Z est-il canoniquement isomorphe à $\mathbb{Z}$, car c'est le plus petit anneau incluant N (voir 1.3.2).

Soit $Q \subset K$ le plus petit sous-corps de K . Il contient le plus petit sous-anneau Z , et il est donc canoniquement isomorphe à $\mathbb{Q}$ (voir chapitre 1, §4.2).

THÉORÈME. — Un corps ordonné K satisfaisant aux axiomes (R1) et (R2) est archimédien si et seulement si Q est dense dans K , c'est-à-dire si et seulement si pour tous $x, y \in K$, avec $x < y$, il existe $r \in Q$ tel que $x < r < y$.

DÉMONSTRATION : Si Q est dense dans K , la démonstration a déjà été faite en 3.5, avec $K = F/N$. Réciproquement, si K est archimédien et si $a = 1$ et $b = (y-x)^{-1}$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $b < na$, c'est-à-dire tel que $(y-x)^{-1} < n$. De plus, on peut trouver $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{m}{n} \leq x < \frac{m+1}{n}$. Comme $(y-x)^{-1} < n$, on a alors $x < \frac{m+1}{n} \leq x + \frac{1}{n} < y$. ■

2. Le théorème de complétude. On a vu trois méthodes différentes pour construire les nombres réels : les coupures, les suites fondamentales, et les intervalles emboîtés. Chacune de ces méthodes repose sur une formulation différente de l'idée de complétude.

Nous allons montrer ici que chacune est équivalente à l'axiome de complétude (R3) de la section 2. Pour la démonstration du théorème, nous aurons besoin de deux lemmes.

LEMME 1 — Soit K un corps totalement ordonné. Alors toute suite (a_n) d'éléments de K possède une sous-suite monotone.

DÉMONSTRATION : On dit que k est un *pic* de (a_n) si l'on a $a_k \geq a_n$ pour tout $n \geq k$. Si (a_n) possède une infinité A de pics, $(a_k)_{k \in A}$ est une sous-suite décroissante de (a_n) . Si (a_n) ne possède qu'un nombre fini de pics, éventuellement 0 pic, il existe un plus petit entier $k(0)$ tel que N ne contienne aucun pic de (a_n) supérieur à $k(0)$. Puisque $k(0)$ n'est pas un pic, il existe $k(1) > k(0)$ tel que $a_{k(1)} > a_{k(0)}$. Puisque $k(1)$ n'est pas un pic de (a_n) , il existe $k(2) > k(1)$ tel que $a_{k(2)} > a_{k(1)}$, et ainsi de suite. Ainsi, $(a_{k(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ est une sous-suite croissante de (a_n) . ■

LEMME 2 — Soit K un corps totalement ordonné. Alors toute suite fondamentale d'éléments de K est bornée.

DÉMONSTRATION : Soit (a_n) une suite fondamentale d'éléments de K . Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $n, m \geq k$, on ait $|a_n - a_m| < 1$. En particulier, pour tout $n \geq k$, $a_n \in]a_k - 1, a_k + 1[$. L'ensemble fini $\{a_0, \dots, a_k\}$ étant bien sûr borné, on en déduit que $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ est un ensemble borné. ■

THÉORÈME DE COMPLÉTUDE — Soit K un corps totalement ordonné, c'est-à-dire un ensemble satisfaisant aux axiomes (R1) et (R2). Alors les assertions suivantes sont équivalentes.

- (a) Toute partie non vide bornée inférieurement de K possède une borne inférieure, c'est-à-dire un plus grand minorant.
- (a') Toute partie non vide bornée supérieurement de K possède une borne supérieure, c'est-à-dire un plus petit majorant.
- (b) Si (α, β) est une coupure de K , c'est-à-dire un couple de parties de K (au lieu de $\mathbb{Q}$) satisfaisant aux axiomes (D1)-(D4) du §2, alors α possède un plus grand élément.
- (c) Toute suite décroissante bornée d'éléments de K est convergente dans K .
- (c') Toute suite croissante bornée d'éléments de K converge dans K .
- (d) Le corps K est archimédien et toute suite fondamentale d'éléments de K converge dans K .
- (e) Les corps K est archimédien, et l'intersection de toute suite décroissante de segments de K dont la longueur tend vers 0 est un singleton.

Comme une suite décroissante (b_n) est majorée supérieurement par b_0 , l'assertion (c) peut aussi s'écrire "Toute suite décroissante minorée d'éléments de K est convergente dans K ". De même pour l'assertion (c').

DÉMONSTRATION : Il est clair que (a) et (a') sont équivalents, car une partie M est bornée inférieurement si et seulement si $-M = \{-x : x \in M\}$ est bornée supérieurement. De même, (c) et (c') sont équivalents. Nous allons donc montrer la chaîne d'implications

$$(a) \rightarrow (b) \rightarrow (c) \rightarrow (d) \rightarrow (e) \rightarrow (a)$$

(a) $\rightarrow$ (b) — Supposons (a) et soit (α, β) une coupure de K . L'ensemble β est borné inférieurement, car tout $a \in \alpha$ est un minorant de β . D'après (a), β possède une borne inférieure, $\inf \beta$. Comme β n'a pas de plus petit élément, $\inf \beta \in \alpha$. Par ailleurs, pour tout $a \in \alpha$ et tout $b \in \beta$, on a $a < b$, et donc $a \leq \inf \beta$ pour tout $a \in \alpha$; il s'ensuit que $\inf \beta$ est le plus grand élément de α .

(b) $\rightarrow$ (c) — Supposons (b), et soit (b_n) une suite décroissante bornée. Soit (α, β) la coupure définie par $\alpha = \{x : x \leq b_n \text{ pour tout } n\}$, et $\beta = \{y : \exists n, b_n < y\}$. D'après (b), α a un plus grand élément, $s = \max \alpha$. Montrons que (b_n) converge vers s . Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b_k < s + \varepsilon$, car sinon, on aurait $s + \varepsilon \in \alpha$, en contradiction avec l'égalité $s = \max \alpha$. Comme (b_n) est décroissante, on a donc aussi $b_n < s + \varepsilon$ pour tout $n \geq k$. Par ailleurs, comme $s \in \alpha$, on a aussi $s \leq b_n$. Ainsi, pour tout $n \geq k$, on a $s \leq b_n < s + \varepsilon$, ce qui montre la convergence de (b_n) vers s .

(c) $\rightarrow$ (d) — Supposons (c). Raisonnons par l'absurde et supposons que K ne soit pas archimédien. Il existerait a et $b > 0$ tels que $na \leq b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors (na) serait une suite croissante majorée qui convergerait donc vers une limite s . Il existerait alors $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq k$, on ait $s - a < na < s$. Comme entre $s - a$ et s il ne peut y avoir qu'un seul terme de la suite (na) , ceci est impossible, et K est archimédien.

Soit (a_n) une suite fondamentale d'éléments de K . Pour montrer que cette suite converge, nous allons utiliser les lemmes 1 et 2 précédents. D'après le lemme 1, (a_n) possède une sous-suite monotone, $(a_{\varphi(n)})$. D'après le lemme 2, (a_n) est bornée, et il en est donc de même de $(a_{\varphi(n)})$ qui est donc d'après (c) une suite convergente. Soit s sa limite. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque (a_n) est une suite fondamentale, soit $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tous $m, n \geq k$, on ait $|a_n - a_m| < \varepsilon/2$. Puisque $(a_{\varphi(n)})$ converge vers s , soit $j \in \mathbb{N}$ tel que $\varphi(j) \geq k$ et que $|a_{\varphi(j)} - s| < \varepsilon/2$. Alors, pour tout $n \geq k$, on a

$$|a_n - s| \leq |a_n - a_{\varphi(j)}| + |a_{\varphi(j)} - s| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

ce qui achève de montrer que (a_n) est une suite convergente.

(d) $\rightarrow$ (e) — Supposons (d). Soit $([a_n, b_n])$ une suite d'intervalles emboîtés. Alors (a_n) est une suite fondamentale. En effet, soit $\varepsilon > 0$. Comme $\lim(b_n - a_n) = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $b_k - a_k < \varepsilon$. Alors, pour tous $n, m \geq k$, on a $a_n \in [a_k, b_k]$, et $a_m \in [a_k, b_k]$, d'où $|a_n - a_m| < \varepsilon$. Par conséquent, d'après (d), la suite (a_n) converge dans K , vers une limite s . Puisque (a_n) est une suite croissante, on a $a_n \leq s$ pour tout n . Comme pour tous n et k , $a_k \leq b_n$, on a aussi $s \leq b_n$ pour tout n . Ainsi, $s \in [a_n, b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire $\{s\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [a_n, b_n]$. L'inclusion inverse résulte de la relation $\lim(b_n - a_n) = 0$.

(e) — (a) — Supposons (e). Soit M une partie non vide de K bornée inférieurement. Nous allons construire par récurrence une suite $([a_n, b_n])$ de segments emboîtés dans laquelle tous les a_n sont des mineurs de M , et dans laquelle aucun b_n n'est un mineur de M . On choisit comme a_0 et b_0 un mineur quelconque de M , et un élément quelconque de K qui n'est pas un mineur de M . On procède ensuite par récurrence. Supposons $[a_n, b_n]$ construit. Soit $d_n = (a_n + b_n)/2$, le milieu de $[a_n, b_n]$. On choisit comme intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ la moitié gauche ou la moitié droite de $[a_n, b_n]$ en accord avec la règle suivante :

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} [d_n, b_n] & \text{si } d_n \text{ est un mineur de } M \\ [a_n, d_n] & \text{si } d_n \text{ n'est pas un mineur de } M \end{cases}$$

Alors $b_{n+1} - a_{n+1} = (b_n - a_n)/2$, d'où $b_n - a_n = 2^{-n}(b_0 - a_0)$. Comme l'ordre est archimédien, $\lim(b_n - a_n) = 0$. D'après (e), l'intersection des $[a_n, b_n]$ est un singleton, $\{s\}$. Alors, s est un mineur de M . En effet, s'il existait $x \in M$, $x < s$, on aurait pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n > s - a_n \geq s - x$, car $a_n < x$, et cela contredirait la relation $\lim(b_n - a_n) = 0$. En outre, s est la plus grande des mineurs. En effet, s'il existait un mineur t de M tel que $s < t$, on aurait, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n - a_n > t - a_n > t - s$, car $b_n > b$, et cela contredirait $\lim(b_n - a_n) = 0$. Cela achève de montrer que M a une borne inférieure. ■

La liste (a)-(e) d'assertions équivalentes est loin de couvrir toutes les formulations possibles. On pourrait par exemple mentionner également la propriété de recouvrement de HEINE-BOREL ou le fait que toute partie bornée infinie possède un point d'accumulation. On apprend en premier cycle toutes ces propriétés comme des conséquences de la complétude, mais beaucoup d'entre elles sont en fait équivalentes à la complétude.

Il y a des corps totalement ordonnés dans lesquels toute suite fondamentale converge, mais dans lesquels l'ordre n'est pas archimédien. On verra dans le chapitre 12 un tel exemple, en prolongeant $\mathbb{R}$ au corps ${}^*\mathbb{R}$ des nombres non-standard. Ce corps contient à la fois des nombres infiniment petits et des nombres infiniment grands, et pour cette raison ${}^*\mathbb{R}$ n'est pas archimédien, tandis que toute suite fondamentale est constante, donc convergente. Jusqu'à quel point l'axiome archimédien limite-t-il les possibilités ? Un théorème de HÖLDER [18] et CARTAN [7] montre la force de cette condition : Un groupe ordonné est archimédien si et seulement s'il est isomorphe à un sous-groupe du groupe d'additif des nombres réels. Il n'est même pas nécessaire de supposer la commutativité du groupe ; elle découle des autres hypothèses.

3. Existence et unicité des nombres réels. Nous allons à présent montrer que le système d'axiome (R1)-(R3) caractérise les nombres réels. Soit F/N le corps de Cantor, c'est-à-dire le corps des classes d'équivalence de suites fondamentales modulo la relation d'égalité à une suite de limite nulle près. Pour démontrer le théorème d'existence et d'unicité, nous aurons besoin de la proposition que voici :

PROPOSITION — Le seul automorphisme de corps du corps des réels est l'identité.

Dans cet énoncé, "corps des réels" signifie "tout corps totalement ordonné satisfaisant aux axiomes (R1) à (R3)". Ce n'est qu'après avoir démontré le théorème d'unicité que l'on pourra énoncer la proposition ainsi : "Le seul automorphisme de corps de $\mathbb{R}$ est l'identité."

DÉMONSTRATION : Soit K un corps satisfaisant aux axiomes (R1) à (R3). On a vu que K contient un sous-corps canoniquement isomorphe au corps des rationnels, que l'on note donc $\mathbb{Q}$. Soit σ un automorphisme de K . Alors $\sigma|_{\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}}$. En effet, on a $\sigma(0) = 0$, $\sigma(1) = 1$, et donc, par récurrence, $\sigma|_{\mathbb{N}} = Id_{\mathbb{N}}$. Comme tout élément de $\mathbb{Q}$ s'écrit sous la forme $(a - b)/c$, avec $a, b, c \in \mathbb{N}$, on en déduit $\sigma|_{\mathbb{Q}} = Id_{\mathbb{Q}}$.

La relation d'ordre de K est définie à partir de la seule structure de corps. On a $x \geq y$ si et seulement s'il existe $z \in K$ tel que $z^2 = x - y$. Il s'ensuit que tout automorphisme σ de K préserve l'ordre. On en déduit que σ est continue : si (x_n) est une suite d'éléments de K qui converge vers $x \in K$, alors la suite $(\sigma(x_n))$ converge vers $\sigma(x)$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans K , tout $x \in K$ est limite d'une suite (x_n) d'éléments de $\mathbb{Q}$. Comme $\sigma(x_n) = x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit $\sigma(x) = x$, c'est-à-dire $\sigma = Id_K$, ce qui montre la proposition. ■

THÉORÈME D'EXISTENCE ET D'UNICITÉ DU CORPS DES NOMBRES RÉELS — Soit K un corps ordonné satisfaisant aux axiomes (R1) à (R3). Alors, il existe un unique isomorphisme de corps ordonné $\varphi : K \rightarrow F/N$.

DÉMONSTRATION : Commençons par définir φ . Soit $x \in K$. Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans K , il existe une suite fondamentale rationnelle (x_n) qui converge vers x . On pose $\varphi(x) = (x_n) \bmod N$. Comme la différence de deux suites fondamentales de limite x est une suite de limite nulle, φ est bien définie. Et puisque la limite est compatible avec la somme et le produit, φ est un homomorphisme. Il est clair que $\varphi|_{\mathbb{Q}}$ est une bijection de l'ensemble des rationnels de K sur l'ensemble des rationnels de F/N . Ce n'est donc pas l'homomorphisme nul ; de plus, $\text{Ker } \varphi = \{0\}$, de sorte que φ est injective. Jusqu'ici, seul le caractère archimédien de K a été utilisé. Comme toute suite fondamentale rationnelle de K converge, φ est surjective. Cela montre que φ est un isomorphisme. ■

L'unicité de φ résulte directement de la proposition précédente.

Dans les chapitres 1 et 2, nous avons pu, grâce aux méthodes de la théorie des ensembles construire successivement $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ puis enfin $\mathbb{R}$. L'existence de $\mathbb{R}$ est donc assurée, si l'on reconnaît la validité de la théorie des ensembles. En d'autres termes, les axiomes (R1)-(R3) sont consistants (c'est-à-dire ne peuvent conduire à une contradiction) si la théorie des ensembles est elle-même consistante. Le problème de la consistance de la théorie des ensembles est traité dans le dernier chapitre.

II Rationnels, irrationnels

1) Montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

2) Trouver deux irrationnels dont la somme est rationnelle, deux autres dont le produit soit rationnel.

Montrer qu'il existe deux irrationnels positifs r et s tels que r^s soit rationnel.

Qu'en est-il des rationnels ?

3) Montrer que si x est racine de l'équation suivante, où les coefficients c_i appartiennent à $\mathbb{Z}$, alors x est soit entier, soit irrationnel :

$$x^n + c_1 x^{n-1} + \dots + c_n = 0$$

4) Dédurre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel, en considérant l'équation $x^4 - 10x^2 + 1 = 0$.

5) Comment montrer que π et e sont irrationnels ?

Donner d'abord une définition de ces nombres.

Voici deux plans de ces démonstrations (jointes en annexe), les lire et les expliquer.

6) Montrer que si y est un nombre rationnel non nul, alors e^y est irrationnel.

7) Rappeler ce que veut dire que l'ensemble des rationnels est dense dans $\mathbb{R}$. Est-ce vrai de l'ensemble des irrationnels ?

8) Montrer qu'entre deux réels il existe une infinité de rationnels, une infinité d'irrationnels.

9) Démontrer le théorème de Dirichlet suivant :

Soit a un irrationnel ; étant donné un entier positif n , il existe deux entiers p, q tels que $p < q \leq n$, et tels que

$$|a - p/q| < 1/qn \leq 1/q^2.$$

10) Quels sont tous les sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$?

Soit a un irrationnel. On pose $\{a\} = a - E(a)$. Montrer que l'ensemble des $\{na\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $[0,1]$. Montrer que si θ n'est pas commensurable avec π , l'ensemble $\{\cos n\theta\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est dense dans $[-1,1]$.

Théorème 9.4 *Le nombre e est irrationnel.*

MOUILLÉ
Introduction à l'analyse des
nombres. De Kounine & Mercier

DÉMONSTRATION On procède par contradiction en supposant que e est un nombre rationnel, c'est-à-dire que $e = a/b$, où $a, b \in \mathbb{N}$. Si $k \geq b$, alors $b|k!$ et le nombre

$$c \stackrel{\text{def}}{=} k! \left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \dots - \frac{1}{k!} \right)$$

est entier. Mais alors,

$$0 < c = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)^2} + \dots = \frac{1}{k} \leq 1.$$

On obtient ainsi que c est un entier positif satisfaisant $0 < c < 1$, donc une contradiction. ■

Ce procédé qui consiste à construire un entier positif c satisfaisant $0 < c < 1$, menant ainsi à une contradiction, peut être exploité davantage pour démontrer que d'autres nombres sont irrationnels, par exemple que e^y est irrationnel pour tout nombre rationnel $y \neq 0$. Pour ce faire, on introduit d'abord une fonction importante.

Soit n un entier positif quelconque. On pose

$$f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{x^n(1-x)^n}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{m=n}^{2n} c_m x^m.$$

où les c_m sont des entiers. Pour $0 < x < 1$, on a

$$0 < f(x) < \frac{1}{n!}. \quad (9.2)$$

Il est clair que $f(0) = 0$ et que $f^{(m)}(0) = 0$ si $m < n$ ou $m > 2n$. Par ailleurs, si $n \leq m \leq 2n$, on a

$$f^{(m)}(0) = \frac{m!}{n!} c_m,$$

qui est un entier. Il s'ensuit que $f(x)$ et toutes ses dérivées prennent des valeurs entières à $x = 0$. Comme $f(1-x) = f(x)$, la même chose est vraie à $x = 1$.

Théorème 9.5 *Si $y \neq 0$ est rationnel, alors e^y est irrationnel.*

DÉMONSTRATION On procède par contradiction en écrivant $y = a/b$ et en supposant que e^y est rationnel, auquel cas $e^{ky} = e^h$ est aussi un nombre rationnel. Posons donc $e^h = a/b$, où a et b sont des entiers positifs, et considérons la fonction

$$F(x) \stackrel{\text{def}}{=} h^{2n} f(x) - h^{2n-1} f'(x) + \dots - h f^{(2n-1)}(x) + f^{(2n)}(x).$$

Étant donné la nature de $f(x)$ mentionnée ci-dessus, on a que $F(0)$ et $F(1)$ sont des entiers. On a aussi que

$$\frac{d}{dx} \{ e^{hx} F(x) \} = e^{hx} \{ h F(x) + F'(x) \} = h^{2n+1} e^{hx} f(x).$$

c'est pourquoi $b \int_0^1 h^{2n+1} e^{hx} f(x) dx = b e^{hx} F(x) \Big|_0^1 = a F(1) - F(0) b$
qui est entier.

A l'aide de (9.2) on obtient

$$0 < b \int_0^1 h^{2n+1} e^{hx} f(x) dx < \frac{b h^{2n+1} e^h}{n!}, \text{ cette dernière quantité est inférieure à 1 si } n \text{ est grand } \Rightarrow \text{impossible}$$

π est irrationnel. On suppose par l'absurde que $\pi = \frac{a}{b}$

$$\text{Considérons } f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

$$\text{et } F(x) = f(x) - f''(x) + \dots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

On démontre que $f(x)$ et ses dérivées prennent des valeurs entières pour $x=0$ et $x=\pi$, de même que $F(0)$ et $F(\pi)$.

$$\text{Montrer ensuite que } F(\pi) - F(0) = \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx$$

(on pourra dériver $F'(x) \sin x - F(x) \cos x$).

On déduit que, pour $0 < \pi < x$, pour n suffisamment grand on a $0 < \int_0^\pi f(x) \sin x \, dx < 1$.

Est-ce possible ?

Les nombres e et π sont irrationnels

La démonstration, esquissée plus loin, de l'irrationalité de π est nettement plus complexe que celle de l'irrationalité du nombre e (le nombre qui définit les logarithmes). Pour vous faire goûter cette progressive montée de la complication des raisonnements par l'absurde, voici celui, assez facile, concernant e ; il fut proposé par Euler en 1744.

Théorème : le nombre e , défini par la série :

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

est irrationnel.

Démonstration : si e est rationnel, il s'écrit p/q (avec $q > 1$, car on sait que e n'est pas un entier, $e = 2,718284590\dots$). Multiplions les deux côtés de l'égalité par $q!$:

$$q!e = q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots$$

Le premier membre, $q!e$, est un entier, car, par définition, $q! = q(q-1)(q-2)\dots 2 \times 1$, d'où $q!p/q = (q-1)!p$.

Les premiers termes du second membre, jusqu'au terme $q!/q! = 1$, sont aussi des entiers (car $q!/m!$ se simplifie si $q > m$). Donc, par soustraction, on trouve que :

$$q!e - \left(q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \dots + \frac{q!}{q!} \right) = \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \dots$$

est aussi un entier.

Après simplification, le second membre de l'égalité devient :

$$\frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \dots$$

Le premier terme de cette somme est strictement inférieur à $1/2$ (car $q > 1$), le deuxième inférieur à $1/4$, le troisième inférieur à $1/8$, etc. La somme est donc strictement inférieure à $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots = 1$. Par conséquent, elle n'est pas un entier, ce qui constitue une contradiction. Fin de la démonstration.

Le fascinant nombre π
(Behin - Delahaye)

Théorème : le nombre e est transcendant.

Démonstration : observons d'abord que si $f(x)$ est un polynôme à coefficients réels de degré m , et si :

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du$$

alors, par intégration par parties répétée, on obtient :

$$I(t) = e^t \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(t) \quad (1)$$

Si $f^*(x)$ désigne le polynôme f dans lequel on a remplacé chaque coefficient par sa valeur absolue, alors :

$$|I(t)| \leq \int_0^t |e^{t-u} f(u)| du \leq |t| e^{|t|} f^*(|t|) \quad (2)$$

Supposons maintenant que e est algébrique, c'est-à-dire qu'il existe des entiers $n > 0$, $q_0 \neq 0$, et $q_1, \dots, q_n$ tels que :

$$q_0 + q_1 e + \dots + q_n e^n = 0 \quad (3)$$

Nous allons comparer dans la suite deux estimations différentes de $J = q_0 I(0) + q_1 I(1) + \dots + q_n I(n)$, où $I(t)$ est défini comme précédemment, avec $f(x) = x^{p-1} (x-1)^p \dots (x-n)^p$, p désignant un grand entier premier. De (1) et (3), nous tirons :

$$J = - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n q_k f^{(j)}(k)$$

où $m = (n+1)p - 1$. Il est clair que $f^{(j)}(k) = 0$ si $j < p$ et $k > 0$, ou si $j < p-1$ et $k = 0$. Donc, pour tout j, k autres que $j = p-1, k = 0$, $f^{(j)}(k)$ est un entier divisible par $p!$. En outre :

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)! (-1)^n (n!)^p$$

et donc, pour $p > n$, $f^{(p-1)}(0)$ est un entier divisible par l'entier $(p-1)!$ mais pas par l'entier $p!$. Il en résulte que, si on prend $p > |q_0|$, alors J est un entier non nul divisible par $(p-1)!$, et donc $|J| \geq (p-1)!$.

Toutefois la majoration évidente $f^*(k) \leq (2n)^m$, utilisée avec (2), donne l'inégalité :

$$|J| \leq |q_1| e^{f^*(1)} + \dots + |q_n| n e^n f^*(n) \leq c^p$$

pour une certaine constante c indépendante de p . Lorsque p est suffisamment grand, les deux inégalités concernant $|J|$ se contredisent, ce qui démontre le théorème.

Théorème de Dirichlet

On note $\{x\} = x - E(x)$ et $\bar{x}$ la différence entre x et l'entier le plus proche ($\bar{x} = \frac{1}{2}$ si $x = n \pm \frac{1}{2}$).

On considère les $n+1$ nombres $0, \{x\}, \{2x\}, \dots, \{nx\}$; ils sont compris entre 0 et 1. On considère les n intervalles $J_k \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right]$ $0 \leq k \leq n-1$. Montrer qu'il y a un intervalle contenant (au moins) deux des nombres $0, \{x\}, \dots, \{nx\}$. Soit $\{jx\}$ et $\{lx\}$, avec $j < l$.

Montrer que si $q = l-j$, $0 < q \leq n$ et $\bar{qx} < \frac{1}{n}$.

En déduire le théorème.

Sous Groupes de $\mathbb{R}$

On se propose de montrer que si le réel ω est irrationnel, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe deux suites d'entiers relatifs (n_j) et (k_j) telles que

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} k_j \omega + n_j = x$$

(Si $\omega \notin \mathbb{Q}$ le groupe $\omega\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$)

A)

E désigne la fonction partie entière.

1) Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$E(\alpha) + E(\beta) \leq E(\alpha + \beta) \leq E(\alpha) + E(\beta) + 1$$

Soit $\alpha \in]0, 1[$

2) Montrer que pour tout couple (p, q) d'entiers naturels tel que $p < q$,

$$0 \leq E(q\alpha) - E(p\alpha) \leq E((q-p)\alpha) + 1 \leq q - p$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Prouver qu'il existe $p \in \mathbb{N}, p < n$ tel que

$$\left| \alpha - \frac{p}{n} \right| < \frac{1}{n}$$

b) Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \{0, 1, \dots, n\} &\rightarrow \mathbb{N} \\ m &\mapsto E\left[n(m\alpha - E(m\alpha))\right] \end{aligned}$$

n'est pas injective.

En déduire qu'il existe un couple (p, q) d'entiers naturels tels que

$$0 < q \leq n, p \leq q \quad \text{et} \quad |q\alpha - p| < \frac{1}{n}$$

B)

Soit $G \neq \{0\}$ un sous groupe de $\mathbb{R}$. On pose

$$\alpha = \inf\{x > 0, x \in G\}$$

1) On suppose que $\alpha > 0$. Montrer que $\alpha \in G$.

2) En supposant toujours $\alpha > 0$, vérifier que pour tout réel $b > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\delta \in \mathbb{R}, 0 \leq \delta < \alpha$ tel que $b = n\alpha + \delta$ et en déduire que $G = \alpha\mathbb{Z}$.

3) On suppose maintenant que $\alpha = 0$. Soient $\epsilon > 0$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $\delta \in G$ et un entier $m \in \mathbb{Z}$ tels que $0 < \delta < \epsilon$ et $|x - m\delta| < \delta$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite (a_j) de G qui converge vers x .

C) Applications

1) Soit $\omega \notin \mathbb{Q}$ et $G = \omega\mathbb{Z} + \mathbb{Z}$. Montrer que G est dense dans $\mathbb{R}$.

2) Déterminer toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(\cos n)$.

Exercice 1.

Après avoir étudié, suivant la valeur du réel positif a la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{au_n^2 + u_n} \forall n \geq 0, u_0 = 3$, proposer un texte d'exercice en argumentant le choix de vos questions.

Exercice 2.

Même question avec $u_{n+1} = \exp(au_n)$. On discutera suivant les valeurs du réel a et de u_0

III Conclusion

En conclusion :

Il nous manque les stages pour conclure de manière plus définitive.

Nous joignons cependant le texte du projet demandé aux étudiants sur leur stage, notre conclusion qui ouvre sur des questions plus générales, et le bilan provisoire que nous pouvons faire de ce module.

1 Première partie du projet

Exercice n°

1) Rédiger une solution de l'exercice.

2) En donner un "portrait" global en une phrase, puis un peu plus détaillé en deux, trois phrases.

Toutes les questions sont-elles indispensables ?

L'ordre des questions a-t-il une importance, y a-t-il indépendance entre certaines questions ?

Le problème porte-t-il sur une situation particulière ou sur une situation générique ? Pourrait-on généraliser (tout ou partie) ?

3) Analyser chaque question (ou groupe de questions).

On pourra s'aider des interrogations habituelles :

* y a-t-il des pré requis importants ?

* qu'est-ce qui fonctionne (propriété(s), théorème(s), définition(s), formule(s), méthode(s), raisonnement(s)...) ? comment (simple application isolée, adaptation ...) ? y a-t-il plusieurs étapes ?

* plusieurs cadres ou registres sont-ils impliqués (et comment) dans le travail demandé ?

* quelle production est demandée ?

* qu'est-ce qui est indiqué (y a-t-il à conjecturer) ?

* les méthodes à utiliser sont-elles indiquées ?

* y a-t-il des choix possibles ?

* y a-t-il des moyens de contrôle pour les élèves ?

* qu'est-ce qui reste à la charge des élèves ?

* quelles initiatives les élèves peuvent-ils prendre ?

* y a-t-il une connaissance supposée disponible ?

* y a-t-il des ambiguïtés (voire des erreurs !) dans l'énoncé ?

* y a-t-il des implicites (existence, unicité, cas particuliers omis, ...) ?

* les notations sont-elles bien définies ?

4) Faire un bilan des activités qu'on peut attendre des élèves lors de la résolution de cet énoncé.

A votre avis, à quel moment du cours proposer cet exercice (justifier) ?

5) Rédiger un autre énoncé sur la même situation mathématique. expliquer le rapport entre les modifications proposées et les activités attendues des élèves. A quel moment du cours destinez-vous cet énoncé ?

II Retour sur la question suivante : comment apprend-on les mathématiques ? Marges de manoeuvre de l'enseignant en matière de problèmes...

Nous avons abordé la question de l'élaboration d'énoncés, mais nous n'avons évoqué ni la gestion de la classe, ni les programmes, pourtant indissociables et fondamentaux.

En réalité les choix en matière de gestion de classe dépendent des conceptions de l'apprentissage qu'ont les enseignants. Nous exposons très rapidement certaines conceptions des didacticiens ci-dessous, qui correspondent à la spécification aux mathématiques et à la classe d'hypothèses plus générales sur les apprentissages (cf. Piaget, Vygotski, etc.).

Même s'il y a des différences selon l'âge dans ce qu'on admet à ce sujet en didactique des mathématiques, cependant les définitions sont les mêmes.

Qu'est-ce qu'apprendre ? Est-ce apprendre le cours, les propriétés, est-ce apprendre à appliquer un cours, est-ce apprendre à résoudre des problèmes ? Qu'est-ce que savoir ?

Pour nous, c'est finalement (et très rapidement) se construire un accès aux concepts mathématiques visés, aussi bien côté des savoirs formels que du côté des mises en application, sachant que les deux semblent complémentaires. Le mot "conceptualisation" résume cette acception de la notion d'apprentissage.

De plus, résoudre des problèmes fait apprendre, mais c'est aussi un bon moyen de tester qu'on a appris. En définitive, nous faisons nôtre la formule schématique "les résolutions de problèmes sont source et critère des connaissances".

Autrement dit nous attendons d'un apprentissage "réussi" à la fois des prises de sens et des capacités techniques (opérations, etc.), et nous pensons que ces apprentissages résultent en particulier d'activités de résolution de problèmes bien choisies, en relation avec des cours, également "bien choisis".

Chez les petits, G.Brousseau en particulier a adapté les théories de Piaget à la classe et aux mathématiques en proposant de faire "passer" autant que possible les élèves par les étapes suivantes pour apprendre une nouvelle notion : action, formulation, validation, institutionnalisation. Ceci engage les enseignants sur des scénarios précis, initiés par un "bon" problème (au moins sur bon nombre de notions). R. Doudy a proposé une organisation voisine, mais en la justifiant par le passage d'une utilisation "outil" des notions (permise par la résolution de problèmes particuliers) à une utilisation "objet" (initialisée par l'enseignant).

Pour les plus âgés, on admet qu'il est efficace de leur faire vivre une dynamique entre contextualisation des connaissances (à l'oeuvre dans des exercices) et décontextualisation (savoir exposé, définition, propriétés, etc.) par l'intermédiaire d'une suite bien conçue cours/exercices, ou encore par l'utilisation alternée objet/outil, etc. La suite ne commence pas toujours par du cours. Mais il est aussi fondamental pour ces apprentissages d'arriver à une certaine organisation des connaissances (mises en relation notamment).

Ceci engage à proposer des activités précises (exercices, problèmes) où on fait exprès de proposer aux élèves des activités, notamment des questionnements qui sont l'occasion de mises en

fonctionnement spécifiques, adaptées à faire organiser les connaissances. Par exemple les connaissances devront être adaptées pour changer de cadres (transférées, interprétées), ou utilisées de manière non isolée, ou encore ce sont les élèves qui devront choisir en partie quoi utiliser. Ou bien les connaissances des élèves sont déjà disponibles, et cela le testera, ou bien ce n'est pas le cas et alors les questions, qui ont du sens dans le contexte du problème, aideront les élèves à transformer leurs connaissances, à les faire devenir plus aisément utilisables sans indication, à bon escient.

L'enseignant doit ainsi utiliser ses marges de manoeuvre pour aider à faire devenir disponibles des connaissances grâce à des énoncés qui aident les étudiants tant à mettre en fonctionnement des notions pour acquérir des automatismes qu'à se questionner et à pouvoir répondre à leurs questions.

Les interrogations sur les énoncés font partie de ce travail - on appelle par exemple variable didactique une variable qui ne change dans un énoncé que la procédure utilisée par les élèves. L'enseignant doit s'interroger notamment sur les conséquences des choix des paramètres numériques sur les méthodes utilisées par les élèves, pour faire ses choix, tous les choix étant sans doute également justifiés mais à doser selon le moment de l'enseignement et les objectifs visés.

III Un bilan provisoire

1) Le problème rendu par les étudiants

La correction des copies a montré que les analyses des énoncés sont correctes, mais qu'aucune question où les connaissances attendues devaient être disponibles n'a été posée.

Les énoncés présentent quelques maladresses de rédaction, et minoritairement des erreurs, qui apparaissent dans les corrigés simultanément, mais dans l'ensemble ce sont des productions très correctes. Le fait d'analyser l'énoncé semble avoir entraîné un certain contrôle des productions, supérieur à ce qui est produit d'habitude.

Plus généralement, il apparaît qu'un des effets potentiels de ce module soit de rendre les étudiants plus vigilants sur leurs propres productions mathématiques... Ceci n'est pas entièrement nouveau : en formation des professeurs d'école, c'est pour un effet analogue que sont appréciés notamment les cours de didactique des mathématiques...

2) Le bilan des étudiants

Nous les avons questionné sur leurs attentes, les points positifs et les points négatifs de cet enseignement.

Voici un résumé des réponses

* les attentes étaient un peu différentes de l'offre, plus centrées sur une préparation "pédagogique" (?) à l'enseignement.

* Les points positifs concernent

- l'analyse d'exercices (citée 11 fois sur 15)

- la prise de recul obtenue (6 fois), avec des conséquences sur les activités mathématiques des étudiants (en petits cours, en partiels...)

- le travail en petits groupes (5 fois)

* Les points négatifs concernent

- la mauvaise organisation des stages..;

- le niveau des mathématiques étudiées (5 fois), trop élevé

- le manque de cours de pédagogie (5 fois).

Pour tout renseignement sur les publications diffusées par notre IREM,

Vous pouvez soit :

Consulter notre site WEB

<http://www.ccr.jussieu.fr/iremParis7/welcome.html>

Demander notre catalogue en écrivant à

IREM Université Paris 7

Case 7018

2 place Jussieu

75251 Paris cedex 05

TITRE :

Comment élaborer des énoncés en mathématiques? L'exemple d'un enseignement de licence de mathématiques sur ce thème

AUTEUR (S) :

Pian J
Robert A

RESUME :

Il s'agit de la présentation d'un enseignement réservé aux étudiants de licence de mathématiques. Cet enseignement est construit à partir de trois thèmes, les quaternions, la convergence uniforme et les nombres réels. Les différentes activités proposées aux étudiants et présentées en détail dans la brochure ont un double objectif annoncé aux étudiants : un objectif mathématique de réorganisation de connaissances de niveau DEUG et un objectif plus pédagogique de construction d'énoncés de problèmes. Dans ce but, on donne aux étudiants quelques notions élémentaires sur les mises en fonctionnement des connaissances et on leur apprend à repérer dans un énoncé ce qui fonctionne et comment

MOTS CLES :

mathématiques
énoncés de problèmes

Université PARIS 7-Denis Diderot
Directeur responsable de la
publication : R. CORI
Case 7018 - 2 Place Jussieu
75251 PARIS Cedex 05
Dépôt légal : 1999
ISBN : 2-86612-180-5