Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence

Odile Kouteynikoff

Introduction

Le terme « grandeur » est intentionnellement utilisé dans le titre, à la place du mot « nombre », pourtant plus usuel dans ce contexte. C'est dire d'emblée que notre réflexion nous portera en dehors du registre purement algébrique, très rapidement après les rappels de rigueur que voici.

Les recherches de deux nombres connaissant leur produit et leur somme ou leur différence ne sont pas des questions triviales pour nos élèves. Ce sont, au premier abord, des problèmes à deux inconnues, susceptibles d'une traduction par un système de deux équations, non linéaire, à résoudre par substitution.

RESULTAT PRELIMINAIRE :

Si l'équation $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines x_1 et x_2, les deux polynômes $x^2 + ax + b$ et $(x - x_1)(x - x_2)$ sont identiques, ce qui permet d'écrire les égalités $x_1 + x_2 = -a$ et $x_1 x_2 = b$.

PREMIERE RECHERCHE : trouver deux nombres x et y de somme s et de produit p.

Soit $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ le système à résoudre.

Par substitution, $\begin{cases} x = s - y \\ (s - y)y = p \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = s - y & (1) \\ y^2 - sy + p = 0 & (2) \end{cases}$

Si l'équation résolvante (2) admet deux racines y_1 et y_2, celles-ci ont pour somme $y_1 + y_2 = s$ d'après le résultat préliminaire, et l'on trouve dans (1)

$$x_1 = s - y_1 = y_2 \text{ et } x_2 = s - y_2 = y_1 \text{ soit } (x_1, y_1) = (y_2, x_2) = (y_2, y_1).$$

C'est ici qu'on voit poindre la particularité de la situation : sans qu'aucune des deux racines de l'équation résolvante du second degré ne soit parasite, on obtient une seule paire de nombres comme solution du système symétrique en x et y ; la solution unique du problème à deux inconnues, est constituée par les deux racines de l'équation du second degré à une inconnue.

SECONDE RECHERCHE : trouver deux nombres x et y connaissant leur différence d et leur produit p.

Le système peut s'écrire $\begin{cases} x - y = d \\ xy = p \end{cases}$

Il n'est pas tout à fait symétrique et il ne peut avoir une solution unique au sens strict car, si un couple (a,b) est solution, le couple (–b,–a) l'est aussi.

On obtient par substitution, $\begin{cases} x = y + d \\ (y + d)y = p \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = y + d \quad (1') \\ y^2 + dy - p = 0 \end{cases}$

Quand l'équation résolvante admet deux racines y_1 et y_2 qui, d'après le résultat préliminaire, vérifient l'égalité $y_1 + y_2 = -d$, on trouve dans (1')

$$x_1 = y_1 + d = -y_2 \text{ et } x_2 = y_2 + d = -y_1$$
$$\text{soit } (x_1, y_1) = (-y_2, y_1) \text{ et } (x_2, y_2) = (-y_1, y_2)$$

Ce sont à nouveau les deux racines de l'équation résolvante du second degré à une inconnue qui fournissent « la » solution du problème à deux inconnues.

Sans nécessairement nous appesantir avec nos élèves sur les subtilités de la résolution du second système, nous leur demandons de RETENIR

~ que si l'équation $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines, elles ont pour somme $-a$ et pour produit b

~ que, réciproquement, pour trouver deux nombres de somme s et de produit p, il suffit, si le problème est possible, de résoudre l'équation $y^2 - sy + p = 0$, dont les racines sont alors les nombres cherchés.

Je crois me rappeler ma propre perplexité d'élève devant ces deux énoncés d'une efficacité technique incontestable, mais dont la concision même enfermait le mystère. Je me souviens aussi de la rigueur presque volontariste avec laquelle, jeune professeur, je disséquais la correspondance entre les deux problèmes d'algèbre devant des élèves dont le regard me renvoyait quelque chose du genre « tout ça pour ça ! ». Je m'étais finalement résolue à classer ce sujet qui m'avait troublée, dans le registre du « banal et sans saveur » dont il faut bien accepter qu'il ne soit pas vide. Mais le jour vint où, travaillant sur des textes de la Renaissance à propos de la résolution des équations du second degré[6], je ressentis, grâce aux détours et aux interrogations des nouveaux algébristes, un vif regain d'intérêt pour cette question qui se révélait **historiquement** délicate.

Il me semble, en l'état actuel de mes lectures, que l'essentiel de l'action se situe au XVI[e] siècle, en cette période d'innovations décisives, donc de tensions fortes et de dénouements rapides.

A cette époque, l'apparition des symboles suscite la rédaction de traités d'algèbre, incite à se poser des questions sur la formulation mathématique, autorise la recherche d'une simplicité relative dans les démarches, et amène à s'interroger sur la signification des résultats obtenus. En examinant des textes de Guillaume Gosselin[7], de Jacques Peletier du Mans (1517–1582) et de Simon Stevin (1548–1620), nous cernerons d'assez près la nature des obstacles épistémologiques.

---

[6] KOUTEYNIKOFF O., « Aspects du rôle de la géométrie dans la construction de l'algèbre : Regard historique sur la résolution des équations du second degré », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 114.

[7] dont nous ignorons les dates de naissance et de mort.

La Renaissance en Europe, c'est aussi comme le mot l'indique, l'époque où la fréquentation accentuée des textes de l'Antiquité influence les modes de pensée. Les *Eléments* d'Euclide (Alexandrie, III^e siècle avant J.C.) sont disponibles en latin, en Occident, depuis le XV^e siècle et constituent une référence incontournable ; les *Arithmétiques* de Diophante (Alexandrie, III^e siècle après J.C. selon la datation la plus courante) sont diffusées depuis le milieu du XVI^e siècle et stimulent les algébristes. Bien sûr, la prégnance de la géométrie euclidienne crée des entraves sévères telles que l'impossibilité de considérer des grandeurs autres que positives, mais elle perpétue aussi des outils puissants comme la théorie des proportions, dont nous allons apprécier le rôle déterminant pour notre sujet. Et en cette époque d'émergence de l'algèbre, le poids de la géométrie euclidienne et l'enthousiasme pour les problèmes diophantiens se conjuguent pour générer des intuitions heureuses : les recherches de Stevin (*Arithmétique*, Leyde, 1585) pour « construire » de la même manière le numérique et le géométrique apportent, dès avant les travaux de François Viète (1540–1603), une contribution non négligeable à l'élaboration de la géométrie analytique que le XVII^e siècle consacrera.

La modernité de Viète, celle de son *Algebra Nova* (Tours, à partir de 1591), est, pour une part, le produit de sa fidélité à Euclide et Diophante[8]. C'est en pratiquant une relecture respectueuse des textes des Anciens, en en pénétrant les lignes de force, qu'il les met en relation et en restitue le rayonnement. La manière dont il démontre, dans *Les Effections géométriques* (partie sept de l'*Algèbre Nouvelle*), que construire les grandeurs racines des équations du second degré, c'est construire des grandeurs dont on connaît le produit et la somme ou la différence, est exemplaire de son art. En raisonnant sur une figure euclidienne, il met en évidence une construction géométrique dont les étapes sont exactement celles de la résolution numérique du problème à deux inconnues, telle qu'il la conduit dans *Les Zététiques* (partie trois de l'*Algèbre Nouvelle*), à la manière de Diophante. L'examen du travail de Viète va donc constituer une partie essentielle de cet article et, dans ce cadre modeste, le dénouement de la question-titre.

Cependant la lecture préalable des textes grecs s'impose, non seulement pour l'éclairage qu'ils apportent aux textes de la Renaissance, mais aussi pour ce qu'ils nous disent à nous, directement. Nous allons prendre le temps et la place d'un travail qui en fasse émerger la simplicité, celle qu'il nous est permis de transmettre, à force de la construire et de la faire construire, celle qui pourrait faire que la question délicate ne s'installe pas dans les zones d'ombre d'une conscience mathématique mal éclose.

I. La relecture des textes grecs

Quelques propositions du Livre II des *Eléments* d'Euclide

Des treize livres qui constituent le gigantesque ouvrage que sont les *Eléments* d'Euclide, les six premiers sont consacrés à la géométrie plane. Nous ne noterons, au Livre I, que la proposition XLVII qui permet de construire un carré d'aire égale à celle de deux carrés donnés. C'est la proposition immortalisée sous l'appellation de théorème de Pythagore :

---

[8] KLEIN J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, M.I.T. PRESS, Cambridge (Mass.) and London (Engl.), 1968, p. 157 à 161.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit[9].

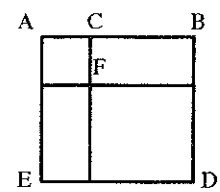
Le Livre II qui, au XIX[e] siècle, sera intitulé le livre de l'*algèbre géométrique*[10], contient quatorze propositions qui énoncent et démontrent des relations d'égalité entre aires de rectangles et de carrés combinés. Après avoir rappelé la proposition IV que chacun connaît, parfois sans le savoir, nous étudierons les propositions V et VI qui sont essentielles à notre propos puis nous examinerons les propositions XI et XIV, les deux seules du Livre II qui résolvent des problèmes de construction.

Bien que Euclide n'aborde pas la théorie des proportions avant le Livre V, nous signalerons les situations de proportionnalité identifiables sur les configurations étudiées, pour l'utilisation qui peut en être faite, au XVI[e] siècle ou en classe aujourd'hui, et ceci, malgré le décalage que cette liberté engendre avec le projet de l'auteur, tel qu'il est perceptible dans les premiers livres.

Enfin nous ne donnerons dans leur forme authentique que l'énoncé des propositions, nous accordant la facilité ou l'efficacité de présenter dans une forme modernisée les résultats, les démonstations ou les commentaires.

La proposition IV

Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments[11].



[AB] donné, C quelconque

carré AD = carré AF + carré FD + 2 Rect. FB

Nous pouvons aussi lire sur cette configuration la proportionnalité des aires des carrés et des rectangles ayant deux à deux un côté commun :

$$\frac{\text{carré FD}}{\text{Rect. FB}} = \frac{\text{Rect. FE}}{\text{carré FA}}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{b^2}{ab} = \frac{ab}{a^2}$$

en écriture littérale actuelle, en posant CA = a et CB = b.

C'est exactement la visualisation que Peletier proposera pour ce résultat algébrique, jugé sans doute moins banal au XVI[e] siècle qu'aujourd'hui.

Les propositions V et VI

L'étude des propositions V et VI nécessite la connaissance du gnomon, qui fait l'objet de la définition 2 du Livre II :

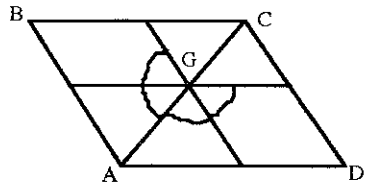
---

[9] EUCLIDE, *Les Œuvres*, traduction F.Peyrard, Paris, 1819, réédition Blanchard, Paris, 1993, p 38.

[10] EUCLIDE, *Les Eléments*, traduction et commentaires B. Vitrac, P.U.F., Paris, 1994, t. I, p. 366 : à propos de l'*algèbre géométrique*, Bernard Vitrac fait référence à P. Tannery (1843-1904) et H. G. Zeuthen (1839-1920).

[11] EUCLIDE, *Les Œuvres*, p. 43.

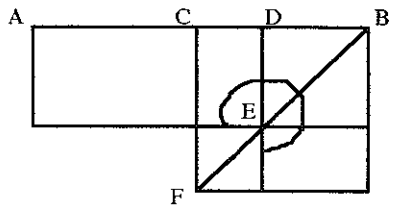
Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon[12].



gnomon G = parallélogramme GA + complément GB + complément GD

La proposition V

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière[13].



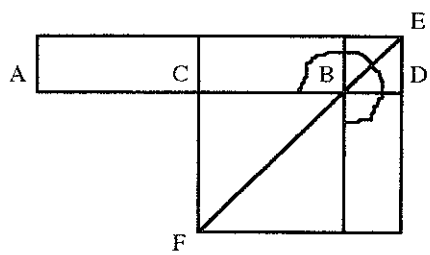
C milieu de [AB], D quelconque

Rect. AE = gnomon E, donc carré FE + Rect. AE = carré FB

ou de façon plus moderne, $DA \cdot DB + CD^2 = CB^2$ **(II,V)**

La proposition VI

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite[14].



C milieu de [AB], D quelconque

Rect. AE = gnomon B, donc carré FB + Rect. AE = carré FE

ou de façon plus moderne, $DA \cdot DB + CB^2 = CD^2$ **(II,VI)**

Les propositions XI et XIV

L'une et l'autre réalisent, sous des contraintes différentes, l'égalité en aire d'un rectangle et d'un carré. Ce sont donc deux problèmes, qui sont pour nous des problèmes du second degré, que Euclide formule et traite de manière complètement géométrique.

La proposition XI

Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant[15].

---

[12] *Ibid.*, p. 41.
[13] *Ibid.*, p. 45.
[14] *Ibid.*, p. 46.
[15] *Ibid.*, p. 53.

Un segment étant donné, le tout, on demande de le partager en deux segments nécessairement inégaux, le mineur et le moyen, de façon que le rectangle construit sur le mineur et le tout ait la même surface que le carré construit sur le moyen.

Sur le segment donné BE, on construit le carré BEFA, puis on marque le milieu C de [AB], et le point D de la demi-droite CB tel que CD = CE ; le point G cherché est le point du segment BE tel que BG = BD. La démonstration, écrite ici en langage moderne, repose sur la proposition VI[16] présentée plus haut.

$DA.DB + CB^2 = CD^2$

$DA.DB + CB^2 = CE^2$

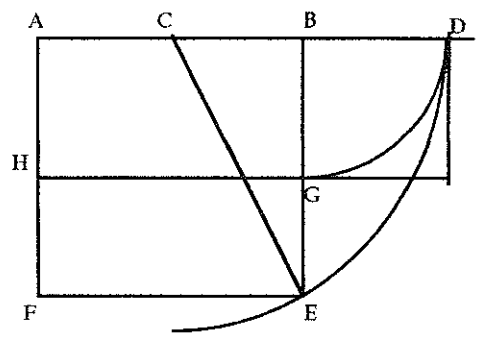
$DA.DB + CB^2 = CB^2 + BE^2$

$DA.DB = BE^2$

Rect. DH = Carré BF

Carré DG = Rect. GF

$GB^2 = EG.EB$



L'égalité $EG.EB = GB^2$ exprimant que les grandeurs EG, GB et EB sont proportionnelles, il s'agit en fait de construire l'extrême mineure EG et la moyenne GB, connaissant l'extrême majeure EB, et sachant qu'elle est la somme de la mineure et de la moyenne ; ce que, à la proposition XXX du Livre VI, Euclide appelle *Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison*[17]. C'est un problème de partage d'une somme en deux parties, satisfaisant à une condition de proportionnalité.

DANS LE REGISTRE NUMERIQUE :

La nature de la contrainte permet de prendre pour inconnue le rapport $\frac{GB}{EB}$, ce qui revient à poser EB = AB = 1 et GB = DB = x, et à traduire l'égalité en aire $DA.DB = BE^2$ par l'égalité en nombres $(x + 1).x = 1$. Le rapport $\frac{GB}{EB}$, inférieur à 1, est la racine positive de l'équation $x^2 + x = 1$.

On peut aussi prendre pour inconnue le rapport inverse $\frac{EB}{GB}$; cela revient à poser GB = DB = 1, EB = AB = x et à traduire l'égalité en aire $DA.DB = BE^2$ par l'égalité en nombres $(x + 1).1 = x^2$; il apparaît alors que le rapport $\frac{EB}{GB}$, supérieur à 1, est la racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

Dans l'un et l'autre cas, la résolution numérique fournit la première inconnue GB en fonction de EB donné, et la seconde inconnue EG se déduit de la première par soustraction.

---

[16] Pour des démonstrations détaillées des propositions VI et XI, et des suggestions d'activités pour les élèves, on consultera « Dans nos classes : La section dorée dans les *Eléments* d'Euclide », in *Mnémosyne* n° 1, IREM de Paris VII, avril 1992.

[17] EUCLIDE, *Les Œuvres*, p. 174.

La proposition XIV

Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée[18].

Au terme d'un parcours dont les étapes sont repérables au long des Livres I et II, il est acquis que pour faire la quadrature d'une figure rectiligne donnée, il suffit de faire la quadrature d'un rectangle : c'est la construction que détaille la proposition XIV.

On cherche le carré de côté DF = DG ayant même aire que le rectangle donné de côtés DA et DE. B est construit sur la droite AD de façon que DB = DE, C est le milieu de [AB], F est le point de la demi-droite ED tel que CF = CB, et G le point de la demi-droite DB tel que DG = DF. La démonstration, écrite ici en langage moderne, repose sur la proposition V présentée plus haut.

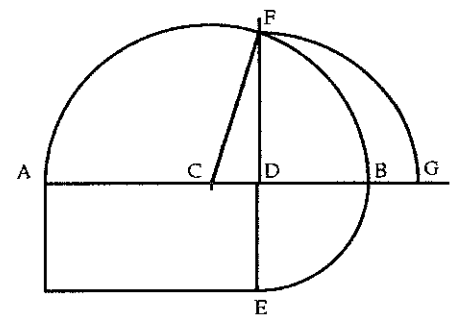
$DA.DB + CD^2 = CB^2$

$DA.DB + CD^2 = CF^2$

$DA.DB + CD^2 = CD^2 + DF^2$

$DA.DB = DF^2$

Rect. AE = Carré FG



L'égalité $DA.DB = DF^2$ exprimant que les grandeurs DA, DF et DB sont proportionnelles, la quadrature des figures rectilignes tient tout entière dans ce résultat central qu'est la construction de la moyenne proportionnelle de deux grandeurs données. C'est la même construction que Euclide détaille à nouveau, à la proposition XIII du Livre VI, pour *Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle*[19], et qu'il justifie alors par un argument appartenant au registre de la proportionnalité, le corollaire de la proposition VIII qui précède :

Proposition VIII

Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entre eux.

Corollaire.

De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base[20]*, [...]*

Cette construction, susceptible de la transcription en écriture littérale actuelle $c = \sqrt{ab}$, résout géométriquement l'équation du second degré la plus élémentaire $x^2 = A$, et potentiellement elle les résout toutes : Viète utilisera la figure précédente, dans les *Effections géométriques*, comme représentation canonique de trois grandeurs proportionnelles, pour mettre en évidence sa construction des grandeurs racines des équations du second degré.

---

[18] *Ibid.*, p. 55.
[19] *Ibid.* p. 151.
[20] *Ibid.* p. 147 et 148.

Quelques problèmes du Livre I des *Arithmétiques* de Diophante

Il semble qu'il n'y ait, dans les œuvres actuellement connues de Diophante, que de rares occurrences d'équations du second degré ; on peut signaler celle du problème XXXI du Livre IV, qui se présente comme une étape sophistiquée du calcul. Diophante résout habituellement des problèmes à plusieurs inconnues, deux ou plus, souvent indéterminés[21].

Les problèmes XXVII à XXX du Livre I sont propres à retenir notre attention :

~ les problèmes XXVII et XXX parce qu'ils traitent exactement la recherche de deux nombres connaissant leur produit et leur somme puis leur différence,

~ les problèmes XXVIII et XXIX parce qu'ils nous renseignent clairement sur les rôles joués dans ces recherches par la somme et la différence, et ceci d'autant mieux que les quatre problèmes se présentent comme une variation sur des valeurs numériques communes.

Les résolutions que Diophante propose pour les problèmes XXVII et XXX sont tout à fait différentes de celles rappelées en introduction ; outre l'apport qu'elles fournissent à notre sujet, elles ont une valeur algébrique propre incontestable.

Pour chaque problème, l'énoncé est suivi d'une condition de possibilité, qui est ainsi commentée : *chose qui est d'ailleurs (ou aussi) figurative.* Que cette précision soit due à Diophante ou à l'un de ses copistes importe peu : ce qui compte, c'est l'indication que la démarche numérique, neuve dans la forme théorique qu'elle prend, n'est pas pour autant détachée des mathématiques euclidiennes géométriques. La perception par Viète de ce lien profond entre Euclide et Diophante explique vraisemblablement, pour une part, la fécondité de son travail.

Nous ferons à nouveau le choix de présenter dans une forme un peu modernisée les démonstrations, parfois succinctes, de Diophante.

Le problème XXVII

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ; chose qui est d'ailleurs figurative.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes[22]*. [...]*

Une originalité notable de Diophante consiste à introduire une inconnue auxiliaire, qu'il nomme arithme. Puisque *l'excédent des nombres est 2 arithmes,* l'arithme désigne ici la demi-différence des nombres cherchés. Leur somme est donnée égale à 20 unités. Diophante établit avec une certaine insistance que 10 unités plus 1 arithme et 10 unités moins 1 arithme sont les deux nombres de somme 20 et de différence 2 arithmes que l'on cherche. Il leur impose d'avoir pour produit 96. De l'égalité à 96 du produit 100 unités moins 1 carré d'arithme, il déduit que l'arithme vaut 2 unités, le plus grand nombre 12 unités et le plus petit 8 unités, et que *ces nombres satisfont à la proposition.*

---

[21] GUILLEMOT M., « Un conte du lundi : A propos de Diophante d'Alexandrie », in *Mnémosyne* n° 14, IREM de Paris VII, juin 1998.

[22] DIOPHANTE, *Les Arithmétiques*, traduction P. Ver Eecke, Brouwer, Bruges, 1926, p. 36.

Une relecture de la proposition V du Livre II des *Eléments* d'Euclide permet d'illustrer à la fois la démarche calculatoire et la condition posée.

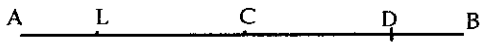


Fig. 1

Le segment AB étant coupé en parties égales au point C et en parties inégales au point D, on peut écrire :

$$DA.DB + CD^2 = CB^2$$

En côtésnstruisant L symétrique de D par rapport à C, on fait apparaître à côté de

la somme donnée AB = DA + DB, la différence LD = DA − DB.

La proposition 5 s'écrit alors

$$DA \,.\, DB + \left(\frac{LD}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2,$$

soit encore

$$DA \,.\, DB + \left(\frac{DA - DB}{2}\right)^2 = \left(\frac{DA + DB}{2}\right)^2,$$

ce qui montre que l'on peut calculer la demi-différence, si le carré de la demi-somme excède d'un carré le produit des nombres. Il est difficile, à ce stade de la lecture, de se prononcer sur la nature de la restriction posée au départ dans le texte de Diophante, simple inégalité nécessaire ou, (non exclusif), condition de résolution en nombres entiers.

Le problème XXX

Le problème XXX n'est pas séparable du précédent.

Trouver deux nombres tels que leur différence et leur produit forment des nombres donnés.
Il faut toutefois que le quadruple produit des nombres, augmenté du carré de leur différence forme un carré ; chose qui est aussi figurative.
Proposons donc que la différence des nombres soit 4 unités, et que leur produit soit 96 unités.
Que la somme des nombres soit deux arithmes.
[...] et le plus grand nombre devient de nouveau 12 unités, et le plus petit 8 unités ; nombres qui satisfont au problème[23].

C'est la différence des nombres qui est connue ; l'arithme désigne ici leur demi-somme. Diophante établit que 1 arithme plus 2 unités et 1 arithme moins 2 unités sont les deux nombres de différence 4 unités et de somme 2 arithmes que l'on cherche ; 1 carré d'arithme moins 4 unités valant alors 96, 1 arithme vaut 10 unités, et l'on retrouve les nombres attendus.

Examinons de quelle façon une relecture de la proposition VI du Livre II des *Eléments* d'Euclide peut rendre compte de la situation :

---

[23] *Ibid.*, p. 40.

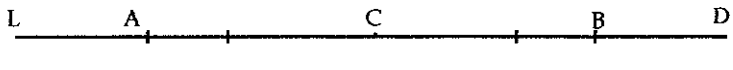


Fig. 2

Le segment AB est coupé en parties égales au point C et le point D est marqué sur la droite AB, à l'extérieur du segment. On peut écrire

$$DA.DB + CB^2 = CD^2$$

En construisant à nouveau L symétrique de D par rapport à C, on fait apparaître à côté de

la différence donnée AB = DA – DB, la somme LD = DA + DB.

La proposition 6 s'écrit alors

$$DA\ .DB + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{LD}{2}\right)^2,$$

soit à nouveau

$$DA\ .DB + \left(\frac{DA - DB}{2}\right)^2 = \left(\frac{DA + DB}{2}\right)^2,$$

ou bien

$$4\,DA.DB + (DA - DB)^2 = (DA + DB)^2.$$

On obtient le carré de la demi-somme, comme somme du produit des nombres et du carré de la demi-différence ; il semble bien que la restriction posée dans le texte soit ici condition de résolution en nombres entiers.

Les problèmes XXVIII et XXIX

Ils ne sont pas séparables des précédents, ni séparables l'un de l'autre.

XXVIII :

Trouver deux nombres tels que leur somme et la somme de leurs carrés forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le double de la somme des carrés des nombres excède d'un carré le carré de la somme des nombres ; chose qui est aussi figurative.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que la somme de leurs carrés forme 208 unités.

Que la différence des nombres soit 2 arithmes. [...]

XXIX :

Trouver deux nombres tels que leur somme et la différence de leurs carrés forment des nombres donnés.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que la différence des carrés des nombres forme 80 unités.

Que la différence des nombres soit 2 arithmes[24]*. [...]*

Certains commentateurs signalent le problème XXIX comme un problème du premier degré isolé parmi des problèmes du second degré, pour la raison, bien sûr, que la différence des nombres cherchés peut être obtenue directement comme quotient de la différence de leurs carrés par leur somme ; or ce n'est pas ainsi que Diophante procède. Sa solution est accordée aux trois autres et, en cela, tout à fait élégante. Pour les problèmes XXVIII et

[24] *Ibid.*, p. 38 et 39.

XXIX, la somme des nombres est donnée, et l'arithme désigne leur demi-différence. 10 unités plus 1 arithme et 10 unités moins 1 arithme sont à nouveau les deux nombres de somme 20 et de différence 2 arithmes que l'on cherche. La somme des carrés forme 2 carrés d'arithme plus 200 unités, égalée à 208 unités, dans le problème XXVIII ; la différence des carrés est 40 arithmes, égalée à 80 unités, dans le problème XXIX ; dans l'un et l'autre cas, l'arithme devient 2 unités, et la résolution est achevée.

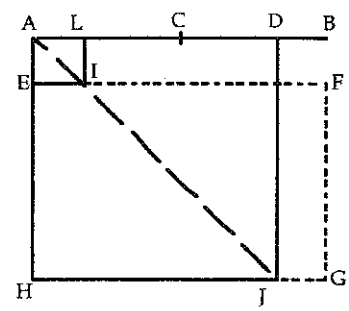
Les propositions IX et X du Livre II des *Eléments* d'Euclide, sont susceptibles, ainsi que les propositions V et VI, d'une formulation moderne unique, attachée aux figures 1 et 2 respectivement, à savoir :

$$2\left(DA^2 + DB^2\right) = (DA + DB)^2 + (DA - DB)^2$$

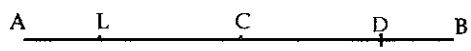
Cette relation peut illustrer la restriction que contient l'énoncé du problème XXVIII : la somme des nombres et la somme de leurs carrés étant données, on peut calculer leur différence, si le double de la somme des carrés excède d'un carré le carré de la somme des nombres.

Pour illustrer la spécificité de la démarche de Diophante dans la résolution du problème XXIX, nous prenons l'initiative de la figure suivante :

Pour connaître les grandeurs inconnues DA et DB, de somme donnée AB, il suffit de connaître leur différence LD. Or la **différence de leurs carrés**, qui est également donnée, apparaît comme **gnomon** LDJHEI, donc aussi comme rectangle EFGH, dont la longueur EF est la somme donnée et dont la largeur EH est la différence cherchée.



Alors que la méthode numérique, algébrique, pouvons-nous dire aujourd'hui, qui consiste à obtenir la différence des nombres cherchés comme **quotient** de la différence de leurs carrés par leur somme, échappe à toute visualisation, la solution proposée par Diophante suggère, dans sa forme même, le socle géométrique commun aux quatre problèmes que nous venons d'étudier. Viète utilisera dans les *Effections géométriques* la configuration



sur laquelle est lisible l'équivalence entre les deux systèmes :

$$\begin{cases} DA + DB = AB \\ DA - DB = LD \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} DA = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{LD}{2} \\ DB = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{LD}{2} \end{cases}$$

II. La nature des obstacles

C'est en examinant un problème que pose Gosselin, au chapitre IIII du Livre III du *De Arte Magna*, (Paris, 1577), que nous allons initier la réflexion. Gosselin consacre le dit-chapitre à la résolution de *L'équation seconde.*

On parle d'équation seconde, quand de ces quantités, que sont quarrés, côtés, & nombres, l'une est finalement présentée égale aux deux autres, et comme cette équation peut prendre trois formes, nous donnerons aussi trois algorithmes, que nous démontrerons séparément[25].

Parce que Gosselin ne considère que des équations à coefficients tous positifs, il distingue, à la manière des Arabes, trois types d'équations quadratiques[26] à trois termes, respectivement, en écriture symbolique actuelle,

$$x^2 + dx = p \qquad \text{(I)}$$
$$x^2 = dx + p \qquad \text{(II)}$$
$$x^2 + p = sx \qquad \text{(III)}$$

où p, s et d sont des nombres positifs. Il en cherche les racines positives. Pour chaque type d'équation, il fait une étude en trois parties :

- la description de l'algorithme ; c'est un acquis historique qui ne retiendra pas notre attention dans le cadre de cet article.
- une « démonstration arithmétique » de l'algorithme, que Gosselin conduit en faisant référence à des propositions évidemment géométriques, au moins dans leur forme, du Livre II des *Eléments* d'Euclide ; c'est un travail original.
- la résolution d'un problème plus ou moins inattendu, c'est-à-dire sa mise en équation, et le calcul des racines grâce à l'algorithme décrit.

Les équations de type I et II ont une unique racine positive ; les équations de type III ont deux racines positives, ou exceptionnellement une seule[27].

Le problème d'application attaché au premier algorithme éveille la curiosité. En voici le texte, accompagné de sa traduction en termes actuels, sans arrêt sur l'algorithme lui-même :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 48 \\ xy + x + y = 31 \end{cases}$$

Utilisation de cet Algorithme. Problème <I>.
Cherchons deux nombres, tels que ces nombres mêmes étant retranchés de leurs quarrés, il reste 48, & que ceux-là mêmes étant ajoutés au résultat du produit de l'un par l'autre, il vienne 31.

$$\begin{cases} x + y = s \\ x^2 + y^2 = 48 + s \\ xy = 31 - s \end{cases}$$

Posons que les nombres ajoutés sont 1L[28]*, donc 48 P 1L seront égaux à leurs Quarrés, & 31 M 1L seront égaux au produit de l'un par l'autre, & ainsi 62 M 2L*

---

[25] GOSSELIN G., *De Arte Magna* , Paris, 1577, p. 57. Les traductions des extraits cités sont dues à la collaboration de J. Boyé, O. Kouteynikoff et H. Plane.

[26] Pour nommer les équations, nous préférerons, dans la suite du texte, le terme d'équation quadratique à celui d'équation du second degré à une inconnue, parce qu'il a le double mérite d'expliciter que le terme de plus haut degré de l'équation est le terme « carré de l'inconnue », et d'être utilisable pour tous les auteurs, y compris ceux qui n'ont pas adopté la notation numérotée des puissances de l'inconnue.

[27] Gosselin explique la racine double, mais ne parle pas du cas impossible.

$$\begin{cases} x+y=s \\ x^2+y^2=48+s \\ 2xy=62-2s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=s \\ (x+y)^2=110-s \\ xy=31-s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2+s=110 \\ x+y=s \\ xy=31-s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=10 \\ x+y=10 \\ xy=21 \end{cases}$$

$$(x,y)=(3,7)$$

le seront au double du produit, mais d'après la quatrième <proposition> du second <livre des Eléments> d'Euclide, les Quarrés des parties avec le double du produit de l'une par l'autre sont égaux au Quarré du tout, or on a posé que le tout était 1L, donc 48 P 1L P 62 M 2L sont égaux à 1Q, c'est-à-dire 110 M 1L sont égaux à 1Q, & en ajoutant de part et d'autre 1L qui manque à l'un des deux membres, 110 sont égaux à 1Q P 1L ; et ainsi l'équation relève de cet algorithme,[...] c'est-à-dire 10, & c'est la valeur du côté, donc la somme de ces nombres que nous avons posée être 1L est 10, ainsi le produit de l'un par l'autre est 31 M 10 c'est-à-dire 21, pour connaître ces nombres séparément, nous partagerons 10 en deux parties de sorte que le produit de l'une par l'autre soit 21 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier <du Grand Art>, & ces parties seront les nombres 3 & 7 qu'il fallait trouver, & ce calcul est beaucoup plus facile que celui qui est transmis par Peletier à la question 5 de l'équation composée[29].

C'est ici que Gosselin nous surprend puisqu'il achève la résolution en affirmant que les parties de 10 dont le produit est 21 sont 3 et 7 ; il dit avoir traité la question au chapitre XIIII du Livre I de son *Grand Art*.

Or c'est le chapitre intitulé *La division des raisons*, dont la teneur semble réduite à la première lecture. Après avoir introduit le chapitre en soulignant l'intérêt, pour la division des raisons, de la technique d'insertion des moyennes proportionnelles, Gosselin résout l'insertion entre deux nombres donnés, d'une moyenne proportionnelle, puis celle de deux moyennes proportionnelles. Avec les deux outils dont il dispose alors, il traite, de manière inégalement rigoureuse, l'insertion de trois, quatre et cinq moyennes proportionnelles. Il termine le chapitre en résolvant deux problèmes :

- le partage de 10 en deux parties dont la moyenne proportionnelle est 4
- la recherche pour trois nombres donnés de leur quatrième proportionnelle.

Le premier problème semble être l'extrait du chapitre le plus proche de nos préoccupations.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \sqrt{xy}=4 \end{cases}$$

$$4^2 < \left(\frac{10}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=4^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 4^2 = 3^2 \qquad (2)$$

$$5+3=8$$

$$5-3=2$$

$$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$$

Problème.

Partageons 10 en deux parties, de façon que 4 soit le nombre milieu proportionnel entre elles. Or il faut que le quarré de ce nombre, soit moindre que le quarré de la moitié du nombre 10 qu'on se propose de diviser. De fait ceci n'est rien d'autre que diviser 10 en deux parties, de façon que multipliées l'une par l'autre elles fassent 16 quarré de 4, et voici ce que commande la cinquième proposition du second <Livre> d'Euclide, nous calculerons le quarré de la moitié de 10, c'est-à-dire de 5, bien sûr 25, nous en retrancherons 16 quarré de 4, resteront 9, dont le côté-Quarré est 3, nous ajouterons 3 à 5, ils feront 8, la partie majeure évidemment, nous enlèverons 3 de 5, il restera la partie mineure 2, et entre 2 & 8 s'intercale 4 le nombre milieu proportionnel[30].

---

[28] Nous avons fait le choix, pour la traduction, de garder les notations latines de Gosselin : Q pour Quadratus, le carré inconnu, et L pour Latus, le côté inconnu (du carré inconnu).

[29] GOSSELIN G., *op. cité*, p. 59.

[30] *Ibid.*, p. 19.

Cette démarche calculatoire confirme l'influence de Diophante, que Gosselin connaît, comme l'atteste le titre complet de son traité[31]. Pour trouver les deux nombres de somme 10 et de produit 16, Gosselin calcule le carré de leur demi-différence en retranchant leur produit du carré de leur demi-somme. Il obtient alors le grand nombre en ajoutant la demi-différence à la demi-somme, le petit en retranchant la demi-différence de la demi-somme. C'est bien ainsi que Diophante procède pour la résolution du problème XXVII. Quant à la référence à la proposition (II, V) des *Eléments* d'Euclide que Gosselin fait ici, elle nous avait semblé naturelle dans la présentation du problème XXVII, tant pour soutenir le calcul (2), que pour illustrer la condition (1).

Donc, on identifie bien ici la technique de calcul de Diophante pour le partage d'une somme en deux parties dont on connaît le produit, mais cette observation reste vraisemblablement incomplète, pour deux raisons :

~ La place de la question du partage dans le chapitre sur *La division des raisons* ne s'en trouve pas éclaircie.

~ La façon dont Gosselin traite, dans le chapitre sur *L'équation seconde*, en application du troisième algorithme, la recherche de deux nombres connaissant leur somme et la somme de leurs carrés est trop différente de la résolution du problème XXVIII par Diophante, pour ne pas suggérer une préoccupation propre à Gosselin. Nous y reviendrons.

La remarque que fait Gosselin en achevant la résolution du problème I ouvre une piste inattendue. Il souligne que son calcul est beaucoup plus simple que celui de Peletier, qui traite la même question comme exemple de problème à plusieurs inconnues, au chapitre XXX du premier livre de son *Algebre*.

Exemple V.

Il y a deux nombres, lesquels soustraicts de leurs quarrés, laissent 48 : & adjoustés au produit de la multiplication des deux l'un par l'autre, font 31 : Qui sont ces deux nombres[32] *?*

De fait, Peletier introduit trois inconnues pour résoudre ce problème : 1, la racine de l'équation résolvante, de carré 1, pour le premier nombre cherché, 1A pour le second nombre cherché, et 1B pour la somme des deux nombres. Nous ne nous attarderons pas ici sur cet aspect des choses, quoique fort intéressant en soit[33].

Avant d'entamer la résolution, Peletier rappelle *deux reigles de l'Algebre, la quatrieme proposition du second livre d'Euclide*, puis

[...] que deux nombres multipliés l'un par l'autre, produisent le milieu proportional entre leurs deux quarrés. Comme, 4 multipliés par 5, font 20 : qui sera milieu proportional entre 16 & 25[34] *[...]*

---

[31] Gosselin y annonce la présentation d'équations de Diophante.

[32] PELETIER DU MANS J., *Algebre*, 1554, réédition Jean de Tournes, 1620, p. 112.

[33] RADFORD L., « L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 81 à 98.

[34] PELETIER DU MANS J., *op. cité*, p. 113.

renvoyant, *pour demonstrance oculaire* de la propriété, à la figure de la proposition (II, IV) des *Eléments* d'Euclide, sur laquelle nous avons plus haut mis en évidence cette proportionnalité.

Pour la résolution elle-même, Peletier établit d'abord, comme Gosselin, et sans que ses calculs ne présentent de particularité importante pour notre sujet, que la somme des nombres fait 10 et que le produit de l'un par l'autre vaut 21. Mais l'exploitation de ce résultat partiel est à première vue différente chez l'un et l'autre auteurs. La technique de Gosselin, qui consiste à renvoyer au chapitre sur *La division des raisons*, nous a d'emblée intrigués. La méthode de Peletier, que nous allons détailler maintenant, a également de quoi surprendre puisqu'elle comporte la résolution d'une équation bicarrée.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 48 \\ xy + x + y = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = x + y = 10 \\ xy = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 48 + 10 = 58 \\ x^2 y^2 = 21^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 58 - x^2 \\ x^2\left(58 - x^2\right) = 441 \end{cases}$$

$$x^2 x^2 = 58x^2 - 441$$

$$x^2 = 49 \quad \text{ou} \quad x^2 = 9$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$$

Donc, puis que je sçay que 1B fait 10 : par mesme moyen, je sçay que le suppliment, qui est 31 m.1B, fera 21 : & les deux quarrés, sçavoir est, 48 p.1B, feront 58. Donc le second quarré, qui est 48 p.1B m.1Ç fera 58 m.1C. Or, par ce que 21 est milieu proportional entre 1C & 58 m.1C, il s'ensuit qu'en multipliant 1C par 58 m.1C le produit, qui est 58C m.1CC, sera egal au quarré de 21 : sçavoir est à 441. Et par deuë transposition, 1CC sera egal à 58C m.441[35]*. Duquel premierement faut tirer la R censique : c'est 49, pour la plus grande (car il y en a deux, à cause du signe m.) & la moindre sera 9. Donc, si vous prenez la R de 49 : vous aurez 7, pour le plus grand de vos deux nombres : Et le moindre sera 3 (car tous deux font 10.) Ou bien, si vous prenez la R de 9 : vous aurez 3 pour le moindre nombre : & le plus grand sera 7.*

Cette question est belle [...]. Elle est de Stifel, seulement les nombres changés[36]*.*

Remarquons que Peletier va jusqu'au bout de la résolution, et exploite les deux racines de l'équation bicarrée. Mais, compte tenu du degré de l'équation, nous sommes encore loin de l'équivalence visée entre la recherche de deux nombres de somme et de produit donnés, et la résolution de l'équation quadratique associée.

Ainsi le développement de Peletier nous éclaire sur la nature de la simplification apportée par Gosselin : il s'agit, en termes modernes, d'un abaissement du degré algébrique du problème. Le résultat déjà évoqué, par lequel Gosselin ouvre le chapitre sur *La division des raisons*, y apporte une contribution simple mais déterminante :

Deux nombres étant donnés, trouver une moyenne proportionnelle.

Cherchons la moyenne proportionnelle entre 4 & 9. Nous multiplierons 4 par 9, cela fera le nombre 36, dont le côté-Quarré est 6, le nombre demandé, tel que la raison de 4 à 6 soit la même que de 6 à 9. Trouvons la moyenne

---

[35] Peletier écrit les équations à la manière de Michael Stifel (1487-1567), en isolant le terme de plus haut degré, ce qui suppose de s'être familiarisé avec les coefficients négatifs. Il résout donc les équations quadratiques en appliquant la règle AMASIAS que Stifel a mise au point, et qu'il a décrite au chapitre IIII du livre III de son *Arithmetica integra*, (Nuremberg, 1544). C'est ce qui explique à la ligne suivante la référence au signe de (–441). La règle AMASIAS est présentée dans la rubrique « Conte du lundi » de cette brochure.

[36] PELETIER DU MANS J., *op. cité*, p. 115.

proportionnelle entre 5 & 7. Nous multiplierons 5 par 7, ils feront 35, & le côté de 35 est le nombre demandé, et la démonstration est évidente d'après la vingtième proposition du sixième <Livre> d'Euclide[37].

$\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ xy = 21 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = 58 \\ x^2y^2 = 21^2 \end{cases}$ Peletier énonce et exploite que le produit de deux nombres est la moyenne proportionnelle entre leurs carrés.

$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 4^2 \end{cases}$ Gosselin rappelle que la moyenne proportionnelle entre deux nombres est la racine carrée de leur produit.

L'un et l'autre auteurs expriment en termes de proportionnalité la propriété que le produit est connu. Plus rien d'étrange alors au fait que Gosselin place, à la fin du chapitre sur *La division des raisons*, la question du partage d'un nombre en deux parties de moyenne proportionnelle donnée, et qu'il y renvoie pour le partage d'une somme en deux nombres de produit donné.

A ce stade de l'étude, nous avons donc confirmation que Gosselin, s'il maîtrise la technique calculatoire du partage, ne recense pas le problème parmi ceux qui se résolvent par équation quadratique (de type III). Au contraire, la technique du partage est apparue, à la fin du problème I, comme un outil pour la résolution des équations quadratiques elles-mêmes ; et le rôle de cette technique reste exemplairement ambigu dans la démonstration arithmétique que Gosselin donne du troisième algorithme. Nous proposons des extraits de ce texte, suffisants pour montrer ce qui n'est pas dit ~pour aucune de ses démonstrations arithmétiques, Gosselin n'explicite la confrontation des valeurs issues de la démonstration, aux valeurs des racines que fournirait l'algorithme~ et nous résumons les étapes de la démarche, en termes actuels :

$32 + x^2 = 18x$

Soient 32 P 1Q égaux à 18L, ou bien le côté inconnu est plus grand que 18, ou égal, ou plus petit, on démontre qu'il n'est ni plus grand, ni égal, [...] il reste donc que le côté inconnu est plus petit que 18, soit précisément le nombre B & ainsi le nombre B multiplié par 18 sera égal au Quarré du nombre B, c'est-à-dire à B multiplié par B, & 32, [...] resteront 32 égaux au produit de B par 18 M B, or parce que le nombre 18 a été séparé en B & 18 M B, il s'ensuit que 32 est le nombre produit d'une partie de 18 par l'autre. Maintenant donc nous séparerons 18 en deux parties de sorte que le produit de l'une par l'autre soit 32 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier <du Grand Art>, et les parties seront 2 & 16, & l'une et l'autre sont la valeur du côté inconnu[38].

$x = B$

$B.B + 32 = B.18$

$B.B + 32 = B.(B + 18 - B)$

$B.B + 32 = B.B + B.(18 - B)$

$32 = B.(18 - B)$

$\left(\frac{18}{2}\right)^2 - 32 = 7^2$

$9 + 7 = 16$

$9 - 7 = 2$

---

[37] GOSSELIN G., *op. cité*, p. 16. Les éditions des *Eléments* d'Euclide auxquelles nous faisons référence suggèrent plutôt un renvoi aux propositions XVI et XVII du Livre VI.

[38] GOSSELIN G., *op. cité*, p. 62.

En démontrant que résoudre l'équation $x^2 + 32 = 18x$, c'est partager 18 en deux parties de produit 32, Gosselin prend-il réellement conscience de la signification qu'ont les deux racines des équations de type III ? La réponse est incertaine, comme en témoigne la lecture du problème III ; lequel résout, aux valeurs numériques près, la même question que le problème XXVIII de Diophante.

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17 - y \\ 2y^2 - 34y + 289 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 17 - y \\ y^2 + 60 = 17y \end{cases}$$

$y = 5$ ou $y = 12$

Utilisation du troisième Algorithme. Problème <III>.

[...]

Partageons 17 en deux parties de sorte que la somme des Quarrés soit 169. Nous aurons alors posé que l'une des parties est 1L, donc l'autre 17 M 1L, la somme des Quarrés est 2Q M 34L P 289 égale à 169, de part et d'autre retranchons 169 & ajoutons 34L, ils feront 34L égaux à 2Q P 120 et de plus la moitié sera égale à la moitié, c'est-à-dire 17L égaux à 1Q P 60, et ainsi l'équation relève de ce dernier algorithme, [...] il en résulte les parties 5 & 12 comme précédemment[39].

Belle aisance apparente : Gosselin cherche deux nombres de somme 17 et les obtient comme racines de l'équation quadratique de type III, $y^2 + 60 = 17y$. Un indice troublant pourtant : les racines fournies par l'algorithme sont précipitamment adoptées, *comme précédemment.* Il nous faut donc examiner ce qui précède, la première partie du texte que nous avons d'abord omise, dans la présentation du problème III :

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 7 \\ (y + 7)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 7 \\ 2y^2 + 14y + 49 = 169 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = y + 7 \\ y^2 + 7y = 60 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 5 + 7 = 12 \end{cases}$$

Cherchons deux nombres dont la différence soit 7, & tels que leurs Quarrés ajoutés soient égaux au Quarré de 13 c'est-à-dire à 169. Posons que l'un des nombres est 1L, l'autre sera donc 1L P 7, leurs Quarrés sont 1Q, & 1Q P 14L P 49, leur somme est 2Q P 14L P 49 égale à 169, retranchons 49 de part et d'autre, resteront 2Q P 14L égaux à 120, donc la moitié sera égale à la moitié, évidemment 1Q P 7L égaux à 60, et ainsi l'équation relève du premier algorithme, procède selon celui-ci & tu trouveras que la valeur du côté est 5, & l'autre nombre 7 P 5 évidemment 12, cela va sans dire[40].

Ainsi, avant de traiter le problème qui conduit à une équation de type III, Gosselin résout dans le genre 'variation sur des valeurs numériques communes', un problème qui met en œuvre une équation de type I dont la racine unique fournit les nombres cherchés sans ambiguité ; il peut alors les adopter, sans risque d'erreur ou de contestation, comme solution du problème III.

---

[39] *Ibid.*, p. 63.
[40] *Ibid.*

En conclusion, Gosselin conduit une étude sérieuse et fouillée sur la résolution des équations quadratiques, mais il faut bien convenir qu'il paraît circonspect devant les équations de type III, et ceci, d'autant plus que la technique du partage reste un outil indépendant.

Stevin, quelques années plus tard, pose avec précision la question restée en suspens. Dans son *Arithmétique* écrite en français (Leyde, 1585), il consacre le problème LXVIII à la résolution des équations quadratiques à trois termes. Pour lui qui, à la manière de Stifel, s'est familiarisé avec les coefficients affectés d'un signe –, et qui, à la manière de Rafael Bombelli (1526–1573), a adopté l'écriture numérotée des puissances de l'inconnue, les équations quadratiques expriment toutes l'égalité d'un terme carré et d'un binôme ordonné du premier degré. Si Stevin distingue encore les trois équations que, en écriture symbolique actuelle, nous écrivons :

$x^2 = 4x + 12$	ou *premiere difference*
$x^2 = -6x + 16$	ou *deuxiesme difference*
$x^2 = 6x - 5$	ou *troisiesme difference*[41]

c'est, dit-il, uniquement par souci de les décrire, puisque leur résolution numérique se formule en une règle unique.

La règle « unique » est trois fois détaillée sous l'intitulé *Construction* ; les nombres obtenus font alors l'objet d'une vérification systématique dans la *Demonstration Arithmetique* ; suit pour chacune des trois « differences », une *Construction Geometrique*, essentielle au propos de Stevin, puisqu'il a l'ambition de montrer que les grandeurs géométriques et les grandeurs numériques sont susceptibles des mêmes traitements. Il ne calcule toujours que les racines positives.

Sans nous appesantir, dans le cadre de cet article, sur la formulation propre à Stevin, pour qui la recherche du nombre inconnu s'apparente à une recherche de quatrième proportionnelle, nous donnons sa conclusion après le calcul des racines de la troisième différence :

$$\frac{1x^2}{6x^1 - 5} = \frac{1x^1}{?}$$

$$?x,\ x^2 = 6x - 5$$

Explication du donné. Soyent donnez trois termes selon le probleme, tels : le premier 1(2), le second 6(1)–5, le troisiesme 1(1). Explication du requis. Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.

[...] Je di que & 5 & 1 est le quatriesme terme proportionel requis[42].

Il revient en fin de chapitre sur la signification de *la double solution de cette troisiesme difference*, et, pour persuader ses lecteurs que les deux racines ont du sens, il choisit l'exemple le plus probant qui soit, la résolution d'un partage de somme en deux nombres de produit donné :

---

[41] STEVIN S., *Arithmétique*, Leyde, 1585, p. 285.
[42] *Ibid.*, p. 293.

NOTA 2. Quelqu'un pourroit doubter, que veult signifier la double solution de cette troisiesme difference (qui se peuvent rencontrer, comme en aucuns exemples suivans en six diverses sortes) & comment l'une & l'autre pourra estre bonne. Or combien que cecy apparoistra assez en diverses exemples d'algebre suivans ; Toutesfois pour ceux qui ce pendant pourroyent estre en doubte, nous en dirons icy quelque chose. Posons le cas, qu'il y a proposé de partir 6 en deux parties telles, que leur produict soit 8. On trouvera par la premiere maniere que l'une nombre requis sera 4, & par l'autre maniere, se trouvera 2. Mais que l'un & l'autre solution soit bonne, est manifeste. Car si on dict que l'un nombre est 4, doncques soubstraict 4 de 6, reste 2 pour l'autre nombre, lesquels 4 & 2 donnent produict selon le requis 8. Ou si on dict par la seconde maniere, que l'un nombre est 2, ergo soubstraict 2 de 6 reste 4 pour l'autre nombre, lesquels 2 & 4 donnent le mesme produict requis 8. En cette question doncques & semblables voit on l'usage de cette double solution[43].

La mise en équation n'est pas explicitée dans la note, mais le texte ne laisse pas de doute. Le partage de 6 en deux parties telles que leur produit soit 8 se résout en posant que l'une des parties est l'inconnue x ; l'autre est alors $6 - x$ et le produit des deux, $x(6 - x)$ vaut 8 ; l'équation quadratique $x^2 = 6x - 8$ admet les deux racines 4 et 2. Chacune séparément fournit entièrement la solution du problème à deux inconnues ; c'est ce que Stevin met en évidence ; ce faisant, il fait *voir l'usage de la double solution* qui, d'**un** coup, donne les **deux** parties cherchées.

Nous sommes ici au cœur de la question. Nous avons vu Gosselin mettre au point la technique du partage indépendamment de la résolution des équations quadratiques, mais transformer précautionneusement en un problème de partage la résolution d'une équation de type III. Stevin, dans le passage que nous venons de lire, montre inversement que les nombres du partage sont les racines d'une équation de type III, évidemment l'équation résolvante de l'introduction, et sa note constitue une phase repérable du rapprochement des deux problèmes.

Comment Viète franchit-il l'étape décisive ? Nous savons déjà que, travaillant sur une figure euclidienne et exploitant une configuration qui nous a semblé présente dans le texte de Diophante, il n'écarte aucune des contraintes que comporte l'héritage des Anciens.

A l'instar de ses prédécesseurs, il ne recherche toujours que les racines positives des équations quadratiques ; or historiquement, cette restriction a pu retarder l'intuition du lien entre les problèmes à deux inconnues et la résolution des équations quadratiques, pour la raison que celles-ci ont, de fait, plus souvent une unique racine (positive) que deux. Quant à la configuration de proportionnalité sur laquelle Viète fonde sa démonstration, elle n'est pas en soi garantie d'innovation : nous avons noté que c'est, pour une part, l'attachement de Gosselin à la moyenne proportionnelle qui explique la place à part dans son ouvrage, du problème du partage.

Le saut opéré par Viète, c'est la transcription algébrique de la situation géométrique : l'écriture symbolique des propriétés géométriques considérées provoque la visualisation de la structure du problème.

---

[43] *Ibid.* p. 297.

III. La solution de Viète

Quelques problèmes des *Zététiques*

Sans entrer ici dans les distinctions importantes mais délicates qu'exprime la terminologie adoptée par Viète, nous dirons seulement que les zététiques sont des problèmes, du grec $\zeta\eta\tau\varepsilon\omega$, *chercher.* Les *Cinq livres de Zététiques* constituent la troisième partie de l'*Algèbre Nouvelle*, vaste ouvrage pour lequel Viète prévoyait dix parties (nous disposons de sept d'entre elles), destinées à mettre en pratique, en géométrie et en algèbre, la méthode de représentation littérale qu'il avait élaborée.

Le zététique I du Livre I

Du Livre I, nous ne retiendrons pour notre travail, que le zététique I, préliminaire essentiel, puisqu'il permet de ramener, chaque fois que c'est possible, la recherche de deux nombres à celle de leur différence et de leur somme. Le texte en est simple et tout de même exemplaire du style de Viète ; le vocabulaire est géométrique, les consonnes sont utilisées pour représenter les grandeurs données et les voyelles désignent les inconnues.

Etant donné la différence des deux côtés, & leur somme, trouver les côtés.
Soit donnée B la différence des deux côtés, & donnée aussi D leur somme. Il faut trouver les côtés.
Que le petit côté soit A, ainsi le grand sera A+B. D'où la somme des côtés deux fois A+B. Laquelle donnée est D. C'est pourquoi deux fois A+B égale D. Et par antithèse, deux fois A égale D–B, & tous étant divisés par deux, A égalera la moitié de D, moins la moitié de B.
Ou bien, que le grand côté soit E. Ainsi le petit sera E–B. D'où la somme des côtés deux fois E, moins B. Laquelle donnée est D. C'est pourquoi deux fois E moins B égalera D. & par antithèse, deux fois E égalera D+B, & tous étant divisés par deux E égalera la moitié de D, plus la moitié de B.
Ainsi étant donné la différence des deux côtés & leur somme on trouve les côtés. En effet La moitié de la somme des côtés diminuée de la moitié de la différence est égale au petit côté, augmentée de la même chose, au grand. *Cela même que montre l'exemple.*

Soit B 40. *D 100.* *A fait 30.* *E 70.*[44]

Les zététiques III et IIII du Livre II

Les zététiques II à VIII du Livre II se présentent comme une variation sur les valeurs 2 et 10 qu'il faut trouver en calculant leur différence 8 et leur somme 12, grâce à la donnée de deux des cinq valeurs des produit, somme des carrés, différence, somme, ou différence des carrés, des deux nombres « inconnus ».

Pour la recherche, au zététique II, de deux nombres dont on connaît le produit et la somme des carrés, Viète souligne la symétrie des rôles joués par la somme et la différence des nombres. Il explique :

Et en effet le double du plan sous les côtés s'il est ajouté à la somme des quarrés est égal au quarré de la somme des côtés. Mais retranché, au quarré de leur différence[45].

---

[44] VIETE F., *Zeteticorum libri quinque*, Tours, 1593, p. 1. Traduction des extraits par O.Kouteynikoff.
[45] *Ibid.*, p. 7.

Soit en termes actuels :

$$\left(x^2 + y^2\right) + 2xy = (x+y)^2 \text{ et } \left(x^2 + y^2\right) - 2xy = (x-y)^2$$

Les problèmes qui suivent sont groupés de façon à accentuer ce balancement somme-différence. Les zététiques III et IIII résolvent les deux problèmes dont nous suivons la trace : la recherche de deux nombres connaissant leur produit et leur différence puis leur somme. Ce sont les répliques, aux valeurs numériques près, des problèmes XXX et XXVII du Livre I des *Arithmétiques* de Diophante. Les zététiques V et VI résolvent la recherche de deux nombres connaissant la somme de leurs carrés et leur différence puis leur somme. Les zététiques VII et VIII enfin, résolvent la recherche de deux nombres connaissant la différence de leurs carrés et leur différence puis leur somme.

Les zététiques VI et VIII reprennent donc les problèmes XXVIII et XXIX des *Arithmétiques* de Diophante, que nous avons examinés plus haut. Mais à la différence de Diophante, Viète, l'inventeur de l'algèbre moderne, obtient la différence des nombres cherchés au zététique VIII, comme quotient de la différence de leurs carrés par leur somme, sans aucune référence géométrique même implicite.

Le zététique III

Etant donné le rectangle sous les côtés & la différence des côtés on trouve les côtés.

Et en effet le quarré de la différence des côtés ajouté au quadruple du rectangle sous les côtés est égal au quarré de la somme des côtés.

On a en effet déjà la règle, que le quarré de la somme des côtés moins le quarré de la différence égale le quadruple du rectangle sous les côtés, de sorte qu'il est besoin d'une seule antithèse. Ayant déjà la différence des deux côtés et aussi leur somme on a les côtés.

Soit 20 le rectangle sous les deux côtés dont la différence est 8. Que la somme des côtés soit 1N[46]*. 1Q égale 144.*

Le zététique IIII

Etant donné le rectangle sous les côtés & la somme des côtés on trouve les côtés.

Et en effet le quarré de la somme des côtés, moins le quadruple du rectangle sous les côtés, est égal au quarré de la différence des côtés.

Ce que à nouveau à partir de la règle qui vient d'être redonnée il est permis de produire par antithèse.

Soit 20 le rectangle sous les deux côtés dont la somme est 12. Que la différence des côtés soit 1N. 1Q égale 64.[47]

Soit en termes actuels :

la première règle $(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy$

par transposition $(x+y)^2 = (x-y)^2 + 4xy$ (i)

qui permet de calculer le carré de la somme des nombres en fonction de leur produit et de leur différence,

---

[46] *N* désigne la quantité très temporairement inconnue qu'on obtient par son carré *Q*.

[47] VIETE F., *op. cité*, p. 7.

par nouvelle transposition $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$ (ii)

qui permet de calculer le carré de la différence des nombres en fonction de leur produit et de leur somme.

Nous allons trouver dans les *Effections géométriques* des constructions dont le canevas est déjà lisible sur les relations (i) et (ii).

L'ALGEBRE
EFFECTIONS
Geometriques, & partie de l'Exegetique nombreuſe de l'Illuſtre F. Viete.

Traduites de Latin en François, ou eſt adjouté des notes & Commentaires, & quantité de Problemes Zetetiques.

Par N. DVRRET, Coſmographe ordinaire du Roy.

A PARIS.
Aux deſpens de l'Autheur, chez lequel ils ſe vẽdent, & chez Geruais Alliot, au Palais, pres la Chapelle S. Michel, & chez la vefue Moreau rue S. Jacques au Globe.

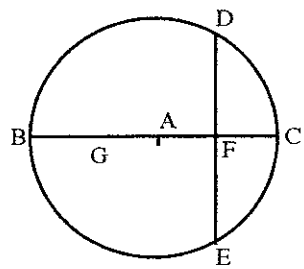
M. DC. XLIV.
Avec Privilege du Roy.

Quelques propositions des *Effections géométriques*

Parmi les nombreux traducteurs et adaptateurs des travaux de Viète qui œuvrent au début du XVII[e] siècle, figure le cosmographe Noël Durret (1590–1650). Dans son *Algèbre* (Paris, 1644), il présente des parties importantes de l'*Algèbre nouvelle* de Viète ; la traduction française qu'il donne des *Effections géométriques* étant complète et fidèle[48], c'est de son texte que nous tirons les extraits cités.

Dans les six premières propositions des *Effections géométriques*, Viète rappelle des « effections canoniques » ; à partir de la proposition 7, il explique des effections *pas entierement régulieres, & toutesfois recommandables, à cause de leur frequent usage.* Nous ne lirons pas les propositions 1 et 2 qui donnent les *practiques de l'addition et de la soustraction.* La proposition 3 est incontournable, et difficilement séparable des propositions 5 et 6 ; l'ensemble est exemplaire de l'utilisation libre et panachée que fait Viète des différentes propositions des Livres II et VI des *Eléments* d'Euclide. Les propositions 9 à 13 constituent la contribution originale de Viète à la question que nous étudions.

La proposition 3



Descrire trois lignes droites proportionnelles.
Du centre A, de quelconque intervalle soit décrit un cercle, & soit mené le diametre BAC. Soient prises en parties contraires les arcs égaux CD, CE, & que DE conjointe coupe BC en F. Je dy qu'on a fait ce qu'il a fallu. Car BF, FD, FC sont proportionnelles[49].

Ce texte présente la configuration qui a retenu notre attention à la lecture de la proposition XIV du Livre II des *Eléments* d'Euclide, appelée *description canonique des trois proportionnelles* par Viète quand il y fait référence ensuite. Il s'agit ici de sa part d'un simple rappel pratique : un cercle, un diamètre et, en langage actuel, une « corde admettant le diamètre comme axe de symétrie » ; pas de référence théorique[50].

Les propositions 5 et 6

Ce sont des reconstitutions de la figure précédente, des constructions de la troisième grandeur quand deux sont données, les deux extrêmes, ou la moyenne et une extrême.

Pour FB et FC donnés, la proposition 5 construit le produit $FB.FC = FD^2$.

Pour FB et FD donnés, la proposition 6 construit le quotient $FC = \frac{1}{FB} . FD^2$.

---

[48] Voir LEFEBVRE J., « L'Algèbre de Noël Durret », in *Actes de la 6[e] Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, IREM de Franche-Comté, Besançon, 1995, p. 155.

[49] DURRET N., *L'Algebre, Effections geometriques, & partie de l'Exegetique nombreuse de l'Illustre F. Viete*, Paris, 1644, p. 86.

[50] Pour une démonstration « très programme », qui n'est aucune de celles d'Euclide, il suffit de développer le carré $BC^2 = (BF + FC)^2$, puis d'écrire l'égalité de Pythagore dans les triangles BDC, BFD et CFD. L'égalité $FD^2 = FB.FC$ en résulte.

La proposition 5

Estant données deux lignes droites, trouver la moyenne proportionnelle entre icelles.

C'est la practique de la multiplication. Car il a esté enseigné que le plan des extremes est égal au quarré de la moyenne.

Soient en la figure précédente les deux lignes droites données BF, FC, & il faut trouver la moyenne proportionnelle entre icelles.

Soit continuée BF de la longueur de FC, & coupée BC en deux également au poinct A. Et du centre A, de l'intervalle AB, ou AC soit descrit un cercle, & du point F soit élevée FD perpendiculaire à BC coupant la circonférence en D. Je dy qu'on a fait ce qui estoit requis.

Car DF est la moyenne requise, comme il est évident par la description canonique des trois proportionnelles.

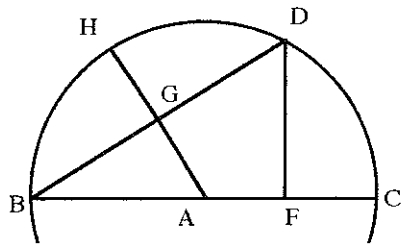
Ainsi l'on donne un quarré égal à un plan donné[51].

Viète reproduit fidèlement la construction deux fois décrite par Euclide, et prend la liberté de proposer *simultanément* les deux registres d'interprétation :

~ le carré de la grandeur construite est égal au produit des deux grandeurs données, (proposition XIV du Livre II des *Eléments*)

~ la grandeur construite est la moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs données, (proposition XIII du Livre VI).

La proposition 6



Estant données deux lignes droites, trouver la troisiesme proportionnelle. C'est la practique de l'application ou division. Car cela est appliquer un plan donné ou un quarré <égal>[52] *à un plan à une ligne droite ; & monstrer la latitude qui en vient.*

C'est à dire qu'on applique le quarré de la moyenne à la premiere, & il en vient la troisiesme.

Soit les deux lignes droites données BF, FD. Il faut trouver la troisiesme proportionnelle. Soient inclinées à angles droites BF, FD, & soit menée BD, laquelle soit coupée à angles droites par la droite AH, coupant la mesme BD en G, & BF en A. Et du centre A, de l'intervalle AB, ou AD, soit descrit un cercle, à la circonférence duquel soit prolongée BF, jusqu'en C. Je dy qu'on a fait ce qui a esté proposé. Car FC est la troisiesme proportionnelle requise aux données BF, BD, comme il est evident par la description canonique des trois proportionnelles[53].

---

[51] DURRET N., *op. cité*, p. 87 et 88.

[52] La correction est faite d'après : VIETE F., *The analytic art*, translated by T. Richard Witmer, Kent State University Press, Kent, 1983.

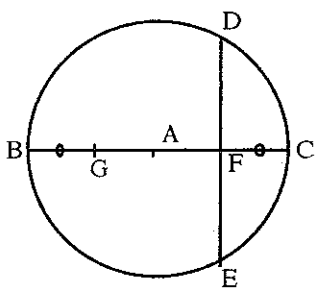
[53] DURRET N., *op. cité*, p. 89.

L'algébriste Viète ne retient pas ici la construction de la troisième proportionnelle[54] proposée par Euclide à la proposition XI du Livre VI. Parce qu'il a le souci de donner la technique de la division après avoir donné celle de la multiplication, celui de construire le quotient-droite d'une grandeur-plane par une grandeur-droite après avoir construit le produit-plan de deux grandeurs-droites, il donne pour les propositions 5 et 6 des constructions qui se répondent.

A noter une certaine imprécision des consignes, bien faite pour nous rappeler que la rigueur est une qualité toute relative, fonction du niveau de développement du cadre théorique, de la richesse des modes d'expression disponibles, et des exigences que l'on se fixe.

Les propositions 9, 10, 11

Les propositions 9, 10 et 11 ne sont pas des constructions. En mettant en jeu la somme et la différence des extrêmes, Viète fait émerger de la situation de proportionnalité initiale des relations d'égalités entre grandeurs planes, carrés ou rectangles : relations encombrantes dans leur formulation rhétorique, mais susceptibles d'une écriture algébrique simple qui leur donne leur forme d'équations quadratiques. Elles établissent trois résultats similaires, dont nous donnons les énoncés, et, en langage actuel, un schéma démonstratif.



Nous savons que :

$FB \cdot FC = FD^2$ (1)

$FB + FC = BC$ (2) & $FB - FC = FG$ (3).

Les égalités (2) et (3) permettent d'écrire :

$FB = BC - FC$ (2') & $FC = BC - FB$ (2"),

$FB = FG + FC$ (3') & $FC = FB - FG$ (3"),

respectivement.

En remplaçant, dans la relation fondamentale $FB \cdot FC = FD^2$, chaque extrême FB (colonne (')) ou FC (colonne (")) par son expression en fonction de la somme BC (ligne (2)) ou de la différence FG (ligne (3)), nous obtenons les résultats que Viète énonce ainsi :

Proposition 9

S'il y a trois lignes droites proportionnelles, le quarré de la moindre extreme adjoint au rectangle sous la différence des extremes & la mesme mineure extreme est égal au quarré de la moyenne[55].

(1) et (3') $\Rightarrow$ $(FG + FC) \cdot FC = FD^2 \Rightarrow$ $FG \cdot FC + FC^2 = FD^2$ (Prop. 9)

Proposition 10

S'il y a trois lignes droites proportionnelles, le quarré de la majeure extreme diminué du rectangle sous la différence des extremes, & sous la mesme majeure extreme, est égal au quarré de la moyenne[56].

(1) et (3") $\Rightarrow$ $FB \cdot (FB - FG) = FD^2 \Rightarrow$ $FB^2 - FB \cdot FG = FD^2$ (Prop. 10)

---

[54] C'est une construction de triangles semblables.

[55] DURRET N., *op. cité*, p. 94.

[56] *Ibid.* p. 96.

Proposition 11

S'il y a trois lignes droites proportionnelles, le rectangle sous la composée des extremes, & de l'une de celles-cy majeure ou mineure, diminué du quarré de la mesme extreme, est égal au rectangle sous les extremes[57].

(1) et (2') $\Rightarrow$ $(BC-FC) \cdot FC = FD^2 \Rightarrow BC \cdot FC - FC^2 = FB \cdot FC$ (Prop. 11)

(1) et (2") $\Rightarrow$ $FB \cdot (BC-FB) = FD^2 \Rightarrow FB \cdot BC - FB^2 = FB \cdot FC$ (Prop. 11)

Il reste à comprendre les relations obtenues.

Si dans l'égalité $FG \cdot FC + FC^2 = FD^2$ (Prop.9),

nous posons $FC = a$, $FG = b$ et $FD = d$,

il vient $ba + a^2 = d^2$, équation quadratique de type I.

Il apparaît alors que chercher a connaissant b et d, c'est chercher FC connaissant FG et FD.

De même pour l'égalité $FB^2 - FB \cdot FG = FD^2$ (Prop. 10),

en posant $FB = a$ et, à nouveau, $FG = b$ et $FD = d$,

nous obtenons $a^2 - ab = d^2$, équation quadratique de type II,

et chercher a connaissant b et d, c'est chercher FB connaissant FG et FD.

Ainsi la résolution d'une équation de type I ou II s'interprète comme la recherche d'une extrême, la mineure ou la majeure, connaissant la moyenne proportionnelle et la différence des extrêmes. C'est ce qu'énoncent les textes par lesquels Viète achève le développement des propositions 9 et 10. On passe de l'un à l'autre par simple ajustement de termes et de notations. Voici la conclusion de la proposition 9 :

Parquoy quand on proposera a quarré, plus b en a estre égal à d quarré, on entendra d moyenne entre les extremes, b la différence d'icelles. Et de la moyenne & différence des extremes on cherchera les extremes, dont la moindre dont est question sera a.

Comme icy estant données GF, FD, on construira les proportionnelles BF, FD, FC, & FC sera la moindre requise. Comme on peut voir es Zetetiques, & que maintenant la figure géométrique le demonstre par la synthese, ou composition[58].

Cette dernière remarque entrouvre la question délicate des différents modes analytiques et synthétiques selon Viète : de façon très schématique, on peut dire que la démarche algébrique est analytique puisqu'elle procède par conditions nécessaires, en opérant sur des quantités inconnues comme si elles étaient connues et que la démarche géométrique est synthétique dans la mesure où elle donne à voir le problème résolu.

---

[57] *Ibid.* p. 98.

[58] *Ibid.* p. 95.

Les résultats de la proposition 11 s'interprètent de la même manière. Si dans les égalités :

$BC \cdot FC - FC^2 = FD^2$ ou $FB \cdot BC - FB^2 = FD^2$,

nous posons $BC = b$, $FD = d$

et $FC = a$ ou $FB = a$ respectivement,

nous obtenons, dans les deux cas, $ba - a^2 = d^2$

équation quadratique de type III, dont la résolution se ramène à la recherche de FB et FC connaissant FD et BC.

Ainsi toute équation de type III s'interprète comme la recherche de deux extrêmes connaissant leur moyenne proportionnelle et leur somme, ce que Viète formule ainsi :

Parquoy quand on proposera ba–aq ég. dq[59] *on entendra d moyenne entre les extremes, b l'aggregé des mesmes. Et de la moyenne & aggregé des extremes on cherchera les extremes, desquelles l'une ou l'autre dont est question sera a*[60].

Les trois résultats qui viennent d'être établis appellent les constructions que Viète décrit maintenant.

Les propositions 12 et 13

Ce sont à nouveau des reconstitutions de la figure de référence. Quand Viète construit les extrêmes connaissant leur moyenne et leur différence, il construit la racine des équations de type I et II ; quand il construit les extrêmes connaissant leur moyenne et leur somme, il construit les racines de l'équation de type III.

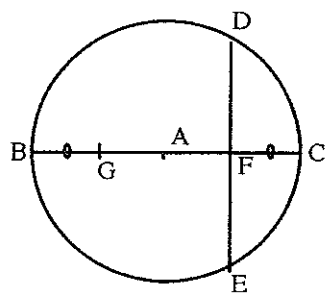
Proposition 12

Estant donnée la moyenne des trois proportionelles, & la différence des extremes, trouver les extremes.

Soit prise la fig. de la prop. 10.

[...] Soit donnée FD la moyenne des trois proportionelles, & GF la difference des extremes, il faut trouver les extremes.

Soient inclinées GF, FD à angles droits, & soit coupée GF en deux egalement en A. Et du centre A, de l'intervalle AD, soit décrit un cercle, à la circonference duquel soient prolongez AG, AF, és points B, C. Je dy qu'on a fait ce qui a esté requis. Car les extremes qu'il falloit trouver sont BF, FC, entre lesquelles la moyenne proportionelle est FD. Es icelles BF, FC different de la longueur de FG ; puisque AB & AC, ont esté construites egales. Parquoy ostant les egales AG, AF des egales AB, AC, les restes BG, FC sont egales. Et GF est la difference entre BF, & BG, ou FC. Ce qu'il falloit demonstrer[61].



$AF^2 + FD^2 = AD^2$ (i)

Le carré de la demi-somme AD s'obtient comme somme du produit FD^2 et du carré de la demi-différence AF, selon le schéma du zététique III.

[59] *aq* et *dq* abrègent les *a quarré* et *b quarré* de l'extrait précédent.
[60] DURRET N., *op. cité*, p. 100.
[61] *Ibid.* p. 101.

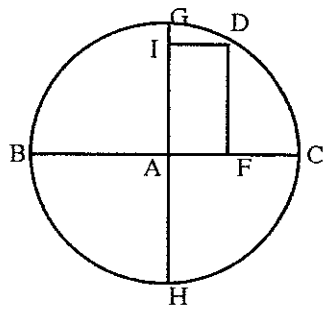
Proposition 13.

Estant donnée la moyenne des trois proportionelles, & l'aggregé des extremes, trouver les extremes.

[...] Soit donnée E la moyenne des trois proportionelles. Et BC l'aggregé des extremes, il faut trouver les extremes.

Soit coupée BC en deux egalement en A. Et du centre A, de l'intervalle AB ou AC soit décrit un cercle. Mais qu'un autre diametre GAH coupe le diametre BAC à angles droits, & de AG, soit retranché AI, egale à la ligne donnée E. Et par I, soit menée la droite ID parallele à BC, coupant la circonference au point D, duquel soit abbaissée la ligne DF perpendiculaire à BC, egale & parallele à IA.

Je dy qu'on a fait ce qui a esté requis. Car les extremes requises sont BF, FC, dont la composée est BC, donnée. Et se fait DF ou IA moyenne entre les proportionelles[62].



$AD^2 - FD^2 = AF^2$ (ii)

Le carré de la demi-différence AF s'obtient en retranchant le produit FD^2 du carré de la demi-somme AD, selon le schéma du zététique IIII.

C'est ainsi que sur une forme géométrique ancestrale, la représentation canonique de trois grandeurs proportionnelles, Viète met en jeu la somme et la différence des extrêmes, et, par là, obtient des relations géométriques nouvelles. En écrivant algébriquement ces relations nouvelles, il démontre que chercher les racines d'une équation quadratique, c'est chercher des grandeurs dont on connaît la moyenne donc le produit, et la somme ou la différence. Le résultat établi pourrait sembler partiel puisque Viète raisonne exclusivement sur des grandeurs positives ; ce résultat a pourtant, dans sa forme algébrique, la portée que nous lui connaissons actuellement.

En effet l'équation quadratique générale

$$x^2 + ax + b = 0$$

est susceptible de l'une ou l'autre écriture

$x(x + a) = -b$ (1) ou $x[(-a) - x] = b$ (2)

et résoudre l'équation sous la forme (1), c'est chercher des nombres dont on connaît le produit (–b) et la différence a ; la résoudre sous la forme (2), c'est chercher des nombres dont on connaît le produit b et la somme –a. Nous reconnaissons, exprimés de façon synthétique, les résultats rappelés dans l'introduction par le biais de démarches purement calculatoires de type analytique.

Cette correspondance fondamentale entre la recherche de **deux nombres** connaissant leur produit et leur somme ou leur différence, et la résolution d'une équation du second degré à **une inconnue**, qui n'entrait pas dans le champ des préoccupations de Gosselin, mais que Stevin entrevoyait, s'est imposée à travers les situations de proportionnalité que Viète a étudiées et que les relations (1) et (2) transcrivent.

---

[62] *Ibid.* p. 102.

Bibliographie

DIOPHANTE, *Les Arithmétiques*, traduction P. Ver Eecke, Brouwer, Bruges, 1926.

DURRET N., *L'Algebre, Effections geometriques, & partie de l'Exegetique nombreuse de l'Illustre F. Viete*, Paris, 1644.

EUCLIDE, *Les Œuvres*, traduction F. Peyrard, Paris, 1819, réédition Blanchard, Paris, 1993.

EUCLIDE, *Les Eléments*, traduction et commentaires B. Vitrac, P.U.F., Paris, 1994.

GOSSELIN G., *De Arte Magna* , Paris, 1577.

GREGOIRE M., « Dans nos classes : La section dorée dans les *Eléments* d'Euclide », in *Mnémosyne* n° 1, IREM de Paris VII, avril 1992.

GUILLEMOT M., « Un conte du lundi : A propos de Diophante d'Alexandrie », in *Mnémosyne* n° 14, IREM de Paris VII, juin 1998.

KLEIN J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, M.I.T. PRESS, Cambridge (Mass.), and London (Engl.), 1968.

KOUTEYNIKOFF O., « Aspects du rôle de la géométrie dans la construction de l'algèbre : Regard historique sur la résolution des équations du second degré », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 99 à 124.

LEFEBVRE J., « L'Algèbre de Noël Durret », in *Actes de la 6e Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, IREM de Franche-Comté, Besançon, 1995, p. 153 à 165.

PELETIER DU MANS J., *Algebre*, 1554, réédition Jean de Tournes, 1620.

RADFORD L., « L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 81 à 98.

STEVIN S., *Arithmétique*, Leyde, 1585.

STEVIN S., « Arithmétique » in *The Principal Works of Simon Stevin*, edited by D.J.Struik, Amsterdam, 1958, vol. II, p. 477 à 745.

STIFEL M., *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544.

TANNERY P., « De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide », in *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1882, réédition *Mémoires scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1912, t. I, p. 254 à 280.

VIETE F., *Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra Nova :*

3. Zeteticorum libri quinque, Tours, 1593

7. Effectionum geometricarum canonica recensio, Tours, 1593.

VIETE F., *The analytic art*, translated by T. Richard Witmer, Kent State University Press, Kent, 1983.

ZEUTHEN H.G., *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age*, Paris, 1902.