IREM
INSTITUT DE RECHERCHE POUR L'ENSEIGNEMENT DES MATHEMATIQUES

n°15

MAI 1999

M. : A. T. H.

MNEMOSYNE

UNIVERSITE DENIS DIDEROT
PARIS VII

Cette brochure est réalisée par l'IREM PARIS 7 DENIS DIDEROT avec le concours de la D.L.C., des MAFPEN de Paris, Créteil et Versailles.

Mnémosyne

personnification de la mémoire.

Elle s'unit à Zeus pendant 9 nuits de suite ;

de cette union naquirent les neufs Muses.

(Dictionnaire Robert des noms propres)

Illustration de la couverture : « **La mémoire** »

gravure allégorique d'après Gravelot (XVII^{e} siècle)

n°15

MAI 1999

MNEMOSYNE

M: *Mathématiques*

A. *Approche par les*

T. *textes*

H. *historiques*


MEMOIRE

SOMMAIRE

EDITORIAL

En ce printemps 1999, nous vous proposons un numéro d'algèbre centré sur le second degré.

Bien que la résolution numérique des équations du second degré à une inconnue soit pratiquée depuis la haute époque babylonienne, ces équations ont toujours gardé la même actualité. Elles sont au XVIème siècle un sujet sur lequel se penchent tous les nouveaux algébristes, lecteurs éclairés des textes grecs anciens, en quête de symboles et de règles.

Il s'agit pour le mathématicien français Guillaume GOSSELIN, en 1585, à la fois de valider les algorithmes numériques grâce à des propositions du second livre des *Eléments* d'Euclide, et de les appliquer à la résolution de problèmes. Nous présentons un chapitre de son *De arte magna* dans la rubrique « Bonnes Vieilles Pages ».

Le mathématicien et théologien allemand Michael STIFEL, lui, est à la recherche, dès 1544, d'un algorithme unique pour la résolution de toutes les équations du second degré. Dans le « Premier conte du lundi », nous expliquons sa règle AMASIAS et nous donnons des indications sur les façons dont il met la géométrie au service de l'algèbre qui s'élabore.

L'article central examine les liens profonds qui unissent les deux problèmes que sont la résolution des équations du second degré et la recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence, lesquels liens n'ont été découverts que progressivement en occident. Quand vers 1592, François VIETE, qui s'est respectueusement approprié les textes d'Euclide et de Diophante, construit les grandeurs géométriques racines des équations du second degré, il met un terme aux ambarras que révèlent les textes de ses prédécesseurs.

Si l'intérêt d'un problème se mesurait au degré de l'équation algébrique associée, la rubrique « Dans nos classes » vous semblerait modeste. De fait, elle rend compte d'une triple expérience pédagogique, puisque le problème du premier degré que livre le manuscrit de AL-KHWARIZMI (Bagdad, IXème siècle) a été exploité avec un succès égal en classe de cinquième, en classe de seconde et en classe de STT, dans une présentation adaptée à chaque niveau.

Les autres rubriques sont destinées à vous faire rêver :

Nous avons lu pour vous *Images, Imaginaires, Imaginations, une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes*. C'est le dernier ouvrage de la commission Inter-IREM Epistémologie et Histoire des Mathématiques.

Nous avons voyagé pour vous. *L'océan indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes*, c'était à Saint-Denis de La Réunion du 3 au 7 novembre 1997, et les actes sont parus.

Un « Deuxième conte du lundi », n'est-ce pas trop ? Non, puisqu'il s'agit de penser ou de repenser les relations entre mathématiques et littérature. A vos plumes donc, mais lisez d'abord !

BONNES VIEILLES PAGES

GUILLAUME GOSSELIN, ALGEBRISTE DE LA RENAISSANCE

« L'équation seconde, que l'on nomme composée »

Henry Plane

Odile Kouteynikoff

GVLIELMI
GOSSELINI CADOMEN-
SIS BELLOCASSII DE ARTE
magna, ſeu de occulta parte nume-
rorum, quæ & Algebra, & Almuca-
bala vulgo dicitur,

LIBRI QVATVOR.

*In quibus explicantur æquationes Diophanti, Regu-
læ Quantitatis ſimplicis, & Quantitatis ſurdæ.*

Ad Reuerendiſsimum in Chriſto Patrem
REGINALDVM BEALNAEVM,
Mandenſem Epiſcopum, Illuſtriſsimi
Ducis Alenconij Cancellarium, Comi-
tem Geuodanum, atque in ſanctiori &
interiori conſilio Conſiliarium.

PARISIIS
Apud Aegidium Beys, via Iacobæa,
ad inſigne Lilij albi.
M. D. LXXVII.

Nous ignorons tout de la vie de Guillaume GOSSELIN, mais nous connaissons de lui deux ouvrages, une traduction éditée en 1613 de l'*Arithmétique* de Niccolo Tartaglia (1499–1557), et le traité d'Algèbre *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae & Algebra, & Almucabala vulgo dicitur*[1], (Paris, 1577), dont la page de titre est reproduite en introduction de la rubrique. Des commentaires sur ce traité sont parus sous la plume de H. Bosmans dans *Bibliotheca Mathematica*, (1906).

Le *De arte magna* est, comme d'autres ouvrages marquants du XVI^{e} siècle, un ensemble de « canons », règles et algorithmes, pour ce qui deviendra le calcul algébrique. Après l'apparition en Europe au XV^{e} siècle des traductions en latin des *Eléments* d'Euclide, la tradition mathématique grecque qui s'était développée grâce aux mathématiciens arabes, s'est trouvée renforcée ; aussi, au moment où l'algèbre commence à évoluer du fait du passage progressif de l'expression rhétorique à l'expression symbolique, au moment où les nombres négatifs font leur apparition, la référence obligée à Euclide prend des formes différentes selon les auteurs. Gosselin est à ce titre tout à fait intéressant.

Nous présentons en « Bonnes vieilles pages » une traduction, volontairement proche du texte original, du chapitre IIII du Livre III du *De arte magna* que Gosselin consacre à la résolution des « équations secondes », les équations du second degré à une inconnue à trois termes.

Gosselin, qui n'admet pas encore dans les équations d'autres coefficients que positifs, distingue, à la manière des Arabes, trois types d'équations secondes, respectivement, en écriture symbolique actuelle,

$$x^2 + dx = p \qquad \text{(I)}$$

$$x^2 = dx + p \qquad \text{(II)}$$

$$x^2 + p = sx \qquad \text{(III)}$$

où p, s et d sont des nombres positifs. Il en cherche les racines positives.

Pour chaque type d'équation, il fait une étude qui comporte trois parties :

1– la description de l'algorithme, générale d'abord, puis reprise sur un exemple

Bien qu'il s'agisse d'une technique calculatoire étudiée et utilisée régulièrement depuis la haute époque babylonienne (2000 à 1600 avant J.–C.), Gosselin la détaille à nouveau. Les équations de type I et II ont une unique racine positive ; les équations de type III ont deux racines positives, ou exceptionnellement une seule, Gosselin expliquant la racine double mais ne parlant pas du cas impossible.

2– une « démonstration arithmétique » de l'algorithme

Gosselin la conduit en faisant référence à des propositions du Livre II des *Eléments* d'Euclide qui sont géométriques, dans leur forme au moins. C'est un travail original dans lequel Gosselin apparaît tout à fait emblématique de son époque, à la fois dépendant de l'héritage euclidien et sachant le mettre au service de sa démarche algébrique.

3– un exemple d'utilisation pour la résolution d'un problème

Gosselin fait la mise en équation de problèmes plus ou moins inattendus, dont il calcule les racines en appliquant les règles énoncées. Nous avons choisi de donner, comme « vraie vieille page », face à sa traduction, le problème d'application du premier algorithme. Ce problème est au départ de la réflexion menée dans l'article

---

[1] « Le grand art, ou la partie cachée des nombres, que l'on appelle couramment Algèbre et Almucabale »

central de la brochure, « Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence ».

Pour faciliter l'accès au texte de Gosselin, nous signalons, dans les lignes qui suivent, quelques caractéristiques de sa forme, intermédiaire entre l'expression rhétorique et l'expression symbolique, puisqu'il use de symboles mais que les expressions de type algébrique qui en résultent restent intégrées au texte.

• Gosselin n'a recours à aucun symbole pour décrire les opérations sur des valeurs numériques **connues** ; il écrit en toutes lettres qu'il « ajoute », qu'il « retranche », qu'il « obtient », que « reste » ou que « restent », ... ; quand il retranche 9 de 9, il obtient « rien ». Même si l'absence du chiffre « 0 » n'est certes pas tout à fait indépendante des difficultés conceptuelles qui ont précédé puis accompagné le nombre zéro, il apparaît que Gosselin a le souci d'introduire des symboles pour les grandeurs **inconnues** spécifiquement ; l'algèbre symbolique est encore et toujours la science de l'inconnue qu'était déjà l'algèbre non encore symbolique pour les Arabes au IX[e] siècle.

• Gosselin introduit donc des symboles pour désigner les termes inconnus de l'équation et il les emprunte au registre géométrique, ce qui le laisse encore loin d'une notation numérotée des puissances successives de l'inconnue : **Q** comme Quadratus, pour le carré inconnu,
L comme Latus, pour le côté inconnu (du carré inconnu).

Le géométrique est assez prégnant pour que les termes de « côté-Quarré » ou simplement « côté » soient utilisés pour désigner une racine carrée.

• Ce sont également des initiales, **P** (plus) et **M** (minus), que Gosselin introduit dans l'expression d'une somme ou d'une différence algébriques, comme précurseurs de nos signes opératoires + et –.

Mais il n'utilise pas de signe pour exprimer l'égalité de deux expressions algébriques : il a recours à des formes verbales conjuguées s'apparentant à « égaler » ou « être égal à ».

Pas non plus de signe pour la multiplication : Gosselin parle de ce que « produit » un nombre « par » un autre.

L'esperlette « & » est très fréquemment utilisée,

– dans le texte, pour la conjonction de coordination « et »

– dans le texte, pour lier les deux termes d'une somme, à calculer ou déjà calculée :

« & bien sûr 49 & 5 font 54 »

« donc le produit du nombre A par 10 & A, c'est-à-dire dix fois le nombre A & le quarré de A sont égaux à 56 »

– exceptionnellement, dans l'expression algébrique d'une somme, à la place du symbole P :

« soient 40 égaux à 1Q & 6L »

• Les différents usages du mot **nombre** méritent aussi notre attention.

Une équation seconde complète comporte carrés, côtés et nombres. Le coefficient du terme carré est égal à 1 et est toujours écrit.

Prenons l'exemple d'une équation seconde de type I, « quand un nombre est égal à 1Q & des côtés » :

« **110** sont égaux à 1Q P 1L »

1 est le « nombre des côtés », le coefficient du monôme de degré un,

110 est le « nombre absolu et dépourvu de valeur », notre monôme de degré zéro. Le contexte de l'époque permet de comprendre que le nombre absolu est dépourvu de valeur <cossique>, au sens où il n'est pas attaché à une puissance de l'inconnue, la coss, désignée par un signe cossique ; Jacques Peletier du Mans (1517–1582), dans son *Algebre* (1554), en français, dit du nombre absolu qu'il est « sans signe adjoint ».

• Nous noterons enfin une **démarche propre à Gosselin**, un détour qui ne peut être gratuit.

Après avoir expliqué le problème, après avoir fait sa mise en équation, c'est-à-dire choisi la grandeur du problème qui devient le côté inconnu L, et traduit la contrainte du problème par une égalité algébrique mettant en jeu L et Q, Gosselin n'opère pas avec les symboles introduits. Il note A le nombre valeur du côté inconnu 1L ; « A par A » devient alors la valeur du carré inconnu 1Q et Gosselin détaille de façon rhétorique et non symbolique les calculs qu'il fait avec le nombre A, donc avec les valeurs inconnues, comme si elles étaient connues. Ce qui semble remarquable, c'est donc l'écart que Gosselin maintient entre le symbole qui désigne la grandeur inconnue et la lettre qui en est la valeur numérique inconnue. S'agit-il d'une prudence ? Tout se passe comme si l'écriture symbolique, ressentie comme une nécessité, n'était pas encore opérationnelle, alors même que la démarche consistant à calculer sur des nombres inconnus comme sur les nombres connus était déjà construite.

Le grand art du Breton[2] de Caen GUILLAUME GOSSELIN

ou la partie cachée des nombres, que l'on appelle couramment

Algèbre, & Almucabale,

QUATRE LIVRES.

où sont présentées les équations de Diophante,

les Règles de la Quantité simple, & de la Quantité sourde.

Au très Révérend Père dans le Christ

RAYNAUD DE BEAUNE,

Evêque de Mende, Chancelier du très Illustre Duc d'Alençon,

Gouverneur du Gévaudan, et conseiller en questions sacrées et intimes.

A PARIS

chez Egidius Beys, rue Jacob,

à l'enseigne du Lis blanc.

1577.

LIVRE III.

L'Equation seconde, que l'on nomme composée. Chap. IIII[3].

On parle d'équation seconde, quand de ces quantités, que sont quarrés, côtés, & nombres, l'une est finalement présentée égale aux deux autres, et comme cette équation peut prendre trois formes, nous donnerons aussi trois algorithmes, que nous démontrerons séparément.

Premier algorithme.

On parle du premier Algorithme de l'équation seconde, quand un nombre est égal à 1Q & des côtés[4], alors nous prendrons le quarré de la moitié du nombre des côtés, que nous ajouterons au nombre absolu et dépourvu de valeur, nous chercherons le côté-Quarré de cette somme, de ce côté<Quarré> nous retrancherons la moitié du nombre des côtés, le reste sera la valeur d'un côté, ainsi soient 40 égaux à 1Q & 6L, nous ajouterons 9 Quarré de 3 moitié du nombre des Côtés à 40, ils feront 49, somme dont le côté-quarré est 7, dont nous retrancherons 3 moitié du nombre des côtés, restera 4, et c'est la valeur d'un côté, et en effet le Quarré de 4 est le nombre 16, 6L, c'est-à-dire six fois 4, sont 24, qui avec 16 font 40.

Notre démonstration de cet algorithme

Arithmétique.

Soient 10L P 1Q égaux à 56, & soit le nombre A la valeur du côté, donc le produit du nombre A par 10 & A, c'est-à-dire dix fois le nombre A & le quarré de A sont égaux à 56, or le produit de A par 10 est égal au

---

[2] Nous signalons quelques hardiesses dans la traduction de la page de titre.

[3] GOSSELIN G., *De arte magna*, Paris, 1577, p. 57 à 63. Traduction de l'extrait due à la collaboration de J. Boyé, O. Kouteynikoff et H. Plane. Nous avons choisi de rester très proches du texte latin, et d'en respecter la ponctuation même, bien qu'elle soit chaotique parfois.

[4] Nous gardons les notations latines de Gosselin : Q pour Quadratus, le carré inconnu, et L pour Latus, le côté inconnu (du carré inconnu).

produit de A par 5 & 5 parties de 10 d'après la première <proposition> du second <livre des *Eléments*> d'Euclide. C'est pourquoi nous séparerons 5 P A en 5 & A, ainsi d'après la quatrième <proposition> du second <livre> le Quarré de 5 P A sera égal aux Quarrés de 5 & de A & au double du produit de 5 par A, mais le double du produit de 5 par A & le Quarré de A sont égaux à 56 par hypothèse, donc le quarré de 5 P A est égal à 56 & au quarré 25 de l'une des deux parties 5, ajoutons-les à 56, ils feront 81 évidemment Quarré de 5 P A, ainsi le côté<quarré> de 81, c'est-à-dire 9, est égal à 5 P A, de quantités égales retranchons des quantités égales, de l'une et l'autre 5, restera 4 égal à A, donc le nombre inconnu est 4, & 10L sont 40, 1Q est 16, lesquels ajoutés donnent 56.

Utilisation de cet Algorithme.

Problème.

Cherchons deux nombres, tels que ces nombres mêmes étant retranchés de leurs quarrés, il reste 48, & que ceux-là mêmes étant ajoutés au résultat du produit de l'un par l'autre, il vienne 31.

Posons que les nombres ajoutés sont 1L, donc 48 P 1L seront égaux à leurs Quarrés, & 31 M 1L seront égaux au produit de l'un par l'autre, & ainsi 62 M 2L le seront au double du produit, mais d'après la quatrième <proposition> du second <livre des *Eléments*> d'Euclide, les Quarrés des parties avec le double du produit de l'une par l'autre sont égaux au Quarré du tout, or on a posé que le tout était 1L, donc 48 P 1L P 62 M 2L sont égaux à 1Q, c'est-à-dire 110 M 1L sont égaux à 1Q, & en ajoutant de part et d'autre 1L qui manque à l'un des deux membres, 110 sont égaux à 1Q P 1L ; et ainsi l'équation relève de cet algorithme, la moitié du nombre des côtés 1 est $\frac{1}{2}$, le Quarré $\frac{1}{4}$, ajoutons-le aux 110, ils feront $\frac{441}{4}$, dont le côté-Quarré est $\frac{21}{2}$, enlevons la moitié de 1 c'est-à-dire $\frac{1}{2}$, resteront $\frac{20}{2}$, c'est-à-dire 10, & c'est la valeur du côté, donc la somme de ces nombres que nous avons posée être 1L est 10, ainsi le produit de l'un par l'autre est 31 M 10 c'est-à-dire 21, pour connaître ces nombres séparément, nous partagerons 10 en deux parties de sorte que le produit de l'une par l'autre soit 21 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier <du *Grand Art*>, & ces parties seront les nombres 3 & 7 qu'il fallait trouver, & ce calcul est beaucoup plus facile que celui qui est transmis par Peletier à la question 5 de l'équation composée.

Second algorithme.

On parle du second algorithme de l'équation seconde, quand 1Q est égal à des côtés & des nombres, alors nous calculerons le Quarré de la moitié du nombre des côtés, auquel nous ajouterons le nombre absolu ou dépourvu de valeur, nous extrairons le côté-Quarré de cette somme, à laquelle nous ajouterons la moitié du nombre des côtés, cette dernière somme sera bien la valeur d'un côté, comme pour 1Q égal à 4L P 12, nous ajouterons 4 Quarré de 2 moitié du nombre des côtés 4 au nombre dépourvu de valeur 12, ils feront 16, somme dont le côté-Quarré est 4, auquel nous ajouterons 2 moitié du nombre des côtés, la somme 6 sera évidemment la valeur du côté, car 4L sont 24, qui ajoutés à 12 font 36 Quarré du côté 6.

Notre démonstration du second algorithme

Arithmétique

Soient 6L P 16 égaux à 1Q. Il apparaît manifestement que le côté inconnu est plus grand que 6 le nombre des côtés : si en effet il était ou égal ou plus petit, alors la partie serait égale au tout, ce qui est absurde, puisque 36 P 16 seraient égaux à 36. Soit donc 6 P A le nombre inconnu, ainsi le Quarré de ce nombre est égal au

Vsus huius Canonis.
Problema.

Vestigemus duos numeros, vt a quadratis illorum subductis ipsis numeris, reliqua sint 4 8, & ipsis additis ad id quod fit ex ductu vnius in alterum, exurgant 31.

Faciamus illos numeros additos esse 1 L, ergo 4 8 P 1 L æqualia erunt illorũ Quadratis, & 3 1 M 1 L æqualia facto ex vno in alterũ, quare & 62 M 2 L duplum facti, sed ex quarto secundi Euclidis, Quadrata partiũ cum duplo facti ex vna in alterã æqualia sunt Quadrato totius, totus autẽ numerus fictus est 1 L, ergo 4 8 P 1 L P 6 2 M 2 L sunt æqualia 1 Q, hoc est 1 1 0 M 1 L æqualia 1 Q, & addito vtrinque 1 L quod deficit in altera parte, 1 1 0 æqualia 1 Q P 1 L, sicq; stat ęquatio super hoc canone, semissis 1 numeri laterũ est $\frac{1}{2}$, Quadratum $\frac{1}{4}$, addamus ad 110, existẽt $\frac{441}{4}$, quorum latus Quadratum est $\frac{21}{2}$ tollamus semissem 1 hoc est $\frac{1}{2}$, restabũt $\frac{20}{2}$ hoc est 1 0, & tantus est lateris valor, summa ergo horum numerorum quã fecimus esse 1 L est 1 0, quare factus ex vno in alterũ 31 M 1 0 hoc est 2 1, vt cognoscamus hos separatim numeros, partiemur 1 0 in duas eiusmodi partes, vt factus ex vna in alteram sit 2 1 ex problemate ad 1 4 caput lib. primi, & hę partes erunt 3 & 7 numeri quos inuenisse oportuit, & hæc est facilior multo ratio, quã ea quę traditur a Peletario quæst. 5 ad ęquat. compositam.

GOSSELIN G., *De Arte Magna*, Paris, 1577, p. 59

produit de 6 par 6 P A & 16, mais le quarré de ce nombre 6 P A est aussi égal au produit de 6 par 6 P A & de A par 6 P A d'après la première <proposition> du second <livre> d'Euclide, c'est pourquoi le produit de 6 par 6 P A & 16 sont égaux au produit de 6 par 6 P A et de A par 6 P A, de quantités égales retranchons des quantités égales de l'une et l'autre le produit de 6 par 6 P A, resteront 16 égaux au produit de A par 6 P A. Ceci étant ainsi établi, séparons 6 P 2A en A & 6 P A, la moitié de 6 P 2A est 3 P A, donc d'après le cinquième théorème du second <livre> d'Euclide, le produit de A par 6 P A avec le Quarré de l'excédent de 6 P A sur 3 P A est égal au Quarré de la moitié du tout, c'est-à-dire 3 P A, mais le produit de A par 6 P A est le nombre 16, comme cela a été démontré, l'excédent de 6 P A sur 3 P A est la moitié de 6 donc 3, car l'excédent de A sur A est 0, le Quarré de cet excédent 3 est 9, ajoutons-les à 16 ils feront 25, qui sont égaux au Quarré de la moitié de 6 P 2A donc de 3 P A, ainsi les côtés<quarrés> seront aussi égaux, le côté<quarré> de 25 est 5, nombre qui est finalement égal à 3 P A, de quantités égales enlevons des quantités égales, de l'une et l'autre 3, restera A égal à 2, donc le côté inconnu que nous avons posé être 6 P A était 6 P 2, c'est-à-dire 8, puisque aussi 6L seront 48, qui avec 16 donnent 64 Quarré du côté 8, ce qu'il fallait démontrer.

Utilisation de cet algorithme.

Problème.

Partageons 12 en deux parties de sorte que le Quarré de l'une avec l'autre fasse 54, Soit 1L l'une des parties, l'autre sera donc 12 M 1L, ajoutons le Quarré de 1L, c'est-à-dire 1Q, à 12 M 1L, ils feront 1Q P 12 M 1L égaux à 54, ajoutons 1L de part et d'autre, ils feront 1Q P 12 égaux à 54 P 1L, enlevons 12 de part et d'autre, resteront 42 P 1L égaux à 1Q, et ainsi l'équation relève de cet algorithme : nous ajouterons donc le quarré de la moitié de 1 c'est-à-dire $\frac{1}{4}$ à 42, viendront $\frac{169}{4}$, dont le côté<quarré> sera $\frac{13}{2}$, ajoutons $\frac{1}{2}$ moitié de 1 nombre des côtés, ils feront $\frac{14}{2}$, c'est-à-dire 7, et c'est la valeur du côté, c'est pourquoi la partie de 12 que nous avons posée être 1L était 7, donc l'autre était 5, ou 12 M 7 c'est-à-dire 5, & bien sûr 49 & 5 font 54.

Troisième algorithme.

Il s'agit enfin du troisième Algorithme de l'équation seconde quand des côtés sont égaux à 1Q & un nombre, alors nous calculerons le Quarré de la moitié du nombre des côtés, dont nous retrancherons le nombre dépourvu de valeur, nous chercherons le côté-Quarré du reste, et ou bien nous l'ajouterons à la moitié du nombre des côtés, ou bien nous l'en retrancherons si c'est ce qu'il convient de faire, ce sera la valeur d'un côté, ainsi soient 6L égaux à 1Q P 8, nous retrancherons 8 de 9 Quarré de 3 moitié de 6 nombre des côtés, restera 1, reste dont le côté-Quarré est 1, nous ajouterons 1 à 3 moitié de 6 nombre des côtés, ils feront 4, ou bien nous retrancherons 1 de ce 3, il restera 2, c'est pourquoi nous dirons que soit 4 soit 2 est la valeur d'un côté, 4 assurément, parce que six côtés sont 24, 1Q est le nombre 16, ce nombre 16 avec 8 donnent le même 24, et il est tout aussi vrai que le côté soit 2, son Quarré est 4, si on l'ajoute à 8, la somme est 12, et six côtés font autant, soit 12.

Or s'il arrive que le nombre proposé soit égal au carré de la moitié du nombre des côtés, alors la moitié du nombre des côtés sera la valeur d'un côté, ainsi soient 6L égaux à 1Q P 9, je dis que 3 est la valeur d'un côté, car d'après l'algorithme ci-dessus, nous retrancherons le Quarré de 3 c'est-à-dire 9 de 9, et il restera rien, dont le côté-Quarré est rien, et parce que rien ne peut ni être ajouté ni être retranché de 3 puisqu'il est rien, 3 sera de l'une et l'autre manière la valeur d'un côté.

Notre démonstration du troisième algorithme

Arithmétique

Soient 32 P 1Q égaux à 18L, ou bien le côté inconnu est plus grand que 18, ou égal, ou plus petit, on démontre qu'il n'est ni plus grand, ni égal, assurément pas plus grand, parce que s'il est plus grand il est précisément égal à 18 P A, & ainsi 18 P A multipliés par 18 seront égaux à 18 P A multipliés par 18 P A, c'est-à-dire la partie au tout, ce qui serait contraire à la raison, il n'est certainement pas non plus égal, car s'il était égal, 18 multipliés par 18 seraient égaux à 18 multipliés par 18 & 32, ce qui est absurde : il reste donc que le côté inconnu est plus petit que 18, soit précisément le nombre B & ainsi le nombre B multiplié par 18 sera égal au Quarré du nombre B, c'est-à-dire à B multiplié par B, & 32, & puisque le nombre B est plus petit que 18, comme cela a été démontré, qu'on le retranche de 18, resteront 18 M B, ainsi d'après la première <proposition> du second <livre> d'Euclide, le produit de B par 18 sera égal au produit du même B par les parties de 18 c'est-à-dire le nombre B & 18 M B, mais alors le produit de B par B, c'est-à-dire le Quarré du nombre B, & 32 sont égaux au produit du nombre B par 18, donc le produit du nombre B par B, c'est-à-dire le Quarré de B, & 32 sont égaux au produit de B par B & au produit de B par 18 M B, retranchons de part et d'autre le Quarré de B, c'est-à-dire le produit de B par B, resteront 32 égaux au produit de B par 18 M B, or parce que le nombre 18 a été séparé en B & 18 M B, il s'ensuit que 32 est le nombre produit d'une partie de 18 par l'autre. Maintenant donc nous séparerons 18 en deux parties de sorte que le produit de l'une par l'autre soit 32 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier <du *Grand Art*>, et les parties seront 2 & 16, & l'une et l'autre sont la valeur du côté inconnu.

Utilisation du troisième Algorithme.

Problème.

Cherchons deux nombres dont la différence soit 7, & tels que leurs Quarrés ajoutés soient égaux au Quarré de 13 c'est-à-dire à 169.

Posons que l'un des nombres est 1L, l'autre sera donc 1L P 7, leurs Quarrés sont 1Q, & 1Q P 14L P 49, leur somme est 2Q P 14L P 49 égale à 169, retranchons 49 de part et d'autre, resteront 2Q P 14L égaux à 120, donc la moitié sera égale à la moitié, évidemment 1Q P 7L égaux à 60, et ainsi l'équation relève du premier algorithme, procède selon celui-ci & tu trouveras que la valeur du côté est 5, & l'autre nombre 7 P 5 évidemment 12, cela va sans dire.

Partageons 17 en deux parties de sorte que la somme des Quarrés soit 169.

Nous aurons alors posé que l'une des parties est 1L, donc l'autre 17 M 1L, la somme des Quarrés est 2Q M 34L P 289 égale à 169, de part et d'autre retranchons 169 & ajoutons 34L, ils feront 34L égaux à 2Q P 120 et de plus la moitié sera égale à la moitié, c'est-à-dire 17L égaux à 1Q P 60, et ainsi l'équation relève de ce dernier algorithme, la moitié de 17 est $\frac{17}{2}$ de Quarré $\frac{289}{4}$, dont je retranche 60, restent $\frac{49}{4}$ dont le côté<quarré> est $\frac{7}{2}$, ou bien je l'ajoute, ou bien je le retranche de $\frac{17}{2}$, il en résulte les parties 5 & 12 comme précédemment[5].

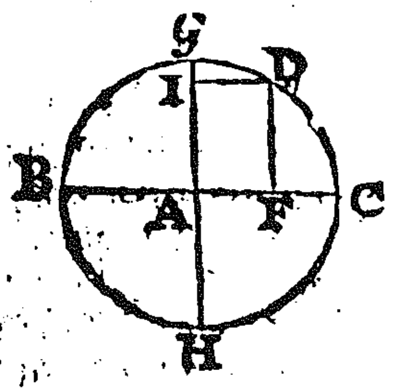
[5] à la place du « 5 & 7 » nécessairement erroné que comporte l'édition dont nous disposons.

Prop. 13.

Eſtant donnée la moyenne des trois proportionelles, & l'aggregé des extremes trouuer les extremes.

Mechanique du plan nié du quarré ſous le coſté.

Soit donnée E la moyenne des trois proportionelles. Et BC l'aggregé des extremes, il faut trouuer les extremes.



Soit coupée BC en deux egalement en A. Et du centre A, de l'interualle AB ou AC ſoit décrit vn cercle Mais qu'vn autre diametre GAH coupe le diametre BAC à angles droits, & de AG, ſoit retranché AI, egale à la ligne donnée E. Et par I, ſoit menée la droite ID parallele à BC, coupant la circonference au poinct D, duquel ſoit abbaiſſée la ligne DF perpendiculaire à BC, egale & parallele à IA.

Ie dy qu'on a fait ce qui a eſté requis. Car les extremes requiſes ſont BF, FC, dont la compoſée eſt BC, donnée. Et ſe fait DF ou IA moyenne entre les proportionelles.

DURRET N., L'Algèbre, Effections Géométriques,

& partie de l'Exégétique nombreuse de l'Illustre F. Viète, Paris, 1644, p. 102-103.

Recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence

Odile Kouteynikoff

Introduction

Le terme « grandeur » est intentionnellement utilisé dans le titre, à la place du mot « nombre », pourtant plus usuel dans ce contexte. C'est dire d'emblée que notre réflexion nous portera en dehors du registre purement algébrique, très rapidement après les rappels de rigueur que voici.

Les recherches de deux nombres connaissant leur produit et leur somme ou leur différence ne sont pas des questions triviales pour nos élèves. Ce sont, au premier abord, des problèmes à deux inconnues, susceptibles d'une traduction par un système de deux équations, non linéaire, à résoudre par substitution.

RESULTAT PRELIMINAIRE :
Si l'équation $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines x_1 et x_2, les deux polynômes $x^2 + ax + b$ et $(x - x_1)(x - x_2)$ sont identiques, ce qui permet d'écrire les égalités $x_1 + x_2 = -a$ et $x_1 x_2 = b$.

PREMIERE RECHERCHE : trouver deux nombres x et y de somme s et de produit p.

Soit $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ le système à résoudre.

Par substitution, $\begin{cases} x = s - y \\ (s - y)y = p \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x = s - y & (1) \\ y^2 - sy + p = 0 & (2) \end{cases}$

Si l'équation résolvante (2) admet deux racines y_1 et y_2, celles-ci ont pour somme $y_1 + y_2 = s$ d'après le résultat préliminaire, et l'on trouve dans (1)

$$x_1 = s - y_1 = y_2 \text{ et } x_2 = s - y_2 = y_1 \text{ soit } (x_1, y_1) = (y_2, x_2) = (y_2, y_1).$$

C'est ici qu'on voit poindre la particularité de la situation : sans qu'aucune des deux racines de l'équation résolvante du second degré ne soit parasite, on obtient une seule paire de nombres comme solution du système symétrique en x et y ; la solution unique du problème à deux inconnues, est constituée par les deux racines de l'équation du second degré à une inconnue.

SECONDE RECHERCHE : trouver deux nombres x et y connaissant leur différence d et leur produit p.

Le système peut s'écrire $\begin{cases} x - y = d \\ xy = p \end{cases}$

Il n'est pas tout à fait symétrique et il ne peut avoir une solution unique au sens strict car, si un couple (a,b) est solution, le couple (–b,–a) l'est aussi.

On obtient par substitution, $\begin{cases} x = y + d \\ (y + d)y = p \end{cases}$ soit $\begin{cases} x = y + d \quad (1') \\ y^2 + dy - p = 0 \end{cases}$

Quand l'équation résolvante admet deux racines y_1 et y_2 qui, d'après le résultat préliminaire, vérifient l'égalité $y_1 + y_2 = -d$, on trouve dans (1')

$$x_1 = y_1 + d = -y_2 \text{ et } x_2 = y_2 + d = -y_1$$
$$\text{soit } (x_1, y_1) = (-y_2, y_1) \text{ et } (x_2, y_2) = (-y_1, y_2)$$

Ce sont à nouveau les deux racines de l'équation résolvante du second degré à une inconnue qui fournissent « la » solution du problème à deux inconnues.

Sans nécessairement nous appesantir avec nos élèves sur les subtilités de la résolution du second système, nous leur demandons de RETENIR

~ que si l'équation $x^2 + ax + b = 0$ admet deux racines, elles ont pour somme $-a$ et pour produit b

~ que, réciproquement, pour trouver deux nombres de somme s et de produit p, il suffit, si le problème est possible, de résoudre l'équation $y^2 - sy + p = 0$, dont les racines sont alors les nombres cherchés.

Je crois me rappeler ma propre perplexité d'élève devant ces deux énoncés d'une efficacité technique incontestable, mais dont la concision même enfermait le mystère. Je me souviens aussi de la rigueur presque volontariste avec laquelle, jeune professeur, je disséquais la correspondance entre les deux problèmes d'algèbre devant des élèves dont le regard me renvoyait quelque chose du genre « tout ça pour ça ! ». Je m'étais finalement résolue à classer ce sujet qui m'avait troublée, dans le registre du « banal et sans saveur » dont il faut bien accepter qu'il ne soit pas vide. Mais le jour vint où, travaillant sur des textes de la Renaissance à propos de la résolution des équations du second degré[6], je ressentis, grâce aux détours et aux interrogations des nouveaux algébristes, un vif regain d'intérêt pour cette question qui se révélait **historiquement** délicate.

Il me semble, en l'état actuel de mes lectures, que l'essentiel de l'action se situe au XVI^e siècle, en cette période d'innovations décisives, donc de tensions fortes et de dénouements rapides.

A cette époque, l'apparition des symboles suscite la rédaction de traités d'algèbre, incite à se poser des questions sur la formulation mathématique, autorise la recherche d'une simplicité relative dans les démarches, et amène à s'interroger sur la signification des résultats obtenus. En examinant des textes de Guillaume Gosselin[7], de Jacques Peletier du Mans (1517–1582) et de Simon Stevin (1548–1620), nous cernerons d'assez près la nature des obstacles épistémologiques.

---

[6] KOUTEYNIKOFF O., « Aspects du rôle de la géométrie dans la construction de l'algèbre : Regard historique sur la résolution des équations du second degré », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 114.

[7] dont nous ignorons les dates de naissance et de mort.

La Renaissance en Europe, c'est aussi comme le mot l'indique, l'époque où la fréquentation accentuée des textes de l'Antiquité influence les modes de pensée. Les *Eléments* d'Euclide (Alexandrie, IIIᵉ siècle avant J.C.) sont disponibles en latin, en Occident, depuis le XVᵉ siècle et constituent une référence incontournable ; les *Arithmétiques* de Diophante (Alexandrie, IIIᵉ siècle après J.C. selon la datation la plus courante) sont diffusées depuis le milieu du XVIᵉ siècle et stimulent les algébristes. Bien sûr, la prégnance de la géométrie euclidienne crée des entraves sévères telles que l'impossibilité de considérer des grandeurs autres que positives, mais elle perpétue aussi des outils puissants comme la théorie des proportions, dont nous allons apprécier le rôle déterminant pour notre sujet. Et en cette époque d'émergence de l'algèbre, le poids de la géométrie euclidienne et l'enthousiasme pour les problèmes diophantiens se conjuguent pour générer des intuitions heureuses : les recherches de Stevin (*Arithmétique*, Leyde, 1585) pour « construire » de la même manière le numérique et le géométrique apportent, dès avant les travaux de François Viète (1540–1603), une contribution non négligeable à l'élaboration de la géométrie analytique que le XVIIᵉ siècle consacrera.

La modernité de Viète, celle de son *Algebra Nova* (Tours, à partir de 1591), est, pour une part, le produit de sa fidélité à Euclide et Diophante[8]. C'est en pratiquant une relecture respectueuse des textes des Anciens, en en pénétrant les lignes de force, qu'il les met en relation et en restitue le rayonnement. La manière dont il démontre, dans *Les Effections géométriques* (partie sept de l'*Algèbre Nouvelle*), que construire les grandeurs racines des équations du second degré, c'est construire des grandeurs dont on connaît le produit et la somme ou la différence, est exemplaire de son art. En raisonnant sur une figure euclidienne, il met en évidence une construction géométrique dont les étapes sont exactement celles de la résolution numérique du problème à deux inconnues, telle qu'il la conduit dans *Les Zététiques* (partie trois de l'*Algèbre Nouvelle*), à la manière de Diophante. L'examen du travail de Viète va donc constituer une partie essentielle de cet article et, dans ce cadre modeste, le dénouement de la question-titre.

Cependant la lecture préalable des textes grecs s'impose, non seulement pour l'éclairage qu'ils apportent aux textes de la Renaissance, mais aussi pour ce qu'ils nous disent à nous, directement. Nous allons prendre le temps et la place d'un travail qui en fasse émerger la simplicité, celle qu'il nous est permis de transmettre, à force de la construire et de la faire construire, celle qui pourrait faire que la question délicate ne s'installe pas dans les zones d'ombre d'une conscience mathématique mal éclose.

I. La relecture des textes grecs

Quelques propositions du Livre II des *Eléments* d'Euclide

Des treize livres qui constituent le gigantesque ouvrage que sont les *Eléments* d'Euclide, les six premiers sont consacrés à la géométrie plane. Nous ne noterons, au Livre I, que la proposition XLVII qui permet de construire un carré d'aire égale à celle de deux carrés donnés. C'est la proposition immortalisée sous l'appellation de théorème de Pythagore :

[8] KLEIN J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, M.I.T. PRESS, Cambridge (Mass.) and London (Engl.), 1968, p. 157 à 161.

Dans les triangles rectangles, le quarré du côté opposé à l'angle droit est égal aux quarrés des côtés qui comprennent l'angle droit[9].

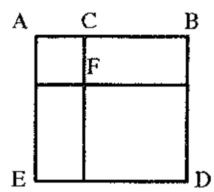
Le Livre II qui, au XIX^e siècle, sera intitulé le livre de l'*algèbre géométrique*[10], contient quatorze propositions qui énoncent et démontrent des relations d'égalité entre aires de rectangles et de carrés combinés. Après avoir rappelé la proposition IV que chacun connaît, parfois sans le savoir, nous étudierons les propositions V et VI qui sont essentielles à notre propos puis nous examinerons les propositions XI et XIV, les deux seules du Livre II qui résolvent des problèmes de construction.

Bien que Euclide n'aborde pas la théorie des proportions avant le Livre V, nous signalerons les situations de proportionnalité identifiables sur les configurations étudiées, pour l'utilisation qui peut en être faite, au XVI^e siècle ou en classe aujourd'hui, et ceci, malgré le décalage que cette liberté engendre avec le projet de l'auteur, tel qu'il est perceptible dans les premiers livres.

Enfin nous ne donnerons dans leur forme authentique que l'énoncé des propositions, nous accordant la facilité ou l'efficacité de présenter dans une forme modernisée les résultats, les démonstations ou les commentaires.

La proposition IV

Si la droite est coupée à volonté, le quarré de la droite entière est égal aux quarrés des segments, et à deux fois le rectangle contenu sous les deux segments[11].



[AB] donné, C quelconque

carré AD = carré AF + carré FD + 2 Rect. FB

Nous pouvons aussi lire sur cette configuration la proportionnalité des aires des carrés et des rectangles ayant deux à deux un côté commun :

$$\frac{\text{carré FD}}{\text{Rect. FB}} = \frac{\text{Rect. FE}}{\text{carré FA}}, \qquad \text{soit} \qquad \frac{b^2}{ab} = \frac{ab}{a^2}$$

en écriture littérale actuelle, en posant CA = a et CB = b.

C'est exactement la visualisation que Peletier proposera pour ce résultat algébrique, jugé sans doute moins banal au XVI^e siècle qu'aujourd'hui.

Les propositions V et VI

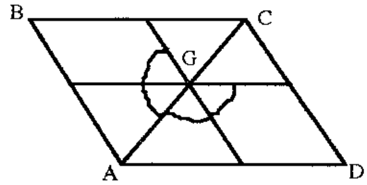
L'étude des propositions V et VI nécessite la connaissance du gnomon, qui fait l'objet de la définition 2 du Livre II :

---

[9] EUCLIDE, *Les Œuvres*, traduction F.Peyrard, Paris, 1819, réédition Blanchard, Paris, 1993, p 38.

[10] EUCLIDE, *Les Eléments*, traduction et commentaires B. Vitrac, P.U.F., Paris, 1994, t. I, p. 366 : à propos de l'*algèbre géométrique*, Bernard Vitrac fait référence à P. Tannery (1843-1904) et H. G. Zeuthen (1839-1920).

[11] EUCLIDE, *Les Œuvres*, p. 43.

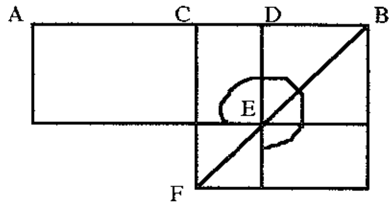


Que dans tout parallélogramme, l'un quelconque des parallélogrammes décrits autour de la diagonale avec les deux compléments soit appelé gnomon[12].

gnomon G = parallélogramme GA + complément GB + complément GD

La proposition V

Si une ligne droite est coupée en parties égales et en parties inégales, le rectangle sous les deux segments inégaux de la droite entière avec le quarré de la droite placée entre les sections, est égal au quarré de la moitié de la droite entière[13].



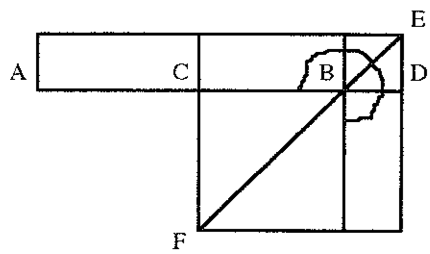
C milieu de [AB], D quelconque

Rect. AE = gnomon E, donc carré FE + Rect. AE = carré FB

ou de façon plus moderne, $DA \, . \, DB + CD^2 = CB^2$ **(II,V)**

La proposition VI

Si une ligne droite est coupée en deux parties égales, et si on lui ajoute directement une droite, le rectangle compris sous la droite entière avec la droite ajoutée, et sous la droite ajoutée, avec le quarré de la moitié de la droite entière, est égal au quarré décrit avec la droite composée de la moitié de la droite entière et de la droite ajoutée, comme avec une seule droite[14].



C milieu de [AB], D quelconque

Rect. AE = gnomon B, donc carré FB + Rect. AE = carré FE

ou de façon plus moderne, $DA \, . \, DB + CB^2 = CD^2$ **(II,VI)**

Les propositions XI et XIV

L'une et l'autre réalisent, sous des contraintes différentes, l'égalité en aire d'un rectangle et d'un carré. Ce sont donc deux problèmes, qui sont pour nous des problèmes du second degré, que Euclide formule et traite de manière complètement géométrique.

La proposition XI

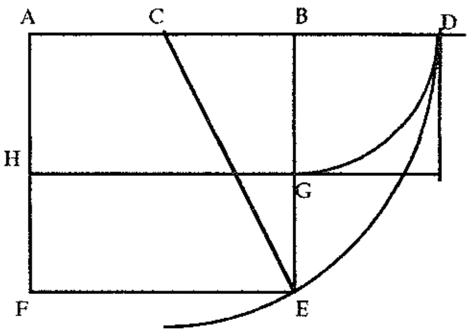
Couper une droite donnée, de manière que le rectangle compris sous la droite entière et l'un des segments, soit égal au quarré du segment restant[15].

[12] *Ibid.*, p. 41.
[13] *Ibid.*, p. 45.
[14] *Ibid.*, p. 46.
[15] *Ibid.*, p. 53.

Un segment étant donné, le tout, on demande de le partager en deux segments nécessairement inégaux, le mineur et le moyen, de façon que le rectangle construit sur le mineur et le tout ait la même surface que le carré construit sur le moyen.

Sur le segment donné BE, on construit le carré BEFA, puis on marque le milieu C de [AB], et le point D de la demi-droite CB tel que CD = CE ; le point G cherché est le point du segment BE tel que BG = BD. La démonstration, écrite ici en langage moderne, repose sur la proposition VI[16] présentée plus haut.

$$\begin{aligned}
DA.DB + CB^2 &= CD^2\\
DA.DB + CB^2 &= CE^2\\
DA.DB + CB^2 &= CB^2 + BE^2\\
DA.DB &= BE^2\\
\text{Rect. } DH &= \text{Carré } BF\\
\text{Carré } DG &= \text{Rect. } GF\\
GB^2 &= EG.EB
\end{aligned}$$



L'égalité EG.EB = GB^2 exprimant que les grandeurs EG, GB et EB sont proportionnelles, il s'agit en fait de construire l'extrême mineure EG et la moyenne GB, connaissant l'extrême majeure EB, et sachant qu'elle est la somme de la mineure et de la moyenne ; ce que, à la proposition XXX du Livre VI, Euclide appelle *Couper une droite finie et donnée en moyenne et extrême raison*[17]. C'est un problème de partage d'une somme en deux parties, satisfaisant à une condition de proportionnalité.

DANS LE REGISTRE NUMERIQUE :

La nature de la contrainte permet de prendre pour inconnue le rapport $\frac{GB}{EB}$, ce qui revient à poser EB = AB = 1 et GB = DB = x, et à traduire l'égalité en aire DA.DB = BE^2 par l'égalité en nombres $(x + 1).x = 1$. Le rapport $\frac{GB}{EB}$, inférieur à 1, est la racine positive de l'équation $x^2 + x = 1$.

On peut aussi prendre pour inconnue le rapport inverse $\frac{EB}{GB}$; cela revient à poser GB = DB = 1, EB = AB = x et à traduire l'égalité en aire DA.DB = BE^2 par l'égalité en nombres $(x + 1).1 = x^2$; il apparaît alors que le rapport $\frac{EB}{GB}$, supérieur à 1, est la racine positive de l'équation $x^2 = x + 1$.

Dans l'un et l'autre cas, la résolution numérique fournit la première inconnue GB en fonction de EB donné, et la seconde inconnue EG se déduit de la première par soustraction.

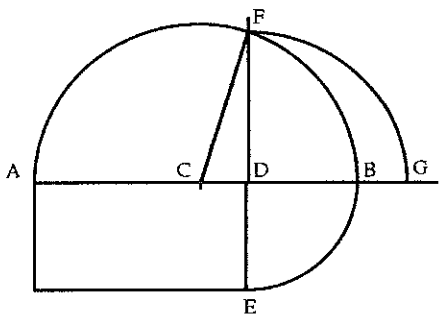
[16] Pour des démonstrations détaillées des propositions VI et XI, et des suggestions d'activités pour les élèves, on consultera « Dans nos classes : La section dorée dans les *Eléments* d'Euclide », in *Mnémosyne* n° 1, IREM de Paris VII, avril 1992.
[17] EUCLIDE, *Les Œuvres*, p. 174.

La proposition XIV
Construire un quarré égal à une figure rectiligne donnée[18].

Au terme d'un parcours dont les étapes sont repérables au long des Livres I et II, il est acquis que pour faire la quadrature d'une figure rectiligne donnée, il suffit de faire la quadrature d'un rectangle : c'est la construction que détaille la proposition XIV.

On cherche le carré de côté DF = DG ayant même aire que le rectangle donné de côtés DA et DE. B est construit sur la droite AD de façon que DB = DE, C est le milieu de [AB], F est le point de la demi-droite ED tel que CF = CB, et G le point de la demi-droite DB tel que DG = DF. La démonstration, écrite ici en langage moderne, repose sur la proposition V présentée plus haut.

$$
\begin{array}{ll}
DA.DB + CD^2 & = CB^2 \\
DA.DB + CD^2 & = CF^2 \\
DA.DB + CD^2 & = CD^2 + DF^2 \\
DA.DB & = \quad DF^2 \\
\text{Rect. AE} & = \text{Carré FG}
\end{array}
$$



L'égalité $DA.DB = DF^2$ exprimant que les grandeurs DA, DF et DB sont proportionnelles, la quadrature des figures rectilignes tient tout entière dans ce résultat central qu'est la construction de la moyenne proportionnelle de deux grandeurs données. C'est la même construction que Euclide détaille à nouveau, à la proposition XIII du Livre VI, pour *Deux droites étant données, trouver une moyenne proportionnelle*[19], et qu'il justifie alors par un argument appartenant au registre de la proportionnalité, le corollaire de la proposition VIII qui précède :

Proposition VIII
Si dans un triangle rectangle on mène une perpendiculaire de l'angle droit sur la base, les triangles adjacents à la perpendiculaire sont semblables au triangle entier et semblables entre eux.
Corollaire.
De là, il est évident que, dans un triangle rectangle, la perpendiculaire menée de l'angle droit sur la base, est moyenne proportionnelle entre les segments de la base[20], *[...]*

Cette construction, susceptible de la transcription en écriture littérale actuelle $c = \sqrt{ab}$, résout géométriquement l'équation du second degré la plus élémentaire $x^2 = A$, et potentiellement elle les résout toutes : Viète utilisera la figure précédente, dans les *Effections géométriques*, comme représentation canonique de trois grandeurs proportionnelles, pour mettre en évidence sa construction des grandeurs racines des équations du second degré.

---

18 *Ibid.*, p. 55.
19 *Ibid.* p. 151.
20 *Ibid.* p. 147 et 148.

Quelques problèmes du Livre I des *Arithmétiques* de Diophante

Il semble qu'il n'y ait, dans les œuvres actuellement connues de Diophante, que de rares occurrences d'équations du second degré ; on peut signaler celle du problème XXXI du Livre IV, qui se présente comme une étape sophistiquée du calcul. Diophante résout habituellement des problèmes à plusieurs inconnues, deux ou plus, souvent indéterminés[21].

Les problèmes XXVII à XXX du Livre I sont propres à retenir notre attention :

– les problèmes XXVII et XXX parce qu'ils traitent exactement la recherche de deux nombres connaissant leur produit et leur somme puis leur différence,

– les problèmes XXVIII et XXIX parce qu'ils nous renseignent clairement sur les rôles joués dans ces recherches par la somme et la différence, et ceci d'autant mieux que les quatre problèmes se présentent comme une variation sur des valeurs numériques communes.

Les résolutions que Diophante propose pour les problèmes XXVII et XXX sont tout à fait différentes de celles rappelées en introduction ; outre l'apport qu'elles fournissent à notre sujet, elles ont une valeur algébrique propre incontestable.

Pour chaque problème, l'énoncé est suivi d'une condition de possibilité, qui est ainsi commentée : *chose qui est d'ailleurs (ou aussi) figurative.* Que cette précision soit due à Diophante ou à l'un de ses copistes importe peu : ce qui compte, c'est l'indication que la démarche numérique, neuve dans la forme théorique qu'elle prend, n'est pas pour autant détachée des mathématiques euclidiennes géométriques. La perception par Viète de ce lien profond entre Euclide et Diophante explique vraisemblablement, pour une part, la fécondité de son travail.

Nous ferons à nouveau le choix de présenter dans une forme un peu modernisée les démonstrations, parfois succinctes, de Diophante.

Le problème XXVII

Trouver deux nombres tels que leur somme et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le carré de la demi-somme des nombres à trouver excède d'un carré le produit de ces nombres ; chose qui est d'ailleurs figurative.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que leur produit forme 96 unités.

Que l'excédent des nombres soit 2 arithmes[22]*. [...]*

Une originalité notable de Diophante consiste à introduire une inconnue auxiliaire, qu'il nomme arithme. Puisque *l'excédent des nombres est 2 arithmes,* l'arithme désigne ici la demi-différence des nombres cherchés. Leur somme est donnée égale à 20 unités. Diophante établit avec une certaine insistance que 10 unités plus 1 arithme et 10 unités moins 1 arithme sont les deux nombres de somme 20 et de différence 2 arithmes que l'on cherche. Il leur impose d'avoir pour produit 96. De l'égalité à 96 du produit 100 unités moins 1 carré d'arithme, il déduit que l'arithme vaut 2 unités, le plus grand nombre 12 unités et le plus petit 8 unités, et que *ces nombres satisfont à la proposition.*

---

[21] GUILLEMOT M., « Un conte du lundi : A propos de Diophante d'Alexandrie », in *Mnémosyne* n° 14, IREM de Paris VII, juin 1998.

[22] DIOPHANTE, *Les Arithmétiques*, traduction P. Ver Eecke, Brouwer, Bruges, 1926, p. 36.

Une relecture de la proposition V du Livre II des *Eléments* d'Euclide permet d'illustrer à la fois la démarche calculatoire et la condition posée.

Fig. 1

Le segment AB étant coupé en parties égales au point C et en parties inégales au point D, on peut écrire :

$$DA.DB + CD^2 = CB^2$$

En côtésnstruisant L symétrique de D par rapport à C, on fait apparaître à côté de

la somme donnée $AB = DA + DB$, la différence $LD = DA - DB$.

La proposition 5 s'écrit alors

$$DA\,.\,DB + \left(\frac{LD}{2}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2,$$

soit encore

$$DA\,.\,DB + \left(\frac{DA - DB}{2}\right)^2 = \left(\frac{DA + DB}{2}\right)^2,$$

ce qui montre que l'on peut calculer la demi-différence, si le carré de la demi-somme excède d'un carré le produit des nombres. Il est difficile, à ce stade de la lecture, de se prononcer sur la nature de la restriction posée au départ dans le texte de Diophante, simple inégalité nécessaire ou, (non exclusif), condition de résolution en nombres entiers.

Le problème XXX

Le problème XXX n'est pas séparable du précédent.

Trouver deux nombres tels que leur différence et leur produit forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le quadruple produit des nombres, augmenté du carré de leur différence forme un carré ; chose qui est aussi figurative.

Proposons donc que la différence des nombres soit 4 unités, et que leur produit soit 96 unités.

Que la somme des nombres soit deux arithmes.

[...] et le plus grand nombre devient de nouveau 12 unités, et le plus petit 8 unités ; nombres qui satisfont au problème[23].

C'est la différence des nombres qui est connue ; l'arithme désigne ici leur demi-somme. Diophante établit que 1 arithme plus 2 unités et 1 arithme moins 2 unités sont les deux nombres de différence 4 unités et de somme 2 arithmes que l'on cherche ; 1 carré d'arithme moins 4 unités valant alors 96, 1 arithme vaut 10 unités, et l'on retrouve les nombres attendus.

Examinons de quelle façon une relecture de la proposition VI du Livre II des *Eléments* d'Euclide peut rendre compte de la situation :

[23] *Ibid.*, p. 40.

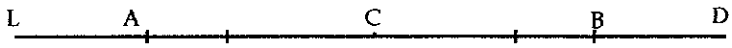


Fig. 2

Le segment AB est coupé en parties égales au point C et le point D est marqué sur la droite AB, à l'extérieur du segment. On peut écrire

$$DA.DB + CB^2 = CD^2$$

En construisant à nouveau L symétrique de D par rapport à C, on fait apparaître à côté de

la différence donnée AB = DA − DB, la somme LD = DA + DB.

La proposition 6 s'écrit alors

$$DA\ .DB + \left(\frac{AB}{2}\right)^2 = \left(\frac{LD}{2}\right)^2,$$

soit à nouveau

$$DA\ .DB + \left(\frac{DA - DB}{2}\right)^2 = \left(\frac{DA + DB}{2}\right)^2,$$

ou bien

$$4\,DA.DB + (DA - DB)^2 = (DA + DB)^2.$$

On obtient le carré de la demi-somme, comme somme du produit des nombres et du carré de la demi-différence ; il semble bien que la restriction posée dans le texte soit ici condition de résolution en nombres entiers.

Les problèmes XXVIII et XXIX

Ils ne sont pas séparables des précédents, ni séparables l'un de l'autre.

XXVIII :

Trouver deux nombres tels que leur somme et la somme de leurs carrés forment des nombres donnés.

Il faut toutefois que le double de la somme des carrés des nombres excède d'un carré le carré de la somme des nombres ; chose qui est aussi figurative.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que la somme de leurs carrés forme 208 unités.

Que la différence des nombres soit 2 arithmes. [...]

XXIX :

Trouver deux nombres tels que leur somme et la différence de leurs carrés forment des nombres donnés.

Proposons donc que la somme des nombres forme 20 unités, et que la différence des carrés des nombres forme 80 unités.

Que la différence des nombres soit 2 arithmes[24]*. [...]*

Certains commentateurs signalent le problème XXIX comme un problème du premier degré isolé parmi des problèmes du second degré, pour la raison, bien sûr, que la différence des nombres cherchés peut être obtenue directement comme quotient de la différence de leurs carrés par leur somme ; or ce n'est pas ainsi que Diophante procède. Sa solution est accordée aux trois autres et, en cela, tout à fait élégante. Pour les problèmes XXVIII et

---

[24] *Ibid.*, p. 38 et 39.

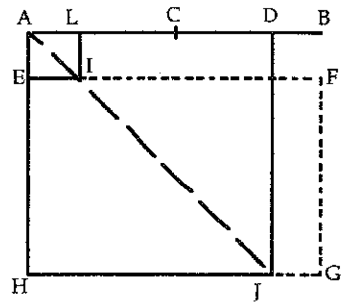
XXIX, la somme des nombres est donnée, et l'arithme désigne leur demi-différence. 10 unités plus 1 arithme et 10 unités moins 1 arithme sont à nouveau les deux nombres de somme 20 et de différence 2 arithmes que l'on cherche. La somme des carrés forme 2 carrés d'arithme plus 200 unités, égalée à 208 unités, dans le problème XXVIII ; la différence des carrés est 40 arithmes, égalée à 80 unités, dans le problème XXIX ; dans l'un et l'autre cas, l'arithme devient 2 unités, et la résolution est achevée.

Les propositions IX et X du Livre II des *Eléments* d'Euclide, sont susceptibles, ainsi que les propositions V et VI, d'une formulation moderne unique, attachée aux figures 1 et 2 respectivement, à savoir :

$$2\left(DA^2 + DB^2\right) = (DA + DB)^2 + (DA - DB)^2$$

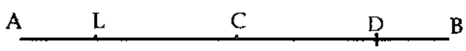
Cette relation peut illustrer la restriction que contient l'énoncé du problème XXVIII : la somme des nombres et la somme de leurs carrés étant données, on peut calculer leur différence, si le double de la somme des carrés excède d'un carré le carré de la somme des nombres.

Pour illustrer la spécificité de la démarche de Diophante dans la résolution du problème XXIX, nous prenons l'initiative de la figure suivante :



Pour connaître les grandeurs inconnues DA et DB, de somme donnée AB, il suffit de connaître leur différence LD. Or la **différence de leurs carrés**, qui est également donnée, apparaît comme **gnomon** LDJHEI, donc aussi comme rectangle EFGH, dont la longueur EF est la somme donnée et dont la largeur EH est la différence cherchée.

Alors que la méthode numérique, algébrique, pouvons-nous dire aujourd'hui, qui consiste à obtenir la différence des nombres cherchés comme **quotient** de la différence de leurs carrés par leur somme, échappe à toute visualisation, la solution proposée par Diophante suggère, dans sa forme même, le socle géométrique commun aux quatre problèmes que nous venons d'étudier. Viète utilisera dans les *Effections géométriques* la configuration



sur laquelle est lisible l'équivalence entre les deux systèmes :

$$\begin{cases} DA + DB = AB \\ DA - DB = LD \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} DA = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{LD}{2} \\ DB = \dfrac{AB}{2} - \dfrac{LD}{2} \end{cases}$$

II. La nature des obstacles

C'est en examinant un problème que pose Gosselin, au chapitre IIII du Livre III du *De Arte Magna,* (Paris, 1577), que nous allons initier la réflexion. Gosselin consacre le dit-chapitre à la résolution de *L'équation seconde.*

On parle d'équation seconde, quand de ces quantités, que sont quarrés, côtés, & nombres, l'une est finalement présentée égale aux deux autres, et comme cette équation peut prendre trois formes, nous donnerons aussi trois algorithmes, que nous démontrerons séparément[25].

Parce que Gosselin ne considère que des équations à coefficients tous positifs, il distingue, à la manière des Arabes, trois types d'équations quadratiques[26] à trois termes, respectivement, en écriture symbolique actuelle,

$$x^2 + dx = p \qquad (I)$$

$$x^2 = dx + p \qquad (II)$$

$$x^2 + p = sx \qquad (III)$$

où p, s et d sont des nombres positifs. Il en cherche les racines positives. Pour chaque type d'équation, il fait une étude en trois parties :

- la description de l'algorithme ; c'est un acquis historique qui ne retiendra pas notre attention dans le cadre de cet article.
- une « démonstration arithmétique » de l'algorithme, que Gosselin conduit en faisant référence à des propositions évidemment géométriques, au moins dans leur forme, du Livre II des *Eléments* d'Euclide ; c'est un travail original.
- la résolution d'un problème plus ou moins inattendu, c'est-à-dire sa mise en équation, et le calcul des racines grâce à l'algorithme décrit.

Les équations de type I et II ont une unique racine positive ; les équations de type III ont deux racines positives, ou exceptionnellement une seule[27].

Le problème d'application attaché au premier algorithme éveille la curiosité. En voici le texte, accompagné de sa traduction en termes actuels, sans arrêt sur l'algorithme lui-même :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 48 \\ xy + x + y = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y = s \\ x^2 + y^2 = 48 + s \\ xy = 31 - s \end{cases}$$

Utilisation de cet Algorithme. Problème <1>.

Cherchons deux nombres, tels que ces nombres mêmes étant retranchés de leurs quarrés, il reste 48, & que ceux-là mêmes étant ajoutés au résultat du produit de l'un par l'autre, il vienne 31.

Posons que les nombres ajoutés sont 1L[28]*, donc 48 P 1L seront égaux à leurs Quarrés, & 31 M 1L seront égaux au produit de l'un par l'autre, & ainsi 62 M 2L*

[25] GOSSELIN G., *De Arte Magna* , Paris, 1577, p. 57. Les traductions des extraits cités sont dues à la collaboration de J. Boyé, O. Kouteynikoff et H. Plane.

[26] Pour nommer les équations, nous préférerons, dans la suite du texte, le terme d'équation quadratique à celui d'équation du second degré à une inconnue, parce qu'il a le double mérite d'expliciter que le terme de plus haut degré de l'équation est le terme « carré de l'inconnue », et d'être utilisable pour tous les auteurs, y compris ceux qui n'ont pas adopté la notation numérotée des puissances de l'inconnue.

[27] Gosselin explique la racine double, mais ne parle pas du cas impossible.

$$\begin{cases} x+y=s \\ x^2+y^2=48+s \\ 2xy=62-2s \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=s \\ (x+y)^2=110-s \\ xy=31-s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s^2+s=110 \\ x+y=s \\ xy=31-s \end{cases}$$

$$\begin{cases} s=10 \\ x+y=10 \\ xy=21 \end{cases}$$

$$(x,y)=(3,7)$$

le seront au double du produit, mais d'après la quatrième <proposition> du second <livre des Eléments> d'Euclide, les Quarrés des parties avec le double du produit de l'une par l'autre sont égaux au Quarré du tout, or on a posé que le tout était 1L, donc 48 P 1L P 62 M 2L sont égaux à 1Q, c'est-à-dire 110 M 1L sont égaux à 1Q, & en ajoutant de part et d'autre 1L qui manque à l'un des deux membres, 110 sont égaux à 1Q P 1L ; et ainsi l'équation relève de cet algorithme,[...] c'est-à-dire 10, & c'est la valeur du côté, donc la somme de ces nombres que nous avons posée être 1L est 10, ainsi le produit de l'un par l'autre est 31 M 10 c'est-à-dire 21, pour connaître ces nombres séparément, nous partagerons 10 en deux parties de sorte que le produit de l'une par l'autre soit 21 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier <du Grand Art>, & ces parties seront les nombres 3 & 7 qu'il fallait trouver, & ce calcul est beaucoup plus facile que celui qui est transmis par Peletier à la question 5 de l'équation composée[29].

C'est ici que Gosselin nous surprend puisqu'il achève la résolution en affirmant que les parties de 10 dont le produit est 21 sont 3 et 7 ; il dit avoir traité la question au chapitre XIIII du Livre I de son *Grand Art*.

Or c'est le chapitre intitulé *La division des raisons*, dont la teneur semble réduite à la première lecture. Après avoir introduit le chapitre en soulignant l'intérêt, pour la division des raisons, de la technique d'insertion des moyennes proportionnelles, Gosselin résout l'insertion entre deux nombres donnés, d'une moyenne proportionnelle, puis celle de deux moyennes proportionnelles. Avec les deux outils dont il dispose alors, il traite, de manière inégalement rigoureuse, l'insertion de trois, quatre et cinq moyennes proportionnelles. Il termine le chapitre en résolvant deux problèmes :

- le partage de 10 en deux parties dont la moyenne proportionnelle est 4
- la recherche pour trois nombres donnés de leur quatrième proportionnelle.

Le premier problème semble être l'extrait du chapitre le plus proche de nos préoccupations.

$$\begin{cases} x+y=10 \\ \sqrt{xy}=4 \end{cases}$$

$$4^2<\left(\frac{10}{2}\right)^2 \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=4^2 \end{cases}$$

$$\left(\frac{10}{2}\right)^2-4^2=3^2 \qquad (2)$$

$$5+3=8$$

$$5-3=2$$

$$\frac{4}{2}=\frac{8}{4}$$

Problème.

Partageons 10 en deux parties, de façon que 4 soit le nombre milieu proportionnel entre elles. Or il faut que le quarré de ce nombre, soit moindre que le quarré de la moitié du nombre 10 qu'on se propose de diviser. De fait ceci n'est rien d'autre que diviser 10 en deux parties, de façon que multipliées l'une par l'autre elles fassent 16 quarré de 4, et voici ce que commande la cinquième proposition du second <Livre> d'Euclide, nous calculerons le quarré de la moitié de 10, c'est-à-dire de 5, bien sûr 25, nous en retrancherons 16 quarré de 4, resteront 9, dont le côté-Quarré est 3, nous ajouterons 3 à 5, ils feront 8, la partie majeure évidemment, nous enlèverons 3 de 5, il restera la partie mineure 2, et entre 2 & 8 s'intercale 4 le nombre milieu proportionnel[30].

---

[28] Nous avons fait le choix, pour la traduction, de garder les notations latines de Gosselin : Q pour Quadratus, le carré inconnu, et L pour Latus, le côté inconnu (du carré inconnu).

[29] GOSSELIN G., *op. cité*, p. 59.

[30] *Ibid.*, p. 19.

Cette démarche calculatoire confirme l'influence de Diophante, que Gosselin connaît, comme l'atteste le titre complet de son traité[31]. Pour trouver les deux nombres de somme 10 et de produit 16, Gosselin calcule le carré de leur demi-différence en retranchant leur produit du carré de leur demi-somme. Il obtient alors le grand nombre en ajoutant la demi-différence à la demi-somme, le petit en retranchant la demi-différence de la demi-somme. C'est bien ainsi que Diophante procède pour la résolution du problème XXVII. Quant à la référence à la proposition (II, V) des *Eléments* d'Euclide que Gosselin fait ici, elle nous avait semblé naturelle dans la présentation du problème XXVII, tant pour soutenir le calcul (2), que pour illustrer la condition (1).

Donc, on identifie bien ici la technique de calcul de Diophante pour le partage d'une somme en deux parties dont on connaît le produit, mais cette observation reste vraisemblablement incomplète, pour deux raisons :

~ La place de la question du partage dans le chapitre sur *La division des raisons* ne s'en trouve pas éclaircie.

~ La façon dont Gosselin traite, dans le chapitre sur *L'équation seconde*, en application du troisième algorithme, la recherche de deux nombres connaissant leur somme et la somme de leurs carrés est trop différente de la résolution du problème XXVIII par Diophante, pour ne pas suggérer une préoccupation propre à Gosselin. Nous y reviendrons.

La remarque que fait Gosselin en achevant la résolution du problème I ouvre une piste inattendue. Il souligne que son calcul est beaucoup plus simple que celui de Peletier, qui traite la même question comme exemple de problème à plusieurs inconnues, au chapitre XXX du premier livre de son *Algebre*.

Exemple V.

Il y a deux nombres, lesquels soustraicts de leurs quarrés, laissent 48 : & adjoustés au produit de la multiplication des deux l'un par l'autre, font 31 : Qui sont ces deux nombres[32] *?*

De fait, Peletier introduit trois inconnues pour résoudre ce problème : 1℞, la racine de l'équation résolvante, de carré 1₵, pour le premier nombre cherché, 1A pour le second nombre cherché, et 1B pour la somme des deux nombres. Nous ne nous attarderons pas ici sur cet aspect des choses, quoique fort intéressant en soit[33].

Avant d'entamer la résolution, Peletier rappelle *deux reigles de l'Algebre, la quatrieme proposition du second livre d'Euclide,* puis

[...] que deux nombres multipliés l'un par l'autre, produisent le milieu proportional entre leurs deux quarrés. Comme, 4 multipliés par 5, font 20 : qui sera milieu proportional entre 16 & 25[34] *[...]*

---

[31] Gosselin y annonce la présentation d'équations de Diophante.

[32] PELETIER DU MANS J., *Algebre*, 1554, réédition Jean de Tournes, 1620, p. 112.

[33] RADFORD L., « L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 81 à 98.

[34] PELETIER DU MANS J., *op. cité*, p. 113.

renvoyant, *pour demonstrance oculaire* de la propriété, à la figure de la proposition (II, IV) des *Eléments* d'Euclide, sur laquelle nous avons plus haut mis en évidence cette proportionnalité.

Pour la résolution elle-même, Peletier établit d'abord, comme Gosselin, et sans que ses calculs ne présentent de particularité importante pour notre sujet, que la somme des nombres fait 10 et que le produit de l'un par l'autre vaut 21. Mais l'exploitation de ce résultat partiel est à première vue différente chez l'un et l'autre auteurs. La technique de Gosselin, qui consiste à renvoyer au chapitre sur *La division des raisons*, nous a d'emblée intrigués. La méthode de Peletier, que nous allons détailler maintenant, a également de quoi surprendre puisqu'elle comporte la résolution d'une équation bicarrée.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 48 \\ xy + x + y = 31 \end{cases}$$

$$\begin{cases} s = x + y = 10 \\ xy = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 48 + 10 = 58 \\ x^2y^2 = 21^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2 = 58 - x^2 \\ x^2\left(58 - x^2\right) = 441 \end{cases}$$

$$x^2x^2 = 58x^2 - 441$$

$$x^2 = 49 \quad \text{ou} \quad x^2 = 9$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = 3 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$$

Donc, puis que je sçay que 1B fait 10 : par mesme moyen, je sçay que le suppliment, qui est 31 m.1B, fera 21 : & les deux quarrés, sçavoir est, 48 p.1B, feront 58. Donc le second quarré, qui est 48 p.1B m.1Ç fera 58 m.1C. Or, par ce que 21 est milieu proportional entre 1C & 58 m.1C, il s'ensuit qu'en multipliant 1C par 58 m.1C le produit, qui est 58C m.1CC, sera egal au quarré de 21 : sçavoir est à 441. Et par deuë transposition, 1CC sera egal à 58C m.441[35]*. Duquel premierement faut tirer la R censique : c'est 49, pour la plus grande (car il y en a deux, à cause du signe m.) & la moindre sera 9. Donc, si vous prenez la R de 49 : vous aurez 7, pour le plus grand de vos deux nombres : Et le moindre sera 3 (car tous deux font 10.) Ou bien, si vous prenez la R de 9 : vous aurez 3 pour le moindre nombre : & le plus grand sera 7.*
Cette question est belle [...]. Elle est de Stifel, seulement les nombres changés[36].

Remarquons que Peletier va jusqu'au bout de la résolution, et exploite les deux racines de l'équation bicarrée. Mais, compte tenu du degré de l'équation, nous sommes encore loin de l'équivalence visée entre la recherche de deux nombres de somme et de produit donnés, et la résolution de l'équation quadratique associée.

Ainsi le développement de Peletier nous éclaire sur la nature de la simplification apportée par Gosselin : il s'agit, en termes modernes, d'un abaissement du degré algébrique du problème. Le résultat déjà évoqué, par lequel Gosselin ouvre le chapitre sur *La division des raisons*, y apporte une contribution simple mais déterminante :

Deux nombres étant donnés, trouver une moyenne proportionnelle.
Cherchons la moyenne proportionnelle entre 4 & 9. Nous multiplierons 4 par 9, cela fera le nombre 36, dont le côté-Quarré est 6, le nombre demandé, tel que la raison de 4 à 6 soit la même que de 6 à 9. Trouvons la moyenne

[35] Peletier écrit les équations à la manière de Michael Stifel (1487-1567), en isolant le terme de plus haut degré, ce qui suppose de s'être familiarisé avec les coefficients négatifs. Il résout donc les équations quadratiques en appliquant la règle AMASIAS que Stifel a mise au point, et qu'il a décrite au chapitre III du livre III de son *Arithmetica integra*, (Nuremberg, 1544). C'est ce qui explique à la ligne suivante la référence au signe de (–441). La règle AMASIAS est présentée dans la rubrique « Conte du lundi » de cette brochure.
[36] PELETIER DU MANS J., *op. cité*, p. 115.

proportionnelle entre 5 & 7. Nous multiplierons 5 par 7, ils feront 35, & le côté de 35 est le nombre demandé, et la démonstration est évidente d'après la vingtième proposition du sixième <Livre> d'Euclide[37].

$\begin{cases} x^2+y^2=58 \\ xy=21 \end{cases}$	$\begin{cases} x^2+y^2=58 \\ x^2y^2=21^2 \end{cases}$	Peletier énonce et exploite que le produit de deux nombres est la moyenne proportionnelle entre leurs carrés.
$\begin{cases} x+y=10 \\ \sqrt{xy}=4 \end{cases}$	$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=4^2 \end{cases}$	Gosselin rappelle que la moyenne proportionnelle entre deux nombres est la racine carrée de leur produit.

L'un et l'autre auteurs expriment en termes de proportionnalité la propriété que le produit est connu. Plus rien d'étrange alors au fait que Gosselin place, à la fin du chapitre sur *La division des raisons*, la question du partage d'un nombre en deux parties de moyenne proportionnelle donnée, et qu'il y renvoie pour le partage d'une somme en deux nombres de produit donné.

A ce stade de l'étude, nous avons donc confirmation que Gosselin, s'il maîtrise la technique calculatoire du partage, ne recense pas le problème parmi ceux qui se résolvent par équation quadratique (de type III). Au contraire, la technique du partage est apparue, à la fin du problème I, comme un outil pour la résolution des équations quadratiques elles-mêmes ; et le rôle de cette technique reste exemplairement ambigu dans la démonstration arithmétique que Gosselin donne du troisième algorithme. Nous proposons des extraits de ce texte, suffisants pour montrer ce qui n'est pas dit ~pour aucune de ses démonstrations arithmétiques, Gosselin n'explicite la confrontation des valeurs issues de la démonstration, aux valeurs des racines que fournirait l'algorithme~ et nous résumons les étapes de la démarche, en termes actuels :

$32+x^2=18x$ $x=B$ $B.B+32=B.18$ $B.B+32=B.(B+18-B)$ $B.B+32=B.B+B.(18-B)$ $32=B.(18-B)$ $\left(\frac{18}{2}\right)^2-32=7^2$ $9+7=16$ $9-7=2$	*Soient 32 P 1Q égaux à 18L, ou bien le côté inconnu est plus grand que 18, ou égal, ou plus petit, on démontre qu'il n'est ni plus grand, ni égal, [...] il reste donc que le côté inconnu est plus petit que 18, soit précisément le nombre B & ainsi le nombre B multiplié par 18 sera égal au Quarré du nombre B, c'est-à-dire à B multiplié par B, & 32, [...] resteront 32 égaux au produit de B par 18 M B, or parce que le nombre 18 a été séparé en B & 18 M B, il s'ensuit que 32 est le nombre produit d'une partie de 18 par l'autre. Maintenant donc nous séparerons 18 en deux parties de sorte que le produit de l'une par l'autre soit 32 d'après le problème du chapitre 14 du livre premier <du Grand Art>, et les parties seront 2 & 16, & l'une et l'autre sont la valeur du côté inconnu*[38].

[37] GOSSELIN G., *op. cité*, p. 16. Les éditions des *Eléments* d'Euclide auxquelles nous faisons référence suggèrent plutôt un renvoi aux propositions XVI et XVII du Livre VI.
[38] GOSSELIN G., *op. cité*, p. 62.

En démontrant que résoudre l'équation $x^2 + 32 = 18x$, c'est partager 18 en deux parties de produit 32, Gosselin prend-il réellement conscience de la signification qu'ont les deux racines des équations de type III ? La réponse est incertaine, comme en témoigne la lecture du problème III ; lequel résout, aux valeurs numériques près, la même question que le problème XXVIII de Diophante.

$$\begin{cases} x + y = 17 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 17 - y \\ (17 - y)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 17 - y \\ 2y^2 - 34y + 289 = 169 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = 17 - y \\ y^2 + 60 = 17y \end{cases}$$
$$y = 5 \quad \text{ou} \quad y = 12$$

Utilisation du troisième Algorithme. Problème <III>.
[...]
Partageons 17 en deux parties de sorte que la somme des Quarrés soit 169. Nous aurons alors posé que l'une des parties est 1L, donc l'autre 17 M 1L, la somme des Quarrés est 2Q M 34L P 289 égale à 169, de part et d'autre retranchons 169 & ajoutons 34L, ils feront 34L égaux à 2Q P 120 et de plus la moitié sera égale à la moitié, c'est-à-dire 17L égaux à 1Q P 60, et ainsi l'équation relève de ce dernier algorithme, [...] il en résulte les parties 5 & 12 comme précédemment[39].

Belle aisance apparente : Gosselin cherche deux nombres de somme 17 et les obtient comme racines de l'équation quadratique de type III, $y^2 + 60 = 17y$. Un indice troublant pourtant : les racines fournies par l'algorithme sont précipitamment adoptées, *comme précédemment.* Il nous faut donc examiner ce qui précède, la première partie du texte que nous avons d'abord omise, dans la présentation du problème III :

$$\begin{cases} x - y = 7 \\ x^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = y + 7 \\ (y + 7)^2 + y^2 = 169 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = y + 7 \\ 2y^2 + 14y + 49 = 169 \end{cases}$$
$$\begin{cases} x = y + 7 \\ y^2 + 7y = 60 \end{cases}$$
$$\begin{cases} y = 5 \\ x = 5 + 7 = 12 \end{cases}$$

Cherchons deux nombres dont la différence soit 7, & tels que leurs Quarrés ajoutés soient égaux au Quarré de 13 c'est-à-dire à 169.
Posons que l'un des nombres est 1L, l'autre sera donc 1L P 7, leurs Quarrés sont 1Q, & 1Q P 14L P 49, leur somme est 2Q P 14L P 49 égale à 169, retranchons 49 de part et d'autre, resteront 2Q P 14L égaux à 120, donc la moitié sera égale à la moitié, évidemment 1Q P 7L égaux à 60, et ainsi l'équation relève du premier algorithme, procède selon celui-ci & tu trouveras que la valeur du côté est 5, & l'autre nombre 7 P 5 évidemment 12, cela va sans dire[40].

Ainsi, avant de traiter le problème qui conduit à une équation de type III, Gosselin résout dans le genre 'variation sur des valeurs numériques communes', un problème qui met en œuvre une équation de type I dont la racine unique fournit les nombres cherchés sans ambiguité ; il peut alors les adopter, sans risque d'erreur ou de contestation, comme solution du problème III.

---

[39] *Ibid.*, p. 63.
[40] *Ibid.*

En conclusion, Gosselin conduit une étude sérieuse et fouillée sur la résolution des équations quadratiques, mais il faut bien convenir qu'il paraît circonspect devant les équations de type III, et ceci, d'autant plus que la technique du partage reste un outil indépendant.

Stevin, quelques années plus tard, pose avec précision la question restée en suspens. Dans son *Arithmétique* écrite en français (Leyde, 1585), il consacre le problème LXVIII à la résolution des équations quadratiques à trois termes. Pour lui qui, à la manière de Stifel, s'est familiarisé avec les coefficients affectés d'un signe –, et qui, à la manière de Rafael Bombelli (1526–1573), a adopté l'écriture numérotée des puissances de l'inconnue, les équations quadratiques expriment toutes l'égalité d'un terme carré et d'un binôme ordonné du premier degré. Si Stevin distingue encore les trois équations que, en écriture symbolique actuelle, nous écrivons :

$x^2 = 4x + 12$	ou *premiere difference*
$x^2 = -6x + 16$	ou *deuxiesme difference*
$x^2 = 6x - 5$	ou *troisiesme difference*[41]

c'est, dit-il, uniquement par souci de les décrire, puisque leur résolution numérique se formule en une règle unique.

La règle « unique » est trois fois détaillée sous l'intitulé *Construction* ; les nombres obtenus font alors l'objet d'une vérification systématique dans la *Demonstration Arithmetique* ; suit pour chacune des trois « differences », une *Construction Geometrique*, essentielle au propos de Stevin, puisqu'il a l'ambition de montrer que les grandeurs géométriques et les grandeurs numériques sont susceptibles des mêmes traitements. Il ne calcule toujours que les racines positives.

Sans nous appesantir, dans le cadre de cet article, sur la formulation propre à Stevin, pour qui la recherche du nombre inconnu s'apparente à une recherche de quatrième proportionnelle, nous donnons sa conclusion après le calcul des racines de la troisième différence :

$$\frac{1x^2}{6x^1 - 5} = \frac{1x^1}{?}$$
$$?x,\ x^2 = 6x - 5$$

Explication du donné. Soyent donnez trois termes selon le probleme, tels : le premier 1(2), le second 6(1)–5, le troisiesme 1(1). Explication du requis. Il faut trouver leur quatriesme terme proportionel.
[...] Je di que & 5 & 1 est le quatriesme terme proportionel requis[42].

Il revient en fin de chapitre sur la signification de *la double solution de cette troisiesme difference*, et, pour persuader ses lecteurs que les deux racines ont du sens, il choisit l'exemple le plus probant qui soit, la résolution d'un partage de somme en deux nombres de produit donné :

41 STEVIN S., *Arithmétique*, Leyde, 1585, p. 285.
42 *Ibid.* p. 293.

NOTA 2. Quelqu'un pourroit doubter, que veult signifier la double solution de cette troisiesme difference (qui se peuvent rencontrer, comme en aucuns exemples suivans en six diverses sortes) & comment l'une & l'autre pourra estre bonne. Or combien que cecy apparoistra assez en diverses exemples d'algebre suivans ; Toutesfois pour ceux qui ce pendant pourroyent estre en doubte, nous en dirons icy quelque chose. Posons le cas, qu'il y a proposé de partir 6 en deux parties telles, que leur produict soit 8. On trouvera par la premiere maniere que l'une nombre requis sera 4, & par l'autre maniere, se trouvera 2. Mais que l'un & l'autre solution soit bonne, est manifeste. Car si on dict que l'un nombre est 4, doncques soubstraict 4 de 6, reste 2 pour l'autre nombre, lesquels 4 & 2 donnent produict selon le requis 8. Ou si on dict par la seconde maniere, que l'un nombre est 2, ergo soubstraict 2 de 6 reste 4 pour l'autre nombre, lesquels 2 & 4 donnent le mesme produict requis 8. En cette question doncques & semblables voit on l'usage de cette double solution[43].

La mise en équation n'est pas explicitée dans la note, mais le texte ne laisse pas de doute. Le partage de 6 en deux parties telles que leur produit soit 8 se résout en posant que l'une des parties est l'inconnue x ; l'autre est alors $6 - x$ et le produit des deux, $x(6 - x)$ vaut 8 ; l'équation quadratique $x^2 = 6x - 8$ admet les deux racines 4 et 2. Chacune séparément fournit entièrement la solution du problème à deux inconnues ; c'est ce que Stevin met en évidence ; ce faisant, il fait *voir l'usage de la double solution* qui, d'**un** coup, donne les **deux** parties cherchées.

Nous sommes ici au cœur de la question. Nous avons vu Gosselin mettre au point la technique du partage indépendamment de la résolution des équations quadratiques, mais transformer précautionneusement en un problème de partage la résolution d'une équation de type III. Stevin, dans le passage que nous venons de lire, montre inversement que les nombres du partage sont les racines d'une équation de type III, évidemment l'équation résolvante de l'introduction, et sa note constitue une phase repérable du rapprochement des deux problèmes.

Comment Viète franchit-il l'étape décisive ? Nous savons déjà que, travaillant sur une figure euclidienne et exploitant une configuration qui nous a semblé présente dans le texte de Diophante, il n'écarte aucune des contraintes que comporte l'héritage des Anciens.

A l'instar de ses prédécesseurs, il ne recherche toujours que les racines positives des équations quadratiques ; or historiquement, cette restriction a pu retarder l'intuition du lien entre les problèmes à deux inconnues et la résolution des équations quadratiques, pour la raison que celles-ci ont, de fait, plus souvent une unique racine (positive) que deux. Quant à la configuration de proportionnalité sur laquelle Viète fonde sa démonstration, elle n'est pas en soi garantie d'innovation : nous avons noté que c'est, pour une part, l'attachement de Gosselin à la moyenne proportionnelle qui explique la place à part dans son ouvrage, du problème du partage.

Le saut opéré par Viète, c'est la transcription algébrique de la situation géométrique : l'écriture symbolique des propriétés géométriques considérées provoque la visualisation de la structure du problème.

---

[43] *Ibid.* p. 297.

III. La solution de Viète

Quelques problèmes des *Zététiques*

Sans entrer ici dans les distinctions importantes mais délicates qu'exprime la terminologie adoptée par Viète, nous dirons seulement que les zététiques sont des problèmes, du grec *ζητεω, chercher*. Les *Cinq livres de Zététiques* constituent la troisième partie de l'*Algèbre Nouvelle*, vaste ouvrage pour lequel Viète prévoyait dix parties (nous disposons de sept d'entre elles), destinées à mettre en pratique, en géométrie et en algèbre, la méthode de représentation littérale qu'il avait élaborée.

Le zététique I du Livre I

Du Livre I, nous ne retiendrons pour notre travail, que le zététique I, préliminaire essentiel, puisqu'il permet de ramener, chaque fois que c'est possible, la recherche de deux nombres à celle de leur différence et de leur somme. Le texte en est simple et tout de même exemplaire du style de Viète ; le vocabulaire est géométrique, les consonnes sont utilisées pour représenter les grandeurs données et les voyelles désignent les inconnues.

Etant donné la différence des deux côtés, & leur somme, trouver les côtés.
Soit donnée B la différence des deux côtés, & donnée aussi D leur somme. Il faut trouver les côtés.
Que le petit côté soit A, ainsi le grand sera A+B. D'où la somme des côtés deux fois A+B. Laquelle donnée est D. C'est pourquoi deux fois A+B égale D. Et par antithèse, deux fois A égale D–B, & tous étant divisés par deux, A égalera la moitié de D, moins la moitié de B.
Ou bien, que le grand côté soit E. Ainsi le petit sera E–B. D'où la somme des côtés deux fois E, moins B. Laquelle donnée est D. C'est pourquoi deux fois E moins B égalera D. & par antithèse, deux fois E égalera D+B, & tous étant divisés par deux E égalera la moitié de D, plus la moitié de B.
Ainsi étant donné la différence des deux côtés & leur somme on trouve les côtés. En effet La moitié de la somme des côtés diminuée de la moitié de la différence est égale au petit côté, augmentée de la même chose, au grand.
Cela même que montre l'exemple.

Soit B 40. *D 100.* *A fait 30.* *E 70.*[44]

Les zététiques III et IIII du Livre II

Les zététiques II à VIII du Livre II se présentent comme une variation sur les valeurs 2 et 10 qu'il faut trouver en calculant leur différence 8 et leur somme 12, grâce à la donnée de deux des cinq valeurs des produit, somme des carrés, différence, somme, ou différence des carrés, des deux nombres « inconnus ».

Pour la recherche, au zététique II, de deux nombres dont on connaît le produit et la somme des carrés, Viète souligne la symétrie des rôles joués par la somme et la différence des nombres. Il explique :

Et en effet le double du plan sous les côtés s'il est ajouté à la somme des quarrés est égal au quarré de la somme des côtés. Mais retranché, au quarré de leur différence[45].

---

[44] VIETE F., *Zeteticorum libri quinque*, Tours, 1593, p. 1. Traduction des extraits par O.Kouteynikoff.
[45] *Ibid.*, p. 7.

Soit en termes actuels :

$$\left(x^2+y^2\right)+2xy=(x+y)^2 \text{ et } \left(x^2+y^2\right)-2xy=(x-y)^2$$

Les problèmes qui suivent sont groupés de façon à accentuer ce balancement somme-différence. Les zététiques III et IIII résolvent les deux problèmes dont nous suivons la trace : la recherche de deux nombres connaissant leur produit et leur différence puis leur somme. Ce sont les répliques, aux valeurs numériques près, des problèmes XXX et XXVII du Livre I des *Arithmétiques* de Diophante. Les zététiques V et VI résolvent la recherche de deux nombres connaissant la somme de leurs carrés et leur différence puis leur somme. Les zététiques VII et VIII enfin, résolvent la recherche de deux nombres connaissant la différence de leurs carrés et leur différence puis leur somme.

Les zététiques VI et VIII reprennent donc les problèmes XXVIII et XXIX des *Arithmétiques* de Diophante, que nous avons examinés plus haut. Mais à la différence de Diophante, Viète, l'inventeur de l'algèbre moderne, obtient la différence des nombres cherchés au zététique VIII, comme quotient de la différence de leurs carrés par leur somme, sans aucune référence géométrique même implicite.

Le zététique III

Etant donné le rectangle sous les côtés & la différence des côtés on trouve les côtés.

Et en effet le quarré de la différence des côtés ajouté au quadruple du rectangle sous les côtés est égal au quarré de la somme des côtés.

On a en effet déjà la règle, que le quarré de la somme des côtés moins le quarré de la différence égale le quadruple du rectangle sous les côtés, de sorte qu'il est besoin d'une seule antithèse. Ayant déjà la différence des deux côtés et aussi leur somme on a les côtés.

Soit 20 le rectangle sous les deux côtés dont la différence est 8. Que la somme des côtés soit 1N[46]*. 1Q égale 144.*

Le zététique IIII

Etant donné le rectangle sous les côtés & la somme des côtés on trouve les côtés.

Et en effet le quarré de la somme des côtés, moins le quadruple du rectangle sous les côtés, est égal au quarré de la différence des côtés.

Ce que à nouveau à partir de la règle qui vient d'être redonnée il est permis de produire par antithèse.

Soit 20 le rectangle sous les deux côtés dont la somme est 12. Que la différence des côtés soit 1N. 1Q égale 64.[47]

Soit en termes actuels :

la première règle $\qquad (x+y)^2-(x-y)^2=4xy$

par transposition $\qquad (x+y)^2=(x-y)^2+4xy \qquad$ (i)

qui permet de calculer le carré de la somme des nombres en fonction de leur produit et de leur différence,

---

[46] *N* désigne la quantité très temporairement inconnue qu'on obtient par son carré *Q*.

[47] VIETE F., *op. cité*, p. 7.

par nouvelle transposition $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2$ (ii)

qui permet de calculer le carré de la différence des nombres en fonction de leur produit et de leur somme.

Nous allons trouver dans les *Effections géométriques* des constructions dont le canevas est déjà lisible sur les relations (i) et (ii).

L'ALGEBRE
EFFECTIONS
Geometriques, & partie de l'Exegetique nombreuse de l'Illustre F. Viete.

Traduites de Latin en François, ou est adjouté des notes & Commentaires, & quantité de Problemes Zetetiques.

Par N. DVRRET, Cosmographe ordinaire du Roy.

A PARIS.
Aux despens de l'Autheur, chez lequel ils se vẽdent, & chez Gervais Alliot, au Palais, pres la Chapelle S. Michel, & chez la vefue Moreau rue S. Jacques au Globe.

M. DC. XLIV.

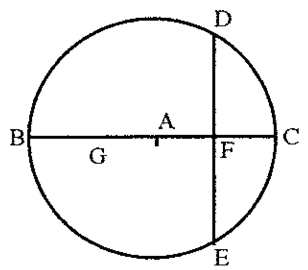
Avec Privilege du Roy.

Quelques propositions des *Effections géométriques*

Parmi les nombreux traducteurs et adaptateurs des travaux de Viète qui œuvrent au début du XVII[e] siècle, figure le cosmographe Noël Durret (1590–1650). Dans son *Algèbre* (Paris, 1644), il présente des parties importantes de l'*Algèbre nouvelle* de Viète ; la traduction française qu'il donne des *Effections géométriques* étant complète et fidèle[48], c'est de son texte que nous tirons les extraits cités.

Dans les six premières propositions des *Effections géométriques*, Viète rappelle des « effections canoniques » ; à partir de la proposition 7, il explique des effections *pas entierement régulieres, & toutesfois recommandables, à cause de leur frequent usage.* Nous ne lirons pas les propositions 1 et 2 qui donnent les *practiques de l'addition et de la soustraction.* La proposition 3 est incontournable, et difficilement séparable des propositions 5 et 6 ; l'ensemble est exemplaire de l'utilisation libre et panachée que fait Viète des différentes propositions des Livres II et VI des *Eléments* d'Euclide. Les propositions 9 à 13 constituent la contribution originale de Viète à la question que nous étudions.

La proposition 3



Descrire trois lignes droites proportionnelles.
Du centre A, de quelconque intervalle soit décrit un cercle, & soit mené le diametre BAC. Soient prises en parties contraires les arcs égaux CD, CE, & que DE conjointe coupe BC en F. Je dy qu'on a fait ce qu'il a fallu. Car BF, FD, FC sont proportionnelles[49].

Ce texte présente la configuration qui a retenu notre attention à la lecture de la proposition XIV du Livre II des *Eléments* d'Euclide, appelée *description canonique des trois proportionnelles* par Viète quand il y fait référence ensuite. Il s'agit ici de sa part d'un simple rappel pratique : un cercle, un diamètre et, en langage actuel, une « corde admettant le diamètre comme axe de symétrie » ; pas de référence théorique[50].

Les propositions 5 et 6

Ce sont des reconstitutions de la figure précédente, des constructions de la troisième grandeur quand deux sont données, les deux extrêmes, ou la moyenne et une extrême.

Pour FB et FC donnés, la proposition 5 construit le produit $FB.FC = FD^2$.

Pour FB et FD donnés, la proposition 6 construit le quotient $FC = \frac{1}{FB} . FD^2$.

---

[48] Voir LEFEBVRE J., « L'Algèbre de Noël Durret », in *Actes de la 6[e] Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, IREM de Franche-Comté, Besançon, 1995, p. 155.
[49] DURRET N., *L'Algebre, Effections geometriques, & partie de l'Exegetique nombreuse de l'Illustre F. Viete*, Paris, 1644, p. 86.
[50] Pour une démonstration « très programme », qui n'est aucune de celles d'Euclide, il suffit de développer le carré $BC^2 = (BF + FC)^2$, puis d'écrire l'égalité de Pythagore dans les triangles BDC, BFD et CFD. L'égalité $FD^2 = FB.FC$ en résulte.

La proposition 5

Estant données deux lignes droites, trouver la moyenne proportionnelle entre icelles.

C'est la practique de la multiplication. Car il a esté enseigné que le plan des extremes est égal au quarré de la moyenne.

Soient en la figure précédente les deux lignes droites données BF, FC, & il faut trouver la moyenne proportionnelle entre icelles.

Soit continuée BF de la longueur de FC, & coupée BC en deux également au poinct A. Et du centre A, de l'intervalle AB, ou AC soit descrit un cercle, & du point F soit élevée FD perpendiculaire à BC coupant la circonférence en D. Je dy qu'on a fait ce qui estoit requis.

Car DF est la moyenne requise, comme il est évident par la description canonique des trois proportionnelles.

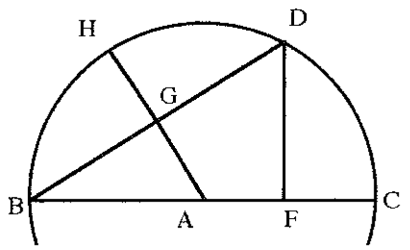
Ainsi l'on donne un quarré égal à un plan donné[51].

Viète reproduit fidèlement la construction deux fois décrite par Euclide, et prend la liberté de proposer *simultanément* les deux registres d'interprétation :

~ le carré de la grandeur construite est égal au produit des deux grandeurs données, (proposition XIV du Livre II des *Eléments*)

~ la grandeur construite est la moyenne proportionnelle entre les deux grandeurs données, (proposition XIII du Livre VI).

La proposition 6



Estant données deux lignes droites, trouver la troisiesme proportionnelle. C'est la practique de l'application ou division. Car cela est appliquer un plan donné ou un quarré <égal>[52] *à un plan à une ligne droite ; & monstrer la latitude qui en vient.*

C'est à dire qu'on applique le quarré de la moyenne à la premiere, & il en vient la troisiesme.

Soit les deux lignes droites données BF, FD. Il faut trouver la troisiesme proportionnelle. Soient inclinées à angles droites BF, FD, & soit menée BD, laquelle soit coupée à angles droites par la droite AH, coupant la mesme BD en G, & BF en A. Et du centre A, de l'intervalle AB, ou AD, soit descrit un cercle, à la circonférence duquel soit prolongée BF, jusqu'en C. Je dy qu'on a fait ce qui a esté proposé. Car FC est la troisiesme proportionnelle requise aux données BF, BD, comme il est evident par la description canonique des trois proportionnelles[53].

[51] DURRET N., *op. cité*, p. 87 et 88.

[52] La correction est faite d'après : VIETE F.,*The analytic art*, translated by T. Richard Witmer, Kent State University Press, Kent, 1983.

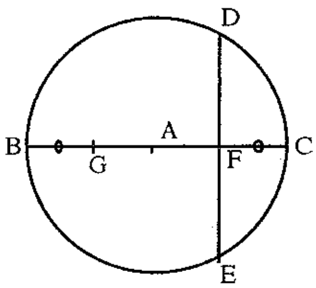
[53] DURRET N., *op. cité*, p. 89.

L'algébriste Viète ne retient pas ici la construction de la troisième proportionnelle[54] proposée par Euclide à la proposition XI du Livre VI. Parce qu'il a le souci de donner la technique de la division après avoir donné celle de la multiplication, celui de construire le quotient-droite d'une grandeur-plane par une grandeur-droite après avoir construit le produit-plan de deux grandeurs-droites, il donne pour les propositions 5 et 6 des constructions qui se répondent.

A noter une certaine imprécision des consignes, bien faite pour nous rappeler que la rigueur est une qualité toute relative, fonction du niveau de développement du cadre théorique, de la richesse des modes d'expression disponibles, et des exigences que l'on se fixe.

Les propositions 9, 10, 11

Les propositions 9, 10 et 11 ne sont pas des constructions. En mettant en jeu la somme et la différence des extrêmes, Viète fait émerger de la situation de proportionnalité initiale des relations d'égalités entre grandeurs planes, carrés ou rectangles : relations encombrantes dans leur formulation rhétorique, mais susceptibles d'une écriture algébrique simple qui leur donne leur forme d'équations quadratiques. Elles établissent trois résultats similaires, dont nous donnons les énoncés, et, en langage actuel, un schéma démonstratif.



Nous savons que :

$FB \,.\, FC = FD^2$ (1)

$FB + FC = BC$ (2) & $FB - FC = FG$ (3).

Les égalités (2) et (3) permettent d'écrire :

$FB = BC - FC$ (2') & $FC = BC - FB$ (2"),

$FB = FG + FC$ (3') & $FC = FB - FG$ (3"),

respectivement.

En remplaçant, dans la relation fondamentale $FB \,.\, FC = FD^2$, chaque extrême FB (colonne (')) ou FC (colonne (")) par son expression en fonction de la somme BC (ligne (2)) ou de la différence FG (ligne (3)), nous obtenons les résultats que Viète énonce ainsi :

Proposition 9

S'il y a trois lignes droites proportionnelles, le quarré de la moindre extreme adjoint au rectangle sous la différence des extremes & la mesme mineure extreme est égal au quarré de la moyenne[55].

(1) et (3') $\Rightarrow$ $(FG + FC) \,.\, FC = FD^2 \Rightarrow$ $FG \,.\, FC + FC^2 = FD^2$ (Prop. 9)

Proposition 10

S'il y a trois lignes droites proportionnelles, le quarré de la majeure extreme diminué du rectangle sous la différence des extremes, & sous la mesme majeure extreme, est égal au quarré de la moyenne[56].

(1) et (3") $\Rightarrow$ $FB \,.\, (FB - FG) = FD^2 \Rightarrow$ $FB^2 - FB \,.\, FG = FD^2$ (Prop. 10)

[54] C'est une construction de triangles semblables.
[55] DURRET N., *op. cité*, p. 94.
[56] *Ibid.* p. 96.

Proposition 11

S'il y a trois lignes droites proportionnelles, le rectangle sous la composée des extremes, & de l'une de celles-cy majeure ou mineure, diminué du quarré de la mesme extreme, est égal au rectangle sous les extremes[57].

(1) et (2')	$\Rightarrow$	$(BC-FC) \,.\, FC = FD^2$	$\Rightarrow$	$BC \,.\, FC - FC^2 = FB \,.\, FC$	(Prop. 11)
(1) et (2")	$\Rightarrow$	$FB \,.\, (BC-FB) = FD^2$	$\Rightarrow$	$FB \,.\, BC - FB^2 = FB \,.\, FC$	(Prop. 11)

Il reste à comprendre les relations obtenues.

Si dans l'égalité $FG \,.\, FC + FC^2 = FD^2$ (Prop.9),
nous posons $FC = a$, $FG = b$ et $FD = d$,
il vient $ba + a^2 = d^2$, équation quadratique de type I.
Il apparaît alors que chercher a connaissant b et d, c'est chercher FC connaissant FG et FD.

De même pour l'égalité $FB^2 - FB \,.\, FG = FD^2$ (Prop. 10),
en posant $FB = a$ et, à nouveau, $FG = b$ et $FD = d$,
nous obtenons $a^2 - ab = d^2$, équation quadratique de type II,
et chercher a connaissant b et d, c'est chercher FB connaissant FG et FD.

Ainsi la résolution d'une équation de type I ou II s'interprète comme la recherche d'une extrême, la mineure ou la majeure, connaissant la moyenne proportionnelle et la différence des extrêmes. C'est ce qu'énoncent les textes par lesquels Viète achève le développement des propositions 9 et 10. On passe de l'un à l'autre par simple ajustement de termes et de notations. Voici la conclusion de la proposition 9 :

Parquoy quand on proposera a quarré, plus b en a estre égal à d quarré, on entendra d moyenne entre les extremes, b la différence d'icelles. Et de la moyenne & différence des extremes on cherchera les extremes, dont la moindre dont est question sera a.
Comme icy estant données GF, FD, on construira les proportionnelles BF, FD, FC, & FC sera la moindre requise. Comme on peut voir es Zetetiques, & que maintenant la figure géométrique le demonstre par la synthese, ou composition[58].

Cette dernière remarque entrouvre la question délicate des différents modes analytiques et synthétiques selon Viète : de façon très schématique, on peut dire que la démarche algébrique est analytique puisqu'elle procède par conditions nécessaires, en opérant sur des quantités inconnues comme si elles étaient connues et que la démarche géométrique est synthétique dans la mesure où elle donne à voir le problème résolu.

[57] *Ibid.* p. 98.
[58] *Ibid.* p. 95.

Les résultats de la proposition 11 s'interprètent de la même manière. Si dans les égalités :

$$BC \cdot FC - FC^2 = FD^2 \quad \text{ou} \quad FB \cdot BC - FB^2 = FD^2,$$

nous posons $BC = b$, $FD = d$

et $FC = a$ ou $FB = a$ respectivement,

nous obtenons, dans les deux cas, $ba - a^2 = d^2$

équation quadratique de type III, dont la résolution se ramène à la recherche de FB et FC connaissant FD et BC.

Ainsi toute équation de type III s'interprète comme la recherche de deux extrêmes connaissant leur moyenne proportionnelle et leur somme, ce que Viète formule ainsi :

Parquoy quand on proposera ba–aq ég. dq[59] *on entendra d moyenne entre les extremes, b l'aggregé des mesmes. Et de la moyenne & aggregé des extremes on cherchera les extremes, desquelles l'une ou l'autre dont est question sera d*[60].

Les trois résultats qui viennent d'être établis appellent les constructions que Viète décrit maintenant.

Les propositions 12 et 13

Ce sont à nouveau des reconstitutions de la figure de référence. Quand Viète construit les extrêmes connaissant leur moyenne et leur différence, il construit la racine des équations de type I et II ; quand il construit les extrêmes connaissant leur moyenne et leur somme, il construit les racines de l'équation de type III.

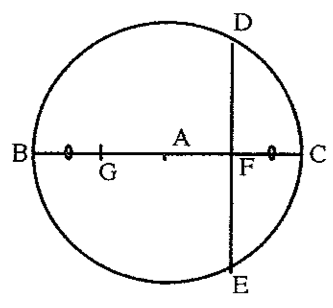
Proposition 12

Estant donnée la moyenne des trois proportionelles, & la différence des extremes, trouver les extremes.

Soit prise la fig. de la prop. 10.

[...] Soit donnée FD la moyenne des trois proportionelles, & GF la difference des extremes, il faut trouver les extremes.

Soient inclinées GF, FD à angles droits, & soit coupée GF en deux egalement en A. Et du centre A, de l'intervalle AD, soit décrit un cercle, à la circonference duquel soient prolongez AG, AF, és points B, C. Je dy qu'on a fait ce qui a esté requis. Car les extremes qu'il falloit trouver sont BF, FC, entre lesquelles la moyenne proportionelle est FD. Es icelles BF, FC different de la longueur de FG ; puisque AB & AC, ont esté construites egales. Parquoy ostant les egales AG, AF des egales AB, AC, les restes BG, FC sont egales. Et GF est la difference entre BF, & BG, ou FC. Ce qu'il falloit demonstrer[61].



$$AF^2 + FD^2 = AD^2 \qquad \text{(i)}$$

Le carré de la demi-somme AD s'obtient comme somme du produit FD² et du carré de la demi-différence AF, selon le schéma du zététique III.

---

59 *aq* et *dq* abrègent les *a quarré* et *b quarré* de l'extrait précédent.

60 DURRET N., *op. cité*, p. 100.

61 *Ibid.* p. 101.

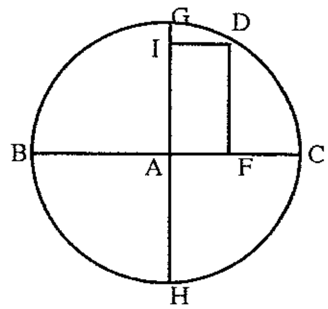
Proposition 13.

Estant donnée la moyenne des trois proportionelles, & l'aggregé des extremes, trouver les extremes.

[...] Soit donnée E la moyenne des trois proportionelles. Et BC l'aggregé des extremes, il faut trouver les extremes.

Soit coupée BC en deux egalement en A. Et du centre A, de l'intervalle AB ou AC soit décrit un cercle. Mais qu'un autre diametre GAH coupe le diametre BAC à angles droits, & de AG, soit retranché AI, egale à la ligne donnée E. Et par I, soit menée la droite ID parallele à BC, coupant la circonference au point D, duquel soit abbaissée la ligne DF perpendiculaire à BC, egale & parallele à IA.

Je dy qu'on a fait ce qui a esté requis. Car les extremes requises sont BF, FC, dont la composée est BC, donnée. Et se fait DF ou IA moyenne entre les proportionelles[62].



$$AD^2 - FD^2 = AF^2 \qquad \text{(ii)}$$

Le carré de la demi-différence AF s'obtient en retranchant le produit FD^2 du carré de la demi-somme AD, selon le schéma du zététique IIII.

C'est ainsi que sur une forme géométrique ancestrale, la représentation canonique de trois grandeurs proportionnelles, Viète met en jeu la somme et la différence des extrêmes, et, par là, obtient des relations géométriques nouvelles. En écrivant algébriquement ces relations nouvelles, il démontre que chercher les racines d'une équation quadratique, c'est chercher des grandeurs dont on connaît la moyenne donc le produit, et la somme ou la différence. Le résultat établi pourrait sembler partiel puisque Viète raisonne exclusivement sur des grandeurs positives ; ce résultat a pourtant, dans sa forme algébrique, la portée que nous lui connaissons actuellement.

En effet l'équation quadratique générale

$$x^2 + ax + b = 0$$

est susceptible de l'une ou l'autre écriture

$$x\,(x + a) = -\,b \qquad (1) \qquad\qquad \text{ou} \qquad\qquad x\,[(-\,a) - x] = b \qquad (2)$$

et résoudre l'équation sous la forme (1), c'est chercher des nombres dont on connaît le produit $(-b)$ et la différence a ; la résoudre sous la forme (2), c'est chercher des nombres dont on connaît le produit b et la somme $-a$. Nous reconnaissons, exprimés de façon synthétique, les résultats rappelés dans l'introduction par le biais de démarches purement calculatoires de type analytique.

Cette correspondance fondamentale entre la recherche de **deux nombres** connaissant leur produit et leur somme ou leur différence, et la résolution d'une équation du second degré à **une inconnue**, qui n'entrait pas dans le champ des préoccupations de Gosselin, mais que Stevin entrevoyait, s'est imposée à travers les situations de proportionnalité que Viète a étudiées et que les relations (1) et (2) transcrivent.

---

[62] *Ibid.* p. 102.

Bibliographie

DIOPHANTE, *Les Arithmétiques*, traduction P. Ver Eecke, Brouwer, Bruges, 1926.

DURRET N., *L'Algebre, Effections geometriques, & partie de l'Exegetique nombreuse de l'Illustre F. Viete*, Paris, 1644.

EUCLIDE, *Les Œuvres*, traduction F. Peyrard, Paris, 1819, réédition Blanchard, Paris, 1993.

EUCLIDE, *Les Eléments*, traduction et commentaires B. Vitrac, P.U.F., Paris, 1994.

GOSSELIN G., *De Arte Magna*, Paris, 1577.

GREGOIRE M., « Dans nos classes : La section dorée dans les *Eléments* d'Euclide », in *Mnémosyne* n° 1, IREM de Paris VII, avril 1992.

GUILLEMOT M., « Un conte du lundi : A propos de Diophante d'Alexandrie », in *Mnémosyne* n° 14, IREM de Paris VII, juin 1998.

KLEIN J., *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra*, M.I.T. PRESS, Cambridge (Mass.), and London (Engl.), 1968.

KOUTEYNIKOFF O., « Aspects du rôle de la géométrie dans la construction de l'algèbre : Regard historique sur la résolution des équations du second degré », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 99 à 124.

LEFEBVRE J., « L'Algèbre de Noël Durret », in *Actes de la 6e Université d'été interdisciplinaire sur l'histoire des mathématiques*, IREM de Franche-Comté, Besançon, 1995, p. 153 à 165.

PELETIER DU MANS J., *Algebre*, 1554, réédition Jean de Tournes, 1620.

RADFORD L., « L'invention d'une idée mathématique : la deuxième inconnue en algèbre », in *Repères-IREM*, n° 28, juillet 1997, p. 81 à 98.

STEVIN S., *Arithmétique*, Leyde, 1585.

STEVIN S., « Arithmétique » in *The Principal Works of Simon Stevin*, edited by D.J.Struik, Amsterdam, 1958, vol. II, p. 477 à 745.

STIFEL M., *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544.

TANNERY P., « De la solution géométrique des problèmes du second degré avant Euclide », in *Mémoires de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1882, réédition *Mémoires scientifiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1912, t. I, p. 254 à 280.

VIETE F., *Opus Restitutae Mathematicae Analyseos, seu Algebra Nova :*

3. *Zeteticorum libri quinque*, Tours, 1593

7. *Effectionum geometricarum canonica recensio*, Tours, 1593.

VIETE F., *The analytic art*, translated by T. Richard Witmer, Kent State University Press, Kent, 1983.

ZEUTHEN H.G., *Histoire des Mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen-Age*, Paris, 1902.

Extrait de BOYER J., *Histoire des mathématiques*, G. Carré et C Naud éditeurs, Paris, 1900

PREMIER CONTE DU LUNDI

MICHAEL STIFEL, ALGEBRISTE DE LA RENAISSANCE
« L'extraction des racines des nombres cossiques »

Odile Kouteynikoff

ARITHMETI-
CA INTEGRA.

Authore Michaele Stifelio.

Cum præfatione Philippi Melanchthonis.

Norimbergæ apud Iohan. Petreium.
Anno Christi M. D. XLIIII.

Cum gratia & priuilegio Cæsarco
atq; Regio ad Sexennium.

L'*Arithmetica Integra* (Nuremberg, 1544) du mathématicien et théologien allemand Michael STIFEL (1487-1567) est une synthèse des connaissances de son époque, en arithmétique et en algèbre, augmentée de contributions personnelles importantes.

Stifel consacre le chapitre IIII du Livre Trois de son ouvrage à l'étude des équations quadratiques[1] à trois termes, dans les registres numérique et géométrique.

Calculant avec les nombres négatifs et ayant le souci d'élaborer des règles générales, il présente, pour leur résolution algébrique, la fameuse « règle AMASIAS » ; c'est un algorithme positionnel en cinq étapes que nous allons examiner.

Mais Stifel n'est pas seulement un algébriste habile ; c'est un mathématicien qui explore la correspondance entre les figures et les nombres. Il ne lui suffit pas de donner les incontournables validations géométriques des résolutions numériques ; il montre aussi comment on peut, à partir de figures, fabriquer des équations dont on connaît d'abord les solutions. Réglant un jeu entre les figures et les nombres, il revitalise l'outil géométrique au sein de l'algèbre qui s'élabore à la Renaissance.

I. La règle AMASIAS

Stifel a adopté l'usage des nombres négatifs et mis en place un système de notations pour l'inconnue et ses puissances, 1X pour l'inconnue, 1ʒ pour son carré, 1℘ pour son cube. Il utilise les signes + et − mais écrit « égale » en toutes lettres que nous abrégeons en « eg » dans notre transcription. Il s'intéresse à la recherche des racines positives exclusivement.

Au chapitre I du Livre Trois, Stifel a énoncé « la règle de l'Algèbre » pour la résolution des problèmes : poser que la chose inconnue est « la coss » notée 1X, traduire le problème par une équation et réduire cette équation, en isoler le « signe cossique majeur » (le terme de plus haut degré) dont on a rendu par division le coefficient égal à un, et extraire la racine correspondante du « reste de l'équation » (le second membre de l'égalité).

Le chapitre IIII auquel nous nous intéressons a pour titre « L'extraction des racines des nombres cossiques ». Il traite de la résolution des équations quadratiques à trois termes, présentée comme extraction de la racine <carrée> d'expressions contenant l'inconnue (nos actuels binômes du premier degré).

Stifel résout par la règle AMASIAS les trois équations quadratiques

1ʒ eg 84−8X **(I)**, 1ʒ eg 8X+48 **(II)** et 1ʒ eg 18X−72 **(III)**,

lesquelles diffèrent par les places dans le second membre des coefficients précédés ou non d'un signe −. Ce sont les équations, qu'en termes actuels nous pouvons écrire

$$x^2 + 8x = 84 \quad , \quad x^2 = 8x + 48 \quad \text{et} \quad x^2 + 72 = 18x$$

pour lesquelles d'autres mathématiciens, contemporains de Stifel mais n'admettant pas l'usage des coefficients négatifs, développent trois algorithmes différents.

Voici l'exposé de la règle[2] :

---

[1] celles dont le terme de plus haut degré est le terme « quarré de l'inconnue ». C'est l'appellation que nous choisissons de privilégier pour lire un auteur qui n'a pas adopté une notation numérotée des puissances de l'inconnue.

S uit la méthode d'extraction.

Premièrement. D'A bord prends le nombre des racines, et l'ayant divisé par deux, à sa place, pose sa moitié, qui restera à sa place jusqu'à ce que l'opération entière soit achevée.

Deuxièmement. M ultiplie au carré le nombre moitié que tu as posé.

Troisièmement. A joute ou S oustrais selon l'exigence du signe d'addition ou du signe de soustraction.

Quatrièmement. Il faut chercher la racine carrée de la somme de ton addition ou du reste de ta soustraction.

Cinquièmement. A joute ou S oustrais selon l'exigence du signe ou de ton exemple.

Cette méthode d'extraction, je l'ai façonnée pour toi, mon bon Lecteur, de façon qu'elle puisse s'attacher solidement à ta mémoire au moyen du mot A M A S I A S. *Ainsi* A *signifie premier point (on commence par* A*) et enseigne la position de la moitié du nombre des racines. La lettre* M *représente le second point, qui commande la multiplication.* A & S *représentent le troisième point qui requiert soit une addition soit une soustraction selon l'exigence du cas (ainsi que les exemples le rendront clair). La lettre* I *signifie que c'est l'invention de la racine carrée qui est requise.* A & S *désignent le dernier point de cette règle qui à nouveau fait mention de l'addition ou de la soustraction de quelque chose*[3].

Sequitur modus iste extrahendi.

Primo. A numero radicum incipe, cumq; dimidiatum, loco eius pone dimidium illius, quod in loco suo stet, donec consumata sit tota operatio.

Secũdo. Multiplica, dimidium illud positum, quadrate.

Tertio. Adde vel Subtrahe iuxta signi additorũ, aut signi subtractorum, exigentiam.

Quarto. Inuenienda est radix quadrata, ex summa additionis tuæ, vel ex subtractionis tuæ relicto.

Quinto. Adde aut Subtrahe iuxta signi aut exempli tui exigentiam.

Modum extrahendi hunc tibi, mi bone Lector, formaui, ita ut memoriæ tenaciter hærere possit adminiculo dictionis huius A M A S I A S. Significat autem A primum membrum (ab A incipiens) docẽs positionem dimidij numeri radicum. M litera secundum membrum repræsentat, quod imperat multiplicationem. A & S tertium membrum repræsentant, quod uel additionem uel subtractionem, iuxta rei exigentiam (ut exempla clare dabunt) requirit. I litera, inuẽtionem radicis quadratæ requiri significat. A & S notant ultimũ regulæ illius membrum, quod iterum additionis aut subtractionis alicuius mentionem facit.

---

[2] Traduction des extraits par O. Kouteynikoff, avec la collaboration initiale de M. Defradas. La confrontation avec le texte original permet d'apprécier la légère adaptation qui a été nécessaire pour garder la suite des lettres A, M, A, S, I, A, S.

[3] STIFEL M., *Arithmetica Integra*, Nuremberg, 1544, p. 241, gauche.

Ainsi, les résultats successifs s'inscrivent de façon réglée dans l'une ou l'autre des deux colonnes que définissent les termes du binôme du premier degré égalé au carré.

(I)	(II)	(III)
1 ʒ eg 84 − 8 x	1 ʒ eg 8 x + 48	1 ʒ eg 18 x − 72
A : − 4	**A :** 4	**A :** 9
M : (−4)(−4)	**M :** (4)(4)	**M** (9)(9)
A&S : 84 + 16	**A&S :** 16 + 48	**A&S :** 81 − 72
100	64	9
I : 10	**I :** 8	**I :** 3
A&S : 10 − 4	**A&S :** 4 + 8	**A&S :** 9 ± 3
6	12	12
		6

II. Les démonstrations géométriques des résolutions numériques

Le progrès algébrique important que constitue la règle AMASIAS, tant parce qu'elle repose sur l'audace de calculer avec des nombres négatifs que parce qu'elle énonce presque[4] une règle générale, n'est pas le signe d'une distance que Stifel aurait prise avec la géométrie euclidienne. Au contraire, il propose pour ses algorithmes numériques tout neufs des validations géométriques de type traditionnel. Voici la démonstration géométrique qu'il donne pour une équation du deuxième type :

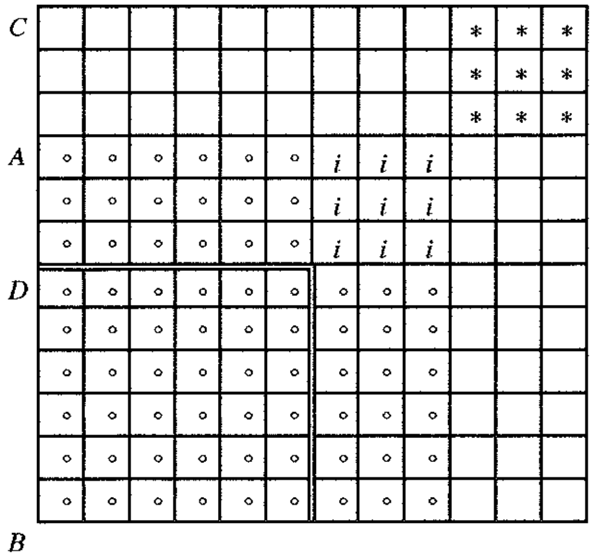
De même soit 1ʒ égal à 6X+72.

Premièrement (pour le démontrer géométriquement) je pose la racine du carré signalé par des lettres, i, sur la figure suivante : c'est la moitié du nombre des racines, évidemment 3. Cette racine je la multiplie par elle-même, ce qui fait le carré signalé par des lettres i. Et je lui ajoute 72, c'est à dire que j'ajoute ou pose autour le gnomon que tu vois signalé par des zéros. Et ainsi tu obtiens une figure carrée.

C'est pourquoi j'en extrais la racine carrée, c'est-à-dire AB, faisant 9 par sa longueur. Enfin j'ajoute à la racine trouvée, la moitié du nombre des racines, évidemment 3. C'est-à-dire que (à cause du signe de l'addition) j'ajoute à la racine la petite ligne AC, pour constituer un carré dont la racine est 12. Ce carré était figuration pour le nombre cossique 6X+72, tout comme pour 1ʒ. Or cette figure précisément est un exemple de la sixième proposition du second <livre d'Euclide>[5].

[4] Simon Stevin (1548-1620), parce qu'il osera poser un coefficient négatif au début d'une expression algébrique, formulera une règle unique au chapitre LXVIII de son *Arithmétique* (Leyde, 1585).

[5] STIFEL M., *op. cité*, p. 243, gauche. La proposition VI du Livre II des *Eléments* d'Euclide est présentée dans la première partie de l'article central de cette brochure.



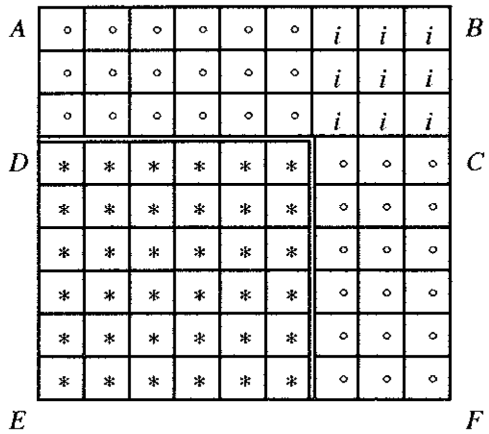
<table>
<tr><td rowspan="9">Le point A étant le milieu du segment DC, la proposition (II, VI) des Eléments d'Euclide énonce que le carré du segment DA, marqué par des i, avec le rectangle BD.BC égal au gnomon $\mathfrak{G}$ marqué par des zéros, fait autant que le carré du segment BA. Le côté cherché est BC = BA+AC parce que le carré de côté BC contient exactement le gnomon $\mathfrak{G}$ marqué par des zéros, et deux fois le rectangle AC.BC, soit deux fois 3.BC, ce qui visualise l'égalité 1ʒ eg 6X+72.</td><td>1 ʒ</td><td>eg</td><td>6</td><td>X</td><td>+ 72</td><td></td></tr>
<tr><td>A :</td><td></td><td>3</td><td></td><td></td><td>(DA)</td></tr>
<tr><td>M :</td><td></td><td>(3)(3)</td><td></td><td></td><td>(DA^2)</td></tr>
<tr><td>A & S :</td><td></td><td>9</td><td>(DA^2)</td><td>+ 72</td><td>($\mathfrak{G}$)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td></td><td>81</td><td>(BA^2)</td></tr>
<tr><td>I :</td><td></td><td></td><td></td><td>9</td><td>(BA)</td></tr>
<tr><td>A & S :</td><td></td><td>3</td><td>(AC)</td><td>+ 9</td><td>(BA)</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>12</td><td></td><td>(BC)</td></tr>
<tr><td>BC^2</td><td>eg</td><td>2.AC.</td><td>BC</td><td>+ $\mathfrak{G}$</td><td></td></tr>
</table>

III. La fabrication des équations dont on connaît les racines

Cette démonstration concernant une équation du deuxième type est suivie d'une validation géométrique pour la résolution de l'équation 1ʒ eg 18X–72, conduite dans le même esprit, mais présentant des embarras sensibles à la lecture, évidemment liés à l'existence de deux racines positives. La difficulté rencontrée provoque alors un rebondissement heureux. Après avoir détaillé le cas particulier de la racine double sans toutefois traiter le cas impossible, et après avoir lourdement récapitulé les résultats obtenus pour les trois types d'équations, Stifel réaborde les équations du troisième type sous un autre angle.

Sur une figure choisie présentant trois carrés solidaires de côtés 3, 6 et 9 respectivement, et permettant la lecture des propositions III ou IV du Livre II des *Eléments* d'Euclide, Stifel nous fait voir que l'équation 1ʒ eg 9X–18 admet les deux racines 3 et 6. Mais prolongeant son geste, il montre aussi les autres équations liées à la même figure et ayant pour racine 3, 6 ou 9. Or dès le début du chapitre II de son Livre III, Stifel explique comment trouver des équations sur une figure rectangulaire, en utilisant la proposition I du Livre II des *Eléments* d'Euclide ; au chapitre IIII, avant de traiter plusieurs exemples d'application de la règle AMASIAS, il dit comment former des équations quadratiques grâce aux propositions I et II du même Livre II des *Eléments*. Ainsi il explicite de façon répétée l'intérêt des propositions du Livre II des *Eléments* d'Euclide pour fabriquer des équations se déduisant les unes des autres. Le texte qui suit est exemplaire de cette démarche :

Il faut maintenant ajouter la démonstration, par laquelle tu puisses voir et comprendre, que les équations de cette sorte (où c'est le signe de la soustraction qui sépare, le nombre absolu étant posé à côté de ce signe) ont naturellement deux racines (or aucune équation n'en aura plus de deux). A cet effet reprenons la seconde figure de ce chapitre, évidemment celle-ci :



Telle qu'elle figure ici, elle est un exemple de la troisième proposition, du second livre d'Euclide, comme elle peut également en être un de la quatrième <proposition> du second <livre>.
Vois donc. Quand je dis que 1ʒ égale 9X–18. Bien sûr, d'après cette figure précisément, tu vois comment cette équation convient ainsi au rectangle ABCD et au rectangle CDEF. En effet le carré le plus petit, celui évidemment qui est signalé par des lettres i, tu vois qu'il est égal à 9X–18. A savoir que le rectangle entier ABCD contient 9X, racines qui sont celles précisément du carré le plus petit, signalé par des lettres i. Par conséquent, si de ces racines on soustrait le nombre 18, c'est-à-dire la partie du rectangle qui est signalée par des zéros, alors il reste 1ʒ, c'est-à-dire précisément le carré signalé par des lettres i.
Elle convient aussi absolument au rectangle CDEF : en effet, le carré le plus grand qui est signalé par des points, tu vois qu'il est égal de la même façon à 9X–18. A savoir, le rectangle entier CDEF contient 9X, racines qui sont celles précisément du carré le plus grand signalé par les points. Par conséquent, si de ces 9X tu soustrais le nombre 18, c'est-à-dire cette partie du rectangle qui est signalée par des zéros, alors il reste 1ʒ, c'est-à-dire précisément le carré signalé par des points.
Tu vois de façon certaine qu'une seule et même équation, celle-ci, 1ʒ égale 9X–18, a deux racines, étant donné qu'elle convient à l'un et l'autre rectangles. D'une part 3 en est la racine la plus petite ; d'autre part 6 en est la racine la plus grande. Comme tu vois très bien que BC est le côté du carré le plus petit, et DE le côté du carré le plus grand.
Or quand je dis, soit 1ʒ égal à 27–6X, tu vois de façon certaine que cette équation convient seulement au rectangle le plus petit, évidemment ABCD.

De même quand je dis que 1ȝ est égal à 54−3X, tu vois que l'équation convient seulement au rectangle le plus grand.

Et quand je dis que 1ȝ égale 6X+27, ou que 1ȝ égale 3X+54, tu vois que ces équations conviennent seulement au carré contenant l'un et l'autre rectangles, évidemment ABFE[6].

Présentés dans un tableau, les résultats expliqués par Stifel, dans une formalisation utilisant des caractères gras et des caractères soulignés pour tracer le chemin de la racine à l'équation :

dans le rectangle ABCD :				dans le rectangle CDEF :				dans le carré ABFE :			
3×9	= 3×3	+	3×6	6×9	= 6×6	+	6×3	81	= 3×9	+	6×9
$\underline{\mathbf{3}}^2$	= **3**×9	−	$\underline{3}$×6	$\underline{\mathbf{6}}^2$	= **6**×9	−	$\underline{6}$×3	$\underline{\mathbf{9}}^2$	= 3×**9**	+	6×$\underline{9}$
1 ȝ	= 9 **x**	−	18	1 ȝ	= 9 **x**	−	18	1 ȝ	= 3 **x**	+	54
1 $\underline{ȝ}$	= 27	−	6 $\underline{\text{X}}$	1 $\underline{ȝ}$	= 54	−	3 $\underline{\text{X}}$	1 $\underline{ȝ}$	= 27	+	6 $\underline{\text{X}}$

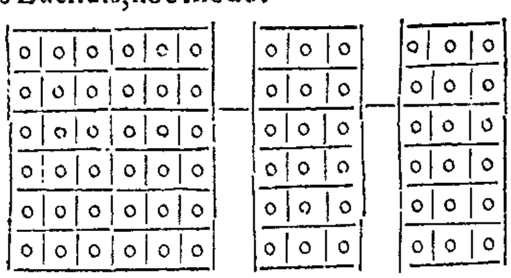
L'équation de type III, 1ȝ = 9**x**−18, admet les deux racines 3 et 6.

1$\underline{ȝ}$ = 27−6$\underline{\text{X}}$ est une équation de type I qui admet la racine 3 ; 1$\underline{ȝ}$ = 54−3$\underline{\text{X}}$ en est une qui admet la racine 6.

Les deux équations de type II, 1ȝ = 3**x**+54 et 1$\underline{ȝ}$ = 27+6$\underline{\text{X}}$, admettent l'une et l'autre la racine 9.

Nous voyons Stifel jongler avec les figures et les nombres. Son originalité, à son époque, telle qu'elle se présente dans le cadre du chapitre étudié, réside donc à la fois dans sa tentative presque réussie de mise en place d'un algorithme unique pour la résolution des équations quadratiques, et dans l'usage nouveau qu'il propose de figures jugées, jusque là, uniquement illustratives.

¶Sed ut facile possis producere æquationes huiusmodi, ratio-
nales radices habentes, uolo repetere figuram præcedentis ca-
pitis quadrangularem, diuisam iuxta propositionem primam
secundi, ipsius Euclidis, hoc modo.



Scilicet 1 ȝ + 6 𝔵, æquantur 72.
Item 1 ȝ + 8 𝔵 — 12, æquantur 72.
Item 1 ȝ + 3 𝔵 + 18, æquantur 72. Et sic de alijs.
Harum æquationem mediam pro exemplo accipiamus: sci-
pp licet

STIFEL M.,
Arithmetica Integra,
Nuremberg, 1544,
p. 241, droite.

[6] *Ibid.*, p. 245, gauche & droite.

26 POINTS A PRÉCISER

A André Masson.

Ma vie finira par a

Je suis $b - a$

Je demande $cb - a$

je pèse les jours de fête $\frac{d}{cb - a}$

Mes prévisions d'avenir $\frac{de}{cb - a}$

Mon suicide heureux $\frac{de}{(cb - a)\,f}$

Ma volonté $\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}}$

Ma force physique $\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h$

Mes instincts sanguinaires $\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i$

Les cartes ont mis dans ma poche

$$\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j$$

Elles ont retiré $\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + k$

Il reste $\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl$

Avec mon nez je sens

$$m\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl$$

Avec ma langue je dis

$$\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl$$

Avec ma bouche je mange

$$\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o$$

Avec mes yeux je vois

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{p}$$

Avec mes oreilles j'entends

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{pq}$$

Avec mes mains je gifle

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{pq + r}$$

Avec mes pieds j'écrase

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{(pq + r)\,s}$$

Avec mon sexe je fais l'amour

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}}$$

La longueur de mes cheveux

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}} - u$$

Mon travail du matin

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}} - u\,v$$

Mon travail de l'après-midi

$$\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}} - uv - w$$

Mon sommeil

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}} - uv - w\right)^x$$

Ma fortune

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}} - uv - w\right)^x - y$$

Ma date de naissance

$$\left(\frac{\frac{m}{n}\left(\sqrt[g]{\frac{de}{(cb - a)\,f}} + h - i\right)^j + kl + o}{\sqrt[t]{(pq + r)\,s}} - uv - w\right)^x - \frac{y}{z}$$

DEUXIEME CONTE DU LUNDI

Mathématiques et littérature

Anne Michel-Pajus

Dans le cadre du projet Inter IREM « Epsilon » un petit groupe s'est donné pour projet d'explorer comment les auteurs de romans, poèmes, nouvelles utilisent les mathématiques ou en parlent.

Les différents aspects de la relation entre mathématiques et littérature

Premier aspect : les mathématiques peuvent structurer l'œuvre littéraire

Ce modèle peut être très simple et quasiment inconscient, comme l'explique KUNDERA dans *L'art du Roman* :

> Ce n'est de ma part ni coquetterie superstitieuse avec un nombre magique, ni calcul rationnel, mais impératif profond, inconscient, incompréhensible, archétype de la forme auquel je ne peux échapper. Mes romans sont des variantes de la même architecture fondée sur le nombre 7.

Il est au contraire parfois très sophistiqué, comme l'expose Don DELILLO dans ses interviews :

> Il me semble que *L'étoile de Ratner* est un livre qui est presque totalement une structure. La structure du livre est le livre. Les personnages sont intentionnellement aplatis et en carton-pâte. J'ai essayé de construire un roman qui n'était pas seulement sur les mathématiques mais qui deviendrait lui-même un morceau de mathématiques. Ce serait un livre qui incarne schéma et ordre et harmonie, ce qui est l'un des objectifs traditionnels des mathématiques pures. (interview de DeCurtis)
>
> Il y a un modèle structurel, les livres d'Alice de Lewis Carroll. Les titres des deux parties - "Aventures" et "Réflexions" - renvoient à *Alice au Pays des merveilles* et *A travers le miroir*... Il y a aussi une sorte de guide spirituel. C'est Pythagore. Le mathématicien - mystique. Le livre tout entier est mis en forme par ce lien ou cette opposition, comme vous voulez, et les personnages ne cessent de rebondir entre la science et la superstition. (interview de LeClair)

Dans ce cas, la structure est soumise au thème dominant du récit. A l'inverse, la structure peut être choisie arbitrairement de façon à imposer une contrainte. C'est le cas des travaux de l'OULIPO. Un des exemples les plus achevés est *La vie, mode d'emploi*, de Georges PEREC. Les contraintes sont exposées dans *Le cahier des charges*. Parmi celles-ci, on peut retenir que l'œuvre est construite sur le principe d'un carré d'ordre 10 (10 lignes correspondant aux 10 niveaux de l'immeuble, et 10 colonnes correspondant aux 10 pièces de chaque niveau). Chaque case contient un couple d'éléments tirés de multiples listes (types de personnages, types d'actions, citations, tableaux), de façon qu'aucun couple n'apparaisse deux fois dans le carré et qu'aucun élément ne figure plus d'une fois dans la même colonne ou dans la même rangée. De plus, la succession des chapitres, qui correspond aux passages dans les appartements, est réglée par une solution au « problème du cavalier » ou « du voyageur de commerce » qui consiste à parcourir toutes les cases une fois et une seule, avec un parcours de longueur minimum.

Les recueils de poèmes obéissent à des contraintes fondées sur les permutations.

Ulcérations, par exemple, présente 400 permutations des onze lettres de ce mot (une telle séquence s'appelle un hétérogramme, et les poèmes qui en résultent sont dits hétérogrammatiques). Voici le début :

> Ulcérations :
> Cœur à l'inst| inct saoûl,
> re| clus à trône i| nutile,
> corsaire coulant s| ecourant l'is| olé,
> tu crains| la course int| ruse...

Alphabets se complique d'une permutation spécifique des rimes appelée onzine (ou quenine d'ordre 11). [*La Vie, Mode d'emploi* est aussi régie par une pseudo-quenine d'ordre 10 (il ne peut exister de vraie quenine d'ordre 10), dont l'effet est de créer un désordre maximal, en un certain sens.]

Cent mille milliards de poèmes de Raymond QUENEAU (1961) est un recueil de dix sonnets découpés en bandelettes d'un vers et superposés de façon que chaque vers puisse être choisi, au gré du lecteur, parmi les dix qui occupent la même position que lui dans les dix sonnets. Ce qui donne 10^{14}, soit cent mille milliards de sonnets différents.

$\in$ de Jacques ROUBAUD (1967) se distingue déjà par son titre (le symbole d'appartenance à un ensemble). Ce recueil de poèmes s'ouvre ensuite sur une règle du jeu de trois pages dont voici des extraits :

> Ce livre se compose, en principe, de 361 textes, qui sont les 180 pions blancs et les 181 pions noirs d'un jeu de go [...] Les textes ou pions appartiennent aux variétés suivantes : sonnets, sonnets courts, sonnets interrompus, sonnets en prose, sonnets courts en prose, citations, illustrations, grilles, blancs, noirs, poèmes, poèmes en prose.

De ces textes (ou pions) généralement brefs, toujours précédés de chiffres, signes ou symboles qui renvoient à divers systèmes de succession, de regroupements, de correspondances et de séparation, quatre modes de lecture sont possibles, privilégiant les ensembles symboliques ou un développement continu, suivant le mouvement d'une partie de go ou prenant chaque élément dans sa singularité.

<u>Deuxième aspect : les termes et symboles mathématiques peuvent servir à des effets de style</u>

Effets essentiellement poétiques ou comiques, ou poético-comiques, par le jeu des contrastes ou de l'étrangeté, du décalage, des métaphores, des jeux de mots, des clins d'oeil.

Benjamin PERET les utilise plusieurs fois dans *Le grand Jeu,* (1928). Par exemple, dans l'un des poèmes dont le titre est *26 points à préciser* (reproduit page 54) il exprime la vie d'un homme en 26 formules où apparaissent successivement comme inconnues les 26 lettres de l'alphabet Dans *Le travail anormal*, l'auteur joue sur le mot infini et son symbole.

Quatre espaces blancs nous regardent
quatre espaces plus blancs que des cheveux
mais riches
quatre espaces qui sont quatre infinis
L'infini du serpent qui est horizontal
et ceux qui tournent
ou sautent comme des carpes
ou plongent
comme une pierre dans un arbre

Les surréalistes n'ont pas l'apanage de l'utilisation des termes mathématiques. Citons également un passage de la *cinquième des Elégies de Duino* (1923) de Rainer Maria RILKE :

Et soudain dans ce nulle part besogneux,
soudain l'indicible endroit où le Trop Peu
par une inconcevable métamorphose se mue en ce Trop vide
où le calcul à plusieurs chiffres
se dissout sans faire de nombre.

Un auteur comme Léo FERRE, utilise souvent des termes mathématiques, parfois dans ses chansons, surtout dans son roman *Benoît Misère.*

Parmi les utilisations humoristiques, citons Alfred JARRY et Boris VIAN, qui utilisent tous deux le calcul algébrique pour calculer Dieu, mais aussi Pierre DAC, Raymond DEVOS, Jean TARDIEU, (on trouvera de nombreux exemples dans la revue *Alliages* et dans l'anthologie de Pascal KAESER, collection Jardin des Sciences, Diderot).

Troisième aspect : Les mathématiques peuvent jouer un rôle thématique

De nombreux romans proposent des personnages qui entretiennent une relation aux mathématiques, qu'ils soient chercheurs, enseignants ou élèves. Les enseignants sont souvent bornés ou rébarbatifs, les chercheurs distraits ou mauvais amants. On rencontre quelques personnages positifs cependant, plutôt des femmes, comme la délicieuse Tomasina d'Arcadia (cf plus bas), ou l'étonnante Karen Selby, de la pièce de Charles MORGAN *Le fleuve étincelant* (1936). Cette mathématicienne, d'après son créateur, connaît « l'unité de l'esprit » c'est-à-dire que son comportement - sincérité absolue, rigueur dans le travail, respect de l'autre - reflète son amour des mathématiques, identifié à l'amour de la vérité. Sans rigidité toutefois, puisqu'un mensonge héroïque lui permettra de sauver à la fois l'homme qu'elle aime et leur œuvre mathématique commune.

Ces personnages exposent au cours de leurs conversations, des mathématiques (*Odile* (1937) de QUENEAU, *La belle Hortense* (1987) de ROUBAUD, *Brazzaville Beach* de William BOYD), des éléments d'histoire des mathématiques, une réflexion épistémologique sur les mathématiques (*L'étoile de Ratner* (1976), *Les désarrois de l'élève Toerless* (1906) et *L'homme sans qualités* (1930) de Robert MUSIL, *Le théorème du perroquet* (1999) de Denis GUEDJ), entre autres.

Les mathématiques jouent un rôle central dans certaines utopies, comme *Nous autres* (1920) de ZAMIATINE, ou *Paris au XXème siècle* (1863) de Jules VERNE. Elles symbolisent ou inspirent un état dictatorial et s'opposent à l'émotion, à l'art, à la liberté.

Certains concepts mathématiques sont parfois le thème central d'une œuvre, ainsi celui de l'infini, qui constitue un thème récurrent dans l'œuvre de Jorge Luis BORGES. Dans *L'aleph*, le narrateur, qui est l'auteur lui-même, essaie de décrire une expérience de vision de l'infini actuel :

Le problème central est insoluble : l'énumération, même partielle d'un ensemble infini.[...] Ce que virent mes yeux fut simultané : ce que je transcrirai, successif, car c'est ainsi qu'est le langage. J'en dirai cependant quelque chose.

A la partie inférieure de la marche, vers la droite, je vis une petite sphère aux couleurs chatoyantes, qui répandait un éclat presque insupportable. Je crus au début qu'elle tournait ; puis je compris que ce mouvement était une illusion produite par les spectacles vertigineux qu'elle renfermait. Le diamètre de l'Aleph devait être de deux ou trois centimètres, mais l'espace cosmique était là ; sans diminution de volume. Chaque chose (la glace du miroir par exemple) équivalait à une infinité de choses, parce que je la voyais clairement de tous les points de l'univers...

Dans *La bibliothèque de Babel* (1944), il illustre plutôt l'infini combinatoire.

GUILLEVIC, dans son recueil de poèmes *Euclidiennes* (1967), choisit un objet géométrique comme sujet de chacun de ses poèmes.

<u>Enfin , tout à fait atypiques, les livres écrits par des mathématiciens,</u>

comme *Mathématique :*, de Jacques ROUBAUD : ou de nombreuses autobiographies.

Etude de cas

Ces deux œuvres, où le héros (l'héroïne) est mathématicien(ne), mêlent de façon très concertée la forme de l'œuvre et une réflexion sur des thèmes mathématiques.

Arcadia de Tom STOPPARD

Cette pièce de théâtre se déroule dans une superbe propriété du Derbyshire alternativement et parfois simultanément en 1809-1812 et en 1989.

Au XIXème siècle, Lady Thomasina Coverly (13 ans, puis 16 ans), discute des choses de la vie et du monde, et donc de mathématiques avec son précepteur, Septimus Hodge, qui a 9 ans de plus qu'elle et qui est impliqué dans un adultère vaudevillesque. Elle va découvrir en même temps l'amour et les fractals, prévoir les conséquences de la deuxième Loi de la thermodynamique, avant de périr dans un incendie. Désespéré, Septimus terminera sa vie comme ermite au fond du jardin, perdu dans des calculs sans fin.

Au XXème siècle, dans le même chateau, Hannah Jarvis, écrivain en fin de trentaine, fait des recherches sur l'histoire des jardins anglais, et Bernard Nightingale, universitaire du même âge, fait des recherches sur Lord Byron. Ils y rencontrent un descendant mathématicien de Thomasina, Valentine Coverly (25-30 ans), qui essaie de trouver un algorithme modélisant la population des grouses du domaine, et retrouvent des documents écrits par Thomasina. Valentine les leur explique à la lumière des recherches modernes.

Les dialogues croisés posent le problème du déterminisme. Le spectateur est conduit au constat que si le futur est imprédictible, le passé est également inconnaissable.

L'étoile de Ratner de Don DELILLO

Billy, génial mathématicien de 14 ans, est invité dans un Centre expérimental pour décrypter un message venu de la lointaine Etoile de Ratner. Dans ce labyrinthe sophistiqué, il rencontre une série de personnages « en carton-pâte », scientifiques « dérangés », dont les travaux oscillent entre le futile et l'irrationnel. Il échange avec eux des dialogues décalés, tandis qu'affleurent en toile de fond des bribes de sa méditation intérieure, du travail de recherche mathématique sous-jacent, de son enfance, des fragments d'histoire des mathématiques, de sa vision du monde imprégnée de mathématiques. Billy retrouve alors son mentor, Softly, qui dirige un projet parallèle et clandestin dans les grottes situées sous le Centre. Ce projet regroupe la fine fleur des scientifiques pour mettre au point le Logicon, un langage de communication universel, qui permettrait donc de communiquer avec les extra-terrestres. La deuxième partie (Réflexions) se déroule dans cet antre. Billy ne se sent pas bien, et refuse de coopérer à ce projet dont l'aspect essentiellement logique l'intéresse peu. Cependant ses travaux mathématiques antérieurs sur les abstraits « zorgs » permettent de découvrir un nouveau type de relativité, la relativité « Mohole ». Le message de l'étoile et son origine sont décodés, à l'instant où ils n'intéressent plus personne, et où tout le Centre passe sous contrôle d'un financier louche. Le roman se termine sur un dérèglement total du monde.

Quelques questions en guise de conclusion

Comment est reçue par les différents lecteurs cette intrusion des mathématiques dans une œuvre littéraire ?

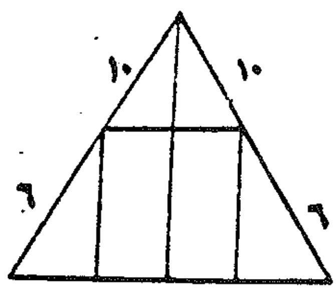
Les mathématiciens sont agacés par les poncifs sur leurs personnages, mais généralement ravis par les allusions mathématiques. Pourquoi ? Voici quelques réponses possibles :

- le clin d'oeil des initiés
- la reconnaissance du fait que les mathématiques font partie de la culture
- la découverte qu'il est licite d'en parler de façon non rigoureuse dans les conversations de salon (levée de l'inhibition liée à l'idéologie « rigoriste » sous-jacente)

Et pour les non-initiés ? De la lecture des critiques unanimement élogieuses de la pièce *Arcadia*, il ressort que certains journalistes se sont sentis plus intelligents, alors que d'autres ont trouvé les passages mathématiques trop longs...

Un problème d'al Khwarizmi

[فإن قيل]
أرض مثلثة من جانبيها عشرة أذرع عشرة
أذرع والقاعدة اثنا عشر ذراعا فى جوفها
أرض مربعة كم كل جانب من المربعة فقياس
ذلك أن تعرف عمود المثلثة وهو أن تضرب نصف القاعدة وهو ستة فى مثله فيكون
ستة وثلاثين فانقصها من أحد الجانبين الأقصرين مضروباً فى مثله وهو مائة
يبقى أربعة وستون فخذ جذرها ثمانية وهو العمود وتكسيرها ثمانية وأربعون
ذراعاً وهو ضربك العمود فى نصف القاعدة وهو ستة فجعلنا أحد جوانب
المربعة شيئا وضربناه فى مثله فصار مالا فحفظناه ثم علمنا أنه قد بقى لنا مثلثتان
عن جنبتى المربعة ومثلثة فوقها فأما المثلثتان اللتان على جنبتى المربعة فهما متساويتان
وعموداهما واحد وهما على زاوية قائمة فتكسيرها أن تضرب شيئاً فى ستة الا
نصف شىء فيكون ستة أشياء إلا نصف مال وهو تكسير المثلثتين جميعاً اللتين
هما على جنبتى المربعة . فأما تكسير المثلثة العليا فهو أن تضرب ثمانية غير شىء
وهو العمود فى نصف شىء فيكون أربعة أشياء إلا نصف مال فهذا هو تكسير



المربعة وتكسير الثلاث مثلثات وهو
عشرة أشياء تعدل ثمانية وأربعين هو
تكسير المثلثة العظمى فالشىء الواحد من
ذلك أربعة أذرع وأربعة أخماس ذراع
وهو كل جانب من المربعة وهذه
صورتها .

Extrait de Kitāb al - Jabr wal - Muqābala.
Edition de A.M. Musharrafa et M. M. Ahmad
Le Caire 1968, pp 65 - 66

DANS NOS CLASSES

Différents niveaux pour un texte d'al-Khwarizmi.

Philippe Brin, Martine Bühler et Maryvonne Hallez

Le texte que nous vous présentons ici est extrait du " Kitab al–jabr wal–muqabala " d'Al–Khwarizmi (? ; 850). Il s'agit d'un petit problème dont la résolution, proposée par l'auteur, permet d'introduire la notion d'inconnue. Le problème en lui–même ne présente pas beaucoup de difficultés. Il est donc possible de se consacrer exclusivement à la façon dont il est rédigé et notamment à l'apparition du concept d'inconnue notée " chose ".
C'est un problème du premier degré, contrairement à ce qu'on pourrait penser à la première lecture, dont l'étude a été proposée à différents niveaux :

a) en cinquième, avec une introduction historique est des exercices préparatoires.

b)en seconde, le texte a été donné d'emblée et intégralement, accompagné de sa traduction, et le travail s'est déroulé de façon quasiment autonome au cours d'une séance de module. A cette occasion, on a essayé de juger de l'acquisition de certaines techniques de calcul algébrique (il est à noter que le calcul faisant intervenir le théorème de Pythagore n'a pas été un obstacle). Nous tenons à faire remarquer que l'identification : *la moitié du côté, une demi chose,* $\frac{1}{2} \times$ *chose,* $\frac{x}{2}$ est ce qui nous a posé le plus de problèmes.

c) en première S.T.T. , le travail effectué tenait plus d'une remédiation. Dans un premier temps, on s'est davantage intéressé au problème lui–même qu'à son traitement algébrique, afin de laisser à l'élève toute latitude pour résoudre celui-ci. Ensuite, un travail d'accompagnement devait lui permettre de trouver la solution ou de découvrir une méthode différente de la sienne.

I. Al–Khwarizmi : activité en cinquième

C'est lors d'une conférence – *contes des mille et une nuits des mathématiques arabes* par Ahmed Djebbar[1] que fut présenté aux élèves de cinquième le problème d'Al–Khwarizmi ainsi que des problèmes d'héritage
La résolution demande une connaissance du théorème de Pythagore qu'Ahmed leur donna sans démonstration. Je précisai que la démonstration leur serait faite en classe de $4^{ème}$ ou de $3^{ème}$.

Cependant, la semaine suivante, je leur présentai le théorème de Pythagore de façon plus détaillée et leur parlai des triplets pythagoriciens, ce que je considérais comme un exercice préparatoire possible.

[1] Chercheur et enseignant à l'université d'Orsay.

Voici ce que je leur ai proposé comme activité :

Activité préparatoire :

Vous avez pu expérimenter qu'un triangle ayant pour mesures de ses côtés 3 unités, 4 unités et 5 unités était rectangle. A quelle occasion ?

Construisez un tel triangle.

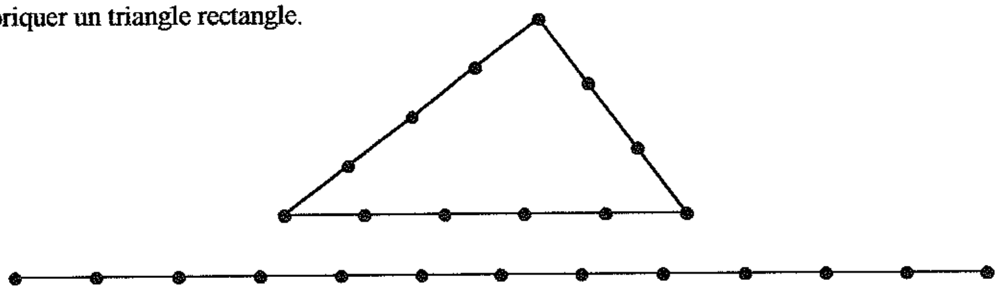
Calculez 3^2, 4^2, 5^2. Quelle remarque pouvez-vous faire ?

Construisez un triangle ABH rectangle en H tel que BH = 6 unités et AB = 10 unités. Mesurez [AH].

Calculez $AB^2 - BH^2$.

Vous apprendrez à démontrer en classe de 4ème que pour tout triangle ABC rectangle en A, on a :
$AB^2 + AC^2 = BC^2$. Nous supposerons ce théorème démontré pour l'exercice suivant.

En Inde, en Egypte, en Grèce le triplet 3, 4 , 5 était connu, une corde à 13 nœuds permettait ainsi de fabriquer un triangle rectangle.



Les triplets tels que la somme des carrés des deux plus petits est égale au carré du plus grand sont appelés triplets pythagoriciens : pouvez-vous en donner d'autres exemples[2] ?

Travail sur le texte d'al-Khwarizmi :

Un terrain triangulaire a deux côtés égaux à dix coudées et sa base égale à douze coudées. A l'intérieur se trouve inscrit un terrain carré. Quel est le côté du carré ?

La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la terre triangulaire, et c'est en multipliant la moitié de la base - et c'est six - par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtes courts multiplié par lui-même - et c'est cent -.Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est la hauteur. Son aire est quarante-huit et c'est la multiplication de la hauteur par la moitié de la base, qui est six.

Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un bien. Nous le conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs du terrain carré et un triangle au-dessus .

Quant aux deux triangles qui sont sur les deux flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et ils sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la moitié d'un bien. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.

Quant à l'aire du triangle supérieur, c'est en multipliant huit moins une chose, et c'est la hauteur, par la moitié d'une chose ; il vient quatre choses moins la moitié du bien.

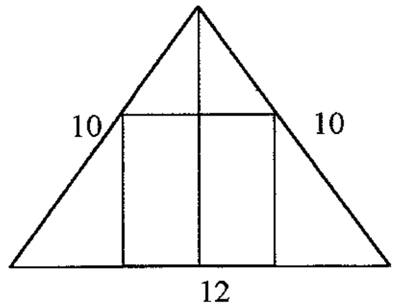
---

[2] Cf. Brochure M. :A.T.H. n° 79, pp. 57–70

Ceci est l'aire du carré et des trois triangles, et c'est dix choses, qui égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.

De cela la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée et c'est chacun des côtés de la terre carrée.

Et voici sa figure :



Les élèves étant habitués à la lecture de textes anciens et ayant été sensibilisés à ce texte précis par Ahmed Djebbar, j'ai effectué le travail en plusieurs étapes.

J'ai demandé aux élèves de calculer, en fonction de x, les aires de tous les polygones intérieurs au triangle donné, puis je leur est fait remplir le tableau ci–dessous.

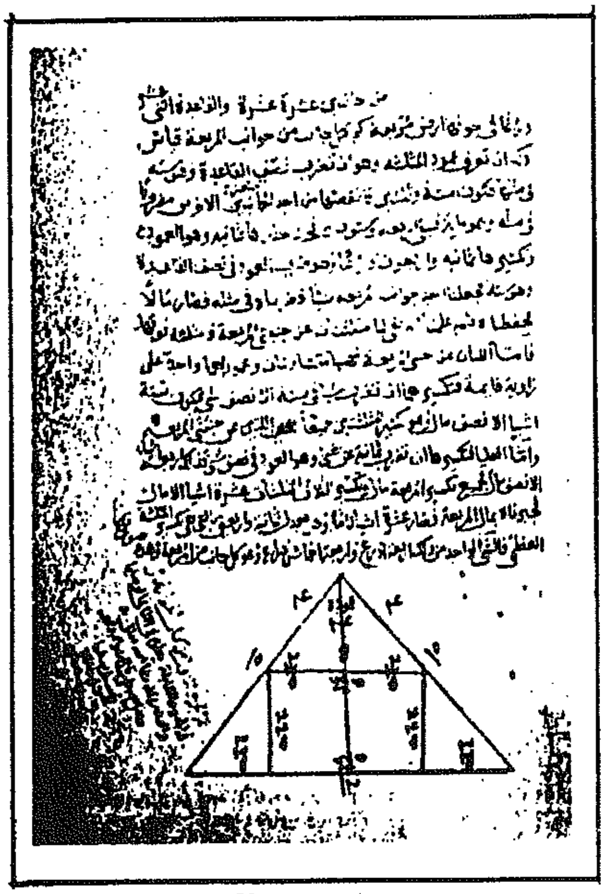
x	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$8-x$									
$x(8-x)$									
$8x$									
x^2									
$8x-x^2$									
$6-\frac{x}{2}$									
$(6-\frac{x}{2})x$									
$\frac{8x-x^2}{2}+\left(6-\frac{x}{2}\right)x+x^2$									
$10x$									

Ce tableau a permis aux élèves de constater que la somme des aires des polygones intérieurs au grand triangle devait être égale à $10x$.

Ensuite, ils ont calculé l'aire du grand triangle et écrit l'égalité de cette aire avec la somme des aires calculées précédemment. Ainsi, ils ont pu déterminer la solution du problème posé et comparer leur résultat à celui annoncé dans le texte.

Chacune de ces étapes a été effectuée en liaison avec le texte d'al-Khwarizmi dans lequel ils pouvaient retrouver les calculs qu'ils devaient faire.

II. Module de seconde : Un problème d'al-Khwarizmi



Une page de
L'abrégé du calcul par l'algèbre et la muqâbala
d'al-Khwârizmi (IX^{e} s.)

D'après une traduction orale d'Ahmed Djebbar lors d'un exposé.

Si on dit une terre triangulaire ayant des côtés de 10, 10, 12 coudées dans son ventre (à l'intérieur) une terre carrée, quel est le côté de cette terre ?

Multiplie la moitié de la base par elle-même, retranche la de l'un des côtés les plus petits multiplié par lui-même et c'est 100, il reste 64.

Prends sa racine qui est 8, et c'est la hauteur. Et son aire est 48 et c'est le produit de la hauteur par la moitié de la base qui est 6.

Nous posons l'un des côtés de la terre carrée une chose, nous la multiplions par elle-même, elle devient " le capital ", nous la conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les flancs du carré et un triangle au-dessus de lui. Quant aux deux triangles qui sont sur les flancs de la terre carrée, ils sont égaux et leur hauteur est la même et ils ont un angle droit. Donc leur aire s'obtient en multipliant une chose par 6 moins une demie chose, ce qui donne six choses moins une demi d'un carré ; et c'est l'aire des deux triangles ensembles qui sont sur les deux flancs de la terre carrée. Quant à l'aire du triangle supérieur, elle s'obtient en multipliant 8 moins une chose, qui est la hauteur, par la moitié d'une chose, cela donne 4 choses moins la moitié d'un carré. Ceci est l'aire de la terre carrée et des trois triangles, et c'est 10 choses et égales à 48 qui est l'aire du grand triangle. La chose est dont 4 coudées et 4/5 et c'est chaque côté de la terre carrée et voici sa figure.

Extrait de Kitāb al - Jabr wal - Muqābala.
Edition de A.M. Musharrafa et M. M. Ahmad
Le Caire 1968, pp 65 - 66

1°) Lisez la traduction du texte d'al-Khwarizmi et faites une figure sur laquelle vous nommerez chacun des points. Vous constatez que la figure originale est cotée ; cotez aussi la vôtre.

2°) Expliquez puis justifiez ce que fait al-Khwarizmi dans les paragraphes 2 et 3.
Vous pourrez utiliser la figure mais vous devez indiquer les théorèmes utilisés.

3°) Comme al-Khwarizmi, calculez, en fonction du côté du carré, les aires des triangles " sur les flancs " et celle du triangle sur le " dessus ".

4°) Effectuez la mise en équation du problème ; résolvez l'équation ainsi obtenue.

III. Un travail en première STT

L'exercice suivant a été traité en module en première STT, c'est-à-dire durant une séance d'une heure en demi groupes. Il s'agissait d'une classe d'élèves plutôt faibles en mathématiques montrant des motivations extrêmement variées : des élèves très sérieux à des élèves ne manifestant aucun intérêt pour la discipline.

L'objectif de cette leçon était de mettre en équation un problème géométrique - qui devient ainsi facile à résoudre - et d'en profiter pour réviser des notions de base. La séance s'est bien passée, les élèves montrant de l'intérêt pour un exercice inhabituel (lire un texte) et tous ont accepté de faire l'effort de comprendre ce dont il s'agissait.

J'avais auparavant présenté le texte et son auteur, ce qui a suscité curiosité et intérêt chez les élèves, principalement ceux d'origine maghrébine (mais pas seulement !). De manière générale, j'ai toujours vu cette classe manifester de l'intérêt pour des travaux " originaux " : étude d'articles de journaux (d'après les travaux de S. Gasquet au C.R.D.P. de Grenoble), lecture d'un texte de Galilée pour introduire les probabilités, etc... Cependant il m'a souvent fallu accepter d'y consacrer beaucoup de temps pour les mener à bien ; les modules à effectifs réduits se sont révélés - sans surprise - un moment idéal pour faire réfléchir les élèves sur un support inhabituel.

Voici donc les document qui a été remis aux élèves :

Dans le texte suivant, les passages en italique sont extraits du Kitab al-jabr wal-muqabala li Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi, IX^{eme} siècle, traduit par A. Djebbar (Université Paris-Sud).

1°) Lire le texte du problème ci-dessous et faire une figure correspondant au problème posé, en indiquant les données et en précisant ce qu'on cherche.

Un terrain triangulaire a deux côtés égaux à dix coudées et sa base égale à douze coudées. A l'intérieur se trouve inscrit un terrain carré. Quel est le côté du carré ?

2°) Si vous savez résoudre ce problème, faites-le puis passez directement au 4°).
Si vous ne savez pas le faire, passez au 3°).

3°) ***La méthode pour cela consiste à connaître la hauteur de la terre triangulaire.***

a) Sur votre figure, marquez la hauteur AH du triangle, puis, à l'aide des données, calculez AH.

b) ***Et c'est en multipliant la moitié de la base - et c'est six - par lui-même ; il vient trente-six. Retranche-les de l'un des deux côtes courts multiplié par lui-même - et c'est cent -.Il reste soixante-quatre. Prends sa racine, huit, et c'est la hauteur.***

Est-ce le calcul que vous avez fait ?

c) ***Son aire est quarante-huit et c'est la multiplication de la hauteur par la moitié de la base, qui est six.***

4°) Dans la suite du texte :

la chose est le nom donné à l'inconnue.

le bien est la chose multipliée par elle-même.

Précisez quelle est l'inconnue dans le texte.

Nous considérons un des côtés du terrain carré égal à une chose et nous la multiplions par elle-même ; il vient un bien. Nous le conservons. Puis nous constatons qu'il nous reste deux triangles sur les deux flancs du terrain carré et un triangle au-dessus .

a) Sur la figure faite au 1°) :

colorier en bleu **le bien**

colorier en rouge **les triangles sur les flancs**

colorier en vert **le triangle au dessus.**

b) Calculons l'aire du domaine en rouge :

On sait que : aire d'un triangle = $\dfrac{\text{hauteur} \times \text{base}}{2}$.

Donc : l'aire des deux triangles ensemble est hauteur x base.

Si le côté du carré intérieur est **une chose**, alors :

la hauteur des triangles rouges est :

la base des triangles rouges est :

donc l'aire rouge est égale à :

Quant aux deux triangles qui sont sur les deux flancs, ils sont égaux et leurs hauteurs sont les mêmes et ils sont sur un angle droit. Leur aire est que tu multiplies une chose par six moins un demi d'une chose, il vient six choses moins la moitié d'un bien. Et c'est l'aire des deux triangles ensemble qui sont sur les deux flancs du carré.

c) Calculer de même l'aire du triangle vert.

d) Quelle est l'aire totale du grand triangle, exprimée à l'aide d'**une chose** ?

5°) En 3°) c), on a vu que, au début du texte, al-Khwarizmi démontre que l'aire du grand triangle est égale à quarante-huit.

a) Quelle égalité peut-on alors écrire ?

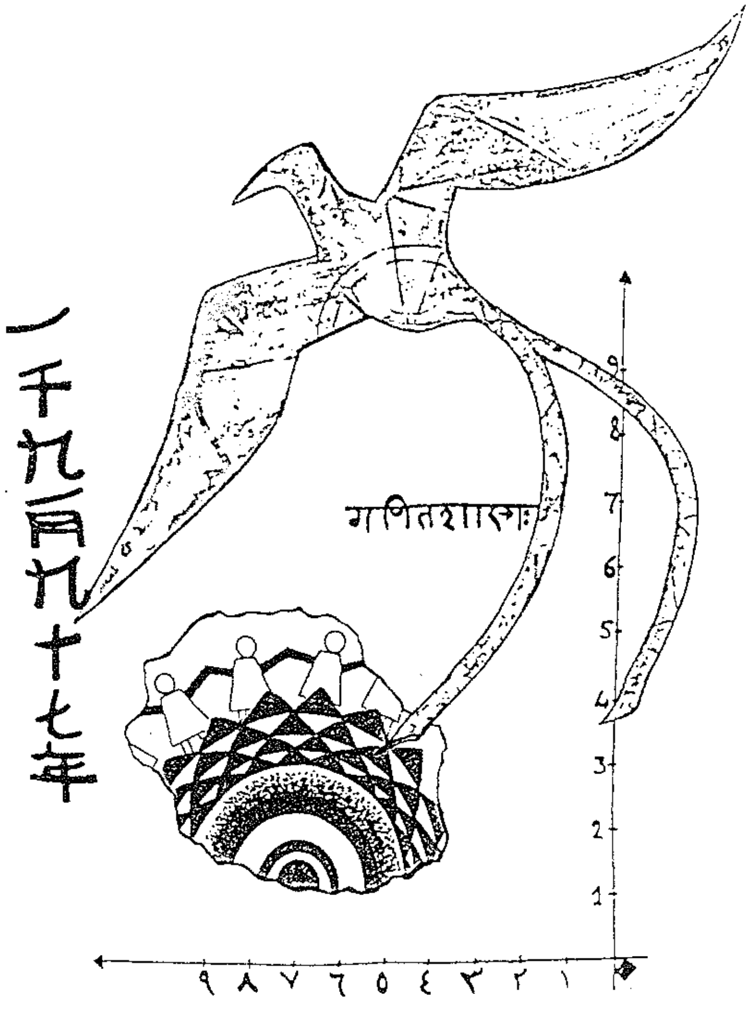
b) Déduisez-en la valeur d'**une chose** ?

c) voici la réponse d'al-Khwarizmi :

ceci est l'aire du carré et des trois triangles, et c'est dix choses, qui égalent quarante-huit, et c'est l'aire du grand triangle.

De cela la chose est quatre coudées et quatre cinquièmes de coudée et c'est chacun des côtés de la terre carrée.

CHRONIQUE DE COLLOQUE



L'Océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes

Saint-Denis de La Réunion
du 3 au 7 novembre 1997

Michèle Bathier-Fauvet

Du 3 au 7 novembre 1997 s'est tenu à l'I.U.F.M. de La Réunion, un colloque d'histoire des mathématiques ayant pour thème : « **L'océan Indien au carrefour des mathématiques arabes, chinoises, européennes et indiennes** » ; il a réuni des intervenants principalement linguistes, mathématiciens, philosophes, physiciens et a été suivi par un public très varié.

S'il est un lieu qui se prêtait particulièrement à une telle initiative, c'est bien celui-ci : rocher volcanique perdu dans l'océan Indien, entouré d'une mer infestée de requins au-delà de la barrière de corail protégeant la seule plage sur la côte ouest et d'un accès difficile ailleurs que par les ports aménagés et quelques criques. Des petits pêcheurs ont même dû, à un endroit, tailler dans la lave un couloir d'accès de la largeur d'une barque et de deux hommes, et, partout où le sol est trop rocheux, ils protègent le fond de leurs embarcations avec une sorte de carre métallique. C'est vers la terre et sur la terre qu'est orientée l'activité de La Réunion. Des périodes successives de prospérité et de difficultés liées aux aléas climatiques, politiques - elle fut sous domination anglaise de 1810 à 1815 - et économiques expliquent l'impression de patchwork ethnique et religieux que donne cette île qui compte aujourd'hui 600 000 habitants. Les premiers colons blancs arrivèrent aux environs de 1646 ; c'étaient des mutins en provenance de Madagascar et envoyés là en punition ; ils furent suivis par des volontaires blancs accompagnés d'esclaves malgaches et africains. Dès le début le métissage de la population s'opéra. Aux alentours de 1850, la prospérité de l'agriculture et l'abolition de l'esclavage nécessitèrent de faire appel à des Comoriens, des Malgaches, des Africains, des Indiens tamouls qui, s'ils se retrouvèrent là plus ou moins volontairement, y restèrent souvent une fois leur contrat terminé. Des commerçants chinois arrivèrent aussi après 1860 ainsi que des musulmans du nord de l'Inde. La conférence inaugurale de Christian Barat, directeur de l'Institut de linguistique et d'anthropologie de l'Université de St. Denis, nous a bien montré pourquoi La Réunion est à la croisée de multiples cultures et comment son peuplement s'est fait à partir de trois continents.

Après une première journée assez générale où les thèmes mathématiques abordés ont, pour la plupart, été choisis dans les mathématiques européennes, nous avons eu une journée indienne, une journée arabe, une journée chinoise et enfin, une journée que l'on pourrait appeler « de synthèse ».

J'ai été particulièrement séduite par cette organisation thématique du temps ; chaque matin, deux conférences plénières nous immergeaient dans un monde de pensée autre que notre monde grec et nous permettaient ensuite d'aborder avec un autre regard les différents ateliers proposés l'après-midi. Je n'ai pas pu assister à tout ce qui m'intéressait : le choix était trop riche !

Soucé Antoine Pitchaya, professeur de langue hindi et de civilisation indienne à l'Institut de linguistique et d'anthropologie, nous plonge dans l'histoire de la pensée indienne, si diverse, qui s'intéresse aussi bien à la spiritualité qu'à la science, sans forcément les séparer. Il semblerait que les mythes indiens de la création soient les plus proches de ce que la science moderne nous a appris sur les origines du Monde et de la vie. « Qui a vu le premier né, lorsque l'invertébré a donné naissance au vertébré »[1], peut-on lire dans le *Rig-Véda* qui date de plus de 1500 av. J.-C. (Rv I, 164,4). Des textes encore plus anciens (3000 av. J.-C.) ont été découverts en 1920 dans la vallée de l'Indus ; à ce jour, leur écriture n'est encore pas déchiffrée, faute de textes bilingues. Des fouilles archéologiques en cours révèlent une civilisation couvrant un espace encore plus grand que celui de la vallée de l'Indus et de ses affluents : « urbaine, elle connaissait le tout-à-l'égout, l'éclairage des rues... et atteste une grande maîtrise intellectuelle et technologique » ; « elle semble être proche de celle des anciens Elamites, aux confins de la Mésopotamie et de l'Iran »[2]. Vers 1500 av. J.-C., les tribus aryennes entrent en contact avec cette civilisation, et, vers -700, leur fusion réussie donne naissance au « miracle indien », pratiquement synchrone du « miracle grec » avec lequel S.A. Pitchaya le met en parallèle.

L'Indien cherche à répondre à la célèbre question « *Ky ?* » du *Rig-Véda* (*quis* et *quid* latins), et à accéder à la Vérité. Il lui faudra pour cela, lever le voile de l'Illusion, la *Maya* ; chacun a trois voies pour y parvenir : celle de la Religion, celle de la Philosophie, ou celle de la Science, « voies qui ne s'opposent, ni ne s'excluent ». « Pour les Indiens, toute connaissance est scientifique, quel qu'en soit le domaine : les mathématiques, la médecine, la psychologie, la grammaire, etc., sont des sciences. »[3]. Ainsi, la géométrie, sous le nom de *Sulba-Sastra*, ou science du cordeau, est à l'honneur en Inde depuis au moins 1500 av. J.-C..

Dans l'atelier « Regard sur un mathématicien indien : Srinivasa Ramanujan (1887-1920) », Dominique Tournès nous parle de ce mathématicien atypique, presque autodidacte et mort très jeune. A son professeur et ami venu lui rendre visite dans son sanatorium et qui lui dit : « rien d'extraordinaire aujourd'hui ; j'ai pris un taxi portant le numéro 1729 », Ramanujan rétorqua paraît-il : « Non, Hardy ! C'est un nombre très intéressant. C'est le plus petit nombre qui s'écrive de deux façons différentes comme la somme de deux cubes ». On lui doit des formules extrêmement élaborées de théorie des nombres, qu'il a données souvent sans démonstration, et qui traduisent une intuition exceptionnelle. Hardy dira de lui : « Sa perspicacité pour les formules algébriques, la transformation des séries infinies, etc., était ce qu'il avait de plus fascinant. Sur ce point, je ne connais certainement personne qui lui soit comparable, sauf peut-être Euler et Jacobi. »[4]. La publication commentée des carnets de Ramanujan, commencée il y a 60 ans, est actuellement en voie d'achèvement. Ce sont des formules données par lui, sans démonstration, qui permettent aujourd'hui de calculer une valeur décimale approchée de π avec deux milliards de décimales ! Et justement, cet atelier se termine par la programmation sur TI 92 de deux de ces formules.

Bien que n'ayant pas pu suivre son atelier, j'ai été très intéressée par le travail présenté par Catherine Morice-Singh, enseignante à l'Ecole Française de New-Delhi. Il s'agit d'un P.A.E. réalisé avec des élèves de 6^{e}, 4^{e}, 3^{e} et 1re E.S., qui a conduit à la production d'une brochure de 100 pages : *A la recherche des mathématiques dans le monde de l'Inde Ancienne*. Les trois objectifs principaux étaient :

---

[1] Actes du colloque, p. 34.

[2] Ibid., p. 32.

[3] Ibid, p. 37.

[4] Ibid., p. 431.

« - permettre aux élèves de prendre conscience de la diversité et de la profondeur de la civilisation indienne ;

- les amener à se rendre compte que les mathématiques sont une discipline que chaque civilisation développe selon les problèmes qu'elle a à résoudre ;

- faire une exposition des résultats obtenus et, surtout, rédiger un « livre » pour rendre toutes ces informations accessibles au plus grand nombre d'élèves, d'enseignants et de parents. »[1]

Cette brochure explique de façon élémentaire les grandes périodes de la civilisation indienne ; elle est divisée en cinq grandes parties dont chacune, sauf la troisième : *QUELQUES PAGES D'HISTOIRE* [2], intègre des éléments mathématiques. Dans la première, *L'EPOQUE VEDIQUE,* sont indiquées des constructions géométriques, nées de pratiques religieuses, comme par exemple : transformer un (autel) carré donné en un (autel) rectangle de même aire dont un côté est donné ; transformer un carré en un cercle de même aire ; transformer un cercle en un carré de même aire ; agrandir des figures. Dans la quatrième partie, *L'ASTRONOMIE ET LES MATHEMATIQUES,* nous sommes initiés au système d'écriture des nombres du mathématicien Aryabhata (né env. 476 apr. J.-C.), à sa méthode pour extraire les racines carrées. Quant à la dernière partie, *LES MATHEMATIQUES VEDIQUES ???* , elle nous explique que le livre *VEDIC MATHEMATICS* ou encore *Sixteen Simple Mathematical Formulae from the Vedas,* n'a rien à voir avec l'époque védique : ces formules ont été mises au point par un prêtre hindou au début de ce siècle ! Elles sont surprenantes pour nous et permettent de faire très vite certains calculs. Quand vous les aurez lues, vous saurez déterminer très rapidement la partie périodique de 1/29, vous pourrez aussi dire si un nombre est divisible par 29, 39, etc., et trouver le quotient éventuel ; vous pourrez aussi faire mentalement de très grosses multiplications... et chercher pourquoi ça marche !

C'est au cours de la troisième journée, la journée arabe, que «l'affaire » se confirme : et si ce colloque était celui du zéro ? Déjà, Catherine Morice-Singh nous avait parlé du zéro grammatical chez Panini et Pingala (entre 400 et 200 av. J.-C.) et du premier zéro gravé en 683 apr. J.-C. sur une pierre trouvée dans le Cambodge actuel ; et voilà que Michel Soutif nous parle aujourd'hui de « l'usage du zéro depuis la Chine jusqu'à l'Europe de la Renaissance à travers l'Inde et l'Islam », et que Tahar Mejri propose comme atelier : « La découverte du zéro ».

Ce jour-là encore le choix d'un atelier est difficile : « Thâbit Ibn Qurra et le théorème de Pythagore » par Jean-Louis Ayme ? « La rationalisation de l'algèbre dans les mathématiques arabes » par Khalil Jaouiche ? ou plutôt « Les carrés Magiques dans la tradition mathématique arabe » par Yves Martin ? et pourquoi pas « Initiation à la calligraphie arabe » ?...

Et maintenant, la journée chinoise. Très intéressée par « Algorithmes de résolution d'équations algébriques et de systèmes linéaires dans la tradition chinoise », et par « Algorithmes de calcul d'aires et de volumes dans la Chine ancienne », proposés par Karine Chemla, c'est à grand regret que je n'ai pu assister ni à

---

[1] *A la recherche des mathématiques dans le monde de l'Inde Ancienne*, p. 1. Cette brochure, rééditée, peut être commandée à l'Ecole Française de Delhi, 2 Aurangzeb Road, New-Delhi 110011, INDE, avec un règlement de 80 francs (francs français), port compris.

[2] *Ibid.*, p. 62-71.

« Démonstration grecque et démonstration chinoise : une opposition entre le discursif et le visuel » par Evelyne Barbin, ni à « Le boulier chinois : histoire, technique, applications pédagogiques » animé par Nathalie Aymé. Il faut savoir qu'à La Réunion, dans certains petits commerces tenus par des Chinois, on se sert encore du boulier. Diverses expériences pédagogiques l'utilisant ont été menées avec succès auprès d'élèves de primaire et de collège.

La dernière journée nous réunit pour la conférence plénière donnée par Catherine Jami qui nous montre comment le développement de l'empire maritime portugais et la diplomatie française ont permis, de façons différentes, la transmission des sciences mathématiques européennes en Asie orientale aux 17^e et 18^e siècles ; une table ronde ayant pour thème « contacts et interactions entre les sciences arabes, chinoises, européennes et indiennes » éclaire pour nous quelques rapports entre ces différents mondes et expose des perspectives de recherche. En effet, Karine Chemla pense qu'à l'heure actuelle, une voie féconde pour l'histoire des sciences serait d'étudier quels ont pu être les contacts entre la Chine et l'Inde d'une part, la Chine et les Arabes d'autre part. Nous terminons par un rappel du rôle des I.R.E.M. et de leur activité pour le développement de l'utilisation de l'histoire des mathématiques dans les lycées et les collèges ; il existe des initiatives comparables en physique, mais elles sont beaucoup moins développées.

Ce colloque s'achève ; il a été remarquablement organisé par toute une équipe de collègues de l'I.U.F.M. et de l'A.P.M.E.P. de La Réunion ; il s'est déroulé dans une ambiance particulièrement chaleureuse et amicale. Merci à eux tous et tout cela valait bien de supporter le plat national : oui, vous savez, le carri, c'est-à-dire du riz, des grains, une sauce indéterminée

Les actes de ce colloque sont parus en Décembre 1998[1].

[1] Ils peuvent être commandés à Dominique Tournès, I.U.F.M. de La Réunion, Allée des Aigues Marines, Bellepierre, 97487 Saint-Denis Cedex, en joignant un chèque de 150 francs libellé à l'ordre de Mme l'agent comptable de l'I.U.F.M. de La Réunion.
Le sommaire de ces actes est reproduit au verso de cette page.

L'OCÉAN INDIEN AU CARREFOUR DES MATHÉMATIQUES ARABES, CHINOISES, EUROPÉENNES ET INDIENNES

Saint-Denis de La Réunion, 3-7 novembre 1997

Actes du colloque édités par Dominique TOURNÈS.
Un volume de 456 pages, en format 17 x 24.
Publication de l'IUFM de La Réunion
avec le concours de l'APMEP-Réunion et de l'Institut de linguistique et d'anthropologie.

SOMMAIRE

NOTE DE LECTURE

Images, Imaginaires, Imaginations,
une perspective historique pour l'introduction des nombres complexes
par A. Boyé, J.P. Cléro, M.J. Durand-Richard, J.P. Friedelmeyer, M. Hallez, G. Hamon, O. Kouteynikoff, M. Thirion, J.L. Verley
Éditions Ellipses, Paris 1998

Michèle Grégoire

Voici un ouvrage de référence extrêmement riche et passionnant qui inspirera tous les enseignants qui souhaitent réfléchir sur leur enseignement des nombres complexes et renouveler leur pratique avec leurs élèves. Les approches proposées et les entrées dans l'ouvrage sont multiples et variées.

Une présentation historique très complète est donnée par Jean-Luc Verley. Il montre comment s'est d'abord développée une pratique, sans justification théorique, qui s'insinue dans de nombreux domaines : équations, division du cercle, logarithmes, exponentielles..., qui se transforme plusieurs siècles plus tard, en une théorie rigoureuse, dévoilant ainsi une harmonie et une régularité auparavant cachées. Il nous décrit ensuite la marche triomphale des complexes dans les mathématiques du XIX^e^ siècle : théorie des fonctions de variable complexe, intégrales elliptiques, théorie des nombres, géométrie projective et géométrie des éléments imaginaires.

Marie-José Durand-Richard explique comment l'invention des complexes nécessite l'harmonisation des différentes traditions qui servent de référence aux mathématiques : grandeurs, nombres et pratiques algébriques.

L'originalité et l'intérêt particulier de ce livre sont les différentes propositions qui sont faites pour construire un cours sur les nombres complexes. Un exposé historique spécifique à la démarche choisie permet à l'enseignant d'approfondir cet aspect particulier de l'histoire des complexes ; il est ensuite accompagné de textes encadrés, destinés aux élèves, contenant soit des informations historiques brèves soit des exercices progressifs qui composent une approche complète et motivée des diverses notions.

Anne Boyé a choisi de décrire la logique interne de l'invention des complexes au XVI^e^ siècle ; elle fait comprendre à ses élèves que ces nombres ont été imaginés pour répondre, d'une manière très audacieuse, au problème de la résolution des équations du troisième degré.

Maryvonne Hallez et Odile Kouteynikoff construisent l'approche à partir de la difficulté qu'ont eue les esprits savants, comme par exemple D'Alembert ou Carnot à accepter les nombres négatifs et les nombres complexes, difficulté qui est levée à partir du moment où une représentation géométrique invente le geste et l'image qui vont permettre de penser plus concrètement ces nombres déroutants.

Gérard Hamon propose une initiation à la notion de structure et une démarche qui prépare les élèves aux mathématiques de l'enseignement supérieur : introduire a priori un nombre abstrait dont le carré est -1 et construire de nouveaux objets et des opérations sur ces objets en ayant pour seul souci que leur manipulation soit cohérente avec les règles du raisonnement mathématique.

Jean-Pierre Friedelmeyer, quant à lui, privilégie la réflexion interdisciplinaire et l'application des complexes à l'électromagnétisme. Les nombres complexes s'introduisent en effet dans cette discipline pour généraliser aux courants sinusoïdaux les lois d'Ohm développées d'abord dans l'étude des courants continus.

Les racines d'un polynôme sont-elles toutes de la forme a + bi (avec a et b réels) ? On trouvera aussi dans cet ouvrage la réponse à cette intrigante question, dans un chapitre sur les démonstrations du théorème fondamental de l'algèbre.

Les nombres complexes sont aussi, comme nous le montrent Maurice Thirion et Jean-Pierre Cléro, un objet privilégié pour la réflexion philosophique sur la relation des mathématiques avec la réalité et sur le statut de la vérité en mathématiques.

Comité de rédaction :

Michèle BATHIER-FAUVET	*Lycée Langevin Wallon Champigny/Marne* *Animateur à l'IREM Paris VII*
Philippe BRIN	*Lycée Technique E.Branly Créteil* *Animateur à l'IREM Paris VII*
Martine BÜHLER	*Lycée Flora Tristan Noisy le Grand* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Michèle GREGOIRE	*Lycée Lavoisier Paris* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Maryvonne HALLEZ	*Collège Paul Bert Paris* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Marie-Françoise JOZEAU	*Lycée G. de Nerval Luzarches* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Odile KOUTEYNIKOFF	*Lycée Lakanal Sceaux* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Anne MICHEL-PAJUS	*Lycée Claude Bernard Paris* *Animatrice à l'IREM Paris VII*
Jean-Luc VERLEY	*Université Paris VII* *IREM Paris VII*

avec la collaboration de Henry PLANE,

et de Michèle LACOMBE, CNED Institut de Vanves

Courrier à adresser à : Groupe M.: A.T.H.

IREM de l'université Denis DIDEROT
Paris VII
Tour 55-56 3e étage
75 005 PARIS

Pour échanger expériences et réflexions à propos de

l'histoire et l'enseignement des mathématiques

M.: Mathématiques
A. Approche par les
T. Textes
H. Historiques

Résumé

Ce numéro 15 de Mnémosyne, qui comporte sept rubriques, propose différents articles centrés sur l'algèbre du second degré au XVIème siècle, à travers des textes anciens peu connus. On y trouvera une réflexion sur les algorithmes numériques de résolution et leurs validations géométriques, ainsi que sur le problème incontournable de la recherche de deux grandeurs connaissant leur produit et leur somme ou leur différence.

Si la rubrique « dans nos classes » jette un pont algébrique entre nos élèves et le IXème siècle arabe, les « note de lecture », « chronique de colloque » et autre « conte du lundi » sont là pour rappeler que les mathématiques se vivent dans le siècle.

Mots-clés

Histoire des mathématiques

Euclide, Diophante, al-Khwarizmi, M. Stifel, J. Peletier du Mans, G. Gosselin, S. Stevin, F. Viète.

L'algèbre comme science de l'inconnue, l'algèbre comme écriture symbolique. Mise en équation d'un problème. Equation du premier degré. Equations du second degré, algorithme de résolution numérique, construction géométrique des racines, somme et produit des racines.

En vente au prix de 5,00 Euros

Editeur : IREM
Directeur responsable de la publication : M. ARTIGUE
Dépôt légal : Mai 1999
ISBN : 2-86612-181-3
IREM Université Paris VII Denis Diderot
Case 7018
2, place Jussieu 75 251 Paris Cedex 05
Tel : 01 44 27 53 83