

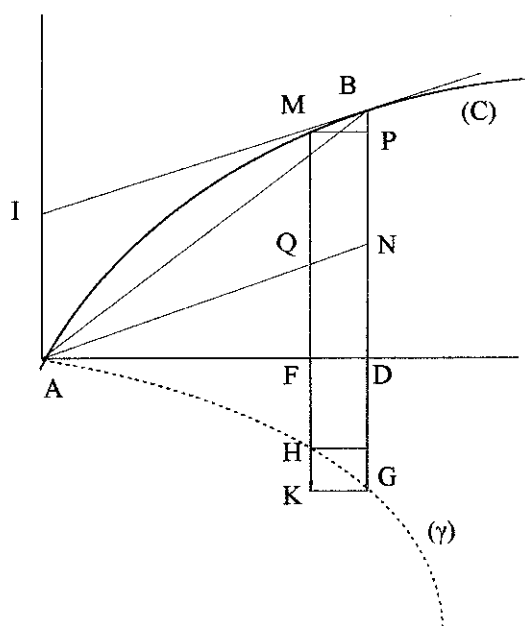
COURRIER DES LECTEURS

Voici un courrier qui nous a été adressé par Henry Plane, suite à la publication du numéro précédent, dans lequel il a été question, à plusieurs reprises, de courbes quadratrices utilisées par Leibniz.

Les aires équivalentes, outil de démonstration.

La « quadratrice géométrique »

OZANAM *Géométrie pratique* (fin 17^{ème} siècle)



Soit un arc AB d'une courbe (C) de « diamètre » AD (le diamètre est la droite orthogonale à la « touchante » (tangente) en A à (C)), [BD] est l'« ordonnée » de B.

(l'angle $\widehat{ADB}$ est droit). Les tangentes en A et B se coupent en I. La parallèle en A à (BI) recoupe (BD) en N. Ozanam prolonge BD de $DG = AI = BN$. Lorsque B décrit (C), G engendre une courbe (γ) la « quadratrice géométrique » de (C). Si on envisage un point M de (C) voisin de B, son ordonnée MF coupe (AN) en Q et (γ) en H. On ajoute les points P et K tels

que : $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{FD} = \overrightarrow{KG}$, selon les notations actuelles.

Alors Ozanam écrit : « M est infiniment proche de B ; l'arc BM est infiniment petit et pourra passer pour une ligne droite partie de la touchante BI ».

Il s'ensuit que l'aire du rectangle DGKF équivaut à l'aire du « parallélogramme » BNQM (base DG = base BN et même hauteur FD). Si on considère maintenant ce parallélogramme de base MB et de hauteur la distance de A à [BI] son aire sera double de celle du triangle ABM.

Enfin lorsque M tend vers B, H tend vers G sur (γ) ainsi que K.

Si on additionne tous les triangles AMB relatifs à l'arc de (C) d'une part et tous les rectangles DGKF de (γ) il est, avec Ozanam, « aisé de conclure » :

Aire (ADGH) = 2 Aire du segment AB de (C) (Segment : portion du plan entre un arc de courbe et sa corde).

Ainsi est établie une relation entre une aire liée à (C) et une liée à sa quadratrice géométrique (γ).

Application : cas du cercle

Soit un demi-cercle ACE de diamètre AOE = 2r. Avec les notations précédentes il apparaît, en plus, que (OI) et (EB) sont parallèles et que les triangles OAI et EDB sont semblables.

L'aire de la surface limitée par (γ) ADOLG est le double de l'aire du segment AC du disque :

$$\text{Aire} \left(\frac{1}{4} \text{ disque} \right) = \text{Aire} (\text{segment AC}) + \text{Aire} (\text{Triangle AOC})$$

$$= \frac{1}{2} \text{ Aire (ADOLG)} + \frac{r^2}{2}.$$

Par ailleurs les triangles semblables permettent d'écrire :

$$\frac{AI}{AO} = \frac{BD}{DE}, \quad \text{ou : } \frac{AI^2}{AO^2} = \frac{BD^2}{DE^2} = \frac{AD \cdot DE}{DE^2}, \quad \text{donc : } \frac{DG^2}{r^2} = \frac{AD}{DE} \quad (1).$$

Recherche d'une équation cartésienne de (γ).

Prenons comme axes la tangente en A et le diamètre AE. Soient GG' et LL' les coordonnées de G et L sur le premier axe. Posons : AG' = DG = x et AD = y.

(Toutes ces grandeurs sont ainsi positives, Ozanam ne l'imaginait pas autrement).

La relation (1) s'écrit : $\frac{x^2}{r^2} = \frac{y}{2r-y}$, alors : $y r^2 = x^2 (2r - y)$

$$\text{soit : } y(r^2 + x^2) = 2r x^2 \quad \text{et donc : } y = \frac{2r x^2}{r^2 + x^2}.$$

Ozanam écrit cette relation : $y = \frac{2x^2}{r} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{r^2}}$, expression qu'il développe :

$$y = \frac{2x^2}{r} \cdot \left[1 - \frac{x^2}{r^2} + \frac{x^4}{r^4} - \frac{x^6}{r^6} + \dots \right] = \frac{2x^2}{r} - \frac{2x^4}{r^3} + \frac{x^6}{r^5} + \dots$$

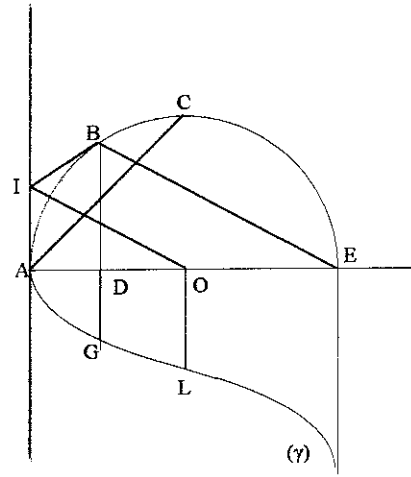
Il peut alors en usant de la sommation des puissances donnée par Pascal, calculer l'aire S de la surface (AGLL') limitée par (γ) avec x variant de 0 à r (AL' = OA). De là, il tirera l'aire de la surface (AGLOD).

Ozanam sait donc que la somme de 0 à r des x^2 est $\frac{r^3}{3}$, des x^4 est $\frac{r^5}{5}$, etc...

$$\text{Il a donc : } S = \frac{2r^3}{3r} - \frac{2r^5}{5r^3} + \frac{2r^7}{7r^5} + \dots = r^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \dots \right]$$

Ensuite : Aire (AGLOD) = Aire (AL'LO) - Aire (AL'LG) = $r^2 - S$

$$= r^2 \left[1 - \frac{2}{3} + \frac{2}{5} - \frac{2}{7} + \dots \right]$$



Mais :
$$\text{Aire (segment AC)} = \frac{1}{2} \text{ Aire (AGLOD)} = r^2 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned} \text{Aire} \left(\frac{1}{4} \text{ disque} \right) &= \text{Aire (segment AC)} + \text{Aire (triangle AOC)} \\ &= \text{Aire (segment AC)} + \frac{r^2}{2} = r^2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] \end{aligned}$$

Ozanam peut écrire : $\text{Aire (disque)} = \frac{1}{2} (\text{longueur du cercle} \times \text{rayon})$, d'où la relation :

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{r \cdot \text{cercle}}{2} = r^2 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right] \quad \text{et : } \frac{\text{cercle}}{2r} = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right]$$

c'est à dire le rapport :
$$\frac{\text{cercle}}{\text{diamètre}} = 4 \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \right].$$

Ozanam effectue les différences deux à deux $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$; $\frac{1}{5} - \frac{1}{7} = \frac{2}{5 \cdot 7}$; etc...

Il retient :
$$\frac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}} = 8 \left[\frac{1}{1.3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \dots \right].$$

Cette série hélas converge très lentement. Les dix premiers termes donnent 3,092 ! Ozanam en a calculé 315 et obtient le rapport 3,14000528. Il écrit : nous nous servirons de $\frac{314}{100}$ parce que cela suffit pour les calculs ordinaires de la géométrie pratique.

Autre application : cas de la parabole.

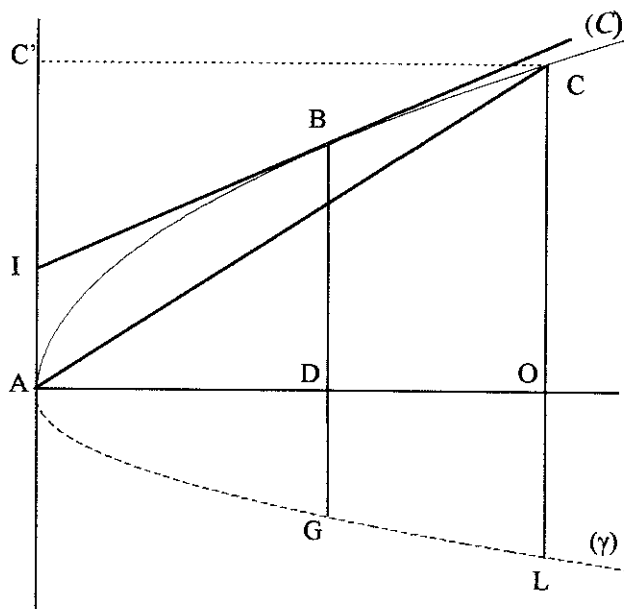
Il n'est pas besoin ici de la sommation des puissances. La démonstration est toute géométrique à partir de la propriété de la quadratrice géométrique.

Avec les mêmes notations : l'arc ABC est celui d'une parabole et on connaît la propriété : $AI = \frac{1}{2} DB$.

Donc la quadratrice (γ) est également une parabole puisque $DG = \frac{1}{2} DB$.

Ozanam ne parle pas d'affinité mais il sait que :
 $\text{Aire (ADOLG)} = \frac{1}{2} \text{ Aire (ADO CB)}$. Comme on a toujours : $\text{Aire (ADOLG)} = \frac{1}{2} \text{ Aire (segment ABC de la parabole)}$,

il vient : $4 \times \text{Aire (segment ABC)} = \text{Aire (ADO CB)}$.



Mais : Aire (ADO CB) = Aire (segment ABC) + Aire (triangle AOC)

donc : $3 \times \text{Aire (segment ABC)} = \text{Aire (triangle AOC)}$.

Comme l'aire du triangle AOC est la moitié de l'aire (AOCC'), on peut écrire :

$$\text{Aire (ADO CB)} = 4 \times \text{Aire (segment ABC)}$$

$$\text{Aire (AOCC')} = 6 \times \text{Aire (segment ABC)},$$

et, avec Ozanam : « *L'aire de la parabole est à celle du parallélogramme de même base et de même hauteur comme 2 est à 3* ».

En effet, la propriété est exacte si A est un point quelconque de la parabole et non seulement son sommet. Il est accessoire que le « diamètre » AD soit orthogonal à la « touchante » en A.

Généralisation.

Selon ce raisonnement, on démontrera que pour toute courbe (C) telle que : $DB^k = AD$ ($y^k=x$), on aura :

$$\text{Aire (AO CB)} = \frac{k}{k+1} \times \text{Aire (AOCC')}.$$

L'aire sous la courbe (C) est à celle d'un parallélogramme de même base et de même hauteur comme k est à k+1.