DANS NOS CLASSES

Une méthode de résolution d'une équation du troisième degré par François Viète

Martine Bühler

Adriaan Van Roomen (1561-1615) proposa aux mathématiciens de l'Europe un défi : résoudre une équation du 45ème degré. François Viète (1540-1603) y reconnut des similitudes avec l'expression de sin 45θ en fonction de sinθ et réussit ainsi, par un « changement de variable », à résoudre l'équation dont il donna les 23 solutions positives. Il explique dans « Ad problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum » (Paris 1595), comment cette méthode permet de résoudre certains types d'équations.

La réponse de Viète inspire le problème suivant qui a été donné en devoir à la maison dans une classe de Terminale Scientifique.

L'intérêt du problème réside dans la résolution d'une équation du troisième degré dans le cas dit « irréductible » : la méthode de Cardan mènerait à une équation du second degré dont les solutions sont complexes, et donc à l'extraction d'une racine cubique de nombre complexe (voir à ce sujet le conte du lundi du présent numéro et le texte de Girard sur les équations du troisième degré). Le problème reprend une méthode de Viète consistant à faire un changement de variable introduisant les fonctions trigonométriques, puis à utiliser les formules permettant d'exprimer sin $3a$ à l'aide de sin$a$. La fin du problème permet de souligner la généralité des liens entre coefficients et racines d'une équation polynomiale, liens que les élèves ne rencontrent que pour le second degré.

I Préliminaires

A) Soit $Z = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$

1) Mettre Z sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.

2) En déduire : $\cos\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$

B) 1) Développer $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^3$

2) En déduire l'expression de $\sin 3\alpha$ en fonction de $\sin\alpha$ et celle de $\cos 3\alpha$ en fonction de $\cos\alpha$.

II Etude du nombre de solutions réelles distinctes de l'équation (E) : $x^3 - 3x + a = 0 \quad (a \in IR)$

1) Montrer, en justifiant soigneusement toutes vos affirmations que si $a \in \,]-2\,;\,2[$, (E) possède trois racines réelles distinctes x_1, x_2, x_3 , toutes trois situées dans $]-2\,;\,2[$.

2) En indiquant rapidement la méthode employée, mais sans justifications précises, indiquer le nombre de racines réelles distinctes de (E) lorsque :

a) $a = 2$ b) $a = -2$ c) $a > 2$ d) $a < -2$

Pour c) et d), on pourra examiner le signe de $x^3 - 3x + a$ pour $x = -a$.

III Intermède pour les latinistes

Viète écrit le texte suivant à la fin du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. $1N$ désigne l'inconnue (notre « x »). $1C$ désigne le cube de l'inconnue (« x^3 »)

1) Pouvez-vous traduire le texte? (Attention! « radicem binomiae $2-\sqrt{3}$ » désigne le nombre $\sqrt{2-\sqrt{3}}$. Vous interpréterez de façon analogue l'expression « radicem trinomiae a+b+c ».)

PROBLEMA I.

Data magnitudine cui æquatur 3 N — 1 C, invenire 1 N.

I. 3 N — 1 C, æquetur $\sqrt{}$ 2. Dico 1 N esse radicem binomiæ 2 — $\sqrt{}$ 3.
Vel etiam, $\sqrt{}$ 2.

II. 3 N — 1 C, æquetur radici binomiæ $\frac{3}{2}$ — $\sqrt{}\frac{5}{4}$. Dico 1 N esse radicem trinomiæ $\frac{9}{4}$ — $\sqrt{}\frac{5}{16}$ — rad. bin. $\frac{15}{8}$ + $\sqrt{}\frac{45}{64}$.
Vel etiam, radicem binomiæ $\frac{3}{2}$ + $\sqrt{}\frac{5}{4}$.

III. 3 N — 1 C, æquetur radici binomiæ $\frac{5}{2}$ + $\sqrt{}\frac{5}{4}$. Dico 1 N esse radicem trinomiæ $\frac{7}{4}$ — $\sqrt{}\frac{5}{16}$ + rad. bino. $\frac{15}{8}$ + $\sqrt{}\frac{45}{64}$.
Vel etiam, rad. bino. $\sqrt{}\frac{5}{4}$ — $\frac{5}{2}$.

Sed 3 N — 1 C, æquetur 1. Ecquis vero 1 N primam, secundam-ve (est enim duplex) accurate construxerit?

2) A quel cas étudié au II se rapporte chacun des exemples de Viète?
Plus loin dans le texte, Viète indique sa méthode de résolution que la partie IV du problème va reprendre dans notre langage moderne.

IV Résolution de (E) : $x^3 - 3x + \sqrt{2} = 0$

1) a) En utilisant les résultats obtenus au II, indiquer le nombre de racines réelles distinctes de (E) et leur localisation.

b) Pourquoi peut-on poser, pour résoudre (E), $x = 2\sin\alpha$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$?

2) On pose $x = 2\sin\alpha$ avec $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer : x solution de (E) $\Leftrightarrow$ $\sin 3\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ avec $\alpha \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$

b) Résoudre dans $\mathbb{R}$, puis dans $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, l'équation d'inconnue α : $\sin 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c) En utilisant $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}$ déterminer les valeurs exactes de $\cos\frac{5\pi}{12}$ et $\sin\frac{5\pi}{12}$

d) Déduire de ce qui précède les valeurs des trois racines x_1, x_2, x_3. de (E). Comparer vos résultats avec ceux donnés par Viète.

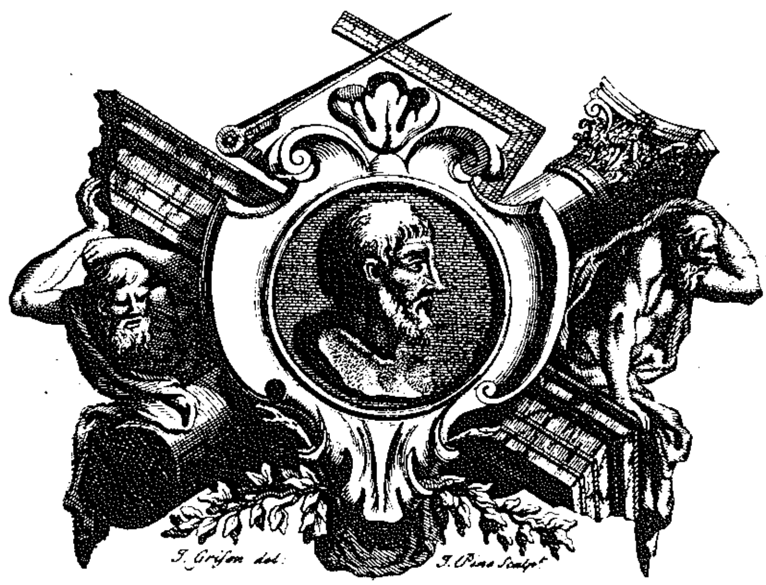
V Remarque sur les coefficients et les racines de l'équation.

1) Factoriser $x^3 - 3x + \sqrt{2}$

2) Calculer : $\sqrt{2-\sqrt{3}} + \sqrt{2} - \sqrt{2+\sqrt{3}}$ puis $\sqrt{2-\sqrt{3}}.\sqrt{2}.\sqrt{2+\sqrt{3}}$

VIETE (1540-1603) est une figure dominante du XVI$^{\text{ème}}$ siècle. Il est célèbre pour son traité d'algèbre In artem analyticam isagoge, publié en 1591, où il développe l'algèbre symbolique.

Il fut un des premiers à mettre en évidence les relations entre les formules trigonométriques et la résolution d'équations polynomiales.



FRANCISCI VIETÆ

AD

PROBLEMA, QVOD OMNIBVS MATHEMATICIS TOTIVS ORBIS CONSTRUENDUM PROPOSUIT ADRIANUS ROMANUS,

RESPONSVM.

SI toto terrarum orbe non errat ADRIANVS ROMANVS, dum Mathematicos totius terrarum orbis unius sui Problematis solutioni vix censet idoneos, non ille saltem Gallias, nec Galliarum Lycia suo dimensus est radio. Cedat ROMANO Belga, cedat ROMANVS Belgæ, vix sinet Gallus à ROMANO vel Belga gloriam suam sibi præripi. Ego qui me Mathematicum non profiteor, sed quem, si quando vacat, delectant Mathematices studia, Problema ADRIANICVM ut legi ut solvi, nec me malus abstulit error. Sic trihorio ingens prodii Geometra. Neque vero placet barbarum idioma, id est; Algebricum. Geometrica Geometrice tracto, Analytica Analytice. Curabo tamen ut me, sive quasi Geometram sive novum Analystam, vulgus Algebristarum satis exaudiat.

CAPVT I.

Proponentis Adriani Romani verba.

PRimum igitur Adriani Romani proponentis ipsa verba refero, ne immutato quidem commate.

PROBLEMA MATHEMATICVM OMNIBVS ORBIS MATHEMATICIS AD CONSTRVENDVM PROPOSITVM. “

Si duorum terminorum prioris ad posteriorem proportio sit, ut 1 (45) ad “
45 (1) − 3795 (3) + 9,5634 (5) − 113,8500 (7) + 781,1375 (9) − 3451,2075 (11) + 1, “
0530,6075 (13) − 2,3267,6280 (15) + 3,8494,2375 (17) − 4,8849,4125 (19) “
+ 4,8384,1809 (21) − 3,7865,8800 (23) + 2,3603,0652 (25) − 1,1767,9100 “
(27) + 4695,5700 (29) − 1494,5040 (31) + 376,4565 (33) − 74,0459 (35) + “
11,1150 (37) − 1,2300 (39) + 945 (41) − 45 (43) + 1 (45) deturque terminus “
posterior, invenire priorem.

Viète Opera Mathematica recognita F. à Schooten, Leyde, 1646, p 305.