# *Une méthode de résolution d'équation du troisième degré par Albert Girard.*

Martine Bühler

Albert Girard (1595-1632) est un mathématicien lorrain protestant exilé en Flandres. Le texte présenté ci-dessous est extrait de l'*Invention Nouvelle en Algèbre* (1629). Outre l'*Invention...*, Girard a publié une *Table des Sinus, tangentes, sécantes* (La Haye, 1626), comportant un traité de trigonométrie ; il a également édité une traduction française de Stevin.

L'*Invention Nouvelle en Algèbre* est un ouvrage remarquable : on y trouve énoncé le théorème fondamental de l'algèbre ( sans démonstration, suivi d'*explications* qui sont en fait des exemples ) et également l'énoncé général des relations entre coefficients d'une équation polynomiale et fonctions symétriques des racines, qui seront au coeur des recherches ultérieures sur la résolution algébrique des équations ; ces résultats nécessitent la prise en compte de toutes les racines, y compris les racines négatives et imaginaires , comme le remarque Girard[1] :

*"De même, si* $1(4)$ *est égal à* $4(1)-3$... *les quatre solutions seront* $1, 1, -1+\sqrt{-2}, -1-\sqrt{-2}$ *,...on pourrait dire : à quoi servent les solutions qui sont impossibles ? Je réponds, pour trois choses : pour la certitude de la règle générale ; et qu'il n'y ait pas d'autre solution; et pour son utilité".*

Girard montre même l'usage des racines négatives en géométrie : *"la solution par – s'explique en géométrie en rétrogradant et le moins recule où le plus avance".*

Les notations, modernes pour l'époque, sont reprises de Stevin. Le degré de l'inconnue est seul noté, sans l'inconnue, comme étant l'essentiel. Ainsi $2x^2-3x=1$ s'écrit $2(2)-3(1)$ égal à $1(0)$.

L'extrait étudié ici donne une méthode de résolution de l'équation $x^3 = px+q$ dans le cas dit "irréductible", c'est-à-dire lorsque $-4p^3 + 27q^2 \langle 0$ .

Quel est le problème ? La méthode dite "de Cardan" aboutit dans ce cas à une équation auxiliaire du second degré dont les deux racines sont imaginaires ; en effet, si on pose $x=u+v$ , l'équation $x^3 = px+q$ devient : $u^3+v^3+3uv(u+v)=p(u+v)+q$ . La méthode consiste à résoudre le système :

$\begin{cases} u^3+v^3=q \\ uv=\dfrac{p}{3} \end{cases}$ *i.e.* $\begin{cases} u^3+v^3=q \\ u^3v^3=\dfrac{p^3}{27} \end{cases}$ donc à résoudre l'équation en t du second degré: $t^2-qt+\dfrac{p^3}{27}=0$ dont $u^3$ et $v^3$ sont racines, puis à extraire les racines cubiques de ces solutions .

[1] Pour lire cet extrait du texte de Girard, il faut savoir que 1(4) signifie $x^4$ et 4(1) – 3 signifie $4x-3$.

Or le discriminant est $\Delta = \dfrac{27q^2 - 4p^3}{27}$ et, dans le cas que nous étudions, $\Delta$ est strictement négatif. On sait que Bombelli eut l'audace de passer outre l'impossibilité de résoudre dans ce cas l'équation auxiliaire, en introduisant un opérateur *"più di meno"* qui deviendra à terme notre nombre i. Mais Bombelli choisit bien ses exemples, de façon à pouvoir sans mal extraire la racine cubique nécessaire. Il en va tout autrement si l'équation de départ n'est pas "bien choisie". On peut certes résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation auxiliaire mais l'extraction **sous forme algébrique** des racines cubiques d'un nombre complexe se révèle impossible (Newton jeune y occupera d'ailleurs -vainement- une partie de son temps) et la méthode échoue, alors même que l'équation de départ a trois racines réelles.

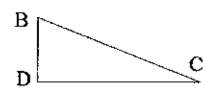
C'est pour éviter ce problème que Girard propose une autre méthode de résolution, s'appuyant sur la trigonométrie.

Viète est sans doute le premier à avoir remarqué la relation étroite entre la division d'un arc en parties égales et la résolution de certaines équations. A l'occasion d'un défi lancé par Adriann Van Roomen (1561-1615), Viète expose ses idées dans une réponse à Roomen : *Problema, quod omnibus mathematicis totius orbis construendum proposuit Adrianus Romanus, responsum.* Le problème de Roomen est la résolution d'une équation de degré 45.

PROBLEMA MATHEMATICVM OMNIBVS ORBIS MATHEMATICIS AD CONSTRVENDVM PROPOSITVM. "

Si duorum terminorum prioris ad poſteriorem proportio ſit, ut 1 (1) ad 45 (1) − 3795 (3) + 9,5634 (5) − 113,8500 (7) + 781,1375 (9) − 3451,2075 (11) + 1,0530,6075 (13) − 2,3267,6280 (15) + 3,8494,2375 (17) − 4,8849,4125 (19) + 4,8384,1800 (21) − 3,7865,8800 (23) + 2,3603,0652 (25) − 1,1767,9100 (27) + 4695,5700 (29) − 1494,5040 (31) + 376,4565 (33) − 74,0459 (35) + 11,1150 (37) − 1,2300 (39) + 945 (41) − 45 (43) + 1 (45) deturque terminus poſterior, invenire priorem.

Viète remarque l'analogie avec l'expression de $\sin 45\theta$ à l'aide de $\sin\theta$. Il donne ainsi 23 solutions de l'équation, négligeant les solutions négatives. Il explique également comment sa méthode permet de résoudre un certain type d'équations. Dans un triangle rectangle BCD d'hypoténuse $BC = 2$, $BD$ est le double du sinus de l'angle $\widehat{BCD}$. Appelons $BD = 1N$ (notation de Viète pour l'inconnue dont il note le carré $Q$ et le cube $C$). Alors :




$BC = 2$
$1N = 2 \sin \widehat{BCD}$

2 — 1 Q
3 N — 1 C
2 — 4 Q + 1 QQ
5 N — 5 C + 1 QC
2 — 9 Q + 6 QQ — 1 CC
7 N — 14 C + 7 QC — 1 QQC
2 — 16 Q + 20 QQ — 8 CC + 1 QCC
9 N — 30 C + 27 QC — 9 QQC + 1 CCC

*Æquabitur* { *Basi* / *Perp.* / *Basi* / *Perp.* / *Basi* / *Perp.* / *Basi* / *Perp.* } *Anguli* { *Dupli.* / *Tripli.* / *Quadrupli.* / *Quintupli.* / *Sextupli.* / *Septupli.* / *Octupli.* / *Noncupli.* }

*Et eo infinitum continuando ordine, adſcita ſi placet numerorum continue triangulorum ſuum à binario ducentium incrementum tabella.*

c'est-à-dire : $2 - 1Q$ est le double du cosinus de l'angle double de $\widehat{BCD}$ ;

en effet, $2 - 1Q = 2 - N^2 = 2 - 4\sin^2 \widehat{BCD} = 2\cos(2\widehat{BCD})$. De même, 3N −1C est le double du sinus de l'angle triple ; en effet, $3N - 1C = 3N - N^3 = 6\sin\widehat{BCD} - 8\sin^3 \widehat{BCD} = 2\sin(3\widehat{BCD})$, etc. Dans le texte de Viète, "perpendicularis" est le double du sinus de l'angle alors que "basis" est le double du cosinus. On peut donc résoudre facilement une équation du type $3x - x^3 = a$ (avec $a \in [-2\,;\ +2]$ ).

Viète donne l'exemple suivant :

> ***In notis 3 N — 1 C, æquetur √ 2. Quoniam posito 1 sinu toto, fit √ 2 sinus duplus anguli partium XLV, ideo 1 N est sinus duplus anguli partium XV, vel etiam est sinus duplus anguli partium XLV. Erit igitur 1 N radix binomia 2 — √ 2. Vel etiam √ 2.***
> ***3 N — 1 C, æquetur 1. Quoniam posito 1 sinu toto, fit 1 sinus duplus anguli partium XXX, ideo 1 N est sinus duplus anguli partium X, vel etiam est sinus duplus anguli partium L.***

Soit à résoudre : $3x - x^3 = \sqrt{2}$ . On sait que $\sqrt{2} = 2\sin 45°$ donc si on pose $x = 2\sin\theta$ , on a $2\sin 3\theta = 2\sin 45°$ donc $\theta = 15°$ . Or, $\sin 15° = \sqrt{\dfrac{1-\cos 30°}{2}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$ donc $x = \dfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.[2]

Girard va exploiter totalement une idée similaire.

***"Reigle pour résoudre l'équation de 1(3) esgale à (1)+(0) lors que le cube du tiers du nombre est majeur au quarré de la moitié des (0) par l'aide de la table des Sinus"***

Il s'agit bien de résoudre $x^3 = px + q$ lorsque $\left(\dfrac{p}{3}\right)^3 > \left(\dfrac{q}{2}\right)^2$ c'est-à-dire $-4p^3 + 27q^2 < 0$.

Suivons donc pas à pas la « *Reigle pour résoudre l'équation de 1 (3) esgale à (1) + (0) ...* ».

L'exemple "générique" que traite Girard est $x^3 = 13x + 12$ mais nous allons exposer, en regard des citations du texte de Girard, l'algorithme de résolution dans le cas général $x^3 = px + q$ .

D'une part, on considère $\dfrac{p}{3}$ puis sa racine $\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ et on fait leur produit : $\dfrac{p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ . Le produit de ces deux nombres sera le « *diviseur* » de l'opération suivante.

« *le tiers du nombre des (1) est* $4\frac{1}{3}$ » (*i.e.* $\dfrac{p}{3} = \dfrac{13}{3} = 4 + \dfrac{1}{3}$ )

« *Sa racine est en disme 20816(4)* » (le (4) signifie que la racine est 2,0816 avec 4 chiffres significatifs après la virgule)

« *leur produit est 9.0203(4) , diviseur* »

D'autre part, on considère $\dfrac{q}{2}$.

« *la moitié du (0) est 6* » (i.e. $\dfrac{q}{2} = 6$)

« *le raid 100 000, leur produit 600 000 dividende* ».[3]

---

[2] On trouve cette méthode utilisée dans certains problèmes de baccalauréat : par exemple le problème du bac E, Amiens 1984 (voir page 66 des Annales Nathan pour le Bac S 96).

[3] Le sinus d'un angle à l'époque n'est pas défini comme actuellement à l'aide du cercle trigonométrique de rayon 1, mais dépend du rayon du cercle considéré. Ce choix du raid 100 000, c'est-à-dire du rayon 100 000, correspond au fait qu'on prendra 5 chiffres significatifs pour le sinus (le sinus de Girard étant ainsi égal au nôtre multiplié par 100 000).

Le quotient est $\dfrac{\frac{q}{2}}{\frac{p}{3}\sqrt{\frac{p}{3}}}$ qui est le sinus[4] d'un certain angle $\alpha$: 41°41'87" . On ajoute 180° ; on obtient 221°41'87" (c'est-à-dire $\alpha$+180°) ; on divise par 3, ce qui donne 73°53'52" ($\theta = \dfrac{\alpha+180}{3}$).

On prend le sinus de cet angle qu'on double puis multiplie par $\sqrt{\dfrac{p}{3}}$. Le résultat est donc $2\sqrt{\dfrac{p}{3}}\sin\theta$, qui est la solution de l'équation à résoudre.

*« Or ayant ainsi un dividende et un diviseur, on aura un quotient 66515.*

| | |
|---|---|
| *Sinus de* | *41 deg.41.37* |
| *adjoutez y par reigle* | *180* |
| *somme* | *221. 41.37.* |
| *son tiers* | *73. 53. 52.* |
| *son sinus* | *96078* |
| *son double* | *192156* |
| *multiplié par* | *20816(4)* |
| *viendra* | *400000* |

*lequel divisé par le raid 100000*

*viendra 4 la valeur de 1(1) principale »*

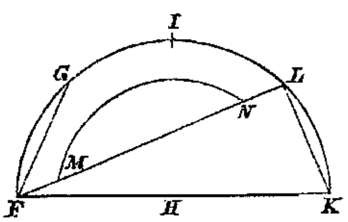
Girard ne donne pas de justifications de son résultat ; il s'agit en fait comme dans les calculs de Viète de l'utilisation de la formule donnant $\sin 3\theta$ à l'aide de $\sin\theta$. En effet, on obtient alors :

$x^3 - px = 8\dfrac{p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}\sin^3\theta - 2p\sqrt{\dfrac{p}{3}}\sin\theta = 2\dfrac{p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}(4\sin^3\theta - 3\sin\theta)$ ; or on reconnaît dans la parenthèse $-\sin 3\theta = -\sin(\alpha+180) = \sin\alpha$. Donc $x^3 - px = 2\dfrac{p}{3}\sqrt{\dfrac{p}{3}}\sin\alpha = q$.

Les deux autres solutions sont alors données grâce aux relations entre les coefficients et les racines de l'équation : une solution étant connue, on obtient facilement la somme et le produit des deux autres et donc l'équation du second degré qu'elles vérifient.

Girard propose ensuite « ***la mesme en geometrie de facile expedition*** » méthode géométrique que nous allons expliquer en langage moderne.

On construit la moyenne proportionnelle entre $\dfrac{p}{3}$ et 1, qu'on appelle $FH$. On a: $\dfrac{1}{FH} = \dfrac{FH}{\frac{p}{3}}$ i.e. $FH = \sqrt{\dfrac{p}{3}}$.




On considère alors le demi-cercle de centre $H$ et de rayon $FH$. Alors : $\dfrac{q}{\frac{p}{3}} < 2FH$ car $\left(\dfrac{q}{2}\right)^2 < \left(\dfrac{p}{3}\right)^3$ donc il existe un point G sur le demi-cercle tel que $FG = \dfrac{q}{\frac{p}{3}}$. Soit L tel que l'arc LK soit égal au tiers de l'arc GK.

On trace le cercle de centre H de rayon $LK$ ; il coupe (FL) em M et N.

Alors les racines de l'équation sont $FL$, $-FN$, $-FM$.

Girard donne ce résultat sans l'expliquer. On peut cependant le comprendre en utilisant les lignes trigonométriques des angles concernés (en se souvenant que, contrairement à nous, Girard utilise des sinus et non des cosinus) :

[4] "*Or ayant ainsi un diviseur et un dividende, on aura un quotient 66 515*" : avec notre sinus, on obtiendrait 0,66 515.

$\dfrac{FL}{FK} = \cos\widehat{LFK} = \cos\theta$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{FG}{FK} = \cos\widehat{GFK} = \cos 3\theta$

Or $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ $\quad$ donc $\quad \dfrac{FG}{FK} + 3\dfrac{FL}{FK} = 4\dfrac{FL^3}{FK^3}$ $\quad$ d'où $\quad FL^3 = FK^2.\dfrac{FG}{4} + \dfrac{3}{4}.FK^2.FL$

Or $FK = 2\sqrt{\dfrac{p}{3}}$ $\quad$ donc: $FK^2 = 4\times\dfrac{p}{3}$ $\quad$ soit $FG = \dfrac{q}{\frac{p}{3}} = 3\times\dfrac{q}{p}$ $\quad$ d'où $\quad FL^3 = 4\times\dfrac{p}{3}\times\dfrac{3q}{p}\times\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{4}\times 4\times\dfrac{p}{3}\times FL$

Et finalement $\qquad FL^3 = pFL + q$

On peut également remarquer que $FL$ est bien égal à la solution trouvée dans la règle algébrique :

$\dfrac{FL}{FK} = \cos\widehat{LFK} = \sin(90° - \widehat{LFK}) = \sin(90° - \dfrac{1}{3}\widehat{GKF}) = \sin(90° - \dfrac{1}{3}(90° - \widehat{GKF})) = \sin(60° + \dfrac{1}{3}\widehat{GKF})$.

Donc $FL = 2FH\sin\dfrac{180° + \widehat{GKF}}{3}$. Or $\widehat{GKF}$ est l'angle dont le sinus est $\dfrac{FG}{FK} = \dfrac{q}{\frac{p}{3}} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\frac{p}{3}}}$ et on retrouve la

règle énoncée plus haut.

$FL$ est donc bien solution de $x^3 = px + q$ .

Les deux autres solutions doivent vérifier :

$\begin{cases} x_1 + x_2 + FL = 0 \\ x_1 x_2 FL = q \end{cases}$ Or $FM = NL$ (cercles concentriques), donc $FM + FN = FM + MN + NL = FL$,

c'est-à-dire $(-FM) + (-FN) + FL = 0$.

De plus : $FM . FN = FH^2 - LK^2$ (puissance du point F par rapport au cercle de centre H de rayon $LK$).

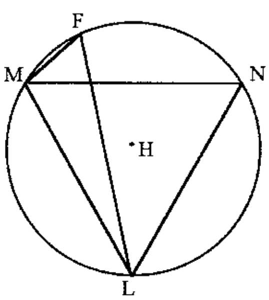
Donc : $FM . FN = FH^2 - (FK^2 - FL^2) = FH^2 - (4FH^2 - FL^2)$ car $FK = 2FH$.

$\qquad = FL^2 - 3FH^2 = FL^2 - p$ car $FH = \sqrt{\dfrac{p}{3}}$

Donc : $FM . FN . FL = FL^3 - pFL = q$ car $FL^3 = pFL + q$.

Donc : $(-FM).(-FN).FL = q$ , $-FM$ et $-FN$ sont donc bien les deux autres solutions de l'équation.

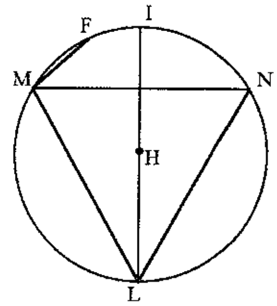
La fin du texte donne une autre méthode de construction géométrique des racines $-FM$ et $-FN$ de l'équation, $FL$ ayant été trouvé comme précédemment.




On trace le triangle équilatéral LMN inscrit dans le cercle de centre H et de rayon $FH = \sqrt{\dfrac{p}{3}}$ . Alors les deux autres racines de l'équation sont $-FM$ et $-FN$, résultat que Girard donne sans démonstration. On peut cependant comprendre ce résultat, soit à l'aide de propriétés géométriques démontrées par Ptolémée dans l'*Almageste* soit de manière plus moderne en utilisant des rotations (voir page suivante).

Girard donne ainsi une méthode élégante et originale pour résoudre les difficultés d'ordre algébrique posées par la méthode de Cardan dans le cas irréductible, en exploitant d'une manière remarquable les idées de Viète. Cette méthode est équivalente à mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe dont on doit extraire une racine cubique. Cette méthode « trigonométrique » reste toujours intéressante et peut être pratiquée par nos élèves comme dans le problème proposé à la rubrique « Dans nos classes ».

## Une justification de la construction géométrique de Girard à l'aide du théorème de Ptolémée




$LM = MN = NL = \sqrt{3} \times rayon = \sqrt{3}\sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt{p}$

Comme $FL^3 = pFL + q$, on a:

$FL^2 = p + \frac{q}{FL} > p$ donc $FL > LM$ et $FL > MN$

donc F est sur le petit arc MN.

Remarque :

Le quadrilatère FMNL est inscrit dans un cercle, donc : $FL \times MN = FM \times NL + FN \times ML$ (il s'agit de la relation communément appelée « théorème de Ptolémée », que celui-ci démontre dans l' *Almageste*) .

donc : $FL = FM + FN$ ou $-FM - FN + FL = 0$ (première relation souhaitée pour que $FM$ et $FN$ soient les deux autres solutions de l'équation).

Par ailleurs, I étant diamétralement opposé à L, on a :

$FL \times IM = FM \times IL + FI \times ML$ car FILM est inscrit dans un cercle

$FN \times IL = FI \times NL + IN \times FL$ car FINL est inscrit dans un cercle.

Donc $FM \times FN \times IL^2 = (FI \times NL + IN \times FL)\,(FL \times IM - FI \times ML)$

Or $IM = IN$ et $ML = NL$ donc on obtient :

$FM \times FN \times IL^2 = (IN \times FL + FI \times NL)(FL \times IN - FI \times NL) = FL^2 \times IN^2 - FI^2 \times NL^2$

Or $IL^2 = 4R^2 = \frac{4p}{3}$ et $IN^2 = R^2 = \frac{p}{3}$ et $FI^2 = IL^2 - FL^2 = \frac{4p}{3} - FL^2$

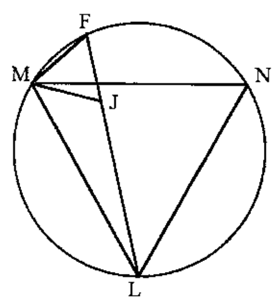
On obtient $FM \times FN \times \frac{4p}{3} = FL^2 \times \frac{p}{3} - \left(\frac{4p}{3} - FL^2\right) \times 3\frac{p}{3} = \frac{4p}{3} \times FL^2 - \frac{4p}{3} \times p$

$FM \times FN = FL^2 - p$

$FM \times FN \times FL = FL^3 - pFL = q$ car $FL^3 = pFL + q$

c'est-à-dire $(-FM)(-FN)FL = q$ ce qui est la deuxième relation que doivent satisfaire $-FM$ et $-FN$. Donc $-FM$ et $-FN$ sont bien les deux autres solutions de l'équation à résoudre.

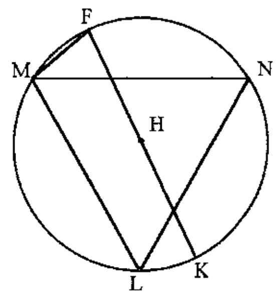
## Une justification à la manière du bac S




Soit de même F sur le petit arc MN. Soit J sur [FL] tel que $FJ = FM$. Le triangle FMJ est équilatéral car $\widehat{(JFM)} = \widehat{(FMJ)}$ et $\widehat{(JFM)} = \widehat{(LNM)} = 60°$ (angles inscrits interceptant le même arc).

La rotation de centre M d'angle $\frac{\pi}{3}$ envoie donc L sur N et J sur F, donc $LJ = NF$.

Or J $\in[FL]$ donc $FJ + JL = FL$ donc $FM + FN = FL$, c'est-à-dire : $(-FM)+(-FN)+FL = 0$ (première relation souhaitée).




Rappelons que [FK] est un diamètre du cercle. Alors :

$$\frac{FM}{FK} = \cos\widehat{MFK} = \cos\left(\widehat{MFL} + \widehat{LFK}\right) = \cos\left(60°+\widehat{LFK}\right)$$

$$\frac{FN}{FK} = \cos\left(60°-\widehat{LFK}\right)$$

donc $\dfrac{FM}{FK}\times\dfrac{FN}{FK} = \cos\left(60°+\widehat{LFK}\right)\times\cos\left(60°-\widehat{LFK}\right)$

$$= \frac{1}{2}\left[\cos 120°+\cos\left(2\widehat{LFK}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\cos 120° + 2\cos^2\widehat{LFK} - 1\right)$$

*Or* $\cos\widehat{LFK} = \dfrac{FL}{FK}$ donc $\dfrac{FM}{FK}\times\dfrac{FN}{FK} = -\dfrac{3}{4}+\dfrac{FL^2}{FK^2}$ .

On obtient alors : $FM\times FN = -\dfrac{3}{4}FK^2 + FL^2$ or $FK^2 = 4\times\dfrac{p}{3}$ donc: $FM\times FN = FL^3 - \dfrac{3}{4}\times\dfrac{p}{3}$

$FM\times FN\times FL = FL^3 - pFL = q$ *car* $FL^3 = pFL + q$

donc $(-FM)\,(-FN)\,FL = q$ (deuxième relation souhaitée).

Invention nouvelle

EN

# L'ALGEBRE,

PAR

ALBERT GIRARD

MATHEMATICIEN.

Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.


A AMSTERDAM.

Chez Guillaume Iansson Blaeuw.

M. DC. XXIX.

Extrait de *Invention nouvelle* EN *L'ALGEBRE* (paragraphe intitulé *Des équations ordonnées*)
par Albert GIRARD, G. I. Blaeuw, Amsterdam, 1629.

**Reigle pour resoudre l'equation de 1 (3) esgale à (1) + (0) lors que le cube du tiers du nombre de (1) est majeur au quarré de la moitié des (0) par l'aide des tables de Sinus.**

**Soit 1 (3) esgale à 13 (1) + 12**

| | |
|---|---|
| **Le tiers du nombre des (1) est $4\frac{1}{3}$** | **la moitié du (0) est 6** |
| **sa √ est en disme ☞ 20816 (4)** | ***le raid 100000*** |
| **leur produit est 9,0203 (4), diviseur** | **leur produit 600000, dividende** |

**Or ayant ainsi un dividende & diviseur, on aura un quotient 66515**

**Sinus de 41 deg. 41′. 37″.**
**adjoustez y par reigle 180**

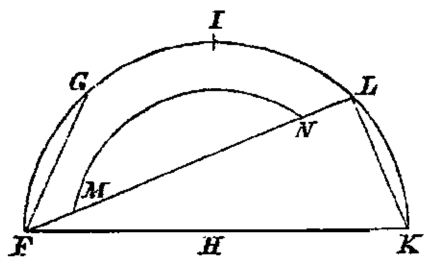
**somme 221. 41. 37**
**son tiers 73. 53. 52**
**son sinus 96078**
**son double 192156**
**multiplié par ☞ 20816 (4)**
**viendra 400000**

**lequel divisé par le raid 100000**
**viendra 4 la valeur de 1 (1) principale**

**Car il y a encor deux valeurs qui sont chacune faite par —; parquoy appliquant (1) à la valeur trouvée 4, & ledit divisant l' (0) donné 12 : viendra 3, donnant le signe — à chacun, puis par reigle**

**1 (2) esgale à — 4 (1) — 3**
**les valeurs seront — 1 & — 3**

**Donc les 3 valeurs requises seront** $\left\{\begin{array}{l} 4 \\ -3. \\ -1 \end{array}\right.$



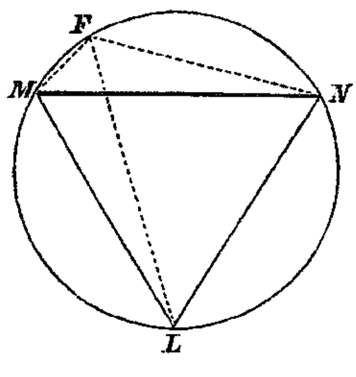

*Le mesme en Geometrie de facile expedition.*

Cy dessus 1 (3) estoit esgale à 13 (1) + 12 Le $\frac{1}{3}$ du 13 est $4\frac{1}{3}$, entre iceluy & l'unité soit trouvé une moyenne proportionnelle FH, icelle comme raid soit fait un demicercle, Or ledit $4\frac{1}{3}$ divisant le 12 donné, viendra $2\frac{10}{13}$, qui sera tousjours moindre au diametre de necessité, en l'accident present selon le tiltre de ceste equation: soit dont F G adaptée esgale à $2\frac{10}{13}$, puis soit trouvé geometriquement par le moyen de l'hyperbole le tiers de l'arc G K, ou bien mechaniquement avec le compas, (car il est impossible de coupper tout arc proposé en 3, sans user d'autres lignes que la droite & circulaire) & soit LK, puis de l'intervalle de la droite LK, comme raid, soit fait l'arc MN homocentrique, couppant la ligne F L en M, N, alors les trois valeurs de la 1 (1)

$$\text{seront}\begin{cases} FL \\ -FN \\ -FM \end{cases}$$

Notez, que si on eust proposé 1 (3) esgale à 13 (1) — 12, les trois valeurs eussent esté les mesmes, apres avoir changé les signes, assavoir

$$\begin{cases} -FL \\ FN \\ FM \end{cases}$$




On eust peu faire dans le cercle entier, apres avoir trouvé F L comme dessus, un triangle equilateral commençant en L ou à F, comme icy en L, puis de l'autre extremité F mener FM & FN, qui devront estre esgales aux FM, FN precedentes; aussi MN se trouveroit estre esgale à $\sqrt{13}$ (des 13 (1) données.)

Ceste equation donc qu'on n'a peu faire jusques à present est en Algebre litterale.

A cube esgal à (Bq + BC + Cq) A + BC (B + C) par l'aide de laquelle je l'avois bien resoute par deux ou trois manieres sans les Tables de Sinus; mais la maniere generale qui suivra en son lieu est à preferer: or icy A vaut B + C, ou — B, ou — C.