CONTES DU LUNDI

A propos de Diophante d'Alexandrie

Marianne Guillemot

L'oeuvre de Diophante est profondément originale, et occupe une place à part dans l'histoire des mathématiques de l'antiquité occidentale.

Elle est originale par son objet, les nombres : car elle s'intéresse aux nombres pour eux-mêmes, sans implication philosophique (contrairement à la tradition pythagoricienne) et sans lien avec la géométrie ni avec la notion de mesure (à la différence de l'oeuvre d'Euclide). Elle est originale aussi par les problèmes qu'elle pose et les méthodes variées qu'elle donne pour les résoudre. Les savants du Moyen-Age arabo-persan, qui ont connu l'oeuvre de Diophante, présentent celui-ci comme un précurseur de l'algèbre; un catalogue arabe, appelé *Fihrist,* composé vers 987 et recensant des ouvrages connus à cette époque, cite Diophante comme *"Grec d'Alexandrie qui écrivit sur l'art de l'algèbre".*

On ne sait presque rien de la vie de Diophante. L'époque même où il vécut est connue de façon très imprécise. Par un auteur (Hypsicles d'Alexandrie) qu'il invoque dans son livre sur les nombres polygones, par un autre mathématicien (Théon d'Alexandrie) qui le cite dans un commentaire, on peut situer sa vie entre le deuxième siècle avant J.C. et le quatrième siècle de notre ère. Des recherches plus précises laissent penser que Diophante a probablement vécu vers le troisième siècle de notre ère.[1]

Il nous est connu par deux oeuvres : les *Nombres polygones*, un ouvrage assez court, et surtout les *Arithmétiques,* dont le préambule indique qu'elles comportaient à l'origine treize livres. De l'oeuvre de Diophante ne subsistèrent pendant longtemps, en Occident, que quelques copies en mauvais état de manuscrits plus anciens, qui furent oubliés pendant des siècles, et ne furent redécouverts qu'à la Renaissance. Ils ne comportaient que six des treize livres annoncés par Diophante, avec des lacunes, des interpolations, des modifications dans l'ordre des problèmes.

Diophante était connu des savants arabes du Moyen-Age ; mais quand les mathématiques arabes pénétrèrent en occident vers le treizième siècle, les ouvrages d'algèbre de Léonard de Pise ne le mentionnèrent pas, bien que les connaissances nouvellement introduites, en particulier dans ses manuscrits de 1202 et 1228, restés longtemps inédits, eussent probablement subi l'influence de la démarche diophantienne. Plus tard, les traités d'algèbre de Luca Pacioli (*Summa de Arithmetica,* 1494), de Jérome Cardan (*Ars Magna,* 1545), de Tartaglia (*Trattato di numeri*, 1560), ignorèrent également Diophante. Cependant, en 1464, l'astronome Regiomontanus, qui avait traduit en latin plusieurs ouvrages scientifiques de l'antiquité grecque, (des oeuvres d'Archimède, Apollonius, Ptolémée), signala, dans une lettre, la découverte à Venise d'un manuscrit du mathématicien grec Diophante, mais ne le traduisit pas.

Le nom et l'oeuvre de Diophante restèrent donc inconnus en Occident jusqu'à ce que Rafael Bombelli publiât en 1572, vers la fin de sa vie, l'*Algebra*, ouvrage dans lequel il rassemblait toutes les découvertes algébriques de ses prédécesseurs de l'école de Bologne, et innovait de manière importante (il est l'un des créateurs du calcul des imaginaires). Bombelli annonce, dans l'introduction de son traité, la découverte, dans la Bibliothèque du Vatican, d'un manuscrit de Diophante, et indique qu'il a traduit ce texte en italien. En fait, cette traduction n'est pas fidèle: il a incorporé, dans son traité d'algèbre, un grand nombre de problèmes de Diophante mêlés à ses propres problèmes.

Au moment où Bombelli publie son traité d'algèbre en Italie, en 1572, le grand humaniste Xylander, en Allemagne, travaille à la traduction de l'oeuvre de Diophante en latin. Cette traduction est une oeuvre remarquable, malgré de nombreuses incorrections et passages obscurs, dus en partie à la mauvaise qualité du manuscrit unique dont il disposait.

C'est de Bombelli que semble s'être inspiré Simon Stevin de Bruges, qui fit paraître en français, en 1585, un traité d'arithmétique dans lequel il énonce les propositions de Diophante de manière très libre. L'*Arithmétique* de Stevin fut rééditée, corrigée et augmentée, par Albert Girard (1634), également en langue française.

Malgré leurs défauts, la traduction latine de Xylander et les adaptations en français de Stevin et de Girard eurent une grande influence sur les progrès de l'algèbre. Citons par exemple les *Zététiques* de François Viète, parues en latin vers 1590. Viète emprunte certains de ses problèmes aux problèmes les plus difficiles de Diophante ; mais il utilise pour les résoudre des méthodes très différentes, souvent géométriques, et, comme il est normal, il utilise aussi les innovations récentes de l'algèbre.

L'édition du texte grec fut enfin donnée en 1621 par Claude Gaspar Bachet de Méziriac, mathématicien et helléniste. Il travailla sur un "manuscrit de Paris", copie faite dans la deuxième moitié du seizième siècle à partir de deux manuscrits du Vatican. Bachet a utilisé les travaux de Bombelli et de Xylander (il a placé la traduction latine de Xylander en face du texte grec) ; il a remédié à certaines lacunes du texte grec en mettant entre parenthèses ce qu'il avait ajouté. Bachet fut donc un éditeur très scrupuleux. Son édition est accompagnée de commentaires sur ses propres découvertes, qui sont souvent intéressantes.

Pierre de Fermat (1601-1665) étudia de manière approfondie l'édition de Bachet : il enrichit son exemplaire de nombreuses notes et remarques manuscrites qui furent publiées sous forme de commentaires dans la réédition du Diophante de Bachet publiée par le fils de Fermat en 1670. Selon son habitude, Fermat énonce souvent ses résultats sans démonstration. Le célèbre énoncé, connu sous le nom de grand théorème de Fermat, n'a été établi que très récemment après avoir stimulé les mathématiciens pendant plus de trois siècles : citons Euler, Lagrange, Gauss (avec ses *Recherches Arithmétiques*), Cauchy... Les tentatives de démonstrations sont à l'origine de théories nouvelles comme la théorie des idéaux (Kummer, Dedekind) ou l'étude arithmétique des courbes algébriques.

---

[1] A ce propos, on pourra lire la préface de *Diophante d'Alexandrie*, traduction Paul Ver Eecke, édition Desclée de Brouwer, Bruges, 1926.

Dans les années 1893-1895 parut une édition critique, due à Paul Tannery. Cette édition comporte tout le texte grec des oeuvres connues de Diophante ; des lacunes sont comblées ; il y figure une nouvelle traduction en latin, un recueil de commentaires anciens, dont ceux dont nous avons parlé, et beaucoup de nouveaux commentaires. Il ne manquait plus qu'une bonne traduction en français de l'oeuvre de Diophante : c'est ce qu'apporta l'édition de Paul Ver Eecke (1926), qu'il présenta comme première traduction du grec en français.[2]

Cependant, toutes les traductions, éditions et commentaires dont nous avons parlé ne concernaient que six des treize livres annoncés par Diophante. Personne en Occident n'avait eu connaissance des autres livres; on savait que l'oeuvre de Diophante avait été connue dans le monde arabo-persan; mais, faute de documents, on a longtemps supposé que les livres disparus avaient été perdus avant que les Arabes en prennent connaissance. Or en 1972, Roshdi Rashed a retrouvé, dans une bibliothèque en Iran, un manuscrit en langue arabe qu'il a identifié comme la traduction d'un manuscrit de Diophante, qui pourrait être le texte "sur l'art de l'algèbre", signalé dans le *Fihrist*, que nous avons mentionné plus haut. Ce manuscrit arabe contient quatre des livres des *Arithmétiques*; Rashed a estimé qu'il s'agit des livres IV, V, VI, VII, faisant suite aux trois premiers connus en Occident, et que son traducteur était Qusta ibn Luqa, qui vivait vers le dixième siècle, et a traduit en arabe plusieurs oeuvres scientifiques importantes de l'antiquité grecque. Ces livres retrouvés ont été traduits par Roshdi Rashed d'arabe en français, puis édités.[3]

La "prose algébrique" de Diophante et sa traduction

Comment se présente le texte de Diophante, traduit en français ? (Pour simplifier, nous n'envisagerons ici que la traduction de Ver Eecke)

La question est un peu compliquée du fait que, dans le manuscrit grec, il y a quelques symboles, mais qui n'ont pas du tout la même fonction que les symboles modernes ; ils jouent le rôle d'abréviations et sont "dans le texte", que Ver Eecke appelle la "prose algébrique de Diophante". Il n'y a pas de formules ; par exemple, le signe "égal" n'existe pas. On ne fait pas les calculs sur les symboles, on les fait sur les nombres donnés, et aussi, comme nous le verrons, sur l'inconnue, qui est, dit Diophante, *"un nombre <...> qui possède en soi une quantité indéterminée d'unités"*. (Préambule du livre I, Ver Eecke, p. 2). Cette inconnue, Diophante l'appelle simplement le "nombre" (αριθμος) et lui donne pour abréviation le signe Ↄ (sigma renversé). Pour ne pas créer de confusion, Ver Eecke désigne l'inconnue par le néologisme "arithme". Voici quelques-uns des symboles-abréviations les plus utilisés par Diophante :

le symbole de la soustraction $\pitchfork$; (pour l'addition, on utilise une simple juxtaposition)

le symbole des unités $\overset{\circ}{M}$, celui de l'inconnue Ↄ ,

du carré de l'inconnue, Δ^{Y} , du cube de l'inconnue, K^{Y} ,

Ce choix de notions symbolisées montre l'importance accordée à ce que nous appellerions l'homogénéité. Les symboles des nombres de 1 à 9, des dizaines, etc... sont données par des lettres de l'alphabet grec[4].

A la différence de certains autres auteurs, Ver Eecke a pris le parti de faire une traduction littérale et de

---

[2] Paul Ver Eecke, *Diophante d'Alexandrie*, édition Desclée de Brouwer, Bruges, 1926.

[3] Roshdi Rashed, *Diophante, les Arithmétiques*, t. III et IV. Les Belles Lettres, 1984.

[4] Par exemple :
là où nous dirions 3x–6, Diophante dirait trois arithmes moins six unités et abrégerait Ↄ $\bar{\gamma} \pitchfork \overset{\circ}{M} \bar{\varsigma}$ $(\bar{\gamma} = 3, \bar{\varsigma} = 6)$

ne pas mettre d'abréviations dans son texte, (sauf pour les nombres qu'il écrit avec nos chiffres modernes). Et comme de toute façon, avec ou sans abréviations, cette traduction littérale n'est au premier abord guère lisible pour nous, Ver Eecke met en note une traduction du problème et de sa solution, en notation moderne, accompagnée d'explications, ce qui rend ensuite beaucoup plus facile la lecture de la traduction littérale.[5]

Les problèmes de Diophante

Le traité de Diophante se présente comme un recueil de problèmes (189 problèmes dans les six livres traduits par Ver Eecke). Ce sont en général des problèmes du premier, second ou troisième degré, souvent indéterminés ; Diophante s'arrange presque toujours pour abaisser le degré, en jouant avec l'indétermination.

Ce sont généralement des problèmes à plusieurs inconnues, de une jusqu'à six; mais Diophante n'utilise qu'un seul symbole pour l'inconnue, et exprime toutes les quantités cherchées en fonction d'une seule inconnue, ou donne des valeurs arbitraires à certaines d'entre elles, transformant en problème déterminé un problème au départ indéterminé.

Diophante ne demande et ne donne en général qu'une solution, même si le problème est indéterminé (sauf exception). Il donne quelquefois explicitement une condition d'existence, mais en général ne donne ni ne demande de justification d'existence ni d'unicité. Il n'accepte que des solutions positives et rationnelles. Il connaissait pourtant les nombres irrationnels (pour certains problèmes, de type arithmétique, cette exigence de solution rationnelle est justifiée, car le problème serait "trivial" si on admettait les solutions irrationnelles).

Par ailleurs, bien que ne voulant pas de solutions négatives, Diophante connaît ce que nous appelons la "règle des signes" : *"ce qui est de manque, multiplié par ce qui est de manque, donne ce qui est positif (υπαρξις, existence), tandis que ce qui est de manque, multiplié par ce qui est positif, donne ce qui est de manque"* (Préambule du livre I, Ver Eecke, p. 7).

L'énoncé du problème est toujours abstrait et général mais la résolution se fait en donnant des valeurs particulières aux nombres (les données) dont on parle de façon générale dans l'énoncé. (Cela s'est fait d'ailleurs encore longtemps par la suite).

Certaines solutions de problèmes font référence à des porismes qui auraient figuré dans des textes antérieurs. Ces porismes, (méthodes de résolution de divers types de problèmes, par exemple de certaines équations du second degré), n'ont jamais été retrouvés. Ils étaient probablement à l'origine incorporés dans des problèmes particuliers ; peut-être ont-ils été réunis à part, au cours d'un recopiage du manuscrit, et perdus par la suite.

La recherche des solutions entières ou rationnelles de systèmes algébriques indéterminés, objet de la plupart des problèmes de Diophante, est aujourd'hui d'actualité; elle fait partie de la théorie algébrique des nombres, et ces problèmes sont qualifiés de diophantiens. Et c'est par le détour de la géométrie algébrique que Andrew Wiles, en 1994, a démontré la fameuse conjecture de Fermat, laquelle, comme on sait, avait été écrite dans une marge des *Arithmétiques* de Diophante.[6]

[5] Voyez, en document 1, la page 21 de l'introduction, note 1.
[6] Cf. Catherine Goldstein, *Autour du théorème de Fermat*, in Mnémosyne n° 7, p. 35.

Les extraits choisis

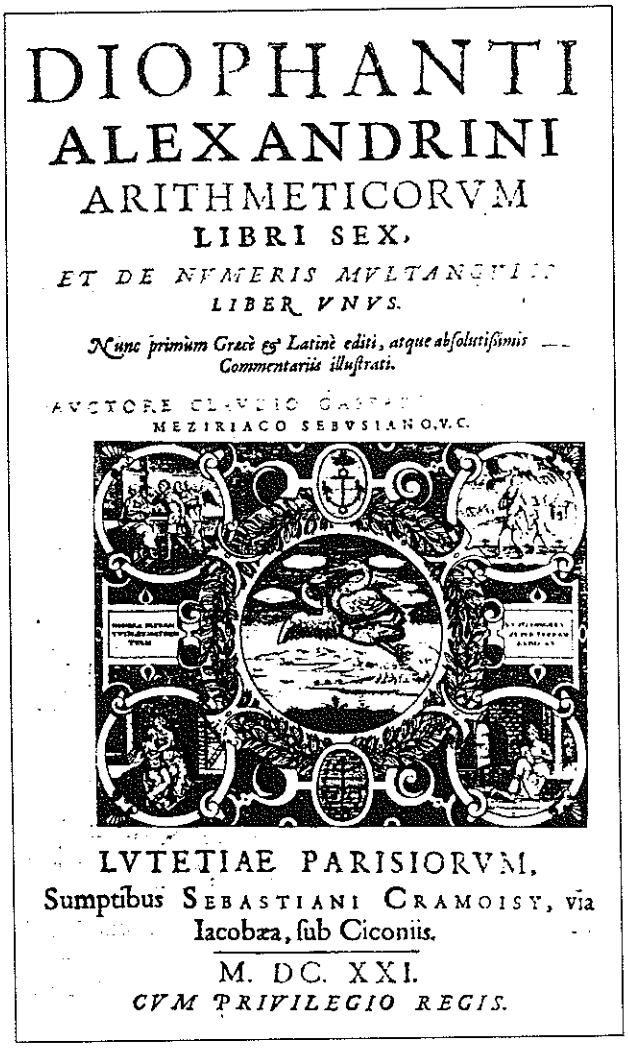
Nous présentons ci-dessous, d'abord, une page de l'introduction de Ver Eecke, comportant en note, un passage du texte grec de Diophante, sa traduction littérale et sa transcription moderne (Document 1) ;

ensuite, trois des 189 problèmes des *Arithmétiques*, pris aussi dans le livre de Ver Eecke, et donnant un aperçu sur les problèmes posés et les méthodes variées employées pour les résoudre :

- le problème VIII du livre II est celui que Fermat a rendu célèbre. On remarque, dans sa résolution, comment Diophante utilise l'indétermination pour se ramener à un calcul simple qui donne une solution rationnelle (Document 2) .

- le problème XI est traité de deux manières différentes, dont la première est celle de la "double équation", un des rares procédés auxquels Diophante donne lui-même un nom, et où il fait intervenir ce que nous appelons une "identité remarquable" ; la seconde manière utilise substitution et abaissement de degré (Document 3) .

- le problème XXIV du livre IV est du troisième degré; Diophante y a recours, comme il le fait fréquemment, à une «fausse position provisoire »[7], qui abaisse le degré, et dont l'examen lui permet de trouver ensuite une solution qui lui convient (Document 4).


DIOPHANTI
ALEXANDRINI
ARITHMETICORVM
LIBRI SEX,
ET DE NVMERIS MVLTANGVLIS
LIBER VNVS.
Nunc primùm Græcè & Latinè editi, atque absolutissimis Commentariis illustrati.
AVCTORE CLAVDIO GASPARE
MEZIRIACO SEBVSIANO, V.C.

LVTETIAE PARISIORVM,
Sumptibus SEBASTIANI CRAMOISY, via Iacobæa, sub Ciconiis.
M. DC. XXI.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

[7] Cf. Autour des méthodes de fausse position » in J. L. Chabert et alii, *Histoire d'algorithmes*, Belin, Paris 1994.

INTRODUCTION

Diophante a écrit son œuvre dans la forme classique du discours continu, comme les prédécesseurs anonymes qu'il a éclipsés, et auxquels il a sans doute emprunté certaines de ses propositions, lesquelles trahissent des époques assez différentes. C'est à peine si Diophante, usant de moyens qu'il prend soin de nous indiquer dans son préambule, abrège un peu son verbe dans sa langue grecque qui exprime déjà l'idée mathématique d'une manière très concise (1). Ces moyens sont d'ailleurs peu nombreux, et il serait exagéré d'y voir l'ébauche d'une véritable notation algébrique ; car ils se bornent à de simples abréviations de mots, au remplacement de quelques mots très fréquents par leurs lettres initiales ou terminales, et à l'emploi d'un sigle, qui ne paraît être qu'une contraction de deux lettres du mot signifiant « ce qui est de manque », pour indiquer la soustraction d'une expression ; tandis que les expressions à ajouter sont simplement juxtaposées (2).

C'est à peu près de la même manière que nous voyons régner une prose continue dans les œuvres des algébristes arabes et persans, lesquels ont très probablement puisé dans les ouvrages grecs, et

---

On pourra consulter au sujet de l'origine des notations algébriques :

LÉON RODET. *Sur les Notations numériques et algébriques antérieurement au XVIe siècle.* Paris, 1881.

PAUL TANNERY. *Notions Historiques.* (Voir éd. précitée des Mémoires scientifiques de Paul Tannery, vol. III, pp. 158-187.) Cette étude a été publiée d'abord dans l'ouvrage de JULES TANNERY : *Notions de Mathématiques.* Paris, 1903, pp. 322-348.

TROFKE. *Geschichte der Elementar-Mathematik.* Erster Band. Leipzig, 1902, pp. 310-332. Ibidem. Zweite, verbesserte und sehr vermehrte Auflage, dritter Band. Berlin und Leipzig, 1922, pp. 119-148.

1. Comme exemple de la prose algébrique de Diophante, nous donnons ici une phrase prise au hasard, dans le texte de la proposition 39 du Livre IV (Cf. éd. précitée du Diophante de Tannery, vol. I, p. 304, 11, 1-5), avec notre traduction française du corps de l'ouvrage et une transposition en notations algébriques actuelles : ὁ ἄρα ὑπὸ ςϛ̄ M̊ιβ̄ καὶ M̊ᾱ ἐλάσσων ἐστὶν τοῦ ὑπὸ δυάδος καὶ ΔΥᾱ ⋔ M̊γ̄, τουτέστιν ςϛ̄ M̊ιβ̄ ἐλάσσονές εισιν ΔΥβ̄ ⋔ M̊ϛ̄. καὶ κοιναὶ προσκείσθωσαν αἱ M̊ϛ̄. ςϛ̄ M̊ιη̄ ἐλάσσονες ΔΥβ̄. Donc, le produit de 6 arithmes (ou nombres inconnus) plus 12 unités et de 1 unité est plus petit que le produit de deux unités et de 1 carré d'arithme moins 3 unités, c'est-à-dire que 6 arithmes plus 12 unités sont plus petits que 2 carrés d'arithme moins 6 unités. Ajoutons de part et d'autre les 6 unités ; 6 arithmes plus 18 unités sont plus petits que 2 carrés d'arithme.

On aurait donc en notations actuelles :

$$(6x+12)\times 1<2\times(x^2-3), \text{ ou } 6x+12<2x^2-6, \text{ ou } 6x+18<2x^2.$$

2. Le texte grec de Diophante a fait l'objet de diverses études plus ou moins étendues au point de vue paléographique de la part de Nesselmann, de Hultsch et de Tannery, dans leurs ouvrages déjà cités. Ces études ont été excellemment résumées, critiquées et complétées par Heath. (*Diophantus of Alexandria, a study in the history of greek algebra.* Cambridge, 1910, pp. 32-53.)

VIII

Partager un carré proposé en deux carrés (3).

Proposons donc de partager 16 en deux carrés.

Posons que le premier nombre est 1 carré d'arithme. Dès lors, l'autre nombre sera 11 unités moins 1 carré d'arithme. Il faut donc que 16 unités moins 1 carré d'arithme soient égaux à un carré.

Formons le carré d'une quantité quelconque d'arithmes diminuée d'autant d'unités qu'en possède la racine de 16 unités. Que ce soit le carré de 2 arithmes moins 4 unités. Ce carré sera donc 4 carrés d'arithme plus 16 unités moins 16 arithmes. Égalons-le à 16 unités moins 1 carré d'arithme ; ajoutons de part et d'autre les termes négatifs, et retranchons les semblables des semblables. Il s'ensuit que 5 carrés d'arithme sont égaux à 16 arithmes, et l'arithme devient $\frac{16}{5}$. Dès lors, l'un des nombres sera $\frac{256}{25}$, et l'autre sera $\frac{144}{25}$. Or, ces deux nombres additionnés forment $\frac{400}{25}$, c'est-à-dire 16 unités, et chacun d'eux est un carré (1).

3. Problème de la forme : $X^2+Y^2=a^2$.

C'est ce problème de Diophante qui a donné lieu à une note célèbre que Fermat avait écrite en marge de son exemplaire de l'édition greco-latine de Diophante, donnée pour la première fois par Bachet de Meziriac, à Paris, en 1621. Cette note énonce de la manière suivante ce que l'on a appelé *le grand théorème de Fermat* : « Par contre, il est impossible de partager un cube en deux cubes, ou un bicarré en deux bicarrés, ou, plus généralement, une puissance quelconque, hormis celle du carré, en deux puissances ayant même exposant. J'ai découvert une démonstration vraiment merveilleuse de la chose ; mais la marge est trop petite pour la contenir ». (Voir cette note dans la réimpression de l'édition de Bachet, avec les notes de Fermat, donnée par Samuel, fils de Fermat, à Toulouse, en 1670. Voir aussi : *Œuvres de Fermat* par P. Tannery et Ch. Henry, vol. I, texte latin, pp. 289-342, Paris 1891, et vol. III, traduction française, pp. 241-274, Paris, 1896).

Le théorème de Fermat pose, en d'autres termes, que l'équation $x^m+y^m=z^m$ ne peut être résolue en nombres rationnels pour toute puissance exprimée par un nombre $m>2$. Comme la démonstration n'a jamais été retrouvée dans les papiers délaissés par Fermat, on incline à croire que malgré son génie, il n'a pu en surmonter les grandes difficultés. Une démonstration générale de ce théorème est encore toujours attendue, car Euler n'a réussi à en donner la démonstration que pour les exposants 3 et 4 ; Lejeune-Dirichlet pour l'exposant 5 ; tandis que la démonstration la plus récente de Kummer, laquelle fait usage de calculs transcendants, est encore en défaut pour certaines valeurs particulières de l'exposant qui ne se présentent cependant pas en dessous de 100.

1. La solution de Diophante considère l'équation : $X^2+Y^2=16$. Posons : $X^2=x^2$, d'où : $Y^2=16-x^2$. L'expression de Y^2 devant être un carré, identifions-la avec une expression de la forme : $(mx-\sqrt{16})^2$, dans laquelle on adopte, par exemple, la détermination rationnelle et positive $m=2$. Dès lors, $(2x-4)^2=16-x^2$, ou, comme le texte : $4x^2+16-16x=16-x^2$, ou : $5x^2=16x$, d'où : $x=\frac{16}{5}$. En conséquence : $X^2=\left(\frac{16}{5}\right)^2=\frac{256}{25}$, et $Y^2=\frac{144}{25}=\left(\frac{12}{5}\right)^2$; valeurs qui constituent une solution, car $\left(\frac{16}{5}\right)^2+\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{400}{25}=16$.

Le manuscrit de Madrid (Codex Matritensis 48) du XIII^e siècle porte en marge cette curieuse annotation qui a été relevée par Tannery, (Cf. loc. cit. Vol. II, p. 260) : Ἡ ψυχή σου, Διόφαντε, εἴη μετὰ τοῦ Σατανᾶ ἕνεκα τῆς δυσκολίας τῶν τε ἄλλων σου θεωρημάτων καὶ δὴ τοῦ παρόντος θεωρήματος, c'est-à-dire : « Que ton âme, Diophante, soit avec Satan, pour la difficulté de tes autres théorèmes, et surtout de ce théorème-ci ».

XI

Ajouter un même nombre à deux nombres donnés, de manière que chacun d'eux forme un carré (0)

Soient les nombres 2 et 3, et que le nombre à ajouter soit 1 arithme. Dès lors, 1 arithme plus 2 unités, et 1 arithme plus 3 unités devront être égaux à des carrés. Nous appelons une telle expression (1), une double équation (2), et nous la résolvons de la manière suivante. Considérant leur différence (3), cherchons deux nombres dont le produit constitue cette différence. Tels sont 4 unités et un $\frac{1}{4}$ d'unité. Égalons soit leur demi-différence, multipliée par elle-même, à la plus petite expression, soit leur demi-somme, multipliée par elle-même, à la plus grande expression. Or, leur demi-différence, multipliée par elle-même, est $\frac{225}{64}$; ce que nous égalons à 1 arithme plus 2 unités, et l'arithme devient $\frac{97}{64}$. D'autre part, la demi-somme des nombres, multipliée par elle-même, est $\frac{289}{64}$; ce que nous égalons à la plus grande expression, c'est-à-dire à 1 arithme plus 3 unités, et l'arithme devient de nouveau $\frac{97}{64}$. En conséquence, le nombre à ajouter sera $\frac{97}{64}$, et la proposition est manifeste (4).

0. Formules générales du problème : $X+a=\alpha^2$, et $X+b=\beta^2$, dans lesquelles α^2, β^2 sont des nombres rationnels, entiers ou fractionnaires.

1. εἶδος, forme, figure, c'est-a-dire ce que nous appelons une expression algébrique.

2. διπλοισότης, ou ailleurs : διπλῆ ἰσότης, ou, ailleurs encore : διπλῆ ἴσωσις : expressions identiques par lesquelles Diophante désigne deux fonctions de l'inconnue devenant simultanément des carrés. Les anciennes versions latines de Xylander et de Bachet rendent l'expression par « duplicata aequalitas ». La version latine récente de Tannery (cf. loc. cit. Vol. I, p. 97) dit : « dupla aequatio ». LAGRANGE *(Corollaires aux propositions algébriques d'Euler)*, et BRASSINE (*Précis des œuvres mathématiques de P. Fermat et de l'arithmétique de Diophante*. Toulouse, 1853), rendent l'expression par « double égalité ». Enfin HEATH (cf. loc. cit. p. 146) dit en anglais : « double-equation ». Nous traduisons donc par les mots « la double équation ».

3. C'est-à-dire la différence des deux expressions ou équations.

4. Pour résoudre le système de double équation : $X+a=\alpha^2$, et $X+b=\beta^2$, Diophante considère la différence $X+a-(X+b)=a-b=\alpha^2-\beta^2$ comme étant le produit de deux facteurs, m, n, choisis cependant de manière à obtenir des solutions rationnelles qu'il admet exclusivement, et il pose : $X+a-(X+b)=m.\,n$. Dès lors, s'appuyant sur l'identité : $\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-\left(\frac{m-n}{2}\right)^2=m.\,n$, il en identifie les termes mêmes avec les termes de l'équation précédente, et pose d'une part : $X+a=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2$, d'où : $X=\left(\frac{m+n}{2}\right)^2-a$, et, d'autre part : $X+b=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2$, d'où la valeur nécessairement identique $X=\left(\frac{m-n}{2}\right)^2-b$.

Si nous adoptons, comme dans la solution, les nombres $a=3$, et $b=2$, on a : $a-b=1=4\times\frac{1}{4}$, c'est-à-dire que nous adoptons les facteurs $m=4$ et $n=\frac{1}{4}$. Dès lors, les expressions qui précèdent deviennent, comme dans le texte, d'une part : $X+3=$

DOCUMENT 4 Extrait de *Diophante d'Alexandrie*, traduction Paul Ver Eecke, Desclée de Brouwer, Bruges, 1926.

XXIV

Partager un nombre donné en deux nombres, et faire en sorte que le produit de ces nombres soit un cube à moins de la racine de ce cube.

Que le nombre donné soit 6. Posons que le premier nombre est 1 arithme, et il s'ensuit que le second nombre restant sera 6 unités moins 1 arithme.

Il faut encore avoir que le produit de ces nombres soit un cube à moins de sa racine. Mais le produit des nombres sera 6 arithmes moins 1 carré d'arithme ; ce qui doit être égal à un cube à moins de sa racine. Formons le cube d'une quantité quelconque d'arithmes moins 1 unité, notamment le cube de 2 arithmes moins 1 unité. Le cube de cette expression, diminué de cette expression même, forme 8 cubes d'arithme plus 4 arithmes moins 12 carrés d'arithme ; ce que nous égalons à 6 arithmes moins 1 carré d'arithme. Or, si les quantités d'arithmes étaient égales de part et d'autre dans l'équation, il resterait des cubes d'arithme égaux à des carrés d'arithme, et l'arithme serait rationnel. Mais 4 arithmes proviennent d'un excédent sur 2 arithmes, notamment de l'excédent de trois fois 2 arithmes. D'autre part, si trois fois 2 arithmes sont diminués de 2 arithmes, ils forment deux fois 2 arithmes, tandis que 6 a été pris arbitrairement par hypothèse. Dès lors, nous sommes amenés à trouver, comme pour 2, qui est la quantité d'arithmes, un nombre qui, pris deux fois, forme 6. Or, ce nombre est 3. En conséquence, cherchons à égaler 6 arithmes moins 1 carré d'arithme à un cube à moins de sa racine. Posons maintenant que la racine du cube est 3 arithmes moins 1 unité ; le cube de cette racine, diminué de cette racine même, forme 27 cubes d'arithme plus 6 arithmes moins 27 carrés d'arithme ; ce que nous égalons à 6 arithmes moins 1 carré d'arithme, et l'arithme devient $\frac{26}{27}$.

Revenant aux choses posées, le premier nombre sera $\frac{26}{27}$, et le second sera $\frac{136}{27}$.